ÜBER DIE STEINERSCHE FLÄCHE

VON

K. TH. VAHLEN
in BERLIN.

Die merkwürdige Haupteigenschaft der Steinerschen Fläche: von jeder Tangentialebene in zwei Kegelschnitten geschnitten zu werden, ist durch eine ganz elementare Determinantenbetrachtung zu beweisen.

Die homogenen Coordinaten x_0, x_1, x_2, x_3 der Punkte einer Steinerschen Fläche mögen durch drei homogene Parameter p_0, p_1, p_2 so dargestellt werden:

$$x_0 = \sum_{i,k} a^0_{ik} p_i p_k,$$

$$x_1 = \sum_{i,k} a'_{ik} p_i p_k,$$

$$x_2 = \sum_{i,k} a''_{ik} p_i p_k,$$

$$x_3 = \sum_{i,k} a'''_{ik} p_i p_k. \qquad \begin{pmatrix} i, k = 0, 1, 2 \\ a^0_{ik} = a^0_{ki} \text{ etc.} \end{pmatrix}$$

Die Gleichung der Tangentialebene im Punkte (y_0, y_1, y_2, y_3) oder (q_0, q_1, q_2) ist:

$$\begin{vmatrix} x_0 & \frac{\partial y_0}{\partial q_0} & \frac{\partial y_0}{\partial q_1} & \frac{\partial y_0}{\partial q_2} \\ x_1 & \frac{\partial y_1}{\partial q_0} & \frac{\partial y_1}{\partial q_1} & \frac{\partial y_1}{\partial q_2} \\ x_2 & \frac{\partial y_2}{\partial q_0} & \frac{\partial y_2}{\partial q_1} & \frac{\partial y_2}{\partial q_2} \\ x_3 & \frac{\partial y_3}{\partial q_0} & \frac{\partial y_3}{\partial q_1} & \frac{\partial y_3}{\partial q_2} \end{vmatrix} = 0,$$

also die Beziehung zwischen den Parametern p_0, p_1, p_2 ihrer Schnittcurve:

$$\left| \sum_{i,k} a_{ik} p_i p_k \quad \sum_h a_{h0} q_h \quad \sum_h a_{h1} q_h \quad \sum_h a_{h2} q_h \right| = 0, \quad \left({}^{h,i,k=0,1,2}_{a=a^0,a',a'',a'''}\right)$$

d. h.

$$\sum_{i,k} p_i p_k \left| a_{ik} \quad \sum_h a_{h0} q_h \quad \sum a_{h1} q_h \quad \sum a_{h2} q_h \right| = 0.$$

Es ist nachzuweisen, dass diese ternäre quadratische Form in zwei Linearfaktoren zerfällt, dass also die Determinante:

$$\begin{vmatrix} A_{00} & A_{10} & A_{20} \\ A_{01} & A_{11} & A_{21} \\ A_{02} & A_{12} & A_{22} \end{vmatrix} = 0$$

der Grössen $A_{ik} = \left| a_{ik} \ \sum_h a_{h0} q_h \ \sum_h a_{h1} q_h \ \sum_h a_{h2} q_h \right|$ verschwindet. In der That bringt man die erste Kolonne zum Verschwinden, wenn man die mit $\frac{q_1}{q_0}$ und $\frac{q_2}{q_0}$ multiplicirte zweite und dritte Kolonne zur ersten addirt; denn es ist:

$$A_{0k} q_0 + A_{1k} q_1 + A_{2k} q_2 = \left| \sum_h a_{hk} q_h \quad \sum_h a_{h0} q_h \quad \sum_h a_{h1} q_h \quad \sum_h a_{h2} q_h \right| = 0$$

für $k = 0, 1, 2$.

Die analoge Betrachtung im Gebiete von n Dimensionen ergiebt, auch für $n = 2$, nur das triviale Resultat, dass das Schnittgebilde singulär ist.