NEUE THEORIE DER EINDEUTIGEN PERIODISCHEN TRANSFORMATIONEN IN DER EBENE

VON

S. KANTOR

Die Methode, nach welcher ich die Theorie der periodischen Transformationen in Angriff genommen habe,[1] um das Typentheorem aufzustellen und diese Typen zu construiren, bestand darin, vorher ein rein arithmetisches Problem zu lösen, welches sich in die Untersuchungen der Herren HERMITE und FROBENIUS über quadratische Formen einreiht, und auf die erhaltenen Resultate die geometrische Construction anzuwenden.

Es eröffnet sich aber noch ein anderer Weg, um die Theorie aufzustellen. Der Übergang vom arithmetischen zum geometrischen Theile bestand in der Herbeiziehung einer gewissen Art von Curven, welche unter ihren Punkten eindeutige Correspondenzen gestatten. Diese Identität eben des geometrischen Theiles der älteren Theorie mit diesem letzteren Probleme führt zu einer ganz verschiedenen Art, die Theorie der *existirenden* periodischen Transformationen zu begründen. Während ich in meiner Preisschrift a posteriori die cubischen und hyperelliptischen Curven allein anwandte, nehme ich jetzt allgemeinere Curven der vorher genannten Eigenschaft zum Ausgangspunkte. Ich verlasse das binäre Gebiet der Curve, um mich mittelst ihrer in der Ebene zu orientiren und reciprok studire ich die Correspondenz in der Curve, indem ich ihr eine Verwandlung der Ebene zuordne.

---

[1] In der Preisschrift: *Premiers fondements pour une théorie des transformations périodiques univoques,* Nâples 1891. Cf. auch den im Journale für reine u. ang. Math. Bd. 114, p. 50 erschienenen Auszug.

Der unschätzbare Vortheil der neuen Theorie besteht darin, dass sie nicht die Kenntniss der Fundamentalsysteme nöthig hat; man kann sogar umgekehrt alle arithmetischen Eigenschaften der Fundamentalsysteme daraus herleiten. Andererseits wird die gegenwärtige Theorie die von mir als *illusorisch* bezeichneten Characteristiken nicht liefern und um so bemerkenswerther ist die Controle der existirenden Typen, welche durch die einfachen Methoden dieser Arbeit geliefert wird, während die ältere Theorie mühsam und Irrthümern unterworfen war. Die Entdeckung der Typen ist gegenwärtig auf drei berühmte Probleme zurückgeführt, an welchen die moderne Algebra emporgewachsen ist und ihre Tragweite erproben konnte:

1. Die Berechnung der 27 Geraden einer cubischen Fläche, welche hier aber particulär ist,

2. Die Berechnung der 28 Doppeltangenten einer Curve 4. Ordnung, welche ebenfalls particulär ist,

3. Die Berechnung gewisser dreifach berührender Kegelschnitte einer bereits von Herrn Nöther bemerkten Curve 6. Ordnung $p = 4$.

Ich habe jedoch diese Kalküle durch die Vergleichung mit meiner Preisschrift ersetzt, umsomehr, da dieselben Kalküle in der Theorie der Gruppen birationaler Transformationen wiederholt werden müssen.

I. THEIL.

Untersuchungen über die invarianten Curven in einer birationalen Transformation.

§ 1. *Allgemeines.*

1. Obzwar ich keinen directen Gebrauch davon mache, schicke ich einige Theoreme über die eindeutigen Correspondenzen in den algebraischen Curven i. A. voraus. Die Untersuchungen von Riemann über die eindeutige Transformation einer algebraischen Function enthalten implicite ein Theorem, welches ausgesprochen werden möge:

Lemma. Wenn zwei Curven F_1, F_2 eine eindeutige analytische Beziehung gestatten, sodass die Riemann'schen Flächen ohne Zerreissung und unter Gleichheit sämmtlicher Moduln conform auf einander abbildbar sind, kann man immer eine eindeutige Substitution finden, welche die Curve F_1 in die Curve F_2 transformirt, oder geometrisch:

I. Theorem. *Wenn irgendwie zwischen zwei Curven eine gegenseitig eindeutige Correspondenz entsteht, ist diese Correspondenz immer in einer eindeutigen Transformation*

$$y_1 : y_2 : y_3 = \Phi_1(x) : \Phi_2(x) : \Phi_3(x) \tag{1}$$

enthalten, und indem man sich des eigentlich als Riemannisch zu bezeichnenden Theoremes bedient,

II. Theorem. *Wenn man eine Curve C eindeutig in C' mittelst*

$$y_1 : y_2 : y_3 = \Phi_1(x) : \Phi_2(x) : \Phi_3(x)$$

transformirt, so ist die eindeutige Correspondenz zwischen C und C' auch in einer eindeutigen Transformation

$$x_1 : x_2 : x_3 = \Psi_1(y) : \Psi_2(y) : \Psi_3(y) \tag{2}$$

enthalten, erhält man sofort

III. Theorem. *Eine eindeutige Correspondenz, welche geometrisch unter zwei Curven C und C' resultirt, ist immer in einer in den x und gleichzeitig in einer in den y rationalen Transformation enthalten.* [1]

IV. Theorem. *Wenn für dieselbe Correspondenz zwei Transformationen* (1) *existiren, existirt eine Unendlichkeit.*

Beweis. Aus

$$y_1 : y_2 : y_3 = \Psi_1(\overset{m}{x}) : \Psi_2(\overset{m}{x}) : \Psi_3(\overset{m}{x}),$$

$$y_1 : y_2 : y_3 = \Phi_1(\overset{m+\nu}{x}) : \Phi_2(\overset{m+\nu}{x}) : \Phi_3(\overset{m+\nu}{x})$$

folgt sofort

$$y_1 : y_2 : y_3 = \{\Psi_1(\overset{m}{x}) . X(\overset{\nu}{x}) + \Phi_1(\overset{m+\nu}{x})\} : \{\Psi_2(\overset{m}{x}) . X(\overset{\nu}{x}) + \Phi_2(\overset{m+\nu}{x})\} : \{\Psi_3(\overset{m}{x}) . X(\overset{\nu}{x}) + \Phi_3(\overset{m+\nu}{x})\}$$

wo X eine willkürliche Function sein kann.

[1] Das I., II. und III. Theorem gelten genau so nicht nur für zwei M_{r-1} im R_r, sondern auch für zwei algebraische M_i im R_r, welche sich analytisch eindeutig entsprechen.

2. Jede Transformation (1) ändert die Schnitte von C mit den φ_{n-3} in die Schnitte von C' mit den φ' dieser, aber da eine adjungirte φ_{n-3} eindeutig durch die Schnitte mit C bestimmt ist, findet man so, dass die Transformation eine lineare Transformation H unter den φ_{n-3} und $\varphi'_{n'-3}$ (als Individuen betrachtet) hervorbringt, während sie die φ_{n-3} selbst in ein anderes System als die $\varphi'_{n'-3}$ verwandelt.[1]

Sobald es möglich ist, den Singularitätencomplex der φ zu einem unicursalen Netze zu ergänzen (also *im* Systeme der φ eine solches Netz zu construiren) wird man unmittelbar eine Transformation (1) von C in C' haben. Denn das Netz und das ihm entsprechende (nicht unicursale) von φ' bestimmen eine wahre Punkttransformation der Ebene, welche auch die Punkte von C in die entsprechenden Punkte von C' verwandelt. Aber diese Ergänzung ist i. A. unmöglich, z. B. wenn der Singularitätencomplex eine Dimension $u < 0$ hat.

Ein beliebiges Netz von Curven φ_{n-3} und das entsprechende Netz von $\varphi'_{n'-3}$ bestimmt eine Punkttransformation

$$\Phi_1(y) : \Phi_2(y) : \Phi_3(y) = \Psi_1(x) : \Psi_2(x) : \Psi_3(x) \tag{3}$$

welche die Correspondenz zwischen C und C' enthält und man hat

V. Theorem. *Wenn zwei Transformationen* (3) *für dieselbe Correspondenz existiren, existirt eine Unendlichkeit.*

Beweis. Man schreibt ihre Formeln wie folgt:

$$\Phi_i(y)\varphi(y) + \Phi'_i(y)\varphi'(y) = \Psi_i(x)\phi(x) + \Psi'_i(x)\phi'(x)$$

wo φ, ϕ zwei willkürliche Functionen sind.

---

[1] Herr PAINLEVÉ begeht in seiner Abhandlung: *Mémoire sur les équations différentielles du premier ordre,* Ann. de l'Ecole Normale, 1891—92, einen Irrthum, wenn er sagt, dass die einfach rationale Transformation die adjungirten φ_{n-3} von C in die adjungirten $\varphi'_{n'-3}$ von C' überführe. Sie führt die φ_{n-3} in ganz gleichgiltige Curven über, nur der Schnitt der φ_{n-3} mit C wird in den Schnitt der $\varphi'_{n'-3}$ mit C' übergeführt. Aus dieser Verwechslung stammt seine falsche Formel $\mu = \frac{p'-1}{p-1}$. Die Transformation z. B. $x'_i = x_i^2$ führt eine C_4 $p = 3$ in eine C_8 $p' = 21$ über und es ist $\mu = 4$. Dass für $p = 1$ μ willkürliche Werthe annehmen kann, ist gewiss; aber es ist durchaus nicht bewiesen, dass eine 1-u-deutige Correspondenz in einer elliptischen oder auch nur in einer cubischen Curve stets auch in einer 1-μ-deutigen Transformation der Ebene enthalten wäre.

3. Wenn die Correspondenz auf C allein ist, coincidiren die linearen ∞^{p-1} Systeme der φ_{n-3} und $\varphi'_{n'-3}$ und die Homographie H stellt i. A. die Correspondenz dar.

VI. Theorem. *Wenn die Homographie H mit einer Punkttransformation* (1) *der Ebene identisch ist, ist diese Transformation nothwendig birational.*

Beweis. Die vorausgesetzte Transformation reproducirt das lineare System ∞^{p-1} der φ_{n-3}. Ein willkürliches Büschel dieses Systemes ist in ein anderes verwandelt, sodass die variabeln Basispunkte in die variabeln Basispunkte übergehen und (1) verwandelt also überall in der Ebene eine Zahl m von Punkten in dieselbe Zahl m, was erfordert, dass (1) auch von Seite der $\varphi'_{n'-3}$ eindeutig sei. Es bleibt der Fall $p = 2$. Wenn die φ_{n-3} selbst $p' = 0$ oder 1 haben, transformirt man C in eine Curve C_n mit a^{n-2} oder in eine Curve C_6 mit 8 Doppelpunkten und die Transformation wird später wirklich construirt werden. Wenn die φ_{n-3} $p' > 1$ haben, wendet man das im § 2 zu entwickelnde Verfahren an.

4. Es ist nothwendig, den Fall zu erwähnen, wo alle Curven φ zerlegt sind.

VII. Theorem. *Wenn alle Curven φ sich zerlegen, so kann dies nur auf zwei Arten geschehen:*

1. *Alle Curven φ zerlegen sich in eine feste Curve der Ordnung μ und in ein ∞^{p-1} System der Ordnung $n - 3 - \mu$.*

2. *Alle Curven φ zerlegen sich in λ variable Bestandtheile einer selben Ordnung μ, welche ein lineares System von ν Dimensionen bilden, wo $\lambda\mu = n - 3$ und $\lambda\nu = p - 1$.*

Beweis. Die Zerlegung der φ ist immer eine Consequenz der Singularitäten von C_n. Wenn also in Folge dieser Singularitäten eine beliebige der φ_{n-3} sich zerlegt, zerlegt sich jede in derselben Weise, etwa in φ_μ und $\varphi_{\mu'}$, wo alle φ_μ dieselben Singularitäten haben und ebenso alle $\varphi_{\mu'}$. Wenn φ_μ die Dimension 0 bekommt, bildet sie einen Bestandtheil aller φ und die $\varphi_{\mu'}$ sind ∞^{p-1}. Wenn φ_μ nicht durch seine Singularitäten bestimmt ist und es also wenigstens ein Büschel gibt, sind durch $p - 1$ willkürliche Punkte 2^{p-1} Curven $\varphi_\mu + \varphi_{\mu'}$ bestimmt, sobald die φ_μ von den $\varphi_{\mu'}$ differiren, was dem widerspricht, dass die φ ein lineares System bilden sollen.

VIII. Theorem. *Die Zahl* ν *des Theoremes VII kann nicht* > 1 *sein.*

Beweis. Man kann auf

$$\binom{p-1}{\nu}\binom{p-1-\nu}{\nu}\cdots\binom{2\nu}{\nu} : 1 \ldots \lambda$$

Arten $p-1$ Punkte in λ Gruppen zu ν theilen und dies ist die Zahl der Curven φ_{n-3}, welche durch die $p-1$ Punkte bestimmt sind, während doch durch die $p-1$ Punkte nur eine φ_{n-3} gehen soll.

IX. Theorem. *Im zweiten Falle von VII müssen die* φ_μ *rational sein, wenn* $p > 2$.

Beweis. Der 2. Fall der Zerlegung kann nur eintreten, wenn die Zahl p' für die Basis der $\varphi < 0$ ist. Mittelst einiger Hilfssätze, welche in der nächsten Nummer folgen, beweist man nun, dass die Basispunkte vollständig unabhängig sein und die ganze Basis des Büschels einschliessen müssen. Dann muss dieselbe Eigenschaft auch in Bezug auf die einzelnen Bestandtheile gelten, was für diese nur statt haben kann, wenn sie rational sind.

X. Theorem. *Im 2. Falle von VII ist für* $p > 2$ *die Curve C hyperelliptisch.*

Beweis. Das Büschel von rationalen Curven, welches die Matrix der adjungirten φ_{n-3} ist, kann birational in ein Büschel von Geraden übertragen werden und hiermit nothwendig die Grundcurve in eine Curve C_n mit $(n-2)$-fachem Punkte, also hyperelliptisch. Für $p=2$ sehe man XII.

Man kennt das umgekehrte Theorem, dass für jede hyperelliptische Curve $p > 2$, $u > 0$ die adjungirten φ_{n-3} sich in mehrere Curven eines Büschels theilen, woraus sofort folgt:

XI. Theorem. *Jede hyperelliptische Curve mit* $p > 2$, $u > 0$ *kann birational in eine Curve der Ordnung n mit einem* $(n-2)$*-fachen Punkte transformirt werden.*

Eine Consequenz dieses Theoremes, dass lineare Systeme hyperelliptischer Curven $p > 2$ birational äquivalent sind mit Systemen $C_n a^{n-2}$ beweist auch die von allen g_1^2 eines Büschels gebildete Transformation.

XII. Theorem. *Jedes* ∞^i *System, wo* $i > 2$, *von Curven mit* $p = 2$, *ist birational äquivalent einem Systeme von* C_6 *mit* 8 *Doppelpunkten oder einem Systeme von* C_4 *mit einem Doppelpunkte.*

Zum Beweise bedient man sich VII, § 2, n° 1 und XXIII.

5. Die bei IX erwähnten Hilfstheoreme sind:

XIII. Theorem. *Ein lineares System von Curven, dessen Basis eine Specialgruppe der Ebene bildet, kann niemals das vollständige System adjungirter* φ_{n-3} *einer irreductiblen algebraischen Curve sein, ausgenommen den Fall, wo eine Fundamentalcurve existirt.*

Ich habe dieses Theorem nachträglich in meinen Vorlesungsheften nach Prof. Christoffel (Sommer 1879) gefunden, wo es bewiesen ist durch die genaue Identität unter der Zahl der unabhängigen Integrale erster Art und der Zahl p, welche numerisch aus den Singularitäten abgeleitet ist.

XIV. Theorem. *Wenn das System* φ_{n-3} *einer irreductibeln Curve eine Fundamentalcurve besitzt, so kann diese nicht* $p' > 1$ *haben.*

Man beweist das Theorem zuerst für Fundamentalcurven mit gleichen Vielfachheiten, indem man daraus herleitet, dass $p < 0$ und man schliesst daraus a fortiori auf die Curven mit willkürlichen Singularitäten.

XV. Theorem. *Das vollständige System der adjungirten* φ_{n-3} *einer algebraischen Curve mit* $p > 2$ *kann keine von den übrigen abhängigen gemeinsamen Punkte haben, welche nicht gleichzeitig vielfache Punkte der Grundcurve sind.*

Beweis. Entweder würde man Curven C_n von verschiedenen p construiren können, welche dasselbe vollständige System φ_{n-3} haben, oder die Gesammtheit der Basispunkte müsste auch für die C_{n+3} eine nothwendige sein, und ebenso für C_{n+6}, ... Man beweist aber durch numerische Relationen, dass dies nicht stattfinden könne, ohne dass C_{n+3} sich zerlegte.

XVI. Theorem. *Es existirt keine irreductible Curve, deren allgemeine* φ_{n-3} *sich zerlegt, ohne dass* $p' < 0$.

Beweis. In diesem Falle muss die Zahl der Schnittpunkte von φ_{n-3} mit einem der Bestandtheile excessif sein; dies gilt dann umsomehr für C_n, welche also dieselbe Curve als Bestandtheil enthalten müsste. [1]

§ 2. *Die Äquivalenztheoreme.*

1. Ich werde also jetzt eine Curve C_n mit $p > 1$ voraussetzen, welche durch eine birationale Transformation reproducirt sei. In der Collineation H unter den φ_{n-3} existiren p invariante Functionen, wenn nicht eine Unendlichkeit, wobei der Fall eintreten kann, dass alle p Curven sich in eine einzige vereinigen und auch der, dass keine φ invariabel sei, welche $p > 1$ hätte.

Meine Methode besteht nun darin, dass ich auf die invariante Curve φ des Systemes denselben Schluss wie den über C_n gemachten anwende und es nur als ein scheinbares Hindernis betrachte, wenn in Folge einer particulären Eigenschaft der C_n die feste Curve φ nicht $p > 2$ haben sollte. Denn die wahre Wichtigkeit ist den allen Curven φ gemeinsamen Singularitäten zuzuschreiben und statt also mich einer einzigen Curve φ zu bedienen, und daran die Bildung adjungirter φ' zu knüpfen, sage ich, weil das System φ' dasselbe ist für jede allgemeine unter den φ, dass die φ' das zweite adjungirte System der C_n bilden. Es versteht sich von

---

[1] Ich mache bei dieser Gelegenheit auf das folgende Theorem aufmerksam, welches von ganz besonderer Wichtigkeit scheint und von dem sich nirgends eine Spur findet:

Wenn p das Geschlecht, u die Dimension, σ die Anzahl der Punkte eines Singularitätencomplexes sind, so ist der Rang K des adjungirten Systemes φ

$$3p - u - \sigma + 6.$$

Beweis. Es ist

$$6p = 3(n-1)(n-2) - 3\sum_1^\sigma (\alpha - 1)\alpha,$$

$$2u = n(n-3) \qquad - \sum_1^\sigma (\alpha + 1)\alpha$$

und

$$K = (n-3)^2 - \Sigma(\alpha - 1)^2 = (n-3)^2 - \Sigma\alpha^2 + 2\Sigma\alpha - \sigma$$

woraus die Formel folgt.

selbst, dass wenn das System der Curven φ nach der ersten Art des VII. Theoremes zerlegt ist, die Curven φ' nur für das Restsystem φ' zu bilden sind und was den festen Bestandtheil betrifft, ist es ganz gleichgiltig, in was sich derselbe verwandelt, ob in sich selbst oder, indem er als Fundamentalcurve erscheint, in einen Fundamentalpunkt. Dieser Übergang zu den adjungirten Curven der adjungirten ist ein auch in anderen Untersuchungen sehr nützlicher Process und ich habe ihn in meiner ersten in den Comptes rendus der Academie de Paris, 9. Februar 1885, das Princip der Verminderung der Functionen φ genannt.

Aber diese Reihe von Curven φ bietet manchmal Schwierigkeiten, welche ihren Verfolg und die Anwendung auf unseren Zweck, die Reduction der Transformationen und der Curven, complicirt macht. Ich gehe daher so vor.

XVII. Theorem. *Eine birationale Transformation, welche eine algebraische Curve C_n in sich selbst verwandelt, verwandelt auch jedes System der Reihe der successiven adjungirten Curven in sich selbst.*

Oder allgemeiner: Wenn eine birationale Transformation eine Curve C in eine Curve C' verwandelt, verwandelt sie die Reihe der successiven adjungirten Curven in die zu C' gehörenden Reihe oder

XVIII. Theorem. *Gegen birationale Transformation der Ebene sind nicht nur die von den adjungirten Curven φ_{n-3} ausgeschnittene sondern auch die von den successiven adjungirten Curvensystemen ausgeschnittenen Reihen invariant.*

2. Man hat bisher nicht bemerkt, dass man die Reihe der Systeme auch nach der anderen Richtung vervollständigen, also die Reihe der successiven Curven construiren muss, welche ein gegebenes System als n^{tes} adjungirtes System haben. Unter Anwendung einiger Vorsicht kann man aussprechen:

XIX. Theorem. *Alle inversen adjungirten Systeme einer Curve C_n sind invariant für birationale Transformation der Ebene und ebenso die durch diese Systeme auf der Curve C_n ausgeschnittenen Reihen.*

Es ist nothwendig, hier auf eine Classe algebraischer Curven aufmerksam zu machen, in deren adjungirter Reihe ein System hyperelliptischer Curven $p > 2$ vorkommt. Man kann sie *Jonquièressche Curven* nennen.

3. Ich verfolge also die Reihe der successiven φ bis zur Ordnung 3 oder 2 oder 1, falls nicht zuvor ein hyperelliptisches System auftritt und mit Benutzung meiner Bemerkung über den Fall 1° des VII. Theoremes. Dieser Verfolg kann jedoch unterbrochen werden, und wird bei einer nicht typischen Transformation stets unterbrochen werden müssen, auf folgende Weise.

1) Es sei an einer gewissen Stelle $p = 2$, $p' = 0$, also ein Büschel rationaler Curven φ eingetreten. Die birationale Transformation, welche es in ein Geradenbüschel verwandelt, zeigt, dass C eine Jonquièressche Curve ist und aber es gilt:

XX. Theorem. *Eine birationale Transformation, welche eine Jonquièressche Curve in sich selbst verwandelt, ist äquivalent einer Transformation von Jonquières mit zwei coincidirenden* $(n - 1)$*-fachen Punkten.*

2) Wenn an einer Stelle sich findet $p = 3$, $p' = 0$, also ein Netz rationaler φ, so verwandle ich dasselbe in ein Geradennetz und hiermit die Transformation in eine *Collineation.*

3) Wenn $p > 0$ und $p' = 0$, reproducirt die Transformation ein ∞^{p-1} System von Curven φ linear und daher wenigstens ein $\infty^{p-2}, \ldots, \infty^2$ System. Das ∞^2 System, welches immer existirt, ist birational äquivalent einem Geradennetze und die Transformation also übertragbar in eine Collineation.

4) Wenn an einer Stelle $p = 2$, $p' = 1$, so reproducirt die Transformation ein Büschel elliptischer Curven und ist äquivalent einer Transformation, welche ein Büschel von Curven C_{3s} mit 9 s-fachen Punkten in sich transformirt,[1] sodass alle Grundcurven ebenfalls elliptisch wären.

[1] Der Beweis dieses Theoremes möge hier angedeutet werden. Die bekannte Formel von Nöther

$$-\delta[\delta + 2(r_1 + r_2 + r_3) - 3r_3] - 2(r_1 r_2 - r_3^2) - K(r_3 - 1) \geqq 0$$

wo $n = r_1 + r_2 + r_3 + \delta$ und K der Rang des Systemes, gibt für $K = 0$, indem man $r_1 r_2 = r_3^2$ und $r_1 = r_2 = r_3$ voraussetzt, zwei Fälle $n = 3r_1$ oder $n < 3r_1$. Mittelst XXV beweist man für $n = 3r_1$, dass das einzige mögliche Büschel jenes ist, wo alle Scheitel gleich vielfach sind und für $n < 3r_1$, dass Reductibilität eintritt. $n > 3r_1$ ist unmöglich wegen XXXI.

Der einzige Fall, welcher erlaubt, für die adjungirten Curven einen der Basispunkte zu vernachlässigen, ist $s = 1$, die Grundcurve eine C_6 mit 8 Doppelpunkten.

XXI. Theorem. *Die Curven $p = 2$ mit $p' = 1$ sind birational den Curven $C_6 a_1^2 \ldots a_8^2$.*

5) Wenn $p = 3$, $p' = 1$, erhält man ein Netz elliptischer Curven und man wird das Theorem anwenden,[1] dass ein solches Netz äquivalent einem Netze von C_3 mit 7 festen Punkten ist. Die Transformation ist also birational äquivalent einer anderen, welche ein Netz von C_3 durch 7 Punkte reproducirt, da hier nur vollständige Systeme auftreten.

6) Wenn $p > 3$, $p' = 1$, hat man den Fall von n° 3 und wieder eine Transformation, welche die C_3 durch 7 Punkte reproducirt.

7) Wenn $p' > 1$, würde man auf dieses lineare System die Äquivalenztheoreme anwenden können, was jedoch die Discussion einer grossen Anzahl Fälle erfordert. Ich gehe daher vorwärts in der Reihe der φ. Wenn $p'' = 0$, $p' = 2$, ist wieder der Fall 1) vorhanden.

8) $p'' = 0$, $p' = 3$ gibt eine Collineation und $p'' = 0$, $p' > 3$ erledigt sich wie 3) oder 6).

9) $p'' = 1$, $p' = 2$ und $p' = 1$, $p' = 3$ oder $p'' = 1$, $p' > 3$ erledigen sich wie 4), 5), 6).

Man sieht, wie man vorgehen muss für $p'' > 1$, $p''' > 1$, u. s. w. Man wird sicherlich zu einem $p^{(i)} = 1$ oder $p^{(i)} = 0$ gelangen, eventuell nach Verwendung von VII. Wenn nicht, wird man fortfahren, bis die Ordnung der φ auf 3 oder 2 oder 1 reducirt ist. Alsdann wird man entweder haben

1) eine Transformation, welche ein ∞^i System ($i \geqq 2$) von C_3 reproducirt;

2) eine Transformation, welche ein Netz und also auch ein Büschel von Kegelschnitten reproducirt und äquivalent ist einer Transformation von Jonquières;

3) eine Transformation, welche ein Netz von Geraden reproducirt, also eine Collineation ist.

[1] Das Theorem rührt von Bertini her und ist neuerdings von Martinetti bewiesen worden.

Für 1) ist das folgende Theorem entscheidend:

XXII. Theorem. *Eine birationale Transformation, welche ein System von C_3 mit $5, 6, 7, 9$ gemeinsamen Punkten in sich verwandelt, hat alle ihre Fundamentalpunkte unter diesen Basispunkten.*

Beweis. Man hat $3n - \sum_1^q \alpha_j = 3$, wo $q < \sigma$, die Zahl aller Fundamentalpunkte, aber auch $3(n-1) = \sum_1^\sigma \alpha_j$, was $q = \sigma$ erfordert.

4. Bevor ich die Consequenzen hieraus ziehe, will ich von einer Formel sprechen, welche ich in der citirten Note erwähnt habe.[1] Es sei $n, y_1 \ldots y_\sigma$ ein Singularitätencomplex mit den Zahlen p, n. Wenn p', n' die Zahlen des 1. und p'', n'' jene des 2. adjungirten Complexes sind, ist

$$2p = (n-1)(n-2) - \sum_1^\sigma y(y-1),$$

$$2p' = (n-4)(n-5) - \sum_1^\sigma (y-1)(y-2),$$

$$2p'' = (n-7)(n-8) - \sum_1^\sigma (y-2)(y-3)$$

und nach Subtraction

$$p' - p + 3(n-3) = \Sigma(y-1),$$

$$p'' - p' + 3(n-6) = \Sigma(y-2)$$

und durch neue Subtraction

$$2p' - p - p'' = \sigma - 9. \tag{1}$$

[1] Cf. auch die citirte Preisschrift IV. Theil § 4, p. 303. In n° 28 seiner *Ricerche etc.,* welche er 1891 publicirt hat, schreibt G. Castelnuovo eine zweitheilige Formel, welche mit geänderten Bezeichnungen dieselbe ist wie 2) im Texte, welche ich bereits 1885 in den Comptes rendus erwähnt hatte. Ich constatire, dass der eben citirte § 4 im Monate März 1889 in Neapel gedruckt wurde (dass ich die Ricerche im April 1892 erhalten habe) und dass die Formel von Castelnuovo viel weniger sagt, weil sie eine *Ungleichheit* ist, während ich eine Gleichung gebe; dass er niemals die Zahl σ einführt, welche den Angelpunkt meiner Theorie bildet, und dass selbst so seine Formel ungenau ist, indem das eine Glied seiner Disjunction zu eng ist, und dass er wie natürlich zur Formel (3) nicht gelangt ist.

XXIII. Theorem. *Zwischen drei successiven Zahlen p, p', p'' existirt die Relation*

$$2p' - p - p'' = \sigma - 9. \tag{2}$$

XXIV. Theorem. *Zwischen vier successiven Zahlen p, p', p'', p''' existirt die Relation*

$$3(p' - p'') = p - p'''. \tag{3}$$

[Wenn man will, kann man aus (2) eine neue Methode für die Frage der maximalen Dimension bei gegebenem p herleiten, denn damit für gegebenes p' das p ein Maximum sei, muss $\sigma + p''$ ein Minimum sein, woraus äusserst leicht die bekannten Resultate folgen.]

Damit die Zahlen p gleich seien, muss $\sigma = 9$ sein.

XXV. Theorem. *Unter den Singularitätencomplexen mit denselben Zahlen p und σ hat jener die kleinste Zahl n, für welchen die Werthe y am nächsten einander gleich sind.*

Beweis. Ich verweise auf STURM: *Über die Curven auf Flächen 3. Ordnung,* Math. Ann, Bd. 21, p. 457, wo die anzuwendenden Formeln sich bereit finden.

XXVI. Theorem. *Man kann nur auf 4 Arten auf 9 Punkte einen Singularitätencomplex derart vertheilen, dass er $p = n$ habe.*

Beweis. Für die Curven $n = 3\nu$ hat man einen Complex $\nu, \ldots \nu$, welcher gibt $p = u = 1$, also gibt jeder andere $u > p$. Für die Curven $u = 3\nu + 1$ gibt der Complex $y_1 = y_2 = \nu + 1$, $y_3 = \ldots = y_9$, $p = u = \nu$. Für die Curven $u = 3\nu + 2$ hat man einen Singularitätencomplex $y_1 = \ldots = y_5 = \nu + 1$, $y_6 = y_7 = y_8 = y_9 = \nu$, welcher gibt $p = u = \nu$, oder $y_1 = \nu + 2$, $y_2 = y_3 = \nu + 1$, $y_5 = \ldots = y_9 = \nu$, also $p = u = 2\nu$.

XXVII. Theorem. *Die Reihe der Complexe $p = p' = \ldots = 1$ ist nicht constructibel. Die einzige constructible Curve $C_{3\kappa}$ mit 9 ν-fachen Punkten besitzt eine adjungirte C_3 $(\nu - 1)$-fach gezählt durch die 9 Punkte.*

Beweis. Mit Hilfe der elliptischen Parameter für die 9 Basispunkte genommen auf der C_3, welche sie bestimmen.

5. Ich führe noch die folgenden nützlichen Theoreme an:

XXVIII. Theorem. *Es existirt kein Büschel von $p = 1$ mit weniger als 9 Punkten.*

XXIX. Theorem. *Es existirt keine Curve mit $p = 2$, $u \leqq 2$ mit weniger als 10 Punkten.*

Diese Theoreme können fortgesetzt werden und eröffnen eine ganz neue Kategorie von Problemen.

XXX. Theorem. *Es existirt keine Curve, welche $p = 1$, $p' = 1$, $p'' \gtrless 1$ haben würde, obzwar die Formel* (2) *hierüber nicht entscheidet.*

Diese Theoreme beseitigen einige leicht zu bildende Einwürfe, welche man gegen das Vorwärtsgehen in der Reihe der successiven Curven φ erheben kann. Aus dem bei XXI citirten Theoreme schliesse ich:

XXXI. Theorem. *Es gibt kein Büschel elliptischer Curven, wo nicht ein vielfacher Punkt $\geqq \frac{n}{3}$ existiren würde.*

Ich glaube sogar, dass man obere Grenzen der Ordnung angeben kann, über welche hinaus Büschel mit weniger als 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 vielfachen Punkten $\geqq \frac{n}{3}$ nicht existiren.

Ebenso kann man mit Hilfe des Theoremes XXV aus den Formeln

$$p = \frac{s^2 - s + 2}{2},$$

$$u = \frac{s^2 + s}{2}, \qquad k = 9s^2 - 8s^2 = s^2$$

für die Curven $C_{3s}9a^s$ schliessen:

XXXII. Theorem. *Es existirt kein ∞^x System $x \geqq \frac{s^2+s}{2}$ mit $p = \frac{s^2-s+2}{2}$ ohne einen Basispunkt $\geqq \frac{n}{3}$.*

Im 2. Theile wird das folgende Theorem verwendet werden.

XXXIII. Theorem. *Für die algebraischen Curven mit* 5, 6, 7, 8 *s-fachen*

Punkten existirt kein anderes lineares Curvensystem, welches auf C_{3s} dieselbe Reihe ausschnitte wie die Curven $C_{3(s-1)}$ (oder $C_{3\mu}$).

Es wird durch die Berechnung der Ordnung der Reihen bewiesen und hieraus geschlossen

XXXIV. Theorem. *Alle einfach rationalen Transformationen, welche ein System von C_{3s} mit 5, 6, 7, 8 s-fachen Punkten reproduciren, wo s jeden ganzen Werth > 0 annehmen kann, sind nothwendig birational.*

6. Ich gehe nun daran, das Gesammtresultat auszusprechen.

XXXV. Theorem. *Wenn eine birationale Transformation eine unendliche Anzahl von Doppelpunkten oder von Cyclen eines selben Indexes i besitzt und dieselben wenigstens eine irreductible Curve $p > 1$ erfüllen, kann man die Transformation birational in eine Transformation einer der folgenden Arten übertragen:*

1. *Eine Transformation, welche nicht mehr als 4, 5, 6, 7, 8 Punkte in der Charakteristik hat,*
2. *Eine Transformation von Jonquières, welche zwei coincidirende $(n-1)$-fache Punkte besitzt,*
3. *Eine Collineation.*

Indem man sich der Resultate der cit. Abh. bedient, überzeugt man sich, dass die einzigen Transformationen der n° 1, welche eine Curve von Doppelpunkten mit $p > 1$ besitzen, die zwei involutorischen Typen θ_2 und Σ_2 und der von mir entdeckte Typus des Indexes 3 und der Ordnung 13 sind, dass es keine aperiodische Transformation mit ∞^1 Cyclen eines selben Indexes in einer Curve mit $p > 1$, ausgenommen die l. c. IV. Theil, § 7 n. 7 entdeckte Classe von Jonquières'chen Transformationen, gibt und dass die einzigen Typen, wo $p > 2$, jener involutorische, Σ_2 ist. Also:

XXXVI. Theorem. *Wenn eine Transformation eine Unendlichkeit von Doppelpunkten oder eine Unendlichkeit von Cyclen besitzt, welche eine irreductible Curve von $p > 1$ erfüllen, so ist sie periodisch bis auf einen einzigen Fall von Jonquières'schen Transformationen mit coincidenten $(n-1)$-fachen Punkten.*

XXXVII. Theorem. *Die einzigen birationalen Transformationen, welche* ∞^1 *Doppelpunkte in einer Curve von* $p > 1$ *enthalten, sind* θ_2 *und* Σ_2, *der Typus* N_3 *und eine Classe von Jonquières'schen Transformationen. In diesem letzteren Falle ist die Curve hyperelliptisch. Für* Σ_2 *hat die Curve* $p = 4$ *und eine Particularisirung.* [1]

XXXVIII. Theorem. *Es gibt keine birationale Transformation mit* ∞^1 *Doppelpunkten oder* ∞^1 *Cyclen selben Indexes* i, *welche eine nicht hyperelliptische Curve von* $p > 4$ *erfüllen.* [2]

XXXIX. Theorem. *Es gibt keine birationale Transformation, welche eine nicht hyperelliptische Curve von* $p > 4$ *in sich transformirt, ohne selbst periodisch zu sein.*

XL. Theorem. *Keine birationale Transformation kann eine aperiodische eindeutige Correspondenz in einer Curve* $p > 1$ *hervorbringen.* [3]

Die vorhergehenden Sätze beziehen sich auf die invarianten Curven. Ich habe in meiner Preisschrift bewiesen und einige Constructionen des § 4 werden es ergänzen, dass jede periodische birationale Transformation wenigstens eine irreductible Curve $p > 2$ reproducirt. So gelangt man zum folgenden

---

[1] Ein Theil dieser Frage, der sich auf die Doppelpunkte allein bezieht, ist der Gegenstand einer Note von G. Castelnuovo (Acc. Lincei, Roma 7. Februar 1892), gegen welche ich 1892 einen offenen Brief gerichtet habe. Indem ich das Wesen dieses Briefes hier bei Seite lasse, bemerke ich nur, dass Castelnuovo die Unrichtigkeit seines Theoremes unter Benutzung meiner Preisschrift hätte bemerken können und will von den 3 mir zu Gebote stehenden directen Beweisen für die Unmöglichkeit eines periodischen Typus Indexes 4 mit Doppelpunktscurve $p > 2$ die folgenden geben. Eine Transformation T der behaupteten Art vorausgesetzt, würde man für T^2 eine Involution haben, deren Doppelpunktscurve sich in zwei Theile spalten müsste, deren einer Ort der Doppelpunkte für T, der andere Ort der involutorischen Paare für T sein würde. Eine solche Involution ist stets im Grade reducirbar, sodass nicht $p > 2$ sein könnte. Übrigens da ∞^1 invariante C_h vorhanden sein sollen, jede mit $u' - iu \equiv \gamma$, so müsste die Doppelpunktscurve diese C_h in je zwei Punkten schneiden, also sicherlich hyperelliptisch sein.

[2] Oder: ausgenommen $i = 1, 2, 3$ ist der Index in der Curve immer derselbe wie der Index der birationalen Transformation.

[3] Dieses Theorem folgt aus dem vorigen unter Hinzunahme einer Discussion der Curven, welche für aperiodische Collineationen invariant sein können. Das Theorem ist ein Theil des Theoremes von Schwarz (Crelle's Journal, Vol. 87), das in der Functionentheorie eine so besondere Stelle einnimmt.

XLI. Theorem. *Jede existirende periodische birationale Transformation kann birational in eine Transformation der folgenden drei Typen übertragen werden:*

1° *eine periodische Collineation,*

2° *eine Transformation von Jonquières mit coincidenten* $(n - 1)$*-fachen Punkten* (ab),

3° *eine Transformation mit weniger als* 9 *Punkten* (*cf. Theorem XXI*) *welche also eine* $C_6 8a^2$ *reproducirt.*

XLII. Theorem. *Die geometrischen Relationen unter den Punkten, welche als Cyclen des Indexes* i *in einer periodischen birationalen Transformation der Ebene auftreten können, sind im Wesen dieselben als die, welche bestehen unter den* i *Punkten eines collinearen Cyclus oder eines Cyclus in einer Jonquières'schen Transformation mit* (ab), *ausgenommen gewisse Ketten von* 5, 6, 8, 9, 10, 12, 14, 15, 18, 20, 24, 30 *Punkten.*

Mit Hilfe der Netze birationaler Transformationen gelangt man zum Resultate, dass jede birationale Transformation als Bestandtheil eines Büschels betrachtet werden kann; deren Cyclen erfüllen eine Curve, für welche $p > 1$ erhalten werden kann, also:

XLIII. Theorem. *Die Cyclen in den Correspondenzen auf einer Curve* $p > 1$ *sind nicht wesentlich verschieden von den Cyclen, welche in den aperiodischen Transformationen in discreter Anzahl vorhanden sind.*

XLIV. Theorem. *Jede birationale Transformation, welche ein lineares* ∞^i *System von Curven mit* $p > 1$ *reproducirt,* $i \geqq 1$, *ist periodisch, ausgenommen die Collineationen.*

XLV. Theorem. *Eine periodische Jonquières'sche Transformation* (ab) *besitzt niemals ein invariantes* ∞^i *System von Curven* $p = 1$, $i > 1$.

XLVI. Theorem. *Wenn eine nicht hyperelliptische Curve von* $p > 4$ *eine eindeutige Correspondenz gestattet und sie in eindeutige Relation mit einer der Curven des Theoremes XXXI gesetzt werden kann, so enthält sie eine Reihe eines der folgenden Typen:*

$$G^1_{\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{2} \pm 4(p-1)^2}}, \quad G^2_{\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + (p-1)^2}}, \quad G^3_{\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{4}{9}(p-1)^2}}$$

welche für die Correspondenz invariant ist.

Diese drei Zahlen sind geliefert durch die Berechnung der Dimensionen eines Systemes von C_3, mit 6, 7, 8 s-fachen Punkten.

Um die Theorie der existirenden periodischen Transformationen zu vollenden, bleibt übrig, die periodischen Jonquières'schen Transformationen zu entdecken und jene mit invarianten linearen Systemen von C_3, ohne sich der Fundamentalpunkte und ihrer Eigenschaften zu bedienen. Dies soll der Gegenstand des 2. Theiles dieser Arbeit sein.

§ 3. *Construction invarianter Curven für eine periodische birationale Transformation.*

1. Für die existirenden Transformationen kann man invariante Curven auf dieselbe Art wie l. c. für die Characteristiken herleiten. Jede Gerade bestimmt mit allen ihren Transformirten eine zerlegte invariante Curve. Alle diese Curven bestimmen ein invariantes lineares System.

2. Nimmt man für ein invariantes System die Jacobi'schen Curven aller Netze desselben, so setzen diese Netze wieder ein anallagmatisches lineares System zusammen.

3. Man construirt eine involutorische Transformation, welche permutabel ist mit der gegebenen Transformation und man sucht für diese ein anallagmatisches lineares System z. B. jenes, welches Bertini erhält durch Verminderung einer Vielfachheit einer Fundamentalcurve um eine Einheit. Dieses System wird auch für die gegebene Transformation invariant sein. Die Construction ist aber nicht immer möglich, z. B. nicht für B_9.

4. Für zwei zusammengehörige Fundamentalsysteme ist der Ort U der Punkte, in welchen eine Gerade der Ebene Σ eine Berührung 3. O. mit irgend einer Curve des homaloïdalen Systemes von Σ hat, durch die Transformation in dieselbe Curve U', gebildet für das Feld Σ', übergeführt. Wenn die beiden Fundamentalsysteme wesentlich übereinstimmen, so haben die zwei Curven U, U' dieselben Singularitätencomplexe. Lässt man überdies die Gruppen gleicher Vielfachheit (Constructibilität vorausgesetzt) coïncidiren, so ist U eine invariante Curve.

5. Die absoluten Invarianten einer Curve für lineare Transformation sind auch absolute Invarianten für birationale Transformation, wenn diese die Curve in eine andere mit gleichen Singularitäten verwandelt. Also ist die Einhüllende der Curven mit constanter absoluter Invariante in einem invarianten linearen Systeme invariant.

6. Wenn man die Geraden sucht, welche eine beliebige der Curven des homaloïdalen Netzes in einer Gruppe von n Punkten schneiden, unter welchen 6 existiren, welche auf der Geraden und auf der Curve zwei projective Gruppen bilden, so ist der Ort dieser Sextupel invariant, falls das homaloïdale Netz für beide Felder im Wesen übereinstimmt. Speciell der Ort der Tangentialpunkte der Undulationspunkte ist eine invariante Curve. Statt Projectivität kann man auch eine symmetrische Relation unter den absoluten Invarianten der zwei Gruppen verlangen.[1]

7. Eine covariante Curve $L_{s_1 \ldots s_\mu}$ von μ Curvensystemen $s_1 \ldots s_\mu$ in Σ ist durch T in die covariante Curve $L'_{s'_1 \ldots s'_\mu}$ der μ transformirten Systeme übergeführt. Haben aber $s_1 \ldots s_\mu$ und $s'_1 \ldots s'_\mu$ dieselben Singularitätencomplexe, so gilt dasselbe für L, L'. Für Coincidenz von Σ, Σ' sind demnach μ unter einander transformirte Singularitätencomplexe zu finden (u. zw., wenn transitiv, von gleichen Dimensionen).[2] Es scheint, dass für eine willkürliche Transformation solche Systeme nicht existiren; für eine periodische liefert jede Curve der Ebene eine solche Gruppe. Indem man aus μ solchen Systemen durch eine für alle Systeme symmetrische Eigenschaft eine covariante Curve herleitet, wird man eine invariante Curve erhalten. Ein specieller Fall ist dann der, wo alle μ Systeme selbst einzeln invariant sind.

7. **XLVII. Theorem.** *Für jede Transformation des Indexes* 3 *ist der Ort der Punkte, welche mit ihren zwei Transformirten alineirt sind, eine invariante Mannigfaltigkeit.*

---

[1] Für zwei nicht symmetrische Fundamentalsysteme erhält man auf diese Art sicherlich Systeme derselben Ordnung, welche einander entsprechen.

[2] Da die Singularitäten von L ganze Functionen der Singularitäten von $s_1 \ldots s_\mu$ sind, befindet man sich dem Umstande gegenüber, dass die genannten arithmetischen Functionen durch eine lineare Substitution in sich selbst übertragen sind.

Für jede Transformation T des Indexes 4 ist der Ort der Punkte, welche mit den drei Transformirten in einem Kegelschnitte durch ein involutorisches Paar oder durch zwei Doppelpunkte von T sind, invariant.

XLVIII. Theorem. *Der Ort der Punkte in einer periodischen Transformation des Indexes i (im R_r), welche mit den $i-1$ Transformirten einer algebraischen (oder transcendenten) Bedingung genügen, welche für die i Punkte sowie alle sonst eintretenden Punkte symmetrisch ist, ist invariant.*

Z. B. der Ort der Punkte, die mit ihren Transformirten ein i-Eck von gegebenem Volumen bilden.

8. Für die Transformationen mit 8 Punkten in der Charakteristik erhält man invariante Curven durch die ∞^1 Büschel $C_3, 9a^s$, von welchen 8 Scheitel die 8 gegebenen Punkte sind. Die 9. Punkte erfüllen eine Curve, welche auf jeder C_3 des Büschels Punkte mit den Parametern $\Sigma a + \frac{C}{s}$ hat, von welchen einige auszuschliessen sind. Für die rationalen Curven fällt eine Anzahl dieser Punkte mit dem Doppelpunkte zusammen. Die Ortscurve zerlegt sich in Bestandtheile gemäss den s^{ten} primitiven Einheitswurzeln.

9. **XLIX. Theorem.** *Für eine Transformation der Ebene (oder des R_r) besteht unter den Punkten p und den Geraden $p^{(h)}p^{(k)}$ (oder den R_i durch $p^{\lambda_1}\ldots p^{\lambda_{i+1}}$) eine einfach rationale Transformation.*

L. Theorem. *Für die periodischen Transformationen, welche eine interne I_8 besitzen, ist die Transformation unter p und der Geraden $p^\nu p^{\nu+\frac{i}{2}}$ 1-2-deutig.*

Beweis. Durch einen Punkt p der Ebene sind der Cyclus und die Gerade $p^\nu p^{\nu+\frac{i}{2}}$ bestimmt; die Gerade aber bestimmt, da I_8 von der 1. Classe ist, ein einziges Paar, also zwei Punkte p, je nachdem man den einen oder anderen Punkt des Paares als p^ν nimmt. Ebenso beweist man:

LI. Theorem. *Für die periodischen Transformationen der Ebene, welche eine interne Involution I_8 haben, ist die Transformation unter den zwei Ge-*

raden $p^\nu p^{\nu+\frac{i}{2}}$ *und* $p^\mu p^{\mu+\frac{i}{2}}$, *wo* μ *und* ν *zwei ganze Zahlen* $< i$ *sind, birational und periodisch vom Index* $\frac{\theta}{\mu-\nu}$, *wo* θ *das kleinste Vielfache von* i *und* $\mu-\nu$.

Ferner: Für die periodischen Transformationen, welche eine interne Involution I_{17} haben, ist die Transformation unter den Geraden $p^\nu p^{\nu+\frac{i}{2}}$ und $p^\mu p^{\mu+\frac{i}{2}}$ 4-4-deutig, *aber periodisch.*

Die so entstehenden mehrdeutigen periodischen Transformationen verdienen Beachtung. Man erhält andere, indem man die Geraden (pp^λ) und $(p^\mu p^\nu)$ eines selben Cyclus in Verwandtschaft setzt. Hier können sie dazu dienen, um invariante Curven zu bestimmen, da die in den Tangenten einer invarianten Enveloppe enthaltenen Punktepaare eine invariante Curve liefern.

§ 4. *Die parametrische Darstellung der Curven und die periodischen Transformationen.*

I.

1. Damit eine Charakteristik in einer C_3^3 enthalten sei, bestehen folgende Bedingungen. Die Projectivität in C_3^3 mit der Spitze als Doppelpunkt ist $Bu' + Cu + D = 0$ oder $u' = -(C:D)u - (D:B)$. Drei alineirte Punkte u_1, u_2, u_3 sind übergeführt in $-\frac{C}{B}u_i - \frac{D}{B}$, welche zu den Parametern b eines der Fundamentalsysteme addirt geben

$$-3\frac{D}{B} + \beta_1 b_1 + \ldots + \beta_\sigma b_\sigma = 0,$$

wo β_i die Vielfachheiten der Punkte b. Für einen Fundamentalpunkt erhält man durch Einführung des entsprechenden Punktes in die Fundamentalcurve

$$-\frac{D}{B} + \left(\beta_{11} - \frac{C}{B}\right)b_1 + \beta_{12}b_2 + \ldots + \beta_{1\sigma}b_\sigma = 0,$$

oder unter Voraussetzung der Coïncidenz $(a_{i_1} b_1)$

$$-\frac{D}{B} + \left(\beta_{11} - \frac{C}{B}\right) b_1 + \beta_{12} b_2 + \dots + \beta_{1\sigma} b_\sigma = 0,$$

was $\sigma + 1$ Gleichungen gibt, deren Determinante

$$D = \begin{vmatrix} -3 & \beta_1 & \beta_2 \dots & \beta_\sigma \\ -1 & \beta_{11} - \frac{C}{B} & \beta_{12} \dots & \beta_{1\sigma} \\ . & . & . \dots & . \\ -1 & \beta_{\sigma 1} & \beta_{\sigma 2} \dots & \beta_{\sigma\sigma} - \frac{C}{B} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} -3n & \beta_1 & \beta_2 \dots & \beta_\sigma \\ -3\beta_{i_1} + \frac{C}{B} & \beta_{11} - \frac{C}{B} & \beta_{12} \dots & \beta_{1\sigma} \\ . & . & . \dots & . \\ -3\beta_{i_\sigma} + \frac{C}{B} & \beta_{\sigma 1} & \beta_{\sigma 2} \dots & \beta_{\sigma\sigma} - \frac{C}{B} \end{vmatrix},$$

$$D = -3 \begin{vmatrix} n + \frac{C}{B} & \beta_1 & \beta_2 \dots & \beta_\sigma \\ \beta_{i_1} & \beta_{11} - \frac{C}{B} & \beta_{12} \dots & \beta_{\sigma 1} \\ . & . & . \dots & . \\ \beta_{i_\sigma} & \beta_{\sigma 1} & \beta_{\sigma 2} \dots & \beta_{\sigma\sigma} - \frac{C}{B} \end{vmatrix}$$

$$+ \frac{C}{B} \begin{vmatrix} 3 & \beta_1 & \beta_2 \dots & \beta_\sigma \\ 1 & \beta_{11} - \frac{C}{B} & \beta_{12} \dots & \beta_{1\sigma} \\ . & . & . \dots & . \\ 1 & \beta_{\sigma 1} & \beta_{\sigma 2} \dots & \beta_{\sigma\sigma} - \frac{C}{B} \end{vmatrix}$$

endlich, weil die zweite Determinante $-D$ ist, und mit $x' = -x = -\frac{C}{B}$,

$$D = -\frac{3\Delta_x}{x+1} = \frac{3\Delta_{x'}}{x'-1}.$$

LII. Theorem. *Die Determinante, welche über die Existenz einer Charakteristik auf C_3^3 entscheidet, ist bis auf einen Factor $x-1$ proportional der Determinante für die fundamentale Substitution der Characteristik.*

Da der Werth von $-\frac{C}{B}$ das Doppelverhältniss der Projectivität auf C_3^3 ist, so erhält man:

LIII. Theorem. *Wenn eine Characteristik in einer C_3^3 construirt werden kann, so ist der Periodicitätsindex in C_3^3 derselbe wie der Index der ebenen Transformation.*

2. Derselbe Calcül gibt für C_3 $p = 1$ unter Ersetzung aller Gleichungen durch Congruenzen modulo der 2 Perioden von C_3 für die Determinante dieser Congruenzen

$$D \equiv \frac{3\Delta_{-k}}{1-k} \pmod{K, iK'},$$

wo die Correspondenz in C_3 ist $u' + ku \equiv \gamma$ und gesetzt ist

$$\Delta_{-k} = \begin{vmatrix} n-k & \beta_1 & \dots & \beta_\sigma \\ \beta_{i_1} & \beta_{11}+k & \dots & \beta_{1\sigma} \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ \beta_{i_\sigma} & \beta_{\sigma 1} & \dots & \beta_{\sigma\sigma}+k \end{vmatrix}.$$

Die Vergleichung mit den Resultaten l. c. lehrt, dass diese Determinante für die periodischen Typen und für $k = \sqrt{-1}$ oder $\pm\frac{1}{2}(-1 \pm \sqrt{-3})$ stets einen ganzzahligen Werth hat. Wenn die Determinante verschwindet, so sind die Congruenzen für jeden Werth von γ verträglich und mit dem Werthe von γ rechnet man die Werthe der Parameter der Punkte der Characteristik.

3. Die früheren Resultate sind dahin zusammenzufassen, dass jeder Typus eine C_3^3 reproducirt, ausgenommen nur Γ_6^1, H_6 und H_6^1.

LIV. Theorem. *Für jede construirbare periodische Transformation existirt eine Varietät mit einer eigentlichen analtagmatischen C_3.*

Beweis. Wenn der Typus eine C_3 reproducirt, kann man die Fundamentalpunkte der Transposition, welche auf die vorgelegte Characteristik führt, so wählen, dass alle Fundamentalpunkte in einer selben der invarianten C_3 sind. Also wird die äquivalente Transformation die transponirte C_3 reproduciren.

Regel. Um zu untersuchen, ob eine periodische Characteristik einem constructibeln Typus äquivalent sei oder nicht, hat man die Constructibilität in einer der Curven C_3^3, C_e, C_h, C_k mittelst der obigen Congruenzen zu untersuchen.[1]

II.

Die vorstehende Rechnung ist ein besonderer Fall einer anderen, welche sich auf invariante Curven des Geschlechtes p bezieht.

Die Correspondenz auf C_n verwandelt die p Integrale 1. Gattung unter einander mittelst der Formeln

$$\begin{aligned} I_1' &= \eta_{11} I_1 + \eta_{12} I_2 + \dots + \eta_{1p} I_p, \\ I_2' &= \eta_{21} I_1 + \eta_{22} I_2 + \dots + \eta_{2p} I_p, \\ &\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdots \quad \cdot \\ I_p' &= \eta_{p1} I_1 + \eta_{p2} I_2 + \dots + \eta_{pp} I_p \end{aligned}$$

und eine Summe $\lambda_1 I_i^{(1)} + \dots + \lambda_\sigma I_i^{(\sigma)}$ verwandelt sich in

$$\alpha_{i1} \Sigma_\sigma \lambda_\nu I_1^{(\nu)} + \alpha_{i2} \Sigma_\sigma \lambda_\nu I_2^{(\nu)} + \dots .$$

Es sei nach dem Abel'schen Theoreme die Summe der Integrale über n alineirte Punkte

$$I_i^{(1)} + \dots + I_i^{(n)} \equiv K_i. \qquad (i=1\dots p)$$

[1] Ich bezeichne mit C_e, C_h, C_k eine äquianharmonische, harmonische oder willkürliche C_3.

Die Entdeckung der birationalen Transformationen, welche diese Correspondenz enthalten, theilt sich in zwei Theile:

1°. Sei

$$(1)\qquad \begin{array}{cccc} m & a_1 & \ldots & a_\sigma, \\ -a_1 & a_{11} & \ldots & a_{1\sigma}, \\ . & . & \ldots & . \\ -a_\sigma & a_{\sigma 1} & \ldots & a_{\sigma\sigma} \end{array}$$

die Matrix der birationalen Transformation, welche den gegebenen Singularitätencomplex der Curve reproducirt. Wenn die Berechnung dieser Matrix ohne Erfolg ist, kann die Transformation nicht existiren.

2°. Seien

$$(2)\qquad A_1^{(i)}, A_2^{(i)}, \ldots, A_p^{(i)} \qquad {\scriptstyle (i=1,\ldots,\sigma)}$$

die Integralsummen in den σ Punkten der Characteristik. Ferner seien $I_i^{(1)} \ldots I_i^{(n)}$ $(i = 1 \ldots p)$ die Werthe der Integrale in n alineirten Punkten und K_i ihre Summe. Ferner seien $[I_i]^1, \ldots, [I_i]^n$ $(i = 1 \ldots p)$ die Integrale in den Schnittpunkten mit der transformirenden Curve. Die Congruenz

$$(3)\qquad [I_i]^1 + \ldots + [I_i]^n \equiv \alpha_{i1} K_1 + \ldots + \alpha_{ip} K_p$$

liefert

$$(4)\qquad \begin{array}{c} a_1 A_1^{(1)} + \ldots + a_\sigma A_1^{(\sigma)} + \alpha_{11} K_1 + \ldots + \alpha_{1p} K_p \equiv m K_1, \\ \ldots \\ a_1 A_p^{(1)} + \ldots + a_\sigma A_p^{(\sigma)} + \alpha_{p1} K_1 + \ldots + \alpha_{pp} K_p \equiv m K_p. \end{array}$$

Betrachten wir das Integral I_1. Für eine Gerade durch den Punkt b_1 gilt die Congruenz

$$I_1^{(1)} + I_1^{(2)} + \ldots + I_1^{(n-b_1)} + B_1^1 \equiv K_1,$$

wo $B_1^{(1)}$ die Integralsumme der sämmtlichen Nachbarpunkte von b_1 ist.

Seien $H_1^{(1)}, H_1^{(2)}, \ldots$ die Integrale der Punkte des ersten Feldes, welche durch die Correspondenz in die Punkte $1, 2, \ldots n - b_1$ übertragen sind. Dann wird gelten

$$H_1^{(1)} + \ldots + H_1^{(n-b_1)} + (a_1 - a_{11}) A_1^{(1)} + (a_2 - a_{12}) A_1^{(2)} + \ldots \equiv b_1 K_1$$

und weil

$$H_1^{(\lambda)} \equiv \alpha'_{11} I_1^{(1)} + \ldots + \alpha'_{1p} I_p^{(1)},$$

wo α'_{ik} der Minor von α_{ik} in der Determinante der α_{ik}, so wird

$$H_1^{(1)} + \ldots + H_1^{(n-b_1)} \equiv \alpha'_{11}(K_1 - B_1^{(1)}) + \ldots + \alpha'_{1p}(K_p - B_p^{(1)})$$

und

$$\alpha'_{11}(K_1 - B_1^{(1)}) + \ldots + \alpha'_{1p}(K_p - B_p^{(1)}) + (a_1 - a_{11})A_1^{(1)} + \ldots \equiv (m - b_1)K_1$$

und durch Substitution von (4)

$$b_1 K_1 - \sum_1^p \alpha'_{1i} B_i^{(1)} - a_{11} A_1^{(1)} - \ldots - a_{1\sigma} A_1^{(\sigma)} \equiv 0.$$

Wegen der Coincidenzen der Characteristik wird man haben

$$B_i^{(1)} = A_i^{(\lambda_1)}, \qquad b_1 = a_{\lambda_1}.$$

Die p Congruenzen werden

$$(5) \qquad a_{\lambda_1} K_\rho - \sum_1^p {}_i\, \alpha'_{1i} A_i^{(\lambda_1)} - a_{11} A_\rho^{(1)} - \ldots - a_{1\sigma} A_\rho^{(\sigma)} \equiv 0 \qquad {\scriptstyle (\rho=1,\ldots,p)}$$

oder

$$(6) \qquad a_{\lambda_i} K_\rho - \mathfrak{A}_\rho^\lambda - a_{i1} A_\rho^{(1)} - \ldots - a_{i\sigma} A_\rho^{(\sigma)} \equiv 0. \qquad \binom{\rho=1,\ldots,p}{i=1,\ldots,\sigma}$$

Die Zahlen a sind bekannt als Resultat des arithmetischen Problemes und man hat so $p\sigma$ Congruenzen unter den $p\sigma$ Grössen A, welche man auflösen muss.

Die Congruenzen (6) werden zur Bestimmung der Coefficienten der Curve dienen können. Dies ist die Form des Problemes, wenn man die anallagmatischen Curven in einer gegebenen periodischen Transformation sucht, z. B. die Curven C_{3s} mit 6, 7, 8 s-fachen Punkten.

In allen Fällen, wo es möglich ist, die α_{ik} auf die canonische Matrix $\alpha_{11}, \ldots, \alpha_{kk}$ zurückzuführen, vereinfacht sich die Rechnung. Ein solcher Fall ist jener der periodischen Transformation, in Consequenz der Theoreme der Herren Weber und Frobenius. (Annali di Mat. ser. 2. Bd. 9, Crelles Journal, Bd. 95, p. 264.)

$$
\begin{array}{ll}
[1] & (m-\alpha_{11})K_1 - a_1 A_1^{(1)} - \ldots - a_\sigma A_1^{(\sigma)} \equiv 0, \\
[2] & (m-\alpha_{22})K_2 - a_1 A_2^{(1)} - \ldots - a_\sigma A_2^{(\sigma)} \equiv 0, \\
\cdot & \cdot \quad \cdot \quad \cdots \quad \cdot \\
[p] & (m-\alpha_{pp})K_p - a_1 A_p^{(1)} - \ldots - a_\sigma A_p^{(\sigma)} \equiv 0, \\
[1\,,\,i] & a_{\lambda_i} K_1 - a_{11} A_1^{(1)} - \ldots - (a_{1\lambda_i} + \alpha_{11}) A_1^{(\lambda_i)} - \ldots \equiv 0, \\
\cdot & \cdot \quad \cdot \quad \cdots \quad \cdot \qquad (i=1\ldots\sigma) \\
[p\,,\,i] & a_{\lambda_i} K_p - a_{11} A_p^{(1)} - \ldots - (a_{1\lambda_i} + \alpha_{pp}) A_p^{(\lambda_i)} - \ldots \equiv 0.
\end{array}
$$

Die Congruenzen $[1]$, $[1\,,\,1]$, ..., $[1\,,\,\sigma]$ dienen dazu, die $A_1^{(\lambda)}$ und K_1 zu bestimmen. Der Nenner dieser Grössen ist $\Delta_{\alpha_{11}}$, der Werth von Δ_x für $x = \alpha_{11}$. Damit die A nur eine endliche Anzahl von Werthen haben, muss $\Delta_{\alpha_{ii}}$ eine commensurable Zahl sein. Also liefert die Determinante Δ_{xx} gleich Null gesetzt eine Gleichung mit ganzzahligen Coefficienten, welche durch die Wurzeln der bekannten Gleichung von Herrn Weber befriedigt wird.

Die einzigen Ausnahmen der vorhergehenden Rechnungen sind die zwei besonderen Curven C_{3s} $7a^s$ und C_{3s} $8a^s$.

III.

Es bleibt übrig, für eine der typischen Transformationen die Gleichungen der invarianten Curven zu suchen.

1. Für die Typen mit 6 Punkten hat man 4 invariante $C_3: \varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4$ und kennt (cit. Abh.) die Indices in der Collineation unter den ∞^3 C_3, welche sein wird

$$\varphi_1' : \varphi_2' : \varphi_3' : \varphi_4' = \varepsilon_1\varphi_1 : \varepsilon_2\varphi_2 : \varepsilon_3\varphi_3 : \varepsilon_4\varphi_4.$$

Man bildet eine ganze Function $F(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4)$, welche durch die Multiplication der φ mit den ε nicht geändert wird und, indem man die φ durch die Ausdrücke in den x ersetzt, erhält man eine Function, welche invariant ist für die gegebene birationale Transformation.

2. Ebenso für die Typen mit 7 Punkten:

LV. Theorem. *Alle algebraischen Functionen, welche durch einen Typus mit 7 Punkten ungeändert bleiben, sind als ganze Functionen dreier invarianter C_3 und ihrer Jacobischen Curve H darstellbar.*

Die Coefficienten der Collineation unter den φ_i^2, $\varphi_i \varphi_k$ und H ergeben sich aus den Resultaten der citirten Abhandlung.

3. Für die Typen mit 8 Punkten hat man eine leicht zu schreibende Curve 6. Ordnung ϕ und die Curve D_9, Jacobiana der $C_6(8a^2)$, welche invariant sind.

LVI. Theorem. *Als Function von ϕ, D_9 und zweier invarianter C_3 sind alle invarianten algebraischen Functionen ausdrückbar.*

4. Für die periodische Transformation des Typus von Jonquières drückt man jede invariante Function durch x_1, x_2 und C_M aus, wo C_M die Curve der Hemicyclen ist, und die Collineation ist

$$x_1' : x_2' : C_M' = x_1 : \varepsilon_{h+1} x_2 : - \varepsilon_{h+1} C_M.$$

Mittelst Quotienten solcher Functionen F wird man in allen Fällen Functionen haben, welche absolut invariant sind.

II. THEIL.

Methoden für die Auffindung der existirenden periodischen Transformationen.

Nachdem in § 2. I. Theiles 6 Classen gefunden wurden, unter welchen die Typen der algebraisch existirenden, periodischen Transformationen zu suchen sind, nämlich jene von Jonquières, dann jene mit 4, 5, 6, 7, 8 Punkten, schliessen wir von Anfang an jene mit 4 und 5 Punkten aus, welche nothwendig quadratisch oder cubisch sind. Man verschafft sich nämlich sehr leicht die Bedingungen für die Lage der Fundamentalpunkte und erkennt überdies, dass alle diese Typen in Wahrheit Collineationen oder quadratischen oder cubischen Transformation mit (ab) äquivalent sind.

Die grösste Schwierigkeit in der Entdeckung der existirenden Typen trifft man bei den Typen mit $6, 7, 8$ Punkten. Ich gebe also directe Methoden, um diese Typen zu finden und a posteriori die Identität mit den auf ganz verschiedene Weise in der Preisschrift construirten Typen herzustellen.

§ 1. *Die Typen mit 6 Punkten.*

1. Das ∞^3 System von C_3 durch 6 Punkte ist bereits oft für die Untersuchung der Flächen 3. O. angewendet. Ich habe zuerst eine Methode gegeben,[1] um umgekehrt die cubischen Flächen zur Auffindung von Eigenschaften der 6 Punkte in der Ebene zu verwenden.

2. Eine birationale Transformation, welche ihre Charakteristik in den 6 gegebenen Punkten hat, verwandelt die ∞^3 C_3 unter einander und man kann sich eine Transformation des R_3 denken, welche dieselbe Vertauschung auf der F_3 hervorbringt wie jene, welche als ebenes Bild die birationale Transformation der Ebene hat und man sieht sofort, dass als diese Transformation der R_3 eine Collineation genommen werden kann. Statt nun wie soeben aus der Ebene heraus auf die Collineationen im R_3 zu schliessen, stelle ich zuerst die Collineation auf und mache dann die Abbildung der durch die Collineation in F_3 hervorgebrachten Umwandlung auf die Ebene.[2]

3. Zur Entdeckung der Collineationen bediene ich mich derselben Methode, welche ich im § 3. I. l. c. angewendet habe, um vollständig die Collineationen zu finden, welche eine ebene cubische Curve reproduciren können.

Sei

$$F(x_1, x_2, x_3, x_4) = 0 \tag{1}$$

[1] Comptes rendus de l'Académie des sciences de Paris, 5 janvier 1885.

[2] Der Erste, der die Untersuchung der projectiven Systeme auf Flächen u. zw. auf Flächen 2. Ordnung, auf synthetischem Wege unternommen hat, ist Herr ZEUTHEN, Mathem. Ann., Bd. 26, p. 247. Es ist keine Frage, dass man auch zur Auffindung der collinearen Systeme auf Flächen 3. O. synthetisch gelangen kann.

die Gleichung einer F_3 und sei

$$(2) \qquad x'_i = \lambda_i x_i$$

eine auf ihre canonische Form zurückgeführte Collineation, welche Form hier stets vorausgesetzt werden kann, da es sich um periodische Collineationen handelt.[1] Denn die Umwandlung auf F_3 muss ebenfalls periodisch sein und da F_3 als irreductibel vorausgesetzt ist, muss die Collineation nothwendig auch periodisch sein. Ich untersuche also die periodischen Collineationen, indem ich λ_i gleich Einheitswurzeln setze, die Substitution von (2) in (1) mache, wo ein Glied $x_1^{m_1}x_2^{m_2}x_3^{m_3}x_4^{m_4}$ durch die Collineation den Factor $\lambda_1^{m_1}\lambda_2^{m_2}\lambda_3^{m_3}\lambda_4^{m_4}$ annehmen wird, sodass (1) nur dann invariant sein wird, wenn die Grössen

$$(3) \qquad \lambda_1^{m_1}\lambda_2^{m_2}\lambda_3^{m_3}\lambda_4^{m_4}$$

denselben Werth für alle Glieder haben.

Um hierüber zu entscheiden, theile ich die linke Seite von (1) nach der Transformation in mehrere Aggregate gemäss den Factoren (3). Die folgende Übersicht ist das Resultat dieser Arbeit. Da alles von den Exponenten abhängt und nichts von den Coefficienten, so werde ich diese unterdrücken. Auch schreibe ich (2) einfacher $\lambda_1 x_1 : \lambda_2 x_2 : \lambda_3 x_3 : \lambda_4 x_4$.

1. $x_1 : x_2 : x_3 : -x_4$,

$$X_1^3 + X_2^3 + X_3^3 + X_1^2X_2 + X_1^2X_3 + X_2^2X_1 + X_2^2X_3 + X_3^2X_1 + X_3^2X_2 + X_4^2X_1 + X_4^2X_2 + X_4^2X_3 + X_1X_2X_3 \,\|\, x_4^3 + x_1^2x_4 + x_2^2x_4 + x_3^2x_4 + x_1x_2x_4 + x_1x_3x_4 + x_2x_3x_4 \,\|.$$

2. $x_1 : x_2 : -x_3 : -x_4$,

$$X_1^3 + X_2^3 + X_1^2X_2 + X_2^2X_1 + X_3^2X_1 + X_3^2X_2 + X_4^2X_1 + X_4^2X_2 + X_1X_3X_4 + X_2X_3X_4 \,\|\, X_3^3 + X_4^3 + X_1^2X_3 + X_2^2X_3 + X_1^2X_4 + X_2^2X_4 + X_3^2X_4 + X_4^2X_3 + X_1X_2X_3 + X_1X_2X_4 \,\|.$$

---

[1] Was die Reduction einer Collineation auf die canonische Form betrifft, hat man in neuerer Zeit Arbeiten von NETTO, KRONECKER, LIPSCHITZ, PRYM und neuerdings von ROST, welche sie ausser allen Zweifel setzen.

$$3.\quad x_1 : x_2 : x_3 : \varepsilon x_4, \qquad \varepsilon^3 = 1,$$

$$X_1^3 + X_2^3 + X_3^3 + X_1^2X_2 + X_2^2X_1 + X_3^2X_1 + X_3^2X_2 + X_1^2X_3 + X_2^2X_3 + X_1X_2X_3$$
$$+ X_4^3 \,\|\, x_4^2x_1 + x_4^2x_2 + x_4^2x_3 \,\|\, x_1x_2x_4 + x_1x_3x_4 + x_2x_3x_4 + x_1^2x_4 + x_2^2x_4 + x_3^2x_4 \,\|.$$

$$4.\quad x_1 : x_2 : \varepsilon x_3 : \varepsilon x_4, \qquad \varepsilon^3 = 1,$$

$$X_1^3 + X_2^3 + X_3^3 + X_4^3 + X_1^2X_2 + X_2^2X_1 \,\|\, x_1^2x_3 + x_2^2x_3 + x_1^2x_4 + x_2^2x_4 + x_1x_2x_3$$
$$+ x_1x_2x_4 \,\|\, x_3^2x_1 + x_3^2x_2 + x_4^2x_1 + x_4^2x_2 + x_1x_3x_4 + x_2x_3x_4 \,\|.$$

$$5.\quad x_1 : x_2 : \varepsilon x_3 : \varepsilon^2 x_4, \qquad \varepsilon^3 = 1,$$

$$X_1^3 + X_2^3 + X_3^3 + X_4^3 + X_1^2X_2 + X_2^2X_1 + X_1X_3X_4 + X_2X_3X_4 \,\|\, X_1^2X_3 + X_2^2X_3$$
$$+ X_1X_2X_3 + X_4^2X_1 + X_4^2X_2 + X_3^2X_4 \,\|\, X_3^2X_1 + X_3^2X_2 + X_1X_2X_4 + X_4^2X_3$$
$$+ X_1^2X_4 + X_2^2X_4 \,\|.$$

$$6.\quad x_1 : ix_2 : -x_3 : -x_4, \qquad i^2 = -1,$$

$$X_1^3 + X_3^2X_1 + X_4^2X_1 + X_2^2X_3 + X_2^2X_4 + X_1X_3X_4 \,\|\, X_1^2X_3 + X_1^2X_4 + X_2^2X_1$$
$$+ X_3^2X_4 + X_4^2X_3 + X_3^3 + X_4^3 \,\|\, x_1^2x_2 + x_3^2x_2 + x_4^2x_2 + x_2x_3x_4 \,\|\, x_1x_2x_3$$
$$+ x_1x_2x_4 + x_2^3 \,\|.$$

$$7.\quad x_1 : -x_2 : ix_3 : ix_4, \qquad i^2 = -1$$

$$X_1^3 + X_2^2X_1 + X_2X_3X_4 + X_3^2X_2 + X_4^2X_2 \,\|\, X_1^2X_2 + X_2^3 + X_1X_3X_4 + X_3^2X_1$$
$$+ X_4^2X_1 \,\|\, x_1^2x_3 + x_2^2x_3 + x_1^2x_4 + x_2^2x_4 \,\|\, x_1x_2x_3 + x_1x_2x_4 + x_3^3 + x_4^3 + x_3^2x_4 + x_4^2x_3 \,\|.$$

$$8.\quad x_1 : -x_2 : ix_3 : -ix_4, \qquad i^2 = -1,$$

$$X_1^3 + X_2^2X_1 + X_1X_3X_4 + X_3^2X_2 + X_4^2X_2 \,\|\, X_2^3 + X_1^2X_2 + X_3^2X_1 + X_4^2X_1$$
$$+ X_2X_3X_4 \,\|\, X_4^3 + X_1^2X_3 + X_2^2X_3 + X_3^2X_4 + X_1X_2X_4 \,\|\, X_3^3 + X_1^2X_4$$
$$+ X_2^2X_4 + X_4^2X_3 + X_1X_2X_3 \,\|.$$

$$9.\quad x_1 : x_2 : \varepsilon x_3 : \varepsilon^2 x_4, \qquad \varepsilon^5 = 1,$$

$$x_1^3 + x_2^3 + x_4^2x_3 + x_2^2x_1 + x_1^2x_2 \,\|\, x_3^3 + x_1x_3x_4 + x_2x_3x_4 \,\|\, x_4^3 + x_1^2x_3 + x_2^2x_3$$
$$+ x_1x_2x_3 \,\|\, x_1^2x_4 + x_2^2x_4 + x_3^2x_1 + x_3^2x_2 + x_1x_2x_4 \,\|\, x_3^2x_4 + x_4^2x_1 + x_4^2x_2 \,\|.$$

$$10.\quad x_1 : \varepsilon x_2 : \varepsilon^2 x_3 : \varepsilon^3 x_4, \qquad \varepsilon^5 = 1,$$

$$x_1^3 + x_2^2x_4 + x_3^2x_2 + x_1x_3x_4 \| x_3^3 + x_1^2x_2 + x_4^2x_1 + x_2x_3x_4 \| x_1^2x_3 + x_2^2x_1 + x_3^2x_4$$
$$x_4^2x_2 \| x_2^3 + x_1^2x_4 + x_4^2x_3 + x_1x_2x_3 \| x_4^3 + x_2^2x_3 + x_3^2x_1 + x_1x_2x_4 \|.$$

$$11.\quad x_1 : \varepsilon x_2 : \varepsilon^2 x_3 : \varepsilon^4 x_4, \qquad \varepsilon^5 = 1,$$

$$x_1^3 + x_4^2x_3 + x_1x_2x_4 \| x_3^3 + x_1^2x_2 + x_2^2x_4 + x_3^2x_1 + x_1x_3x_4 \| x_4^3 + x_1^2x_2 + x_2^2x_4$$
$$+ x_3^2x_1 + x_1x_3x_4 \| x_4^3 + x_1^2x_3 + x_2^2x_1 + x_3^2x_2 + x_2x_3x_4 \| x_2^3 + x_3^2x_4 + x_4^2x_1$$
$$+ x_1x_2x_3 \| x_1^2x_4 + x_2^2x_3 + x_4^2x_2 \|.$$

$$12.\quad x_1 : x_2 : - x_3 : \varepsilon x_4,$$

$$X_1^3 + X_2^3 + X_1^2X_2 + X_2^2X_1 + X_3^2X_1 + X_3^2X_2 + X_4^3 \| x_3^3 + x_1^2x_3 + x_2^2x_3$$
$$+ x_1x_2x_3 \| x_1^2x_4 + x_2^2x_4 + x_3^2x_4 + x_1x_2x_4 \| x_1x_3x_4 + x_2x_3x_4 \| x_4^2x_1 + x_4^2x_2 \| x_4^2x_3 \|.$$

$$13.\quad x_1 : \varepsilon x_2 : \varepsilon^2 x_3 : - x_4,$$

$$X_1^3 + X_2^3 + X_3^3 + X_4^2X_1 + X_1X_2X_3 \| x_4^3 + x_1^2x_4 + x_2x_3x_4 \| x_2^2x_4$$
$$+ x_1x_3x_4 \| X_1^2X_2 + X_2^2X_3 + X_3^2X_1 + X_4^2X_2 \| X_1^2X_4 + X_2^2X_1 + X_3^2X_2$$
$$+ X_4^2X_3 \| x_2^2x_3 + x_3^2x_1 \| x_3^2x_4 \|.$$

$$14.\quad x_1 : x_2 : - x_3 : - \varepsilon x_4, \qquad \varepsilon^3 = 1,$$

$$x_1^3 + x_2^3 + x_1^2x_2 + x_2^2x_1 + x_3^2x_1 + x_3^2x_2 \| X_3^3 + X_4^3 + X_1X_2X_3 + X_1^2X_3$$
$$+ X_2^2X_3 \| x_4^2x_1 + x_4^2x_2 \| x_4^2x_3 \| x_1x_3x_4 + x_2x_3x_4 \| x_1x_2x_4 + x_1^2x_4 + x_2^2x_4 + x_3^2x_4 \|.$$

$$15.\quad x_1 : \varepsilon x_2 : \varepsilon x_3 : - x_4, \qquad \varepsilon^3 = 1,$$

$$X_1^3 + X_2^3 + X_3^3 + X_4^2X_1 + X_2^2X_3 + X_3^2X_2 \| x_4^3 + x_1^2x_4 \| x_4^2x_2 + x_1^2x_2 + x_1^2x_3$$
$$+ x_4^2x_3 \| x_2^2x_1 + x_3^2x_1 + x_1x_2x_3 \| x_2^2x_4 + x_3^2x_4 + x_2x_3x_4 \| x_1x_2x_4 + x_1x_3x_4 \|.$$

$$16.\quad x_1 : \varepsilon x_2 : - \varepsilon x_3 : - \varepsilon^2 x_4, \qquad \varepsilon^3 = 1,$$

$$x_1^3 + x_2^3 + x_3^2x_2 + x_1x_3x_4 \| x_3^3 + x_4^3 + x_2^2x_3 + x_1x_2x_4 \| x_1^2x_2 + x_4^2x_1$$
$$+ x_2x_3x_4 \| x_1^2x_3 + x_2^2x_4 + x_3^2x_4 \| x_1^2x_4 + x_4^2x_3 + x_1x_2x_3 \| x_2^2x_1 + x_3^2x_1 + x_4^2x_2 \|.$$

$$17.\quad x_1 : x_2 : -\varepsilon x_3 : -\varepsilon x_4, \qquad \varepsilon^7 = 1,$$

$$x_1^3 + x_2^3 + x_1^2 x_2 + x_2^2 x_1 \| x_3^3 + x_4^3 + x_4^2 x_3 + x_3^2 x_4 \| x_3^2 x_1 + x_3^2 x_2 + x_4^2 x_1 + x_4^2 x_2$$
$$+ x_1 x_3 x_4 + x_2 x_3 x_4 \| x_1 x_2 x_3 + x_1 x_2 x_4 + x_1^2 x_3 + x_1^2 x_4 + x_2^2 x_3 + x_2^2 x_4 \|.$$

$$18.\quad x_1 : x_2 : \varepsilon x_3 : \varepsilon^6 x_4, \qquad \varepsilon^7 = 1,$$

$$x_1^3 + x_2^3 + x_2^2 x_1 + x_1^2 x_2 + x_2 x_3 x_4 + x_1 x_3 x_4 \| x_3^3 \| x_4^3 \| x_1^2 x_3 + x_2^2 x_3 + x_3^2 x_4$$
$$+ x_1 x_2 x_3 \| x_1^2 x_4 + x_2^2 x_4 + x_4^2 x_3 + x_1 x_2 x_4 \| x_3^2 x_1 + x_3^2 x_2 \| x_4^2 x_1 + x_4^2 x_2 \|.$$

$$19.\quad x_1 : x_2 : \varepsilon x_3 : \varepsilon^3 x_4, \qquad \varepsilon^7 = 1,$$

$$x_1^3 + x_2^3 + x_1^2 x_2 + x_2^2 x_1 + x_4^2 x_3 \| x_3^3 + x_1^2 x_4 + x_2^2 x_4 + x_1 x_2 x_4 \| x_4^3 + x_3^2 x_1$$
$$+ x_3^2 x_2 \| x_1^2 x_3 + x_2^2 x_3 + x_1 x_2 x_3 \| x_3^2 x_4 \| x_4^2 x_1 + x_4^2 x_2 \| x_1 x_3 x_4 + x_2 x_3 x_4 \|.$$

$$20.\quad x_1 : \varepsilon x_2 : \varepsilon^2 x_3 : \varepsilon^3 x_4, \qquad \varepsilon^7 = 1,$$

$$x_1^3 + x_3^2 x_4 + x_4^2 x_2 \| x_2^3 + x_1^2 x_4 + x_1 x_2 x_3 \| x_3^3 + x_4^2 x_1 + x_2 x_3 x_4 \| x_4^3 + x_2^2 x_1$$
$$+ x_1^2 x_3 \| x_1^2 x_2 + x_4^2 x_3 \| x_2^2 x_3 + x_3^2 x_1 + x_1 x_2 x_4 \| x_2^2 x_4 + x_3^2 x_2 + x_1 x_3 x_4 \|.$$

$$21.\quad x_1 : \varepsilon x_2 : \varepsilon^2 x_3 : \varepsilon^4 x_4, \qquad \varepsilon^7 = 1,$$

$$x_1^3 + x_2 x_3 x_4 \| x_2^3 + x_4^2 x_3 + x_1 x_2 x_3 \| x_3^3 + x_2^2 x_4 + x_1 x_3 x_4 \| x_4^3 + x_3^2 x_2$$
$$+ x_1 x_2 x_4 \| x_1^2 x_2 + x_3^2 x_4 \| x_2^2 x_1 + x_1^2 x_3 + x_4^2 x_2 \| x_1^2 x_4 + x_2^2 x_3 + x_3^2 x_1 \|$$

und die übrigen Collineationen Indexes 7 liefern ebenfalls keine Typen.

$$22.\quad x_1 : x_2 : -i x_3 : \sqrt{i}\, x_4, \qquad i^2 = -1,$$

$$x_1^3 + x_4^3 + x_1^2 x_2 + x_2^2 x_1 + x_4^2 x_3 \| x_3^3 + x_4^2 x_1 + x_2^2 x_1 + x_4^2 x_3 \| x_3^3 + x_4^2 x_1$$
$$+ x_4^2 x_2 \| x_4^3 \| x_1^2 x_3 + x_2^2 x_3 + x_1 x_2 x_3 \| x_1^2 x_4 + x_2^2 x_4 + x_1 x_2 x_4 \| x_3^2 x_1$$
$$+ x_3^2 x_2 \| x_3^2 x_4 \| x_2 x_3 x_4 + x_1 x_3 x_4 \|.$$

$$23.\quad x_1 : -x_2 : -i x_3 : \sqrt{i}\, x_4, \qquad i^2 = -1,$$

$$x_1^3 + x_2^2 x_1 + x_3^2 x_2 + x_4^2 x_3 \| x_2^3 + x_1^2 x_2 + x_3^2 x_1 \| x_3^3 + x_4^2 x_1 + x_1 x_2 x_3 \| x_4^3$$
$$+ x_2 x_3 x_4 \| x_1^2 x_3 + x_2^2 x_3 + x_4^2 x_2 \| x_1^2 x_4 + x_2^2 x_4 \| x_3^2 x_4 + x_1 x_2 x_4 \| x_1 x_3 x_4 \|.$$

$$24. \quad x_1 : \varepsilon x_2 : \varepsilon^7 x_3 : \varepsilon^4 x_4, \qquad \varepsilon^9 = 1,$$

$$X_1^3 + X_2^2X_3 + X_3^2X_4 + X_4^2X_2 \,\|\, x_2^3 + x_3^3 + x_4^3 + x_2x_2x_4 \,\|\, x_1^2x_2 \,\|\, x_1^2x_3 \,\|\, x_1^2x_4 \,\|\, x_2^2x_1$$
$$+ x_1x_3x_4 \,\|\, x_2^2x_3 + x_3^2x_2 + x_4^2x_3 \,\|\, x_3^2x_1 + x_1x_2x_4 \,\|\, x_4^2x_1 + x_1x_2x_3 \,\|.$$ [1]

$$25. \quad x_1 : -x_2 : \varepsilon x_3 : \varepsilon^\lambda x_4, \qquad \varepsilon^5 = 1,$$

verlangt einen Doppelpunkt in der F_3; ebenso die übrigen Collineationen des Indexes 10 wie

$$26. \quad x_1 : -\varepsilon x_2 : \varepsilon^3 x_3 : \varepsilon^4 x_4, \qquad \varepsilon^5 = 1,$$

$$x_1^3 + x_2^2x_3 + x_3^2x_4 \,\|\, x_2^3 + x_2x_3x_4 \,\|\, x_3^3 + x_2^2x_4 \,\|\, x_4^3 + x_2^2x_1 \,\|\, x_1^2x_2 \,\|\, x_1^2x_3 + x_4^2x_1$$
$$+ x_1x_3x_4 \,\|\, x_2^2x_4 + x_3^2x_1 + x_4^2x_3 \,\|\, x_3^2x_2 \,\|\, x_4^2x_2 + x_1x_2x_3 \,\|\, x_1x_2x_4 \,\|.$$

$$27. \quad x_1 : -x_2 : \varepsilon x_3 : i x_4, \qquad \varepsilon^3 = 1, \quad i^2 = -1,$$

$$X_1^3 + X_3^3 + X_2^2X_1 + X_4^2X_2 \,\|\, x_2^3 + x_1^2x_2 + x_4^2x_1 \,\|\, x_4^3 \,\|\, x_1^2x_3 + x_2^2x_3 \,\|\, x_1^2x_4$$
$$+ x_2^2x_4 \,\|\, x_3^2x_1 \,\|\, x_3^2x_2 \,\|\, x_3^2x_4 \,\|\, x_4^2x_3 + x_1x_2x_3 \,\|\, x_2x_3x_4 \,\|\, x_1x_3x_4 \,\|\, x_1x_2x_4 \,\|.$$

Hiermit endigen die Collineationen, welche irreductible F_3 invariant lassen. Unter den obigen sind die zerlegten und jene mit Doppelpunkt auszuschliessen, wenn dieser invariant ist. Denn diese können keinen Typus liefern, weil die aus dem Doppelpunkte von F_3 gemachte Projection dieser F_3 als Abbildung ersichtlich eine Collineation in der Ebene liefert. Es bleiben nur die in grossen Lettern geschriebenen Formen, unter welchen noch n° 6 1. Form einen invarianten Doppelpunkt auf $x_1 = 0$, $x_2 = 0$ hat, ebenso wie die zwei letzten Formen n° 5 und n° 13, und aber die zwei Formen n° 2 gleichwerthig sind, ebensowie die zwei n° 7 und die vier n° 8. Die erübrigenden cubischen quaternären Formen sind:

1. $X_1^3 + X_2^3 + X_3^3 + X_1^2X_2 + X_1^2X_3 + X_2^2X_1 + X_2^2X_3$
$$+ X_3^2X_1 + X_4^2X_1 + X_4^2X_2 + X_4^2X_3 + X_1X_2X_3, \qquad 1, 1, 1, -1.$$

2. $X_1^3 + X_2^3 + X_1^2X_2 + X_2^2X_1 + X_3^2X_1 + X_3^2X_2 + X_4^2X_1$
$$+ X_4^2X_2 + X_1X_3X_4 + X_2X_3X_4, \qquad 1, 1, -1, -1.$$

[1] Die übrigen Collineationen mit dem Index 9 verlangen Doppelpunkt oder Decomposition der F_3.

3. $X_1^3 + X_2^3 + X_3^3 + X_4^3 + X_1^2 X_2 + X_2^2 X_1 + X_3^2 X_1$
$+ X_3^2 X_2 + X_1^2 X_3 + X_2^2 X_3 + X_1 X_2 X_3,$ $\quad 1, \; 1, \; 1, \; \varepsilon_3.$

4. $X_1^3 + X_2^3 + X_3^3 + X_4^3 + X_1^2 X_2 + X_2^2 X_1,$ $\quad 1, \; 1, \; \varepsilon_3, \; \varepsilon_3.$

5. $X_1^3 + X_2^3 + X_3^3 + X_4^3 + X_1^2 X_2 + X_2^2 X_1$
$+ X_1 X_3 X_4 + X_2 X_3 X_4.$ $\quad 1, \; 1, \; \varepsilon_3, \; \varepsilon_3^2.$

6. $X_3^3 + X_4^3 + X_4^2 X_3 + X_3^2 X_4 + X_2^2 X_1 + X_1^2 X_4 + X_1^2 X_3,$ $\quad 1, \; i, \; -1, \; -1.$

7. $X_1^3 + X_2^2 X_1 + X_1 X_3 X_4 + X_3^2 X_2 + X_4^2 X_2,$ $\quad 1, \; -1, \; i, \; -i.$

8. $X_1^3 + X_2^3 + X_4^3 + X_1^2 X_2 + X_2^2 X_1 + X_3^2 X_1 + X_3^2 X_2,$ $\quad 1, \; 1, \; -1, \; \varepsilon_3.$

9. $X_1^3 + X_2^3 + X_3^3 + X_4^2 X_1 + X_1 X_2 X_3,$ $\quad 1, \; \varepsilon_3, \; \varepsilon_3^2, \; -1.$

10. $X_1^3 + X_2^3 + X_3^3 + X_4^2 X_1 + X_2^2 X_3 + X_3^2 X_2,$ $\quad 1, \; \varepsilon_3, \; \varepsilon_3, \; -1.$

11. $X_1^3 + X_3^3 + X_2^2 X_1 + X_4^2 X_3,$ $\quad 1, \; -1, \; \varepsilon_3, \; -\varepsilon_3.$

12. $X_1^3 + X_2^2 X_1 + X_3^2 X_2 + X_4^2 X_3,$ $\quad 1, \; -1, \; -i, \; \sqrt{i}.$

13. $X_1^3 + X_2^2 X_3 + X_3^2 X_4 + X_4^2 X_2,$ $\quad 1, \; \varepsilon_9, \; \varepsilon_9^7, \; \varepsilon_9^4.$

14. $X_1^3 + X_3^3 + X_2^2 X_1 + X_4^2 X_2,$ $\quad 1, \; -1, \; \varepsilon_3, \; i.$

I. Theorem. *Wenn eine Collineation eine Gerade a_1 von F_3 in sich selbst verwandelt, so ist die abbildende ebene Transformation äquivalent einer Charakteristik mit 5 Punkten.*

Beweis. Nimmt man in das abbildende Sextupel die a_1, so erscheint das Bild von a_1 als Doppelpunkt der Ebene w. z. b. w. Ebenso wird bewiesen:

II. Theorem. *Wenn die Collineation zwei oder drei windschiefe Geraden von F_3 unter einander transformirt, so ist die Abbildung äquivalent einem Typus mit weniger als 6 Punkten.*

Da es mir hier nur auf die Typen ankommt, so wende ich diese beiden Theoreme sofort auf die vorhergehenden 14 Formen an. n° 1 hat stets eine invariante Gerade durch X_4, n° 2 die Doppelgerade $X_1 X_2$, n° 7 die Gerade X_3X_4, n° 6 und n° 10 drei invariante Geraden in der Ebene $x_1 = 0$, n° 11 und 12 die Gerade X_2X_4, n° 4 enthält mehrere cyclische Tripel windschiefer Geraden; denn die Directricen sind im Allgemeinen von keiner Geraden der F_3 getroffen und die drei Geraden können niemals in einer Ebene sein. n° 5 und n° 6 gestatten ebenfalls windschiefe cyclische Tripel.

Es erübrigen die Formen n° 3, 8, 9, 13, 14. Stellen wir zuerst fest:

III. Theorem. *Die Transformationen, welche man durch Abbildung der collinearen Systeme auf F_3 erhält, indem man verschiedene Doppelsechsen verwendet, sind birational äquivalent.*

Es ist immer möglich, derart abzubilden, dass man den Typus erhält. Die Transposition mittelst der 6 Punkte liefert nämlich in der Ebene eine Transformation, welche wieder das Bild einer Collineation in F_3 ist. Diese Collineation muss aber wesentlich dieselbe sein wie die erste, es kann sich also nur die Art der Abbildung geändert haben, also entweder die Directricen von Clebsch oder das Sextupel von Reye.

IV. Theorem. *Unter den Geraden eines Sextupels sind* 0 *oder* 3 *oder* 4, *welche zwei und* 1, 3, 6 *welche* 5 *des transformirten Sextupels schneiden.*

Denn die Thatsache, dass 0 oder 2 oder 5 Geraden eines Sextupels eine der übrigen Geraden treffen, überträgt sich in die andere, dass die einzigen Fundamentalcurven, welche die Transformationen mit den 6 Punkten besitzen können, Gerade oder Kegelschnitte sind u. zw. in den bezüglichen Anzahlen.

V. Theorem. *Die Collineationen auf der F_3 n° 3 hat als Bild den Typus vom* 4. *Grade und Index* 3, *welcher l. c. als Δ_3 bezeichnet ist.*

Beweis. Man kann zwei successive Geraden wählen aa', sodass dieselben in zwei conjugirte Sextupel eintreten, a' wird eine Fundamentalgerade liefern. Zwei successive Geraden können sich nicht im selben Sextupel finden, weil sie sich immer schneiden; daher sind alle 6 Punkte fundamental und die Transformation ist biquadratisch. Die drei Geraden a, welche in Doppelsecanten transformirt sind, bilden ein windschiefes Tripel, ebenso die drei Doppelsecanten und da zwei successive Geraden sich schneiden, ist $(d_1\varepsilon_2)$, $(d_2\varepsilon_3)$, $(d_3\varepsilon_1)$ bedingt. Die andere Doppeldrei hat gleiche Verkettung. Überdies: Die Schnittcurve mit $x_4 = 0$ ist Ort von Doppelpunkten und gibt als Bild eine C_3, Ort von Doppelpunkten. Die C_3, deren Ebenen durch X_4 gehen, sind C_e und liefern in der Ebene das Netz, welches l. c. für Δ_3 gefunden wurde. Die Geraden der Doppelsechs schneiden $x_4 = 0$ in 6 Punkten zweier Inflexionsgeraden, welche sich als zwei Tangentialcyclen abbilden.

VI. Theorem. *Die Collineation auf der F_3 n° 8 hat als Bild den Typus B_6.*

Beweis. Die Collineation ist die Zusammensetzung der vorhergehenden mit einer involutorischen Collineation, welche die zwei Doppeldreien der abbildenden Doppelsechs unter einander vertauscht was die Wirkung hat, dass niemals zwei successive Geraden sich schneiden und dass niemals eine Gerade in eine Gerade des conjugirten Sextupels transformirt ist. n° 8 beweist die Existenz einer C_3 mit ∞^1 involutorischen Paaren und zweier invarianter Geradentripel, deren Ebenen durch X_3X_4 gehen. So erkennt man die Figur, welche l. c. für a' in b, b' in c, c' in a oder B_6 gefunden ist.

VII. Theorem. *Die Collineation auf der F_3 n° 9 hat als Bild den Typus Γ_6.*

Beweis. Die Ebene $x_4 = 0$ schneidet F_3 in einer C_3, welche eine Correspondenz $u' - u \equiv \gamma$ vom Index 3 trägt; durch X_4 gehen drei Gerade der F_3 in $x_1 = 0$, welche ein cyclisches Tripel bilden und sich in die Ebene ebenfalls in drei solche Gerade abbilden. Da man zwei Geraden finden kann, welche successiv und windschief sind, so erhält man für die Ebene eine Verkettung und indem man beweist, dass nicht mehr als eine Gerade des Sextupels sich in eine Gerade des conjugirten Sextupels verwandeln kann, beweist man, dass T cubisch wird. Ohne ausfürlich die Configuration der 27 Geraden aufzuschreiben, ist es unmöglich, aus ihr die Characteristik (ab_1), (ba_1), (a_2b_2), (a_3b_3), b_4 in a_4 zu construiren, während man aus der Übereinstimmung der invarianten C_3 die vollständige Identität erschliessen kann.

VIII. Theorem. *Die Collineation auf F_3 n° 12 hat als Bild die B_9 l. c.*

Beweis. Ohne die Configuration der 27 Geraden zu studiren, will ich n° 12 in diese andere Form bringen $x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 + x_4^3$, was immer durch eine lineare Substitution x_2, x_3, x_4 allein möglich ist, indem $x_2^2 x_3 + x_3^2 x_4 + x_4^2 x_2 = 0$ äquianharmonisch ist. Die Collineation wird die Form haben $\varepsilon x_2 : \varepsilon^4 x_3 : \varepsilon^7 x_1 : \varepsilon x_4$, wo $\varepsilon^9 = 1$. Die Sextupel dieser F_3 schneiden die Ebene $x_1 = 0$ in zwei alineirten Tripeln von Wendepunkten, woraus man im selben Sextupel zwei Verkettungen und also die Ordnung der Transformation ableiten kann. Die 4 invarianten C_3 stellen die Identität mit B_9 fest.

IX. Theorem. *Die Collineation auf F_3 n° 13 hat als Bild die B_{12}.*

Die Ebene $x_1 = 0$ enthält eine C_3^3, $x_2 = 0$ enthält drei Geraden durch X_4, welche ein cyclisches Tripel bilden, $x_3 = 0$ eine C_h und $x_4 = 0$ eine C_e. Man sucht unter den Geraden 4, welche eine Succession bilden und hat hiermit Reduction auf die Ordnung 2.

Conclusion: *Die existirenden periodischen Transformationen mit 6 Punkten, welche nicht unter einander äquivalent sind, sind die folgenden:*

$$\Delta_3 \,,\; B_6 \,,\; B_9 \,,\; B_{12} \,,\; \Gamma_6 \;\textit{oder}\; XXVII_3 \,,\; I_6 \,,\; II_9 \,,\; III_{12} \,,\; XIV_6,$$

also die in der citirten Abhandlung aufgeschriebenen Typen.

Der Anwendung halber soll das Resultat der Abbildung der 14 Collineationen auf p. 148 vollständig angeführt werden:

1. liefert die cubische Involution (cc'), $(a_i b_i)$, 2. zwei Doppelpunkte und zwei involutorische Paare einer Collineation, 3. $XXVII_3$, 4. drei Doppelpunkte und ein cyclisches Tripel einer Collineation, 5. zwei cyclische Tripel einer Collineation, 6. liefert (cc'), a' in b, b' in a nebst einem Doppelpunkte, 7. ein Quadrupel und ein involutorisches Paar einer Collineation, 8. I_6, 9. XIV_6, 10. a' in a, b' in b, c' in c, 11. (ab'), (bc'), (ca') mit einem Doppelpunkte und einem involutorischen Paare, 12. (ab'), (bc'), a' in a_1' in c mit Doppelpunkt, 13. II_9, 14. III_{12}.

Anmerkung. Die Flächen 4, 11, 13, 14 gestatten, unter der Form $\xi_1^3 + \xi_2^3 + \xi_3^3 + \xi_4^3$ geschrieben zu werden. — Ferner sind die Flächen, welche durch jede der Collineationen reproducirt werden, ∞^λ und wenn man die Abbildung aller gleichzeitig macht, was wegen der Vertheilung der Geraden möglich ist, erhält man in der Ebene ein ∞^λ System von birationalen Transformationen.

§ 2. *Die typischen Transformationen mit 7 Punkten.*

1. Das Netz der C_3 durch die 7 Punkte ist invariant, also auch die Jacobische Curve D_6, auf welcher eine Correspondenz entsteht. Umgekehrt:

X. Theorem. *Durch die Correspondenz auf der Jacobischen Curve D_6 ist die ebene Transformation bestimmt.*

Beweis. Jede C_3 des Büschels schneidet D_6 in einem Quadrupel von Punkten und diese Reihe g_4^1 ist in sich transformirt wegen des Theoremes XXXV. Die so entstehende 2-deutige Transformation zerlegt sich in zwei eindeutige Theile, von welchen der eine die Zusammensetzung des anderen mit der Involution (von Geiser) θ_2 ist, und der eine die Wiederholung des anderen ist, wenn der Index des einen ungerade ist.

Man kann jeder D_6 mit 7 Doppelpunkten eindeutig eine Curve L_4 4. O. $p = 3$ entsprechen machen. Die eindeutigen Correspondenzen auf C_6 haben als Bilder in L_4 eindeutige Correspondenzen. Diese aber sind stets in einer Collineation der Ebene enthalten. Ich wende nun die Umkehrung der Frage an, wie ich es im § 1 für die cubischen Flächen machte.

XI. Theorem. *Für eine gegebene Curve L_4 erhält man sofort eine Curve C_6 mit 7 Doppelpunkten, welche zu jener in 1-1-deutiger Beziehung ist, mittelst eines Septupels unabhängiger Doppeltangenten.*

Beweis. Es ist die Umkehrung des Theoremes von Aronhold, welcher vom Netze der C_3 ausging. Die 7 Doppeltangenten bestimmen das Netz, welchem eine Jacobische Curve C^6 (dual) angehört und der Ort der Berührungspunkte für die Büschel mit Berührung ist die gegebene Curve L_4. Die eindeutige Relation hat also hier überdies die Eigenschaft der Incidenz, d. h. dass jeder Punkt von L_4 mit der entsprechenden Geraden von C^6 incident ist.[1]

---

[1] Solches eindeutiges Entsprechen einer Curve C_n und einer Enveloppe Γ^m mit Bedingung der Incidenz erhält man sehr einfach durch Verbindung entsprechender Punkte

XII. Theorem. *Jede birationale Transformation oder Gruppe von birationalen Transformationen, welche 7 Punkte in der Charakteristik hat, bringt gleichzeitig eine Collineation oder Gruppe von Collineationen unter den Geraden der Ebene hervor.*

Denn die Transformation bringt eine Correspondenz auf D_6 hervor, welche wegen des Theoremes XI zum Bilde eine Correspondenz in der Curve 4. Classe von ARONHOLD hat und diese ist in einer Collineation der Ebene enthalten, deren Index also die Hälfte des Indexes der Transformation sein kann.

XIII. Theorem. *Wenn man jeder C_3 den Schnittpunkt der Tangenten in den 4 Schnittpunkten mit D_6 zuordnet, erhält man eine lineare Beziehung mit Incidenz.*

Der einzuschlagende Weg ist also der folgende. Ich stelle die biquadratischen Curven L_4 auf, welche eine Collineation gestatten, nehme unter den 28 Doppeltangenten ein Septupel von ARONHOLD und verfolge die Verwandlung dieses Septupels durch die Collineation. Die verschiedenen Doppeltangenten entsprechen nach Theorem XI. (dual gesprochen) Geraden oder Kegelschnitten oder C_3^4 oder den 7 Punkten des Septupels selbst.

So leiten sich die Characteristiken der zwei annexen birationalen Transformationen mittelst der Verwandlung unter den 28 Doppeltangenten der Curve L_4 her, und finden in dieser Verwandlung ihren vollständigen Ausdruck.

3. Zur Auffindung der Collineationen mit invarianter L_4 wende ich das dritte Mal die Methode der canonischen Formen an.

$$\text{I.}\quad x_1 : x_2 : -x_3,$$

$$X_1^4 + X_2^4 + X_3^4 + X_1^2X_2^2 + X_2^2X_3^2 + X_1^3X_2 + X_1X_2^3 + X_1X_2X_3^2 + X_1^2X_2^2 \,\|\, x_1x_3^3 + x_2x_3^3 + x_1^3x_3 + x_2^3x_3 + x_2x_3x_1^2 + x_1x_3x_2^2 \,\|.$$

---

zweier eindeutig bezogener Curven. Umgekehrt kann jedes Incidenzpaar C_n, Γ^m auf unendlich viele Arten so entstanden gedacht werden. Es giebt stets unendlich viele einfach rationale Transformationen, für welche C_n, Γ^m die beiden Incidenzcurven sind. Es giebt aber nicht immer einfach rationale Nullsysteme, in denen sie sich entsprechen.

Dieselben Aussprüche gelten auch für eine M_{r-1}^n und eine Enveloppe M_{r-1}^n von R_{r-1} im R_r.

$$2.\quad x_1 : x_2 : \varepsilon x_3, \qquad \varepsilon^3 = 1,$$

$$X_1^4 + X_2^4 + X_1^2X_2^2 + X_1X_3^3 + X_2X_3^3 + X_1^2X_3 + X_1X_2^3 \,\|\, x_1^3x_3 + x_2^3x_3 + x_3^4$$
$$+ x_1x_2^2x_3 + x_1^2x_2x_3 \,\|\, x_1^2x_3^2 + x_2^2x_3^2 + x_1x_2x_3^2 \,\|.$$

$$3.\quad x_1 : \varepsilon x_2 : \varepsilon^2 x_3, \qquad \varepsilon^3 = 1,$$

$$X_1^4 + X_1^2X_2X_3 + X_1X_2^3 + X_1X_3^3 + X_2^2X_3^2 \,\|\, x_3^4 + x_2^3x_3 + x_1^3x_3 + x_3^2x_1x_2$$
$$+ x_1^2x_2^2 \,\|\, x_1x_3x_2^2 + x_1^2x_3^2 + x_1^3x_2 + x_3^3x_2 + x_2^4 \,\|.$$

$$4.\quad x_1 : x_2 : i x_3, \qquad i^2 = -1,$$

$$X_1^4 + X_2^4 + X_3^4 + X_1^2X_2^2 + X_1^3X_2 + X_1X_2^3 \,\|\, x_1^2x_3^2 + x_2^2x_3^2 + x_1x_2x_3^2 \,\|\, x_2x_3x_1^2$$
$$+ x_1x_3x_2^2 + x_1^3x_3 + x_2^3x_3 \,\|\, x_3^3x_1 + x_3^3x_2 \,\|.$$

$$5.\quad x_1 : -x_2 : i x_3, \qquad i^2 = -1,$$

$$X_1^4 + X_2^4 + X_3^4 + X_1^2X_2^2 + X_1X_2X_3^2 \,\|\, x_1^2x_3^2 + x_1x_2^3 + x_1^3x_2 + x_2^2x_3^2 \,\|\, x_1^2x_2x_3$$
$$+ x_2^3x_3 + x_1x_3^3 \,\|\, x_1x_3x_2^2 + x_2x_3^3 + x_1^3x_3 \,\|.$$

$$6.\quad x_1 : \varepsilon x_2 : \varepsilon^2 x_3, \qquad \varepsilon^5 = 1,$$

$$x_1^4 + x_2^3x_3 + x_1x_2x_3^2 \,\|\, x_1x_3^3 + x_2^2x_3^2 + x_1^3x_2 \,\|\, x_1^2x_2^2 + x_1^3x_3 + x_2x_3^3 \,\|\, x_3^4 + x_1^2x_2x_3$$
$$+ x_2^3x_3 \,\|\, x_2^4 + x_1^2x_3^2 + x_1x_2^2x_3 \,\|.$$

$$7.\quad x_1 : \varepsilon x_2 : \varepsilon^4 x_3, \qquad \varepsilon^5 = 1,$$

$$x_1^4 + x_1^2x_2x_3 + x_2^2x_3^2 \,\|\, x_1^3x_2 + x_1x_2^2x_3 + x_3^4 \,\|\, x_1^2x_2^2 + x_2^3x_3 \,\|\, x_4^3 + x_1x_2^3 + x_2x_3^3$$
$$+ x_1x_2x_3^2 + x_1^2x_3^2 \,\|\, x_2^4 + x_1^3x_3 \,\|.$$

$$8.\quad x_1 : -x_2 : \varepsilon x_3, \qquad \varepsilon^3 = 1,$$

$$X_1^4 + X_2^4 + X_1^2X_2^2 + X_1X_3^3 \,\|\, x_1^3x_3 + x_3^4 + x_1x_2x_3^2 \,\|\, x_2^2x_3^2 + x_1^2x_3^2 \,\|\, x_1^2x_2x_3$$
$$+ x_1^3x_3 \,\|\, x_1^3x_2 + x_2^3x_1 + x_2x_3^3 \,\|\, x_1x_2x_3^2 \,\|.$$

$$9.\quad x_1 : \varepsilon x_2 : -\varepsilon^2 x_3, \qquad \varepsilon^3 = 1,$$

$$x_1^4 + x_2^2x_3^2 + x_1x_2^3 \,\|\, X_2^4 + X_3^4 + X_1^2X_3^2 + X_1^3X_2 \,\|\, x_1^2x_2^2 + x_1x_2x_3^2 \,\|\, x_1^2x_2x_3$$
$$+ x_1x_3^3 \,\|\, x_1x_3x_2^2 + x_2x_3^3 \,\|\, x_1^3x_3 + x_2^3x_3 \,\|.$$

$$10.\quad x_1 : \varepsilon x_1 : \varepsilon^2 x_3 \qquad \varepsilon^7 = 1,$$

$$x_1^4 + x_1x_2x_3^2 \,\|\, x_2^4 + x_1^2x_2x_3 \,\|\, x_3^4 + x_1x_3x_2^2 \,\|\, x_1^3x_2 + x_2^2x_3^2 \,\|\, X_1^3X_3 + X_1X_2^3$$
$$+ X_2X_3^3 \,\|\, x_1x_3^3 + x_1^2x_2^2 \,\|\, x_2^3x_3 + x_1^2x_3^2 \,\|.$$

$$11.\quad x_1 : ix_2 : \sqrt{i}\, x_3, \qquad i^2 = -1,$$

$$x_1^4 + x_2^4 \,\|\, x_3^4 + x_1^2x_2^2 + x_1x_2x_3^2 \,\|\, x_1^3x_2 + x_1x_3^2 \,\|\, x_1^3x_3 \,\|\, x_1x_3^3 + x_2^3x_3 + x_2x_3^3$$
$$+ x_1x_3x_2^2 \,\|\, x_1x_2^3 \,\|\, x_1^2x_2x_3 \,\|.$$

$$12.\quad x_1 : \varepsilon x_2 : \varepsilon^3 x_3, \qquad \varepsilon^9 = 1,$$

$$x_1^4 + x_1x_3^3 \,\|\, x_1^3x_2 + x_2x_3^3 \,\|\, x_1^2x_2^2 \,\|\, x_2^4 + x_1^2x_2x_3 \,\|\, X_3^4 + X_1X_2^3 + X_1^3X_3 \,\|\, x_3x_2^3$$
$$+ x_1^2x_3^2 \,\|\, x_3^2x_2^2 \,\|\, x_2^2x_1x_3 \,\|\, x_3^2x_1x_2 \,\|.$$

$$13.\quad x_1 : ix_2 : \varepsilon x_3, \qquad i^2 = -1, \quad \varepsilon^3 = 1,$$

$$X_1^4 + X_1X_3^3 + X_2^4 \,\|\, x_1x_2^3 \,\|\, x_1^2x_2^2 \,\|\, x_3^4 + x_1^3x_3 \,\|\, x_2^2x_3^2 \,\|\, x_1^2x_3^2 \,\|\, x_2x_3^3$$
$$+ x_1^3x_2 \,\|\, x_1^2x_2x_3 \,\|\, x_1x_2^2x_3 \,\|\, x_1x_2x_3^2 \,\|\, x_2^3x_3 \,\|.$$

XIV. Theorem. *Wenn die Collineation eine Doppeltangente der L_4 invariant lässt, ist eine der birationalen Transformationen, welche ihr entsprechen, äquivalent einer Transformation mit 6 Punkten in der Characteristik.*

Beweis. Man kann ein Septupel nehmen, in welchem die invariante Tangente vorkommt. Dann entspricht der Basispunkt der C_3, welcher diese Tangente abbildet, sich selbst oder ist ein Doppelpunkt der Ebene.

XV. Theorem. *Alle Transformationen, welche man aus einer Collineation von L_4 durch die Variation des Septupels der Doppeltangenten erhält, sind birational äquivalent und umgekehrt.*

XVI. Theorem. *Unter diesen Transformationen kann man stets auch den Typus erhalten.*

XVII. Theorem. *Jede Collineation auf L_4 gibt zwei birationale Transformationen der Ebene. Man erhält die eine aus der anderen, indem man mit der involutorischen Transformation J_8 zusammensetzt.*

Wenn das unabhängige Septupel einmal angenommen ist, so hat man die folgende Regel, um die Curve zu finden, in welche ein Doppelpunkt a_1 von L_4 durch die birationale Transformation verwandelt ist. Man sucht den Doppelpunkt f, in welchen sich a_1 durch die Collineation verwandelt. Derselbe sei in einem gewissen Kegelschnitte durch 5 Punkte a. Dann kann man a_1 entweder diesem Kegelschnitte oder der complementären Geraden $a_i a_k$ entsprechen machen. Aber hierdurch ist die Transformation bestimmt und man muss einem anderen Punkte a_2 entsprechen machen, was bedingt ist.

XVIII. Theorem. *Wenn sich das Septupel $a_1 \ldots a_7$ durch die Collineation in ein anderes verwandelt, das mit $a_1 \ldots a_7$ λ Punkte gemeinsam hat, so hat die entsprechende birationale Transformation $7 - \lambda$ Fundamentalpunkte.*

Beweis. Jedes Paar von entsprechenden Punkten unter $a_1 \ldots a_7$ liefert eine Verkettung in der Characteristik und einer dieser beiden Punkte kann nicht fundamental sein für das eine System.

Um die Doppeltangenten von L_4 nicht berechnen zu müssen, begnüge ich mich hier, über die birationale Transformation durch Vergleichung mit meiner Preisschrift zu entscheiden, indem ich einige Bemerkungen über die Doppeltangenten einflechte. Die aus obiger Übersicht resultirenden L_4 sind:

1.	$X_1^4 + X_2^4 + X_3^4 + X_1^2X_3^2 + X_2^2X_3^2 + X_1^3X_2 + X_2^3X_1$ $+ X_1X_2X_3^2 + X_1^2X_2^2,$		$1, \ 1, \ -1.$
2.	$X_1^4 + X_2^4 + X_1^2X_2^2 + X_3^3X_1 + X_3^3X_2 + X_1^3X_2 + X_2^3X_1,$		$1, \ 1, \ \varepsilon.$
3.	$X_1^4 + X_2^3X_1 + X_3^3X_1 + X_1^2X_2X_3 + X_2^2X_3^2,$		$1, \ \varepsilon, \ \varepsilon^2.$
4.	$X_1^4 + X_2^4 + X_3^4 + X_1^2X_2^2 + X_1^3X_2 + X_2^3X_1,$		$1, \ 1, \ i.$
5.	$X_1^4 + X_2^4 + X_3^4 + X_1^2X_2^2 + X_1X_2X_3^2$		$1, -1, \ i.$
6.	$X_1^4 + X_2^4 + X_1^2X_2^2 + X_1X_3^3,$	$\varepsilon^3 = 1,$	$1, -1, \ \varepsilon.$
7.	$X_1^3X_3 + X_3^3X_2 + X_2^3X_1,$	$\varepsilon^7 = 1,$	$1, \ \varepsilon, \ \varepsilon^3.$
8.	$X_2^4 + X_1^3X_3 + X_3^3X_1,$		$1, \ \sqrt{i}, \ -1.$
9.	$X_3^4 + X_2^3X_1 + X_1^3X_3,$	$\varepsilon^9 = 1,$	$1, \ \varepsilon, \ \varepsilon^3.$
10.	$X_1^4 + X_3^3X_1 + X_4^2,$	$\varepsilon^3 = 1,$	$1, \ i, \ \varepsilon.$

Lemma. Der Identität der Ebene entspricht der involutorische Typus θ_2 (oder J_8).

XIX. Theorem. *Die Curve L_4 n° 1 liefert durch ihre Collineation eine involutorische Transformation von Jonquières.*

Beweis. Unter den Tangenten von X_2 existiren i. A. 4 Doppeltangenten, welche fest bleiben, also ist eine der Transformationen reductibel in der Zahl der Characteristikpunkte. Sie besitzt eine C_3 mit Doppelpunkten, ist also von der Ordnung 3. Dann ist die andere nothwendig eine involutorische Collineation, was anzeigt, dass man auf L_4 ein unabhängiges Septupel finden kann, welches durch die Collineation in sich transformirt ist.

XX. Theorem. *Die Curve L_4 n° 2 liefert durch ihre Collineation den Typus Δ_3 und überdies Γ_6' (cit. Abh.).*

Beweis. Die zwei Transformationen haben ein Büschel invarianter C_e; die Tangente im Punkte X_1 an L_4 ist undulatorisch und invariant. Also ist eine der Transformationen auf 6 Punkte reductibel. Da jene des Indexes 3 eine Curve C_3 mit Doppelpunkten besitzt, welche durch den Punkt geht, welcher der Inflexionstangente entspricht, folgt, dass diese Transformation jene ist, welche man auf 6 Punkte reduciren kann. Der Vergleich mit Tafel I meiner cit. Abh. lehrt, dass die andere Γ_6' ist.

XXI. Theorem. *Die Curve L_4 n° 3 liefert durch ihre Collineation eine ebene Collineation und den Typus Γ_6'.*

Beweis. Die Gerade $x_1 = 0$ ist Doppeltangente und eine Transformation kann also äquivalent gemacht werden einer Transformation mit weniger als 7 Punkten. Es ist leicht zu sehen, dass man mit zwei cyclischen Tripeln von Doppeltangenten ein unabhängiges Septupel ergänzen kann. Die Vertheilung der invarianten C_3, nämlich $C_1 + C_2$ und zwei C_e beweisen dann die Identität der zweiten Transformation mit Γ_6'.

XXII. Theorem. *Die Curve L_4 n° 4 liefert durch ihre Collineation den Typus E_4 und die quadratische Transformation (cc'), a' in b, b' in a.*

Beweis. Das Büschel invarianter C_h enthält vier C_3 mit tacnode. Man kann zwei der Undulationstangenten in das Septupel nehmen, was die

Zahl der Characteristikpunkte einer Transformation um 2 reducirt. Man beweist aber auch, dass man nicht um mehr reduciren kann und also diese Transformation mit ∞^1 involutorischen Paaren in einer C_3 die im Theoreme genannte ist. Die andere Transformation ist ebenso vom Index 4, besitzt ∞^1 Doppelpunkte in einer C_3 und ausserhalb ein involutorisches Paar, entsprechend dem Punkte X_3, das in die Basis eines Büschels von C_h eintritt. Ein Septupel ohne Undulationstangente enthält zwei successive Doppeltangenten und, da die Verkettung der ersten Transformation angehört, besitzt sie einen dreifachen Punkt und ist also sicherlich von der 5. Ordnung etc. So schliesst man auf die Identität mit E_4.

XXIII. Theorem. *Die Curve L_4 n° 5 liefert durch ihre Collineation eine cubische Transformation (ab), (a_1b_1), (a_2b_2), b_3 in a_3, b_4 in a_4 und eine mit (cc'), (ab'), a' in b äquivalente Transformation.*

Beweis. Wegen X_1X_2 besitzen beide Transformationen eine C_k, Ort der involutorischen Paare. In der einen entspricht X_3 ein involutorisches Paar, X_1 und X_2 Paare von Doppelpunkten, in der anderen entspricht X_3 ein Paar von Doppelpunkten und X_1 und X_2 involutorische Paare. Also ist in der ersten die Correspondenz in C_k von der Art $u' + u \equiv \gamma$ und in der letzteren von der Art $u \equiv \gamma$. Diese letztere Transformation kann von der auf p. 223 l. c. beschriebenen nicht verschieden sein und hieraus ergibt sich die andere Transformation.

XXIV. Theorem. *Die Curve L_4 n° 6 liefert durch ihre Collineation zwei Transformationen, welche mit B_6 und Δ_6 äquivalent sind.*

Beweis. $x_1 = 0$ ist eine Undulationstangente, also kann eine Transformation auf 6 Punkte reducirt werden und die Existenz der Ortscurve mit $u' + u \equiv \gamma$ beweist die Äquivalenz mit B_6. Die andere Transformation hat eine C_3 mit $u' - u \equiv \gamma$ und da man Γ_6 nicht erwarten kann, weil der einzige Doppelpunkt von Γ_6 mit zwei Punkten der Charakteristik alineirt ist,[1] muss ein anderer Typus supponirt werden. Ich besitze die Rechnungen, wonach die Zusammensetzung $B_6 . \theta_2$ auf Δ_6 führt, welche Characteristik also constructibel ist und eine C_3 mit $u' - u \equiv \gamma$ besitzt.

[1] Man kann auch (cc'), a' in a_1' in b, b' in b_1' in a nicht erhalten, weil die 6 letzten Punkte immer in einem Kegelschnitte sind und also die D_6 zerfällt.

XXV. Theorem. *Die Curve L_4 n° 7*[1] *liefert durch ihre Collineation mittelst eines anallagmatischen Septupels eine ebene Collineation und die B_{14}.*

Beweis. Dass man ein solches Septupel finden kann, ist leicht zu beweisen und B_{14} ist die Zusammensetzung dieser Collineation mit θ_2.

XXVI. Theorem. *Die Curve L_4 n° 8 liefert durch ihre Collineation die zwei Transformationen (ab'), (bc'), a' in a'_1 in c und (cc'), (ab'), a' in a'_1 in a'_2 in c.*

XXVII. Theorem. *Die Curve L_4 n° 9 liefert durch ihre Collineation die zwei Transformationen B_9 und B_{18}.*

XXVIII. Theorem. *Die Curve L_4 n° 10 liefert durch ihre Collineation die zwei Transformationen B_{12} und B'_{12}.*

Beweis. Die eine ist sicherlich auf 6 Punkte reductibel und die drei Curven C_e, C_h, C_3^3 beweisen, dass sie B_{12} mit einem Doppelpunkte ist. Die andere hat dieselben invarianten C_4 und durch passende Wahl des Septupels kann man B'_{12} erhalten.

Conclusion: *Die existirenden typischen Transformationen mit 7 Punkten, welche nicht Jonquières'sche mit (ab) sind, sind die folgenden:*

$$B'_{12},\ B_{18},\ \Gamma'_6,\ \Gamma''_6,\ \Delta_6,\ E_4,\ \theta_2$$

$$\text{oder } V_{12},\ VI_{18},\ XV_6,\ XVI_6,\ XXIX_6,\ XXXIV_4,\ XLIII_2.$$

Anmerkung. Die Formen 1.—10. enthalten unbestimmte Coefficienten und jede gestattet überdies 273 Septupel (abgesehen von particulären Doubluren). Man erhält also durch Bildung der birationalen Transformationen für alle diese Septupel ∞^λ Systeme von periodischen birationalen Transformationen, welche sich in mehrere Systeme niederen Grades zerlegen.

§ 3. *Die Typen mit 8 Punkten.*

Eine Transformation mit den 8 Punkten $a_1 \dots a_8$ bringt unter den C_3 eine Projectivität hervor, lässt den 9. Scheitel a_9 vollständig invariant

[1] Diese Curve wurde von Herrn Klein in seiner Darstellung der Transformation 7. Ordnung der elliptischen Functionen angetroffen und dann von Herrn Gordan untersucht.

vertauscht je $12 C_3$ mit gleicher absoluter Invariante $S^3 : T^2$ unter einander, transformirt auch die ∞^3 $C_6(a_1^2 \dots a_8^2)$ unter einander und also ihre Jacobische Curve $D_9(a_1^3 \dots a_8^3)$ in sich selbst. Die D_9 hat i. A. keine Singularitäten ausserhalb a_i und also $p = 4$. Daher mit Bezug auf I. Theil XXXVII:

XXIX. Theorem. *Die Curve D_9 eines Büschels von C_3, welches die Characteristik einer birationalen Transformation (ausser Σ_2) zulässt, ist derart special, dass sie eine eindeutige analytische Correspondenz unter ihren Punkten gestattet.*

Lemma. Eine Correspondenz unter zwei elliptischen Curven, welche selbe absolute Invariante $\bar{\omega}$ haben, ist auf zwei Arten bestimmt für willkürliche $\bar{\omega}$, auf 4 oder 6 Arten für $\bar{\omega}^4 = 1$ oder $\bar{\omega}^3 = 1$, sobald man zwei entsprechende Punkte kennt.

XXX. Theorem. *Durch die eindeutige Correspondenz in D_9 sind im A. zwei Transformationen bestimmt, welche ihre Characteristik auf $a_1 \dots a_8$ haben.*

Beweis. Jede C_3 schneidet auf D_9 ein Tripel aus und da D_9 keine andere g_3^1 besitzt, so sind diese Tripel unter einander transformirt. Dies gibt eine lineare Transformation unter den C_3 und man hat für jedes Paar entsprechender C_3 gemäss dem Lemma zweierlei Correspondenzen, bestimmt durch die Schnittpunkte mit D_9. Die Gesammtheit dieser Correspondenzen bildet die 2 Transformationen der Ebene.

Wenn jedoch in Folge besonderer Beschaffenheit von D_9 das C_3-Büschel panharmonisch oder panäquianharmonisch wird, so sind 4 oder 6 Transformationen durch D_9 bestimmt.

2. Das Problem ist also darauf reducirt, die Curven D_9 zu finden, welche eindeutige interne Correspondenzen zulassen. Es ist also passend, D_9 durch eine Normalcurve zu ersetzen, nach Riemannscher Terminologie. Hierzu kann die Transformation unter den Punkten einer Doppelebene und den Paaren der Involution $\Sigma_2(a_1 \dots a_9)$ dienen, vermittelt durch die $C_6(a_1 \dots a_8)$, welche durch ein festes Punktepaar von Σ_2 gehen. Die C_6 schneiden D_9 in 6 Punkten, weshalb die Übergangscurve von der 6. Ordnung sein wird, Z_6. Die C_3^1 durch das feste Punktepaar bildet mit den $\infty^1 C_3$ $\infty^1 C_6$, welche D_9 nur in drei variabeln Punkten schneiden, weshalb

Z_6 einen dreifachen Punkt hat. Aber die C_3^1 schneidet D_9 nur in 3 Punkten, welche die unendlich nahen Punkte des dreifachen Punktes darstellen, weshalb sich C_3^1 in die Gerade verwandelt, in welcher die drei Tangenten des dreifachen Punktes R coincidiren. Die drei Zweige müssen also unter einander eine Osculation haben, oder in R sind zwei dreifache Punkte unendlich nahe gerückt. Also (cf. auch Nöther, Erlanger Berichte 1878).[1]

XXXI. Theorem. *Die Curve D_9 ist derart particulär unter den Curven $p = 4$, dass die Normalcurve Z_6 zwei unendlich nahe dreifache Punkte besitzt.*

3. Man würde die Ordnung bis auf 5 vermindern können, indem man eine quadratische Transposition anwendet, welche zwei unendlich nahe Hauptpunkte in R längs der Tangente in R und den 3. Hauptpunkt willkürlich auf Z_6 hat.

XXXII. Theorem. *Die Curven $p = 0$, $u = 0$ mit $a_1 \dots a_8$ sind durch die zweideutige Transposition in die Kegelschnitte verwandelt, welche in R die Z_6 tangiren und überdies eine dreifache Berührung mit Z_6 haben.*[2]

Denn jede dieser Curven schneidet D_9 in 3 Punkten, etc.

XXXIII. Theorem. *Eine birationale Transformation mit $a_1 \dots a_8$ überträgt sich durch die zweideutige Transposition in eine quadratische Transformation, welche zwei Paare (aa'), (bb') in R längs der Tangente hat und Z_6 in sich transformirt.*

Beweis. Die Geraden der Doppelebene sind verwandelt in Curven C_6 und diese in andere Curven C_6 ausserhalb des transponirenden Netzes und diese gegen die Doppelebene in die beschriebenen Kegelschnitte.

[1] Die wahre Particularität dieser Curve ist neuerdings durch Herrn Schottky im Journal von Crelle, Bd. 103, p. 185: *Über specielle Abel'sche Functionen 4. Ranges* klargestellt worden.

[2] Die Curven $p = 0$, $n = 0$ sind jene, welche Herr Schottky l. c. als $G_{\alpha\beta\gamma}$ (Ordnung 2), $H_{\alpha\beta}$ (Ordnung 3), $J_{\alpha\beta\gamma}$ (Ordnung 4), $K_{\alpha\beta}$ (Ordnung 5), $L_{\alpha 9\pi}$ (Ordnung 6), bezeichnet und für welche die Relationen bestehen $L_{\alpha\beta 9} = F_{\alpha\beta} K_{\alpha\beta}$, $L_{\alpha\beta\gamma} = G_{\alpha\beta\gamma} J_{\alpha\beta\gamma}$, $L_{\alpha\beta\pi} = H_{\alpha\beta} H_{\beta\alpha}$ unter Berücksichtigung von $\Phi = 0$, d. h. im Schnitte mit D_9.

Herr Schottky erwähnt auch am Ende seiner Abhandlung die Darstellung von $\Phi (= D_9)$ als Function von A, B, U, von welcher ich am Ende des I. Theiles gesprochen habe. Ich habe seine Arbeit am 8. Februar d. J. kennen gelernt, während jener Paragraph bereits im Winter 1892 geschrieben war.

4. Das Problem, alle Typen zu finden, ist so reducirt auf das Problem, quadratische Transformationen zu finden, welche eine Curve Z_6 der beschriebenen Art in sich transformiren.

5. Wenn es sich nur um die einzelnen Typen handelt (nicht um die Gruppen) kann man sich auf die Untersuchung von Collineationen beschränken. Denn wegen der Periodicität ist es unmöglich, dass beide Doppelgeraden der Projectivität in R sich in der Tangente vereinigen und ebenso dass beide Doppelpunkte auf einer solchen Doppelgeraden nach R rücken. Ist d ein Doppelpunkt in endlicher Entfernung von R, so wird die quadratische Transposition $RR'd$, wo $RR' = t_r$, die periodische quadratische Transformation in eine Collineation übertragen. Die Curve Z_6 wird in eine Curve derselben Art verwandelt. Man kann sich nicht auf den Fall einer Curve Z_5 mit tacnode beschränken, denn in dem Falle, wo der Index der Transformation auf Z_6 durch 3 theilbar ist, wäre es möglich, dass Z_6 gar keinen Doppelpunkt der quadratischen Transformation trüge und also die Transposition neuerdings Z_6 giebt. Man *muss* sogar andererseits nicht nur die Z_6, sondern gleichzeitig die Z_5 betrachten, denn für einen Index > 3 wäre es möglich, dass alle Doppelpunkte der Transformation auf Z_6 gelegen wären, sodass die Reduction der quadratischen Transformation auf die lineare und der Z_6 auf die Z_5 stets gleichzeitig einträten.

XXXIV. Theorem. *Um die Typen periodischer Transformationen zu finden, muss man die ebenen Collineationen suchen, welche eine Curve Z_6 mit zwei unendlich nahen dreifachen Punkten RR' und jene, welche eine Curve Z_5 mit zwei unendlich nahen Doppelpunkten reproduciren.*

6. Ich wende also das 4. Mal die Methode der canonischen Formen der Collineationen an, u. zw. auf die algebraische Form

$$Z_6 = x_1^3 x_3^3 + x_1^2(x_2^3 x_3 + x_2^2 x_3^2 + x_2 x_3^3 + x_3^4) + x_1(x_2^4 x_3 + x_2^3 x_3^2 + x_2^2 x_3^2 + x_2 x_3^4 + x_3^5)$$
$$+ x_2^6 + x_2^5 x_3 + x_2^4 x_3^2 + x_2^3 x_3^3 + x_2^2 x_3^4 + x_2 x_3^5 + x_3^6 = 0.$$

XXXV. Theorem. *Wenn in Folge der linearen Substitution Z_6 oder Z_5 einen ferneren Doppelpunkt oder in R einen vierfachen Punkt annehmen oder sich zerlegen würde, dient die Form nicht mehr zur Bestimmung einer typischen Transformation mit* 8 *Punkten.*

Beweis. In diesem Falle knüpft sich die birationale Transformation an ein Büschel $a_1 \dots a_8$, dessen D_9 zerlegt ist. Dies hat nur statt für particuläre Lagen dieser Punkte, welche immer erlauben, die Transformation in eine andere zu übertragen, welche einen oder mehrere der Punkte a_i als gewöhnliche Doppelpunkte hat.

Es muss jedoch bemerkt werden, dass man mittelst der D_9 alle Typen, auch jene mit 6 und 7 Punkten herleiten kann. Aber hiezu muss man der Zerlegungen und der Verminderungen des Geschlechtes Rechnung tragen. Denn es existiren Typen, wo man nicht 1, 2 oder 3 unter einander transformirte Punkte hinzufügen kann und von solcher Lage, dass die zu den 8 Punkten gehörige Curve sich nicht zerlege. Diesen Typen entsprechen dann die degenerirten Fälle, welche also in der folgenden Übersicht Platz finden müssten.

1. $x_1 : -x_2 : -x_3 \dots x_1^3\varphi_3 + x_1\varphi_5 \,\|\, x_1^2\varphi_4 + \varphi_6 \,\|.$

2. $x_1 : \quad x_2 : -x_3 \dots x_1^3x_3^3 + x_1^2(x_2^3x_3 + x_2x_3^3) + x_1(x_2^4x_3 + x_2^2x_3^3 + x_3^5)$
$$+ x_2^5x_3 + x_2^3x_3^3 + x_2x_3^5 \,\| \dots$$

3. $x_1 : -x_2 : \quad x_3 \dots X_1^3X_3^3 + X_1^2(X_2^2X_3^2 + X_3^4) + X_1(X_2^4X_3 + X_2^2X_3^3 + X_3^5)$
$$+ X_2^6 + X_2^4X_3^2 + X_2^2X_3^4 + X_3^6 \,\| \dots$$

4. $x_1 : \quad \varepsilon x_2 : \quad \varepsilon x_3 \dots X_1^3X_3^3 + X_2^6 + X_2^5X_3 + X_2^4X_3^2 + X_2^3X_3^3 + X_2^2X_3^4$
$$+ X_2X_3^5 + X_3^6 \,\| \dots$$

5. $x_1 : \quad x_2 : \quad \varepsilon x_3 \dots X_1^3X_3^3 + X_1^2X_2X_3^3 + X_1X_2^2X_3^3 + X_2^6 + X_2^3X_3^3 + X_3^6 \,\| \dots$

6. $x_1 : \quad \varepsilon x_2 : \quad x_3 \dots X_1^3X_3^3 + X_1^2X_2^3X_3 + X_1X_2^3X_3^2 + X_1X_3^5 + X_2^6$
$$+ X_2^3X_3^3 + X_3^6 \,\| \dots$$

7. $x_1 : \quad \varepsilon x_2 : \quad \varepsilon^2 x_3 \dots X_1^3X_3^3 + X_1^2X_2^2X_3^2 + X_1(X_2^4X_3 + X_2X_3^4) + X_2^6$
$$+ X_2^3X_3^3 + X_3^6 \,\| \dots$$

8. $x_1 : \quad ix_2 : \quad x_3 \dots x_1^3x_3^3 + x_1^2x_3^4 + x_1x_3^5 + x_3^6 + x_1x_2^4x_3 + x_2^4x_3^2 \,\| \dots$

9. $x_1 : \quad x_2 : \quad ix_3 \dots x_1^3x_3^3 + x_1^2x_2x_3^3 + x_1x_2^2x_3^3 + x_2^3x_3^3 + x_1x_2^3x_3^2 \,\| \dots$

10. $x_1 : -x_2 : \quad ix_3 \dots x_1^3x_3^3 + x_1^2x_2^3x_3 + x_1x_2^2x_3^3 + x_2^5x_3 + x_2x_3^5 \,\| \dots$

11. $x_1 : \quad ix_2 : -ix_3 \ldots . x_1^3x_3^3 + x_1^3x_2^2x_3 + x_1x_2^3x_3^2 + x_1x_2x_3^4 + x_1x_3^5 \,\| \ldots$

12. $x_1 : \quad ix_2 : \; -x_3 \ldots . X_1^3X_3^3 + X_1X_3^5 + X_1^2X_2^2X_3^2 + X_2^2X_3^4 + X_2^6 \,\| \ldots$

13. $x_1 : -ix_2 : \quad ix_3 \ldots . x_1^3x_3^3 + x_1(x_2^3x_3^2 + x_2x_3^4) \,\| \ldots$

14. $x_1 : \quad \varepsilon x_2 : \; \varepsilon^2 x_3 \ldots . X_1^3X_3^3 + X_1^2X_2^2X_3^2 + X_1X_2^4X_3 + X_2X_3^5 + X_2^6 \,\| \ldots$
$\varepsilon^5 = 1.$

15. $x_1 : \quad \varepsilon x_2 : \; \varepsilon^3 x_3 \ldots . x_1^3x_3^3 + x_2^2x_3^4 \,\| \ldots \qquad \varepsilon^5 = 1.$

16. $x_1 : \quad \varepsilon x_2 : \; \varepsilon^4 x_3 \ldots . x_1^3x_3^3 + x_1^2x_2^3x_3 + x_2^4x_3^2 \,\| \ldots \qquad \varepsilon^5 = 1.$

17. $x_1 : \quad \varepsilon x_2 : \quad x_3 \ldots . x_1^3x_3^3 + x_1^2x_3^4 + x_1x_3^5 + x_2^5x_3 + x_3^6 \,\| \ldots$

18. $x_1 : \quad x_2 : \; \varepsilon x_3 \ldots . x_1^3x_3^3 + x_1^2x_2x_3^3 + x_1x_2^2x_3 + x_2^3x_3^3 \,\| \ldots$

19. $x_1 : \quad x_2 : -\varepsilon x_3 \ldots . x_1^3x_3^3 + x_1^2x_2x_3^3 + x_1x_2^2x_3^3 + x_2^3x_3^3 \,\| \ldots \qquad \varepsilon^3 = 1.$

20. $x_1 : -\varepsilon x_2 : \; \varepsilon x_3 \ldots . X_1^3X_3^3 + X_2^6 + X_2^4X_3^2 + X_2^2X_3^4 + X_3^6 \,\| \ldots \qquad \varepsilon^3 = 1.$

21. $x_1 : -\varepsilon x_2 : \; \varepsilon^2 x_3 \ldots . X_1^3X_3^3 + X_2^6 + X_1X_2^4X_3 + X_1^2X_2^2X_3^2 + X_3^6 \,\| \ldots \qquad \varepsilon^3 = 1.$

22. $x_1 : -\varepsilon x_2 : \quad x_3 \ldots . X_1^3X_3^3 + X_1X_3^5 + X_2^6 \,\| \ldots \qquad \varepsilon^3 = 1.$

23. $x_1 : \quad \varepsilon x_2 : -\varepsilon x_3 \ldots . x_1^3x_3^3 + x_2^5x_3 + x_2^3x_3^3 + x_2x_3^5 \,\| \ldots \qquad \varepsilon^3 = 1.$

24. $x_1 : \quad \varepsilon x_2 : -\varepsilon^2 x_3 \ldots . x_1^3x_3^3 + x_1x_2^4x_3 + x_2^3x_3^3 \,\| \ldots \qquad \varepsilon^3 = 1.$

25. $x_1 : -x_2 : \quad \varepsilon x_3 \ldots . X_1^3X_3^3 + X_2^6 + X_1X_2^2X_3^3 + X_3^6 \,\| \ldots \qquad \varepsilon^3 = 1.$

26. $x_1 : \quad \varepsilon x_2 : \; \varepsilon^i x_3 \ldots .$ gibt keine irreductible Form. $\qquad \varepsilon^7 = 1.$

27. $x_1 : \quad ix_2 : \; \sqrt{i}\, x_3 \ldots .$ sowie alle mit dem Index 8 liefern reductible Formen.

28. $x_1 : \; \varepsilon^i x_2 : \; \varepsilon^k x_3 \ldots .$ gibt keine irreductible Form. $\qquad \varepsilon^9 = 1.$

29. $x_1 : -\varepsilon x_2 : \; \varepsilon^2 x_3 \ldots . x_1^3x_3^3 + x_1^2x_2^2x_3^2 + x_1x_2^4x_3 + x_2^6 \,\| \ldots \qquad \varepsilon^5 = 1.$

30. $x_1 : \; i\varepsilon x_2 : \; -x_3 \ldots . X_1^3X_3^3 + X_2^6 + X_1X_3^5 \,\| \ldots \qquad i^2 = -1, \quad \varepsilon^3 = 1.$

31. $x_1 : \; \varepsilon\eta x_2 : \; \varepsilon\eta^2 x_3 \ldots . X_1^3X_3^3 + X_2^6 + X_2X_3^5 \,\| \ldots \qquad \varepsilon^3 = 1, \quad \eta^5 = 1.$

Invariante Z_5, welche in Betracht zu ziehen sind, finden sich 5, welche ich gleich an die hier folgende Übersicht als 14—18 anschliesse. So entstehen also die folgenden Formen Z_6, Z_5 mit Correspondenzen:

1. $X_1^3X_3^3 + X_1^2(X_2^2X_3^2 + X_3^4) + X_1(X_2^4X_3 + X_2^2X_3^3 + X_3^5) + X_2^6 + X_2^4X_3^2$
$+ X_2^2X_3^4 + X_3^6.$ $\qquad x_1 : -x_2 : x_3.$

2. $X_1^3X_3^3 + X_2^6 + X_2^5X_3 + X_2^4X_3^2 + X_2^3X_3^3 + X_2^2X_3^4$
$+ X_2X_3^5 + X_3^6.$ $\qquad x_1 : \varepsilon x_2 : \varepsilon x_3.$

3. $X_1^3X_3^3 + X_1^2X_2X_3^3 + X_1X_2^2X_3^3 + X_2^6 + X_2^3X_3^3 + X_3^6.$ $\qquad x_1 : x_2 : \varepsilon x_3.$

4. $X_1^3X_3^3 + X_1^2X_2^3X_3 + X_1X_2^3X_3^2 + X_1X_3^5 + X_2^6 + X_2^3X_3^3 + X_3^6.$ $\qquad x_1 : \varepsilon^2 x_2 : \varepsilon x_3.$

5. $X_1^3X_3^3 + X_1^2X_2^2X_3^2 + X_1(X_2^4X_3 + X_2X_3^4) + X_2^6$
$+ X_2^3X_3^3 + X_3^6$ $\qquad x_1 : \varepsilon x_2 : \varepsilon^2 x_3.$

6. $X_1^3X_3^3 + X_1X_3^5 + X_1^2X_2^2X_3^2 + X_2^2X_3^4 + X_2^6.$ $\qquad x_1 : i x_2 : -x_3.$

7. $X_1^3X_3^3 + X_1^2X_2^2X_3^2 + X_1X_2^4X_3 + X_2X_3^5 + X_2^6.$ $\qquad \eta^5 = 1,$ $\qquad x_1 : \eta x_2 : \eta^2 x_3.$

8. $X_1^3X_3^3 + X_2^6 + X_2^4X_3^2 + X_2^2X_3^4 + X_3^6.$ $\qquad x_1 : -\varepsilon x_2 : \varepsilon x_3.$

9. $X_1^3X_3^3 + X_2^6 + X_1X_2^4X_3 + X_1^2X_2^2X_3^2 + X_3^6.$ $\qquad x_1 : -\varepsilon x_2 : \varepsilon^2 x_3.$

10. $X_1^3X_3^3 + X_2^6 + X_1X_3^5.$ $\qquad x_1 : -\varepsilon x_2 : x_3.$

11. $X_1^3X_3^3 + X_2^6 + X_1X_2^2X_3^3 + X_3^6.$ $\qquad x_1 : -x_2 : \varepsilon x_3.$

12. $X_1^3X_3^3 + X_2^6 + X_1X_3^5.$ $\qquad x_1 : i\varepsilon x_2 : -x_3.$

13. $X_1^3X_3^3 + X_2^6 + X_2X_3^5.$ $\qquad \eta^5 = 1,$ $\qquad x_1 : \varepsilon\eta x_2 : \eta x_3.$

14. $X_1^3X_3^2 + X_1X_2^2X_3^2 + X_2^5 + X_2X_3^4.$ $\qquad x_1 : -x_2 : i x_3.$

15. $X_1^3X_3^2 + X_1^2X_3^3 + X_1X_3^4 + X_2^4X_1 + X_2^4X_3.$ $\qquad x_1 : i x_2 : x_3.$

16. $X_1^3X_3^2 + X_2^5 + X_3^4X_2.$ $\qquad x_1 : -\varepsilon x_2 : i\varepsilon x_3.$

17. $X_1^3X_3^2 + X_2^5 + X_1^2X_3^3 + X_1X_3^4.$ $\qquad \eta^5 = 1.$ $\qquad x_1 : \eta x_2 : x_3.$

18. $X_1^3X_3^2 + X_2^5 + X_1X_3^4.$ $\qquad x_1 : \varepsilon x_2 : -x_3.$

Um aus diesen Formen die Transformationen zu erschliessen, welche einem Büschel angehören, dessen D_9 die hier definirte Correspondenz trägt, kann man so vorgehen, dass man die dreifach berührenden Kegelschnitte rechnet, unter ihnen ein unabhängiges Octtupel wählt und die Vertauschung dieser Kegelschnitte durch die oben erwähnte lineare Transformation verfolgt. Statt der Rechnung bediene ich mich einiger Merkmale, welche über die Identität mit den l. c. gefundenen Typen entscheiden; namentlich: wenn eine der unveränderlichen Geraden durch R x_2^6 liefert, bezeichnet dies eine C_3^3, wenn $x_1^3 + x_2^3$, bezeichnet dies eine C_e.

Hier bietet sich jedoch eine wesentliche Schwierigkeit, welche bei 7 Punkten nicht vorhanden war. Es existirt immer eine Transformation mit den 8 Punkten a_1, welche als Index das Doppelte des Indexes der Correspondenz V in D_9 hat. Diese Transformation ist nicht immer die Zusammensetzung von Σ_2 mit einer Transformation, welche denselben Index wie V hat. Dies hat nur dann statt, wenn der letztere Index ungerade ist. Ich erhalte also die folgende Vertheilung der Formen 1° bis 18° auf die Typen.

XXXVI. Theorem. *Die Curven D_9, welche in eindeutiger Beziehung auf die Curven Z: 1 — 6, 8 — 13, 16 — 17 eindeutige Correspondenzen tragen, liefern mit ihren 8 dreifachen Punkten auf die in Theorem XXX beschriebene Art periodische birationale Transformationen, welche respective äquivalent sind den folgenden Typen: I_4; N_3 und E_6; Δ_3 und E_6; Collineation und E_6''; Δ_8; H_9 und H_6; B_6 mit zwei Doppelpunkten und H_6^1; B_{24}; B_{15} und B_{30}; E_4 und Transformation von Jonquières; Z_5 und Γ_{10}; B_{20}.*

Es ist hieraus ersichtlich, dass man die Formen 3. und 4., 7. und 17., 12. und 16. als äquivalent betrachten muss, u. zw. auf Grund des oben zum Theorem XXXIV hervorgehobenen Umstandes. Es ist nämlich in diesen Fällen ein in sich transformirtes Büschel von Kegelschnitten vorhanden, welches durch die Transposition in ein in sich transformirtes Geradenbüschel verwandelt wird, wodurch eine Collineation mit anderen Doppelverhältnissen erscheinen kann.

Conclusion. *Die isolirten typischen Transformationen, welche in der Ebene construirt werden können, sind die folgenden:*

$$B_6,\ B_9,\ B_{12},\ \Delta_3,\ \Gamma_6,\ B_{12}',\ B_{14},\ B_{18},\ \Gamma_6',\ \Gamma_6'',\ \Delta_6,\ E_4,\ \theta_2,\ B_{15},\ B_{20},\ B_{24},$$
$$B_{30},\ \Gamma_{10},\ \Gamma_{12},\ \Delta_8,\ E_6,\ E_6',\ E_6'',\ Z_5,\ H_6,\ H_6^1,\ I_4,\ N_3,\ \Sigma_2.$$

§ 4. *Eine Abänderung der vorhergehenden Methode.*

In den in § 3 discutirten Collineationen war stets eine Doppelgerade vorhanden, welche das Bild einer $C_6(a_1^2 \dots a_8^2)$ ist. Die Collineation, welche ∞^1 Doppelpunkte in dieser Geraden hat, kann keinen Index > 3 haben und die birationalen Transformationen werden ein Büschel anallagmatischer C_3 besitzen, sind also N_3 und E_6. Abgesehen von dieser E_6 wird es hinreichen, eine Curve $D_6(a_1^2 \dots a_8^2)$ mit eindeutiger Correspondenz zu untersuchen. Durch diese Correspondenz ist die birationale Transformation der Ebene bestimmt, indem durch sie die Projectivität unter den C_3 und die Correspondenz unter den Punkten zweier successiven C_3 geleitet wird. Demnach:

XXXVII. Theorem. *Alle periodischen Transformationen mit* 8 *Punkten sind durch eine invariante Curve* C_6 *mit* 8 *Doppelpunkten bestimmt.*

Indem man C_6 mittelst der C_3 durch 7 der Punkte a überträgt, erhält man eine C_4 mit Doppelpunkt, wobei die birationale Transformation nicht mehr in eine birationale Transformation übertragen wird. Jedoch kann man sagen: Jede Correspondenz in einer C_4 mit Doppelpunkt ist in einer ebenen birationalen Transformation enthalten.

§ 5. *Andere Methode für die Ableitung typischer Transformationen mit* 7 *oder* 8 *Punkten.*

Wenn man einen Typus mit 6 Punkten kennt, welcher einen Doppelpunkt d_1 besitzt oder einen Typus mit 5 Punkten, welcher zwei Doppelpunkte oder ein involutorisches Paar besitzt und man eine Transformation θ_2 mit $a_1 \dots a_6, d_1$ oder $a_1 \dots a_5, i_1 i_2$ anwendet, erhält man eine typische Transformation mit 7 Punkten. Ein Beispiel war im § 2: B_6 und d_1 gibt mit θ_2 die Δ_6.

Wenn man einen Typus mit 7 Punkten kennt, welcher einen Doppelpunkt d_1 besitzt oder einen Typus mit 6 Punkten, welcher zwei Doppelpunkte oder ein involutorisches Paar besitzt oder mit 5, welcher drei Doppelpunkte oder ein involutorisches Paar und einen Doppelpunkt oder ein cyclisches Tripel besitzt, und man eine Involution Σ_2 mit diesen 8 Fundamentalpunkten anwenden kann, wird die Zusammensetzung eine Transformation eines neuen Typus sein.

In der Anwendung muss man darauf achten, dass die neuen Punkte keine particulären Lagen haben, damit die Transformation θ_2 oder Σ_2 sich nicht zerlege. Wenn z. B. d_1 der Doppelpunkt einer $C_3(a_1 \ldots a_7)$ ist, wird $\Sigma_2\ (a_1 \ldots a_7, d_1)$ sich zerlegen, weshalb man also Σ_2 nicht an B_{14} anwenden kann.[1] Da die Typen mit 7 Punkten mit aller Sicherheit gefunden sind, bleibt nur Σ_2 anzuwenden. Es ist hiezu nöthig:

XXXVIII. Theorem. Σ_2 *ist mit jeder Transformation vertauschbar, welche alle Charakteristikpunkte unter den* 8 *Punkten von* Σ_2 *hat.*

Beweis. Diese letztere transponirt das C_3 Büschel in sich selbst, also a_9, aber auch die Involutionen $u' + u \equiv \gamma$ in Involutionen $u' + u \equiv \gamma$ und ihre Doppelpunkte in Doppelpunkte, also alle Involutionen des Büschels in sich, daher Σ_2 in sich.

1. B_{12} mit einem involutorischen Paare liefert mit Σ_2 eine zu B'_{12} mit einem Doppelpunkte äquivalente Transformation.

2. Γ'_6 mit Doppelpunkt liefert mit Σ_2 eine zu (ab'), $(a'b)$, c' in c nebst cyclischem Tripel äquivalente Transformation, was sich widerspricht.

3. Γ_6 und involutorisches Paar liefert mit Σ_2 Äquivalenz zur Collineation und die 8 Punkte müssten in dieser Collineation ein Cyclus und 2 Doppelpunkte sein. In der That findet sich l. c. p. 225, dass das involutorische Paar conconisch mit 4 Punkten von Γ'_6 ist.

4. Δ_6 mit Doppelpunkt liefert mit Σ_2 Äquivalenz zu B_6 mit involutorischem Paare, was sehr interessant ist, da auch B_6 und d_1 mit θ_2 die Δ_6 liefert.

5. E_4 und Doppelpunkt liefert mit Σ_2 Äquivalenz zu (cc'), a' in b, b' in c nebst Doppelpunkte und involutorischem Paare.

---

[1] Diese Thatsache erweist sich öfters als identisch damit, dass man in einer periodischen Transformation des Indexes i einen Cyclus voraussetzt, dessen Index kein Divisor von i ist. So z. B. wenn man zu Γ''_6 einen Doppelpunkt hinzunimmt, kann die Zusammensetzung mit Σ_2 in Δ_3 nebst einem involutorischen Paare übertragen werden, was sich widerspricht. Das rührt davon her, dass die Doppelpunkte von Γ''_6 theils Spitzen von C_3^3, theils mit 2 Characteristikpunkten alineirt sind.

6. (ab'), (bc'), a' in a'_1 in c mit d_1, d_2 liefert durch Zusammensetzung mit θ_2 eine Transformation, welche äquivalent ist zu (ab'), (bc'), a' in a'_1 in c mit $i_1 i_2$.

7. H_6 mit Σ_2 liefert wieder eine zu H_6 äquivalente Transformation, wie man rasch mit Hilfe der Invarianz von $m - \nu$ (Cf. Crelles J., Bd. 114, p. 68) entscheidet.

8. B_6 und zwei Doppelpunkte liefert mit Σ_2 eine zu H_6^1 äquivalente Transformation, welche also existirt.[1]

Anmerkung. Man kann die Anzahl der Typen vermindern, indem man nicht als Typen betrachtet: 1. Die Zusammensetzungen zweier vertauschbarer Typen, sodass nur übrig bleiben B_9, Δ_8, Z_5, E_4, I_4, N_3, Δ_3, Σ_2, θ_2, die Collineationen und die Jonquièreschen Transformationen des Indexes 2^a. 2. Die durch Coordination der Cyklen eines anderen Typus entstehenden Typen, sodass nur übrig bleiben Z_5, N_3, Δ_3, Σ_2, θ_2, die Collineationen und die involutorischen Typen von Jonquières. Man kann diese die Architypen nennen.

§ 6. *Die zweideutige Abbildung des quadratischen Kegels.*

Der Methode des § 3 kann ein anderer Ausdruck gegeben werden. Die in R die Z_6 berührenden Kegelschnitte bilden ein ∞^3 System und man kann sie durch die Ebenen eines linearen R_3 darstellen. Dann liefern die Geraden durch R die Geraden eines Kegels, dessen Scheitel das Bild der Tangente RR' ist. Die dreifach berührenden Kegelschnitte haben als Bilder dreifach berührende Ebenen einer Curve ρ_6 auf dem Kegel und die quadratischen Transformationen des Theorems XXXIII sind durch die Collineationen in R_3 dargestellt, welche den Kegel und die ρ_6 reproduciren und man kann sie durch stereographische Projection des Kegels erhalten. Umgekehrt:

XXXIX. Theorem. *Die Collineationen des R_3, welche den quadratischen Kegel und gleichzeitig eine cubische Fläche reproduciren, liefern durch die*

[1] Die Begründung, welche ich in der Preisschrift gegeben, und Crelles J., Bd. 114, p. 105 n. 5 reproducirt habe, ist bis zum Schlusse richtig, wo aber eben die Verträglichkeit der gefundenen Bedingungen, also die Existenz von XL_6 gefolgert werden muss.

zweideutige Abbildung des Kegels die typischen Transformationen mit 8 Punkten oder auch alle isolirten typischen Transformationen.

Wir haben also bereits drei algebraische Gebilde, welche durch ihre Correspondenzen zu den ebenen periodischen Transformationen führen: Die Curve C_6, die C_4 mit Doppelpunkt, der quadratische Kegel zusammen mit einer cubischen Fläche.

§ 7. *Die unicursalen Flächen, welche in einer Collineation des Raumes invariant sind.*

1. Die Methode des § 1 gestattet die folgende Verallgemeinerung. Wenn eine Collineation des Raumes eine Fläche reproducirt, welche eindeutig auf eine Ebene abbildbar ist und man die in der Fläche enthaltene Vertauschung auf die Ebene abbildet, erhält man eine birationale Transformation u. zw. eine periodische, wenn die Collineation periodisch ist. Umgekehrt:

XL. Theorem. *Jede periodische birationale Transformation kann als Bild einer collinearen Umwandlung auf einer Fläche betrachtet werden, welche in einem Raume R_r enthalten ist.* [1]

Beweis. Man kann arithmetisch und geometrisch beweisen, dass jede periodische Transformation ein lineares System von Curven mit demselben Periodicitätsindex reproducirt, dessen Dimension willkürlich gross gemacht werden kann. Dieses System dient zur Abbildung der Fläche des Theoremes. Ebenso:

XLI. Theorem. *Jede periodische birationale Transformation des R_i kann als Bild einer collinearen Umwandlung unter den Punkten einer Mannigfaltigkeit M_i^k (i Dimensionen, Ordnung k) in einem Raume R_r erhalten werden.*

XLII. Theorem. *Wenn verschiedene Abbildungsarten einer Mannigfaltigkeit M_i^k verschiedene Transformationen liefern, sind letztere unter einander*

[1] Es gibt zwei Corollare dieses Theoremes: I. Ein Cyclus einer periodischen Transformation des R_r ist stets die Projection eines collinearen Cyclus in einem noch höheren Raume. II. Die Cyclen in $u' - u \equiv \gamma$ einer elliptischen Curve sind stets die Projectionen collinearer Cyclen eines höheren Raumes.

birational äquivalent und die Transposition wird nach der Methode von Sturm erhalten.[1]

Beweis. Jedes Punktepaar von T_1 entspricht algebraisch einem Punktepaare in M_i^k und dieses einem Paare der zweiten Transformation T_2. Unter T_1 und T_2 besteht also eindeutige Beziehung und sie ist auch eindeutige Transformation unter den zwei Trägern R_i, indem diese als Zusammensetzung der 1. Abbildung von M_i^k mit der 2. Abbildung des R_i auf den M_i^k erscheint.

2. Wenn man für R_r eine Form in $x_1 \ldots x_{r+1}$ kennt, welche eindeutig auf einen R_{r-1} unabhängig von der Natur der Coefficienten abbildbar ist, wie im R_3 die cubischen quaternären Formen, so kann man sehr leicht die Methode der canonischen Formen der Collineationen anwenden, um die M_{r-1} auszulesen, welche durch eine Collineation reproducirt werden, und hiemit birationale Transformationen im R_{r-1} zu finden.[2] Als Beispiel diene:

XLIII. Theorem. *Die Schnittmannigfaltigkeit von zwei M_{r-1}^2 im R_r ist eindeutig abbildbar auf einen linearen R_{r-2}, wenn $r > 3$.*

Beweis. Ich bediene mich der eindeutigen Abbildung einer der zwei M_{r-1}^2 und construire die Bilder der Schnitte mit den anderen M_{r-1}^2 des R_r. Diese $M_{r-2}^{2.2}$ mit Doppel M_{r-3}^2 sind abbildbar, was man beweist, indem man ein Fundamentaltheorem von Nöther über die Flächen, welche Schaaren rationaler Curven enthalten, auf M_i verallgemeinert. Ebenso kann man die folgenden Theoreme beweisen:

Der Schnitt von drei M_{r-1}^2 im R_r ist eindeutig abbildbar auf eine Ebene (und gestattet also die Anwendung der Methode der canonischen Collineationen), wenn $r > 5$.

Von einem gewissen Minimalwerthe von r angefangen ist der Schnitt von k M_{r-1}^2 im R_r eindeutig auf einen R_{r-k} abbildbar. Bis zu einem gewissen Maximum von r ist der Schnitt von $r-k$ M_{r-1}^2 des R_r abbildbar.

XLIV. Theorem. *Die Typen mit 7 Punkten sind die Bilder von collinearen Umwandlungen auf Flächen 8. O. des linearen Raumes R_6.*

---

[1] Dies gilt auch für mehrdeutige Transformationen in M_i^k.

[2] Dies gilt auch noch für M_i im $R_{i+\lambda}$.

Beweis. Die Curven $C_6(a_1^2 \ldots a_7^2)$ schneiden sich gegenseitig in 8 Punkten und haben die Dimension 6; sie dienen zur Abbildung der genannten Fläche.

XLV. Theorem. *Die Typen mit 8 Punkten sind die Bilder von collinearen Umwandlungen auf Flächen 9. O. des R_6.*

Beweis. Die Curven $C_9(a_1^3 \ldots a_8^3)$ schneiden sich gegenseitig in 9 Punkten und haben die Dimension 6, etc.

XLVI. Theorem. *Jede Collineation des R_3, welche eine abbildbare M_2^n reproducirt, reproducirt auch eine cubische Fläche oder eine Fläche 6. O. oder eine M_2^n mit $(n-2)$-facher Geraden, falls das Abbildungssystem nicht ein vollständiges aus $x_1^i x_2^k x_3^l$ linear zusammengesetztes ist.*

Beweis. Dies ist ein anderer Ausdruck des Äquivalenztheoremes. Denn die Collineation des R_3 ist durch die Punktsysteme in der M_2 individualisirt, woraus folgt, dass wenn eine ebene Transformation gleichzeitig zwei verschiedene Curvensysteme reproducirt und man beide Systeme zur Construction von zwei Collineationen im R_3 verwendet, diese zwei Collineationen dieselben sein müssen.

3. Ein wichtiger Fall sind die Formen 2. Grades. Hat man im R_r eine M_{r-1}^2 mit einer Hermiteschen Substitution, so kann man eine stereographische Projection auf den R_{r-1} machen, um eine quadratische Transformation zu erhalten, deren M_{r-3}^2 coincidiren, während die Scheitel S', S verkettet sind.[1] Für ungerades r hat man gemäss der Determinante $+1$ oder -1 zwei Arten von quadratishen Transformationen, indem jedesmal die Kegel SC, $S'C'$ in Collineation sind, aber in der einen Art die $R_{\frac{r-1}{2}}$ jedes Systemes von C den $R_{\frac{r+1}{2}}$ durch S' entsprechen, welche C im selben Systeme schneiden, in der anderen Art den $R_{\frac{r+1}{2}}$ durch S', welche C im anderen Systeme schneiden. Die stereographische Projection liefert eine particuläre Transformation, wenn M_{r-1}^2 singulär ist. Hat sie einen Doppel-R_i, so hat auch die fundamentale M_{r-3}^2 einen Doppel-R_i und jede Gerade, welche diesen R_i schneidet, ist in eine Gerade verwandelt, welche

[1] Cf. meine Note in den Rendiconti des R. Ist. Lomb. 8. November 1894 *Sopra le trasformationi quadratiche periodiche nello spaziö a r dimensioni.*

den Doppel-R_i des anderen R_r schneidet. Wenn M^2_{r-1} einen Doppel-R_{r-4} hat, so zerlegt sich M^2_{r-3}. Wenn M^2_{r-1} einen Doppel-R_{r-3} hat, so ist M^2_{r-3} ein doppelgezählter R_{r-3}. Das homaloïdale System besteht dann in ∞^{r-1} Hyper-$(r-2)$ Kegeln, welche den R_{r-3} als gemeinsamen Berührungsraum haben. Wenn der Transformirte des stereographischen Centrums mit dem Doppelraume des Kegels M^2_{r-1} in einem erzeugenden Raume ist, so ist das Centrum S der quadratischen Transformation unendlich nahe an M^2_{r-3}.

5. Die bekannte Clebschische Abbildungsart der F_3 durch windschiefe Projection ist zu verallgemeinern auf ein ∞^2 lineares System windschiefer Curven, welche die Fläche und die Ebene in einem variabeln Punkte treffen, was bereits Herr Sturm angebahnt hat.

XLVII. Theorem. *Jede homaloïdale Fläche gestattet die Abbildung auf eine Ebene mittelst einer windschiefen Projection durch Raumcurven eines* ∞^2 *Systemes.* (Cf. § 13. n. 3.)

Der Beweis wird wie folgt geführt werden können. Die Fläche ist die Projection einer gewissen Normalfläche, welche ich mir nebst der Ebene im selben R_r denke. Dann gibt es zwar i. A. keinen R_3, welcher beide enthält, wohl aber eine M_3, welche monoïdal ist und beide enthält. Diese Mannigfaltigkeit wird durch die projicirenden Cliffordschen Räume in Raumcurven eines Systemes getroffen wie jenes, von welchem das Theorem spricht. Ich verhehle nicht, dass dieser Beweis den Unterschied zwischen homaloïdaler und abbildbarer Fläche nicht ins rechte Licht stellt.

6. Das Theorem XLI. tritt an die Seite einer Methode von Sturm und gibt Anlass zu einigen Betrachtungen, welche ich nicht unterdrücken will. Sturm bedient sich zweier windschiefer Projectionen derselben F_3 auf zwei Ebenen, um unter diesen eine birationale Transformation zu erzielen. Für die periodischen Transformationen kann man an eine Anwendung dieser Methode nicht denken. Ich will aber beiden Methoden einen gemeinsamen Ausspruch geben, indem ich sie verallgemeinere: Man transformirt eine abbildbare M^n_i in eine andere $M^{n'}_i$ durch eine wenn auch nur einfach rationale Transformation der umgebenden Räume und bildet beide M_i auf zwei R_i ab. Diese zwei R_i werden so durch eine

birationale Transformation verknüpft sein. Lässt man die M_i und die R_i je zusammenfallen, so erhält man die zwei Methoden, je nachdem man die Systeme auf M_i identisch macht, die beiden Abbildungsarten aber verschieden lässt, oder die beiden Abbildungsarten identisch macht, aber die beiden Systeme auf M_i verschieden lässt. Ein Übergang wäre also, beides verschieden anzunehmen.

7. Ein wesentlicher Fortschritt erscheint dann, wenn man beide Abbildungen als Theile einer Transformation denkt, welche den ganzen umgebenden linearen Raum beherrscht, insofern dies möglich ist. Eine Transformation Q_1 führt R_i in eine M_i^n, eine Q_2 M_2^n in $M_i^{n'}$ und Q_3 die $M_i^{n'}$ in R_i'. Das Resultat $Q_1 Q_2 Q_3$ ist die birationale Transformation $R_i R_i'$, welche aber nun in einer Transformation zwischen zwei R_r enthalten ist. Um das Verfahren von VERONESE, welches eine nicht ganz vollendete Verallgemeinerung der Methode von STURM auf R_r ist, als speciellen Fall hievon zu erhalten, hat man die Projection durch eine birationale Transformation der zwei Räume zu definiren, welche M_i^n und den R_i umgeben, in welchen projicirt wird.

XLVIII. Theorem. *Man kann jede centrale Projection einer M_i^n in R_r auf einen R_i als Bestandtheil einer birationalen Transformation des ganzen Raumes definiren.*[1]

Beweis. Man kann in jedem projicirenden Raume die beiden Punkte als einander entsprechend in einer sogar nicht ganz bestimmten Collineation betrachten.

IL. Theorem. *Man kann jede windschiefe Projection einer M_i^n auf einen R_i, welche durch ein lineares System von M_{r-i}, welche M_i^n und R_i in je einem Punkte schneiden, geleitet wird, als in einer birationalen Transformation des ganzen Raumes R_r enthalten betrachten, gewiss in dem Falle, wo die M_{r-i} jede ∞^{r-i} eindeutige Correspondenzen gestatten.*

[1] Es ist nicht möglich, in der Ebene jede rationale Curve durch birationale Transformation der Ebene in jede andere zu verwandeln. Ebenso ist im R_3 nicht jede abbildbare Fläche und im R_r nicht jede abbildbare M_{r-1} homaloïdal. Aber mit Hilfe des obigen Satzes beweist man:

Irgend zwei eindeutig bezogene M_i haben die Correspondenz enthalten in einer eindeutigen Transformation zweier Räume R_r, wo r ein gewisses Minimum haben wird.

Hieraus folgt auch, dass wenn eine Transformationen ein invariantes Büschel von M^2_{r-1} hat, sie birational übertragbar in eine andere ist, welche ein invariantes Büschel von R_{r-1} hat. Und das Theorem: Wenn eine Transformation ein lineares ∞^i System von M^2_{r-1} mit einem gemeinsamen Punkte invariant lässt, ist sie birational übertragbar in eine andere, welche ein lineares ∞^i System von R_{r-i} invariant lässt.

§ 8. *Vereinfachung der vorigen Methode.*

Die vollständigen invarianten Curvensysteme werden i. A. nicht die Dimension 3 haben. Aber für eine effective und periodische Transformation gilt, dass die Collineation unter den ∞^i Curven eines Systemes immer auch ein invariantes ∞^3 System hervorruft. Also:

L. Theorem. *Jede periodische birationale Transformation kann als Bild einer collinearen Umwandlung unter den Punkten einer abbildbaren M^n_2 des R_3 betrachtet werden.*

In den meisten Fällen reducirt sich gleichzeitig die Ordnung der M_2, was ich in zwei wichtigen Fällen nachweisen will.

1. Für 7 Punkte bilden die $C_6(a_1^2 \dots a_7^2)$ durch 3 invariante Punkte $d_1 d_2 d_3$ ein ∞^3 System und bilden eine M^5_2 mit $7 + 21 + 21 + 7 = 56$ Kegelschnitten ab. Die C_3 durch $a_1 \dots a_7$, $d_i d_k$ bilden drei gegen einen Punkt convergirende Doppelgeraden ab. Die Anwendung der Methoden von Clebsch und Nöther ist ohne Schwierigkeit. Es sind dann die Collineationen zu suchen, welche eine solche M^5_2 reproduciren. Man kann so das 5. Mal die Methode der canonischen Collineationen anwenden, indem man die M^5_2 unter der Form mit willkürlichen Coefficienten schreiben kann:

$$x_4^2 x_1 x_2 x_3 + x_4(x_2^2 x_1^2 + x_3^2 x_1^2 + x_1^2 x_2^2 + x_1^2 x_2 x_3 + x_2^2 x_1 x_3 + x_3^2 x_1 x_2) + x_1^2 x_2^2 x_3$$
$$+ x_2^2 x_3^2 x_1 + x_3^2 x_1^2 x_2 + x_1^3 x_3^2 + x_1^3 x_2^2 + x_2^3 x_1^2 + x_2^3 x_3^2 + x_3^3 x_1^2 + x_3^3 x_2^2 = 0.$$

2. Für 8 Punkte bilden die $C_9(a_1^3 \dots a_8^3)$, welche doppelt durch einen invarianten Punkt der Transformation gehen, eine M^5_2 des R_3 ab. Die C_3

durch $a_1 \ldots a_8$, d ist das Bild einer Doppelgeraden, welche vielmehr cuspidal ist, a_9 das Bild eines dreifachen biplanaren Punktes der Fläche, welche $8 + 28 + 56 + 56 + 56 + 28 + 8 = 240$ windschiefe C_3 enthält, die eine Configuration bilden, welche ein treues Abbild der von den Fundamentalcurven mit den 8 Punkten a gebildeten Configuration ist.

3. Die $C_9(a_1^3 \ldots a_8^3, \dot{d}_1 d_2 d_3)$ bilden eine M_2^6 in R_3 ab und wenn man $d_1 d_2 d_3$ auf einer A_3 des Büschel nimmt, kann man noch einen Punkt d_4 hinzufügen, so dass die Fläche M_2^5 wird. A_3 ist Bild eines dreifachen uniplanaren Punktes, die C_3 durch d_4 Bild einer Doppelgeraden δ_4. Die osculirende Ebene in A schneidet M_2^5 in δ_4 und drei einfachen Geraden g_1, g_2, g_3 durch A. Wenn durch d_4^2 nicht ein Büschel von C_6 geht, so sind alle C_3 in Ebenen durch δ_4 inflectiv in A an δ_4 und der unendlich nahe Punkt ist das Bild von a_9. Die Gleichung der Fläche ist in diesem Falle

$$x_4^2 x_1^3 + x_4 x_2^2 x_3 \varphi_1(\overset{1}{x_2}, \overset{1}{x_3}) + x_2 x_1^3 \varphi_2(\overset{1}{x_1}, \overset{1}{x_2}, \overset{1}{x_3}) = 0,$$

sodass man ein 6. Mal die canonischen Collineationen anwenden kann.

§ 9. *Die Flächen M_2^n mit $(n-2)$-facher Geraden, welche durch eine Collineation reproducirt werden.*

Die Abbildung geschieht durch eine ∞^3 System von Curven $C_n\ a^{n-2}$ durch $3n-4$ einfache Punkte, eine $C_{n-1}\ a^{n-3}$ bildet die $(n-2)$-fache Gerade ab. Die Gleichung ist

$$(1)\quad x_3^2\varphi^{n-2}(x_1, x_2) + x_1^2\varphi_1^{n-2}(x_1, x_2) + x_1 x_3 \varphi_2^{n-2}(x_1, x_2) + x_1 x_4 \varphi_3^{n-2}(x_1, x_2) + x_4\varphi_4^{n-2}(x_1, x_2) + \varphi_5^n(x_1, x_2) = 0.$$

Die Discriminante der Form in λ, nachdem $x_1 = \lambda x_2$ gesetzt wurde, liefert die Ebenen der zerlegten Kegelschnitte. Eine birationale Transformation, welche das ∞^3 System reproducirt, ist das Bild einer Collineation, welche M_2^n reproducirt und umgekehrt.

LI. Theorem. *Die typischen Transformationen mit (ab) sind Bilder von collinearen Umwandlungen eines Punktesystemes in M_2^n mit $(n-2)$-facher Geraden.*

Denn jede solche Transformation besitzt ein invariantes ∞^3 System von C_n a^{n-2}. Man kann also ein 7. Mal die Methode der canonischen Collineationen anwenden, welche die (1) reproduciren sollen.

2. Dass die Collineation periodisch sein muss, folgt daraus, dass die $3n-4$ Tangentenebenen unter einander transformirt sein müssen und ihre Berührungspunkte ersichtlich nicht in einer Geraden, aber auch wegen der Anzahl der Tangenten an die Schnittcurve von M_2^n mit dieser Ebene nicht in einer Ebene sein können.

Die Curve C_{n-1} a^{n-3} kann sich in m Geraden und eine Curve C_{n-m-1} a^{n-3-m} zerlegen, bis zu $m=n-4$. In diesem Falle hat die Fläche M_2^n eine $(n-2)$-fache Gerade mit m stationären Tangentenebenen und $n-m-2$ variabeln Tangentenebenen. In (1) werden φ_1 und φ_2 einen gemeinsamen Factor m Grades haben.

Ziehen wir endlich die Schlussfolgerung aus den §§ 1 und 4—9:

LII. Theorem. *Jede periodische birationale Transformation ist das Bild einer collinearen Umwandlung unter den Punkten einer Fläche* 3. *oder* 5. *O. oder n. O. mit* $(n-2)$*-facher Geraden im* R_3.

§ 10. *Die durch eine rationale Transformation des umgebenden Raumes invarianten abbildbaren Flächen.*

1. Unter den Punkten zweier abbildbarer Flächen oder unter den Punkten einer einzigen besteht eine Unendlichkeit eindeutiger Correspondenzen.

Sei L das Abbildungssystem von M_2^n und sei durch die ebene birationale Transformation, welche das Bild der Correspondenz auf M_2^n ist, L in ein System L_1 verwandelt, dem auf M_2^n ein System Λ entsprechen möge. Nach dem Restsatze sind die Curven von Λ corresidual und es existirt ein ∞^3 System von Flächen, welche die Λ als Restcurven ausschneiden und welche, geleitet durch die Correspondenz auf M_2^n, eine einfach rationale Transformation bestimmen, welche in M_2^n diese Correspondenz hervorruft. Wenn das Flächensystem in speciellen Fällen homaloïdal ist, so ist diese Transformation birational für den ganzen Raum.[1]

Diese Methode, Transformationen zu construiren, welche eine gegebene abbildbare Fläche reproduciren, ist ganz verschieden von jener, eine gegebene abbildbare Fläche in ein ∞^3 homaloïdales System einzureihen. Sie erstreckt sich auf *alle* Flächen, während diese nur die homaloïdalen trifft. Sie kann einerseits dienen, um die periodischen Transformationen des Raumes zu construiren und andererseits, um ebene periodische Transformationen zu entdecken. Das erste Verfahren existirte bereits in der Ebene, aber das zweite war ohne Werth, da das Resultat im binären Gebiete $p = 0$ kein anderes als die binären Projectivitäten sein konnte. Sogar die nicht abbildbaren M_i der R_r gestatten die Anwendung dieser Methode, sofern man nur die Geometrie ihrer Curven kennt. Ein Beispiel hat man in den C_3, cit. Abh. I. Theil.

2. Eine Anwendung der Methode im zweiten Sinne ist die folgende. Man kann Reciprokaltransformationen [2] finden, welche eine gegebene Fläche 2. Ordnung reproduciren, z. B. indem man mit F_2 eine C_4 $(p = 0)$ 2. Art und dann mittelst der Methode des § 4 der Preisschrift eine Transformation construirt, welche C_4 reproducirt, und in Folge dessen auch F_2. Man kann auch eine Transformation construiren, welche C_4 $(p = 1)$ reproducirt, und hiemit das Büschel von F_2 und also zwei dieser F_2, welche Kegel sein können.

Ebenso ist es möglich, Flächen F_4 mit Doppelgeraden zu construiren, welche invariant in einer Reciprocaltransformation sind. Sie müssen mindestens zwei Doppelpunkte besitzen. Eine Plückersche Complexfläche kann invariant sein in einer Reciprocaltransformation, welche in jedem Raume

---

[1] Dieselbe Methode lässt sich auch noch für M_{r-1} im R_r anwenden; indem ja der Restsatz auch für M_{r-1} gilt. Man kann sogar genau so vorgehen, um Transformationen zu finden, welche eine gegebene abbildbare M_i des R_r reproduciren. Für jede abbildbare M_{r-1} oder M_i wird man sich die Frage stellen müssen, welcher der niedrigste Rang einer Transformation sei, in welcher eine Correspondenz in M_{r-1} oder M_i als Bestandtheil enthalten sein kann.

Der Grundgedanke dieser Methode ist schon in meiner Note in den Comptes Rendus vom 5. Januar 1885 gegeben. Im November 1893 bemerkte ich, dass dieselbe Methode auf einige Specialfälle von Dom. Montesano, Atti dell' Istituto Veneto, 1888, p. 1425, angewendet ist, ohne irgend einer Erwähnung meiner Note zu begegnen.

[2] Ich nenne so die Transformation $x_i' = \frac{1}{L_i}$, wo L_i homogene lineare Function der x.

zwei Gegenkanten hat, die die Doppelgerade schneiden und die 8 Fundamentalpunkte in den 8 Doppelpunkten der Fläche.[1]

3. Um diesen Gedankengang weiter zu führen, sei bemerkt, dass wie in der Ebene auch im R_r der Satz besteht, dass eine abbildbare M^n_{r-1} im R_r nur dann durch eine birationale Transformation in sich übergeführt werden kann, wenn M^n_{r-1} einen Bestandtheil eines ∞^k Systemes bildet, wo k ein Minimum und dass allgemein das Minimum des Ranges einer solchen Transformation von den Zahlen p, u der Systeme abhängt, in welche M^n_{r-1} als solche eintreten kann.

LIII. Theorem. *Jede birationale Correspondenz unter den Punkten einer homaloïdalen M_2 des R_3 ist in unendlich vielen birationalen Transformationen des R_3 enthalten.*

Beweis. Es existirt wenigstens eine birationale Transformation T, welche die M_2 in eine Ebene überführt und die Correspondenz in eine birationale Transformation der Ebene. Th. LV beweist, dass diese in einer Unendlichkeit von birationalen Raumtransformationen enthalten ist, welche durch T^{-1} die Transformationen des Theoremes geben.

LIV. Theorem. *Jede quadratische Transformation Q^2 der Ebene ist in einer Unendlichkeit cubischer Transformationen mit 4 Fundamentalpunkten und in einer Unendlichkeit cubischer Transformationen mit 4 Fundamentalgeraden und von quadratischen Raumtransformationen enthalten.*

Beweis. Man überzeugt sich zuerst, dass diese Transformationen Ebenenpaare mit Q^2 gestatten und construirt sie dann gemäss der Angabe.

LV. Theorem. *Jede birationale Transformation der Ebene ist in einer Unendlichkeit birationaler Transformationen des Raumes enthalten.*[2]

---

[1] Denn die 8 Fundamentalpunkte bilden eine Configuration von MÖBIUS, für welche die Doppelgerade von F_4 eine der Schröterschen Geraden ist. Cf. SCHRÖTER, Journal für Mathematik, Bd. 91.

[2] Wenn es nicht auf den Satz LIV ankommt, kann man LV sofort für R_r beweisen. Die R_{r-1} eines Büschels mögen birationale Transformationen enthalten, welche sämmtlich Projectionen eine unter ihnen sind; dann ist die Gesammtheit eine birationale Transformation des R_r

Beweis. Man zerlegt die ebene Transformation in Q^2 und construirt für jede eine der Transformationen aus LIV. Deren Zusammensetzung gibt die gewünschte Transformation. Hieraus:

LVI. Theorem. *Jede birationale Transformation des Raumes, welche eine Ebene in eine Ebene mit nicht degenerirter Correspondenz verwandelt, ist zusammensetzbar durch eine Reihe elementarer Transformationen, welche* 1) *Transformationen mit zwei collinear und* 2) *Transformationen mit zwei quadratisch bezogenen Ebenen sind.*

Die Transformationen 1) und 2) sind in endlicher Zahl von Arten vorhanden, welche man *elementare* Arten nennen kann, und wir erhalten das wichtige Resultat:

Die Transformationen unseres Theoremes sind alle zusammensetzbar durch Transformationen einer beschränkten Anzahl von elementaren Arten. Ich beweise ferner:

LVII. Theorem. *Jede Transformation des R_3, welche ich oben elementar genannt habe, ist in einer Unendlichkeit von birationalen Transformationen des R_4 enthalten und jede dieser in einer Unendlichkeit von Transformationen des R_5 u. s. w. und schliesse hieraus:*

LVIII. Theorem. *Jede Transformation des R_r, welche einen R_{r-1} in einen R_{r-1} eigentlich verwandeln kann, und in diesem einen R_{r-2} in einen R_{r-2} u. s. w., endlich einen R_2 in einen R_2, ist zusammensetzbar durch Transformationen einer beschränkten Anzahl von Arten, welche man elementar nennen kann.*

4. Es möge noch die Methode der n° 1 im ersten Sinne u. zw. auf die Transformationen mit 7 und 8 Punkten angewendet werden. Ein ∞^3 System von C_3 durch 6 der 7 Punkte, wird in ein System von Curven der Ordnung $3m - \Sigma y_i$ verwandelt werden. Für die Fundamentalsysteme mit 6 Punkten kann man die 6 Scheitel auf die 6 Fundamentalpunkte bringen und die C_3 werden in C_3'' durch 5 der Scheitel und durch den 7. Punkt verwandelt werden, welche auf F_3 biquadratische Curven durch einen festen Punkt P von F_3 liefern. Indem man die C_3' durch eine C_3^4 ergänzt, welche a_6^2 enthält, erkennt man, dass die C_4 mit einem festen Kegelschnitte den Schnitt von F_3 mit F_2 durch P und diesen Kegelschnitt

bilden, also eine birationale Transformation liefern. Ähnlich für die Fundamentalsysteme mit 5 Punkten und für die Transformationen mit 8 Punkten in der Characteristik.

Jede Transformation mit 7, 8 Punkten ist das Bild zweier birationaler Systeme auf einer cubischen Fläche des R_3, welche durch eine Unendlichkeit monoïdaler Transformationen des R_3 reproducirt wird, deren zwei Centren coincidiren oder verkettet sind und deren Fundamentalcurve sich zertheilen kann, oder durch Transformationen mit $(n-2)$-facher Fundamentalgeraden.

§ 11. *Das Bild der typischen Transformationen auf den cubischen Flächen.*

Für die Transformationen mit 7 Punkten kann ein anderer Weg als der in § 10 verfolgt werden, indem man die F_3 von einem Punkte P in ihr auf die Ebene Π projicirt denkt. Man construirt eine F_3, welche die gegebene Curve 4. Ordnung liefert und verlangt die Correspondenz auf F_3, welche von P aus in die Collineation auf Π projicirt ist. Sei $4t_1t_3-t_2^2=0 \ldots 1)$ eine der unendlich vielen Darstellungen von L_4 in dieser Form; $x_4^2t_1+x_4t_2+t_3^2=0 \ldots 2)$ wird eine cubische Fläche der genannten Lage sein. Um F_3 zu construiren, schneidet man den Kegel $P(L_4)$ mit einer Fläche Φ_2, welche die Geraden von P nach den Berührungspunkten von t_1 mit L_4 enthält. Der Kegel $P(L_4)$ und die Fläche $(\Phi_2)^2$ bestimmen ein Büschel, welches auch Pt_1 und die gewünschte Fläche vereinigt enthält. Indem man nun die Collineation in Π vom Centrum P aus auf F_3 projicirt, erhält man zwei birationale Transformationen auf F_3, von welchen die eine die Zusammensetzung der anderen mit der centralen Involution P ist. Hiebei ist es wegen § 10 nothwendig, sich gegenwärtig zu halten, dass diese Involution in keiner monoïdalen cubischen Transformation enthalten ist, welche die Projection Λ_6 der L_4 auf die F_3 als Fundamentalcurve hätte.

Man findet durch die Discussion der Typen, dass unter den zwei Correspondenzen auf F_3 stets eine ist, welche in einer Collineation des R_3 enthalten ist. Ich bemerke noch, dass man mit dieser Discussion eigentlich eine 2-deutige Abbildung der F_3 auf die Ebene Π durchführt.

§ 12. *Die Methode der Büschel von Curven* 3. *O. für die typischen Transformationen.*

1. Die isolirten Typen sind dadurch ausgezeichnet, dass jede von ihnen wenigstens ein invariantes Büschel von C_3 besitzt. Ich will daher auf das Problem eingehen, a posteriori die Transformationen zu bestimmen, welche ein Büschel von C_3 reproduciren. Dies führt zu zwei Discussionen:

I. Wenn ein Büschel von C_3 bekannt ist, auf eindeutige Art in jeder Curve eine Correspondenz so zu bestimmen, dass das Resultat eine Transformation gibt, wo alle C_3 invariant sind.

II. Jene Büschel von C_3 zu finden, welche unter den C_3 eine binäre Projectivität gestatten, und unter je zwei successiven C_3 eine Correspondenz auf eindeutige Art festzusetzen, sodass die Wiederholung der erhaltenen Transformation auf eine der Art I. führt.

A. Die Büschel von Curven 3. Ordnung.

2. Eine genaue, hier erforderliche Kenntnis der Büschel verlangt, die Probleme zu lösen:

III. Alle Büschel zu bestimmen, welche unter einander durch die Alineationen und Berührungen differiren, d. h. welche durch Collineationen nicht äquivalent sind.

IV. Alle Büschel zu bestimmen, welche durch birationale Transformation nicht äquivalent sind.

Die absolute Invariante der Curve $L + \lambda M = 0$ ist von Wichtigkeit und indem man setzt

$$k = 24 \frac{(1 - \alpha + \alpha^2)^3}{(1 + \alpha)^2(2 - \alpha)^2(1 - 2\alpha)^2}$$

liefert die Gleichung $S^3 - kT^2 = 0$ 12 Werte von λ. Die C_3 mit gleicher absoluter Invariante bilden Gruppen einer Involution 12. O., der fundamentalen Involution, welche 6 Doppelelemente für die C_h und 4 dreifache Elemente für die C_e und 8 Doppelelemente für willkürliche α hat. Für das syzygetische Büschel entsprechen diese 8 Elemente den 4 Wendedreiecken. Die Discriminante $D^8(k)$ bestimmt die Natur des Büschels. Wenn $S_\lambda = 0$ oder $T_\lambda = 0$ Doppelelemente absorbiren, muss man mehrere der Coefficienten von

$$S_\lambda = S_L \lambda^2 + \Phi_1 \lambda^3 + \Phi_2 \lambda^2 + \Phi_3 \lambda + S_M,$$
$$T_\lambda = T_L \lambda^6 + \Psi_1 \lambda^5 + \Psi_2 \lambda^4 + \Psi_3 \lambda^3 + \Psi_4 \lambda^2 + \Psi_5 \lambda + T_M$$

gleich Null setzen. Eine Reduction im Grade der Involution ist nur möglich, wenn eine Curve existirt, welche der absoluten Invariante einen von k unabhängigen Factor gibt, d. h. eine Curve mit unbestimmter absoluter Invariante.

LIX. Theorem. *Jede C_3^3 des Büschels absorbirt* 2 *Curven der Invariante* k, 1 *Curve C_e und* 1 *Curve C_h, jede Z_{12} (Kegelschnitt nebst einer seiner Tangenten), absorbirt* 3 *Curven C_k,* 2 *Curven C_h,* 1 *C_e, jede Z_{111} (drei convergente Geraden) absorbirt* 4 *C_k,* 2 *C_h und* 2 *C_e.*

Die Curven Z_{11} (Doppelgerade nebst einfacher Geraden) und Z_1 (dreifache Gerade) vermindern den Grad der Involution um 6 und 8.

Es müssten nun alle Fälle, wo die vielfachen Punkte von $Z_3 = C_3^3$, Z_{111}, Z_{11}, Z_1 mit den Basispunkten coincidiren und die Reductionen der fundamentalen Involution aufgezählt werden. Man müsste ferner die Classification der Basisconfiguration mit der Classification der fundamentalen Involution combiniren. Von besonderer Wichtigkeit sind die Büschel mit constanter absoluter Invariante u. zw. nach Weglassung jener lediglich mit Z_{11} und Z_1, sind es diese:

	$6Z_3$	$3Z_{111}$	$2Z_{11}$	$4Z_{12}$	$Z_1 + Z_{111}$	$Z_1 + 2Z_3$	$Z_{11} + 2Z_{12}$
C_h	6	6	6	8	6	6	7
C_e	6	6	4	4	8	5	4

	$Z_{11} + 3Z_3$	$Z_{111} + 4Z_3$	$2Z_{111} + 2Z_3$	$3Z_{12} + 2Z_3$	$2Z_{12} + 3Z_3$
C_h	6	6	6	8	7
C_e	5	6	5	5	5

	$Z_{12} + Z_{111} + Z_3$	$Z_{111} + 2Z_{12} + Z_3$
C_h	6	7
C_e	5	5

Diejenigen Combinationen, wo beide Zahlen die Normalzahlen 6, 4 überschreiten, können nicht geometrisch existiren. Indem man diese Combinationen ausschliesst, bleiben: [1]

Panharmonisch $4Z_{12}$, $Z_{11} + 2Z_{12}$, $2Z_{12} + 3Z_3$

Panäquianharmonisch $6Z_3$, $3Z_{111}$, $Z_1 + Z_{111}$, $Z_1 + 2Z_3$, $Z_{11} + 3Z_3$, $Z_{111} + 4Z_3$.

Das grösste Interesse knüpft sich an das Büschel $6Z_3$. Ich gebe einige Eigenschaften desselben:

LX. Theorem. *Die Seiten der* ∞^1 *Hesseschen Dreiecke umhüllen eine Curve* Γ^3 *und die Scheitel erfüllen eine Curve* D_3. *Die zwei Curven berühren sich in den 6 Spitzen des Büschels, schneiden sich überdies in 6 Punkten auf den 6 Cuspidaltangenten und haben ein- und umgeschriebene Dreieckslage. Die Curve* Γ^3 *ist mit einer anderen* C_3 *die Jacobische Curve des Büschels von* C_4, *welche sich in den 6 Spitzen berühren. Die Geraden, welche die Punkte von* D_3 *mit den Berührungspunkten der gegenüberliegenden Tangenten verbinden, sind Tangenten von* Γ^3.

B. Die Correspondenzen.

Nachdem man die 5 Correspondenzen entdeckt hat, ist das Problem I zu lösen. Um $u' + u \equiv \gamma$ in den Curven des Büschels zu construiren, hat man verschiedene Wege: 1) Man bestimmt sie durch das Centrum, welches in einem Basispunkte oder in den Schnittpunkten der C_3 mit einer rationalen Curve genommen werden kann. 2) Durch ein Paar entsprechender Punkte. Diese können zwei Basispunkte sein (was θ_2 gibt) oder einer ein Basispunkt und der andere in den Schnittpunkten der C_3 mit einer rationalen Curve oder alle zwei in zwei Schnittpunkten der C_3 mit zwei rationalen Curven. 3) Durch einen Doppelpunkt. Dieser kann ein Scheitel sein (Σ_2) oder gelegen in den Schnittpunkten der C_3 mit einer rationalen Curve. Es ist interessant, diejenigen Fälle zu untersuchen,

[1] Das einzige Büschel mit constanter absoluter Invariante k ist, wenn k willkürlich, wie mir resultirt, das Büschel, wo eine Inflexionstangente und die drei Berührungspunkte der vom Inflexionspunkte ausgehenden Tangenten gemeinsam sind. Diese 4 Tangenten bestimmen das Doppelverhältnis.

wo die Doppelpunkte zwei Curven erfüllen, von welchen jede die C_3 in zwei Punkten schneidet.

Um $u' + u \equiv \gamma$, $u' + \varepsilon u \equiv \gamma$, $u' + \varepsilon u \equiv \gamma$ zu construiren, bedient man sich derselben Arten, indem man darauf achtet, dass $u' + iu \equiv \gamma$, $u' \pm \varepsilon u \equiv \gamma$ nur für panharmonische und panäquiharmonische Büschel anwendbar sind. Ich hebe besonders die Transformation 10. O. hervor, welche entsteht, wenn man mittelst zwei Basispunkten als Paar $u' - u \equiv \gamma$ construirt. Das Äquivalenztheorem von § 2 I. Theil führt nun zum

LXI. Theorem. *Alle Transformationen, welche in Correspondenzen auf den ∞^1 C_3 des Büschels bestehen, sind birational äquivalent Transformationen derselben Art, welche Scheitel des Büschels als Doppelpunkte oder als entsprechende Paare von Punkten haben.*

Gemäss dem letzten Täfelchen verlangen die panharmonischen Büschel eine Alineation unter den Basispunkten und daher können die Transformationen keine Typen mit 8 Punkten sein. Unter den panäquiharmonischen Büscheln ist das einzige, welches Typen mit 8 Punkten liefert, jenes $6Z_3$. Für dieses gilt nun:

LXII. Theorem. *Die Transformation, welche durch die Correspondenzen $u' + \varepsilon u \equiv \gamma$ mit Doppelpunkt auf einem Scheitel des Büschels $6Z_3$ zusammengesetzt wird, ist 5. O. mit der Characteristik γ in c, $a_i\beta_{i+1}$, $\alpha_i b_{i+1}$, also E_6.*

Beweis. Die Transformation wird die 6 Spitzen der C_3^3 als invariante Punkte haben, also insgesammt 7 eigentliche Doppelpunkte. Irgend einer der anderen Scheitel wird in keiner Correspondenz sich selbst entsprechen können, woraus sofort zu schliessen ist, dass die Transformation 5. O. ist. Es ist unmöglich, dass zwei Scheitel ein involutorisches Paar bilden, denn dieses würde wegen den C_3^3 ∞^1 involutorische Paare liefern und die Wiederholung der Transformation würde also ∞^1 Doppelpunkte haben, welche eine Curve der 18. O. erfüllen würden. Da aber 6 Fundamentalpunkte in Coincidenz treten müssen, kann die Ordnung der zweiten Transformation nicht grösser als 7 sein. Die Characteristik muss also in 8 Punkten bestehen und da sie keine uneigentlichen Doppelpunkte haben darf, ist sie unmöglich von anderer Art als γ in c, $a_i\beta_{i+1}$, $\alpha_i b_{i+1}$.

Mittelst des § 2. II. Theil der cit. Abh. beweist man:

LXIII. Theorem. *Wenn ein Scheitel des Büschels $3Z_{111}$ als Doppelpunkt einer Correspondenz $u' + \varepsilon u \equiv \gamma$ genommen wird, werden zwei andere Scheitel ein involutorisches Paar dieser Correspondenzen bilden und die Transformation wird quadratisch: a' in a, b' in b, c' in c.*

C. Methode zur Auffindung der Büschel von C_3 mit particulärer fundamentaler Involution.

1. Für das Problem II muss man die Büschel kennen, welche eine binäre Projectivität unter ihren C_3 gestatten. Es wird sich herausstellen, dass hiezu die Lösung des Problemes IV hinreicht. Da die Gruppen der Involution unter einander transformirt werden müssen, folgt:

LXIV. Theorem. *Die fundamentale Involution muss mit der binären Projectivität unter den C_3 identisch sein oder sie als Bestandtheil enthalten.*

Hiebei sind natürlich die C_e und C_h je unter einander transformirt.

2. Da man eine Correspondenz unter zwei C_3 mittelst eines Paares entsprechender Punkte bestimmen kann, so verificirt sich:

LXV. Theorem. *Wenn man zwei Büschel hat, welche unter einander mittelst einer binären Projectivität der C_3 als Individuen so beziehbar sind, dass die absoluten Invarianten erhalten bleiben, hat man immer eine birationale Transformation der Ebene, welche das eine Büschel in das andere verwandelt.*

Die fundamentale Involution begreift also alle Invarianten der Büschel gegen birationale Transformation in sich. Ich ergänze dieses Theorem durch das andere:

LXVI. Theorem. *Wenn man ein Büschel von C_3 mit einer gewissen fundamentalen Involution hat, kann man jeden der 9 Basispunkte als bestimmenden Doppelpunkt von Correspondenzen auf oder unter den C_3 nehmen und diese 9 Transformationen werden äquivalent sein.*

Beweis. Es existirt immer eine involutorische Transformation, welche das Büschel in sich verwandelt und das involutorische Paar $a_8 a_9$ enthält. Sie überträgt die D_9 für a_8 in die D_9 für a_9 und daher sind die zwei

D_9 birational äquivalent. Aber da die typische Transformation durch die zugehörige Curve D_9 bestimmt ist, sind auch die zwei Transformationen äquivalent.

Der Beweis bleibt aufrecht, insolange D_9 die Transformation bestimmt, was noch für zerlegte D_9 bestehen bleibt, da eine Zerlegung in 9 Geraden, welche die 8 Punkte zu dreien enthalten würden, nicht Statt hat.[1]

3. Wenn eine birationale Transformation ein Büschel von C_3 reproducirt, ist es nicht nothwendig, dass die Transformation periodisch sei. Aber auch in diesem Falle existirt ersichtlich unter den Curven des Büschels eine Projectivität, welche die fundamentale Involution in sich selbst verwandeln muss. Also:

LXVII. Theorem. *Wenn eine aperiodische oder periodische Characteristik mit 9 Punkten diese 9 Punkte in den Scheiteln eines Büschels von C_3 hat, werden die C_3 unter einander durch eine cyclische Projectivität transformirt werden, welche den Index* $\leqq 12$ *hat.*

Ein willkürliches Büschel von C_3 gestattet also keine andere birationale Transformation als jene des Problemes I.

4. Unter der Voraussetzung, dass eine eigentliche C_3 fest bleibt, kann man eine Menge von Characteristiken mit invarianten C_3-Büschel construiren und es wird dann eine blosse Consequenz hievon sein, wenn die C_3 eine solche Vertheilung haben, dass die fundamentale Involution reproducirt ist. Dieses ist also die beste Methode, um *alle* Büschel mit projectiver fundamentaler Involution zu finden, u. zw. in Betracht des Theoremes LXVII. Man bemerke hiebei noch:

LXVIII. Theorem. *Indem man auf ein Büschel von C_3 mit projectiver fundamentaler Involution eine der Constructionen von B. I. II. dieses Paragraphen für Correspondenzen unter zwei aufeinander folgenden C_3 anwendet, wird man i. A. eine aperiodische Transformation erhalten.*

LXIX. Theorem. *Alle Büschel mit projectiver fundamentaler Involution*

[1] Ein ähnlicher Beweis für die Transformationen mit 7 unter den 9 Punkten kann nicht gegeben werden und das Theorem für die Typen, welche mit den Septupeln zu bilden sind, besteht nicht.

sind erhältlich, indem man Transformationen mit 9 Punkten auf einer gegebenen eigentlichen oder uneigentlichen C_3 so aufstellt, dass die 9 Punkte Basis eines Büschels sind.

5. Indem man diese aperiodischen Characteristiken mit 9 Punkten construirt oder rechnet, wird man in den C_3 des Büschels Correspondenzen erhalten, welche nicht periodisch sein können, da die Projectivität unter den C_3 schon periodisch ist. Also muss die Correspondenz $u' - u \equiv \gamma$ werden und eine Wiederholung wird alle C_3 invariant mit $u' - u \equiv \gamma$ haben.

6. Man kann eine wichtige Anwendung dieser aperiodischen Transformationen machen, indem man eine beliebige über 9 Punkten construirt, welche die Basis eines Büschels von C_3 sind,[1] die Natur des Büschels und die binäre Projectivität H studirt. Hernach stellt man eine neue Transformation T auf, so dass man einem beliebigen Basispunkte, indem man jetzt die Identität unter den C_3 verfolgt, die Schnittpunkte mit einer durch die vorausgesetzte Characteristik bestimmten rationalen Curve entsprechen macht.

Indem man die ursprüngliche aperiodische Transformation mit T^{-1} zusammensetzt, erhält man eine Transformation, welche die C_3 gemäss H verwandelt und einen Scheitel invariant lässt und welche folglich periodisch ist. Was die Hilfstransformation T betrifft, kann man sie, sei es mittelst $u' + u \equiv \gamma$, sei es mittelst $u' - u \equiv \gamma$, sei es sogar mittelst $u' + mu \equiv \gamma$ $(m = i\,,\,\varepsilon)$ construiren. Also:

LXX. Theorem. *Alle periodischen Matrixtransformationen*[2] *werden erhalten, indem man aperiodische Transformationen mit 9 Punkten mit einer Transformation der unter B. 2) gefundenen Classe zusammensetzt,* und das wichtige

LXXI. Theorem. *Die besonderen Büschel von C_3, welche invariant sind durch aperiodische Transformationen mit 9 Punkten, sind dieselben als jene, welche invariant sind durch die periodischen Matrixtransformationen.*

LXXII. Theorem. *Umgekehrt erhält man alle existirenden aperiodischen*

---

[1] Der Schluss in n° 5 zeigt, dass alle derartig constructibeln Characteristiken mit den in B. 1) dieses § erhaltenen identisch sein müssen.

[2] Ich nenne so die Transformationen mit weniger als 9 Punkten.

Transformationen mit 9 Punkten, indem man die Matrixtransformationen mit der unter B. 2) entdeckten Classe zusammensetzt.

LXXIII. Theorem. *Es gibt kein anderes Büschel mit projectiver fundamentaler Involution oder panharmonisches oder panäquianharmonisches Büschel als die durch die periodischen Typen gelieferten und also in der cit. Abh. enthaltenen Büschel.*

LXXIV. Theorem. *Es gibt Büschel 6 C_3^3 mit binärer Projectivität eines jeden der Indices 2, 3, 4, 5, 6.*

Beweis. Nach dem Vorhergehenden müsste man eine periodische Transformation mit diesem Büschel haben. Aber unsere Aufzählung sowohl nach der cit. Abh. als nach der Methode gegenwärtiger Arbeit liefert alle diese Büschel.

LXXV. Theorem. *Es gibt kein anderes panharmonisches Büschel mit $4Z_{12}$ als jenes, wo die $4Z_{12}$ ein äquianharmonisches Quadrupel bilden.*

LXXVI. Theorem. *Es gibt kein Büschel ohne Berührung und Alineation, wo zwei Scheitel auf allen C_3 eine elliptische Entfernung $\frac{C}{m}$ hätten.*

LXXVII. Theorem. *Es existirt kein Büschel, wo die Gruppen des Büschels durch Abelsche Gleichungen bestimmt wären, ausgenommen jene, welche durch eine Matrixtransformation invariant sind.*

D. Die Büschel von C_{3s} mit 9 s-fachen Punkten.

Man kann noch die aperiodischen Transformationen verlangen, welche ein Büschel von C_{3s} $(9a^s)$ reproduciren und man wird sie auf einer vorgelegten invarianten C_3 construiren wie für $s = 1$.[1] Jedoch kann man hier nicht mehr in jeder Curve eine Correspondenz wie in B. 1) 2) bestimmen, weil man die s Nachbarpunkte eines Scheitels nicht trennen kann; man gelangt aber zu einer aperiodischen Transformation, welche das Büschel reproducirt, in folgender Weise. Man rechne für jede C_{3s} eine Parametervertheilung die Summe der s Parameter für a_1 und die Summe der s Parameter für a_2, dann die Differenz γ dieser zwei Summen und man wird eindeutig eine Correspondenz $u' - u \equiv \gamma$ auf jeder Curve C_{3s} und

[1] Ich hebe den speciellen Fall hervor, wo die C_3 durch die 9 s-fachen Punkte von C_{3s} in 3 Geraden zerfällt.

in der Gesammtheit dieser Correspondenzen eine birationale Transformation haben. Es ist aber nicht möglich, die übrigen Correspondenzen in diese ∞^1 C_{3s} zu verlegen, da jede derselben einen vereinzelten ausgezeichneten Punkt besitzt, nämlich γ oder $\gamma(1-i)$ oder $2\gamma\varepsilon$ und es aber wegen der Relation $k = 3sn - s\Sigma\alpha = s(3n - \Sigma\alpha)$ für $s > 1$ keine Curve C_n giebt, welche C_{3s} in je nur einem Punkte schneiden würde. Dieselbe Methode wie für $s = 1$ erlaubt ferner, Büschel von C_{3s} $(9a^s)$ mit projectiver fundamentaler Involution und, falls es deren geben würde, panharmonische und panäquianharmonische Büschel zu finden.

§ 13. *Eine Classe mehrdeutiger Transformationen.*

Um den § 8 zu ergänzen, bediene ich mich des Umstandes, dass jeder Typus ein mit gleichem Index invariantes lineares ∞^2 System von Curven besitzen muss und übertrage mittelst dieses Netzes in eine andere Ebene. Ich spreche den Satz gleich für den R_r aus:

LXXVIII. Theorem. *Jede periodische Transformation in R_r kann durch einseitig rationale Transposition in eine periodische Collineation desselben Indexes übertragen werden.*

2. In der cit. Abh. habe ich von der Möglichkeit gehandelt, zwei Ebenen in Correspondenz zu setzen, sodass den Punkten der einen Ebene die Cyclen einer Collineation der anderen entsprechen. Um eine irrige Meinung zu widerlegen, bemerke ich, dass in einer Abhandlung: *Sopra le involuzioni piane* F. Chizzoni, wo er von meiner Preisschrift spricht, vorauszusehen glaubt, die periodischen Transformationen werden Involutionen liefern können, welche nicht eindeutig auf die Punkte einer Ebene beziehbar sind. Indessen kann ich erklären, dass man für jeden Typus ein Netz von Curven finden kann, welche sich gegenseitig in nur einem Cyclus der Transformation schneiden. Also:

LXXIX. Theorem. *Alle periodischen birationalen Transformationen theilen die Ebene in ∞^2 Cyclen, welche eine rationale Involution bilden.*

3. Ich füge bei dieser Gelegenheit hinzu, dass auch der Zweifel

Chizzoni's, welchen er für die ebenen Involutionen i. A.[1] ausspricht, unbegründet ist, denn:

LXXX. Theorem. *Jede Involution in einem linearen Raume R_r oder also in einer abbildbaren M_r^n ist rational, d. h. durch r lineare Parameter darstellbar.*

LXXXI. Theorem. *Jedes algebraische System von Punktgruppen in einem linearen Raume R_r, wo durch jeden Punkt des R_r zwei Punktgruppen bestimt sind, ist rational, d. h. durch r lineare Parameter rational darstellbar.*

Und allgemeiner gilt:

LXXXII. Theorem. *Jede lineare oder quadratische $\infty^{r-i+\lambda}$ Mannigfaltigkeit von M_i^n im R_r ist durch rationale Functionen a $r-i+\lambda$ linearen Parametern darstellbar, auch wenn $\lambda = 0$.*[2]

Neben diese Theoreme stellt sich begründend und weiterführend:

LXXXIII. Theorem. *Jedes in einem linearen R_r enthaltene lineare ∞^i System von M_{r-i} kann als vollständiger Schnitt von i linearen ∞^i Systemen von M_{r-1} angesehen werden.*

Aus LXXXII. folgt insbesondere für $i = 0$:

LXXXIV. Theorem. *Jede Involution k. Stufe in einem linearen R_r oder sogar auf irgend einer Mannigfaltigkeit M_r^n, d. h. ein ∞^{kr} System von Punktgruppen, von welchem durch k Punkte eine einzige Gruppe geht, ist rational (durch rk lineare Parameter darstellbar).*

---

[1] Ich habe von der Abhandlung G. Castelnuovo's *Sulla razionalità delle involuzioni piane* in Math. Annalen Bd. 44 erst am 10. December 1894 hier Kenntniss genommen, bemerke aber sofort, dass in den Sätzen der ersten 6 Nummern ein nicht unwesentlicher Fehler unterlaufen ist. — (Zürich, 26. December 1894.)

[2] Es gilt sogar das allgemeine Theorem: *Für $\lambda > 0$ ist jede in einer nicht abbildbaren (also nicht unicursalen) M_r^n enthaltene Reihe $\infty^{r-i+\lambda}$ von M_i, aus welcher eine oder zwei M_i durch λ Punkte der M_r^n gehen, rational durch $r-i+\lambda$ lineare Parameter darstellbar.*

Dieses Theorem enthält als speciellen Fall das Theorem von F. Enriquez, das sich in C. Segre's *Introduzione alla geometria sopra un ente algebrico semplicemente infinito* (Annali di matematica, ser. II, t. 22) § 6 aufgenommen findet.

4. Die 1-i-deutige Transformation wird in der i-fachen Ebene eine Übergangscurve haben. Es kann nun geschehen, dass diese eine ebene birationale Transformation gestattet, welche sie reproducirt, etwa vom Index i. Indem diese mittelst der 1-i-deutigen Transformation übertragen wird, erhält man in der einfachen Ebene eine periodische Transformation, welche mit der erst gegebenen vertauschbar ist.

Anmerkung. Es bietet sich hier der folgende algebraische Satz dar: Wenn die in einem Curvennetze erscheinende m-deutige Transformation sich in eine birationale und eine andere zerlegt, so zerlegt sie sich sofort in m birationale Transformationen, welche sämmtlich periodisch sind.

Anhang. Es ist nunmehr alles vorbereitet für die Berechnung der algebraischen Formeln der 29 existirenden Typen. Für einige kennt man die Formeln interner Transformationen, welche man also nur zusammenzusetzen hat, wie B_{14} aus Collineation und θ_2. Für einige bediene man sich der Methode des § 5, um die Formeln aus einfacheren zusammenzusetzen. Ähnlich wird man für gewisse Typen vorgehen, deren Characteristik eine durch Formeln einfach auszudrückende Configuration bildet. So sind bereits die Formeln für a' in a, b' in b, c' in c in der cit. Abh. gegeben und durch Zusammensetzung mit Collineationen erhält man die Formeln für B_9 und andere Typen. Wenn endlich die Transformation eine invariante C_3 hat, was immer der Fall ist, und man kennt gründlich die Lage der Punkte auf der C_3, was ich nach den eingehenden Untersuchungen der cit. Abh. behaupten darf, so kann man sie durch Formeln ausdrücken. Auch wenn man nur die Parameter, namentlich auf C_3^3, kennt, kann man hieraus ohne jede Schwierigkeit die Formeln in homogenen Trilateralcoordinaten herleiten.

(Die vorstehende Arbeit war bis auf § 3 des I. und § 10, sowie § 12 C. D. des II. Theiles im Jahre 1885 abgefasst.)

Paris, den 10. Juni 1894.