SUR LES EXPRESSIONS ALGÉBRIQUES

PAR

D. SÉLIVANOFF
à S:t PÉTERSBOURG.

Dans le mémoire posthume *sur la résolution algébrique des équations* ABEL a démontré quelques théorèmes sur les expressions algébriques satisfaisant à l'équation proposée. Les démonstrations d'ABEL ont été complétées et simplifiées par MALMSTEN, KRONECKER et M. SYLOW. Je veux ici reprendre cette question en employant les notations de KRONECKER (Monatsberichte der Berliner Akademie, 1879) et en introduisant quelques modifications et simplifications.

Avant d'aborder la question il est nécessaire de démontrer quelques théorèmes sur les fonctions irréductibles.

§ 1. Pour rendre la rédaction un peu plus simple, supposons que le domaine de rationalité contienne tous les nombres rationnels. Nous indiquerons dans la suite chaque fois quand ce domaine sera élargi après l'adjonction des différentes quantités.

Soit

$$\varphi(t) = 0$$

une équation irréductible, dont les racines sont

$$t_1, t_2, \ldots, t_m.$$

Nous supposons connu le théorème:

Si une fonction entière $F(t)$ avec des coefficients rationnels s'annule pour $t = t_1$, on a

$$F(t) = \varphi(t)\psi(t)$$

et par conséquent

$$F(t_2) = 0, \qquad F(t_3) = 0 \ , \quad \ldots \ , \quad F(t_m) = 0.$$

Ce théorème a aussi lieu, si les coefficients de la fonction $F(t)$ contiennent des quantités dont l'adjonction n'altère pas l'irréductibilité de l'équation $\varphi(t) = 0$.

Nous allons démontrer les cinq théorèmes suivants.

I. *Si une fonction entière $\Phi(x, t_1)$ est irréductible après l'adjonction de t_1, la fonction $\Phi(x, t_k)$ est aussi irréductible après l'adjonction de t_k, k ayant une des valeurs* $2, 3, \ldots, m$.

Supposons qu'on ait

$$\Phi(x, t_k) = \Phi_1(x, t_k) \cdot \Psi_1(x, t_k).$$

En remplaçant t_k par la racine t_1 de l'équation irréductible $\varphi(t) = 0$ on obtient la relation impossible

$$\Phi(x, t_1) = \Phi_1(x, t_1) \cdot \Psi_1(x, t_1),$$

$\Phi(x, t_1)$ étant une fonction irréductible.

II. *Le produit*

$$\Phi(x, t_1)\Phi(x, t_2) \ldots \Phi(x, t_m)$$

est irréductible, s'il ne contient pas de racines multiples et si la fonction $\Phi(x, t_1)$ est irréductible après l'adjonction de t_1.

Le produit

$$\Phi(x, t_1)\Phi(x, t_2) \ldots \Phi(x, t_m) = \mathfrak{F}(x) \tag{1}$$

est une fonction entière en x avec des coefficients rationnels. En décomposant cette fonction en facteurs irréductibles on trouve

$$\mathfrak{F}(x) = \mathfrak{F}_1(x)\mathfrak{F}_2(x) \ldots \mathfrak{F}_\mu(x). \tag{2}$$

La fonction $\mathfrak{F}_1(x)$ a des racines communes avec une fonction irréductible $\Phi(x, t_k)$, k ayant une des valeurs $1, 2, 3, \ldots, m$.

Donc

$$\mathfrak{F}_1(x) = \Phi(x, t_k) \,.\, \Psi(x, t_k)$$

et à cause de l'irréductibilité de l'équation $\varphi(t) = 0$ on a les relations suivantes

$$(3) \qquad \begin{cases} \mathfrak{F}_1(x) = \Phi(x, t_1) \,.\, \Psi(x, t_1), \\ \mathfrak{F}_1(x) = \Phi(x, t_2) \,.\, \Psi(x, t_2), \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \mathfrak{F}_1(x) = \Phi(x, t_m) \,.\, \Psi(x, t_m). \end{cases}$$

Les relations (1) et (3) indiquent que chaque racine de $\mathfrak{F}(x)$ annule $\mathfrak{F}_1(x)$. Il suit de la relation (2) que chaque racine de $\mathfrak{F}_1(x)$ annule $\mathfrak{F}(x)$.

Les mêmes conclusions sont applicables aux fonctions $\mathfrak{F}_2(x)$, $\mathfrak{F}_3(x)$, ..., $\mathfrak{F}_\mu(x)$. Donc

$$\mathfrak{F}(x) = [\mathfrak{F}_1(x)]^\mu$$

et par conséquent

$$(4) \qquad \Phi(x, t_1)\Phi(x, t_2) \dots \Phi(x, t_m) = [\mathfrak{F}_1(x)]^\mu.$$

Si le produit

$$\Phi(x, t_1)\Phi(x, t_2) \dots \Phi(x, t_m)$$

n'a pas de racines multiples, le nombre μ est nécessairement égal à *un* et le théorème énoncé est donc démontré.

M. Frobenius m'a communiqué que la relation (4) se trouve dans un mémoire de Schönemann (Journal de Crelle, t. 31, p. 273). M. Kneser a donné une autre démonstration de cette relation (Mathematische Annalen, t. 30, p. 181).

Supposons qu'une fonction irréductible $f(x)$ devienne réductible après l'adjonction de t_1, c'est à dire que

$$f(x) = \Phi(x, t_1) \,.\, \Psi(x, t_1),$$

$\Phi(x, t_1)$ étant une fonction irréductible.

Dans ce cas l'équation (4) prend la forme

$$\Phi(x, t_1)\,\Phi(x, t_2) \dots \Phi(x, t_m) = [f(x)]^\mu.$$

Les degrés des fonctions $f(x)$ et $\Phi(x, t_1)$ étant n et ν on a la relation

$$m\nu = n\mu.$$

Si n est un nombre premier, il est nécessaire que m soit multiple de n, ν étant plus petit que n.

On peut donc affirmer que

III. *La fonction irréductible du degré premier n ne peut devenir réductible qu'après l'adjonction d'une racine d'une équation irréductible dont le degré est multiple de n.*

La racine du degré n de l'unité satisfait à une équation irréductible dont le degré est inférieur à n. On a donc ce corollaire du théorème III:

La fonction irréductible du degré premier n reste encore irréductible après l'adjonction d'une racine du degré n de l'unité.

Le théorème II peut prendre une autre forme, si la fonction irréductible $\varphi(t)$ a la forme

$$\varphi(t) = t^m - a,$$

m étant un nombre premier.

L'irréductibilité de cette fonction ne sera pas alterée après l'adjonction de ω, racine de l'équation

$$\frac{z^m - 1}{z - 1} = 0.$$

Supposons que la fonction $\Phi(x, t_1)$ reste irréductible après l'adjonction de ω.

Nous allons démontrer que les fonctions $\Phi(x, t_1)$ et $\Phi(x, t_k)$, k ayant une des valeurs $2, 3, \ldots, m$, ne peuvent pas avoir des racines communes, si elles ne sont pas identiques.

Supposons que le plus grand commun diviseur des fonctions $\Phi(x, t_1)$ et $\Phi(x, t_k)$ soit $\Psi(x, t_1, t_k)$.

Une des quantités t_1 et t_k s'exprime par l'autre au moyen de ω. On peut donc écrire

$$\Psi(x, t_1, t_k) = \Psi_1(x, t_1) = \Psi_2(x, t_k).$$

Les fonctions $\Psi_1(x, t_1)$ et $\Psi_2(x, t_k)$ divisent les fonctions irréductibles $\Phi(x, t_1)$ et $\Phi(x, t_k)$. Donc

$$\Psi(x, t_1, t_k) = \Phi(x, t_1) = \Phi(x, t_k).$$

(On suppose que le coefficient de la plus haute puissance de x dans $\Phi(x, t_1)$ soit égal à un.)

Par conséquent le produit

$$\Phi(x, t_1)\Phi(x, t_2) \ldots \Phi(x, t_m)$$

ne peut pas contenir des racines multiples, si les fonctions

$$\Phi(x, t_1), \Phi(x, t_2), \ldots, \Phi(x, t_m)$$

sont différentes entre eux.

On a donc le théorème:

IV. *Le produit*

$$\Phi(x, t_1)\Phi(x, t_2) \ldots \Phi(x, t_m) = \mathfrak{F}(x)$$

est irréductible, si les fonctions

$$\Phi(x, t_1), \Phi(x, t_2), \ldots, \Phi(x, t_m)$$

sont différentes entre eux.

Les nombres $t_1, t_2, \ldots, t_m$ sont ici les racines de l'équation irréductible du degré premier

$$t^m - a = 0.$$

La fonction $\Phi(x, t_1)$ est supposée irréductible après l'adjonction de t_1 et ω, racine de l'équation $\frac{z^m - 1}{z - 1} = 0$.

Nous appliquerons encore le théorème suivant d'ABEL:

V. *Si dans le domaine de rationalité donné l'équation du degré premier*

$$t^m - a = 0$$

est réductible, cette équation a nécessairement au moins une racine contenue dans le même domaine de rationalité.

Supposons que la fonction $t^m - a$ soit divisible par

$$\Psi(t) = t - b_1 t^{p-1} + b_2 t^{p-2} - \ldots + (-1)^r b_p.$$

Le nombre b_p appartenant au domaine de rationalité donné est le produit des racines de l'équation $\Psi(t) = 0$. Donc

$$b_p = a^{\frac{p}{m}} e^{\frac{2h\pi}{m}i},$$

h étant un nombre entier.

Déterminons deux nombres entiers r et s de manière qu'on ait

$$pr - ms = 1.$$

On aura la relation

$$(b_p^r a^{-s})^m = a$$

et par conséquent le théorème est démontré.

Si le domaine de rationalité contient ω, toutes les racines de l'équation réductible

$$t^m - a = 0$$

sont rationnelles.

§ 2. On sait que chaque expression formée avec des radicaux peut être mise sous la forme

$$F(V_1, V_2, \ldots, V_\nu),$$

F étant une fonction entière de $V_1, V_2, \ldots, V_\nu$ avec des coefficients rationnels. Les quantités sont réunies par les relations

$$(1) \qquad \begin{cases} V_1^{n_1} = F_1(V_2, V_3, \ldots, V_\nu), \\ V_2^{n_2} = F_2(V_3, V_4, \ldots, V_\nu), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ V_{\nu-1}^{n_{\nu-1}} = F_{\nu-1}(V_\nu), \\ V_\nu^{n_\nu} = A, \end{cases}$$

où les exposants $n_1, n_2, \ldots, n_\nu$ sont des nombres premiers; $F_1, F_2, \ldots, F_{\nu-1}$ sont des fonctions entières avec des coefficients rationnels des arguments indiqués et A est un nombre rationnel.

L'équation

$$V^{n_\nu} = A$$

a n_ν racines. Une de ces racines est choisie arbitrairement et désignée par V_ν.

Une des racines de l'équation

$$V^{n_{\nu-1}} = F_{\nu-1}(V_\nu)$$

est désignée par $V_{\nu-1}$ et ainsi de suite.

De cette manière tous les radicaux $V_1, V_2, \ldots, V_\nu$ obtiennent des valeurs déterminées: nous désignons par x_1 la valeur de l'expression algébrique qui en résulte.

Donc

$$x_1 = F(V_1, V_2, \ldots, V_\nu). \tag{2}$$

Soient

$$\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_\nu$$

les racines primitives de l'unité des degrés

$$n_1, n_2, \ldots, n_\nu.$$

Si l'équation

$$V^{n_\nu} = A$$

est réductible, la quantité V_ν est rationnelle, ou bien V_ν est exprimable rationnellement par ω_ν. Dans les deux cas V_ν peut être exclue de la *chaîne* des équations (1) et au lieu de V_ν ces équations peuvent contenir ω_ν.

Si cette équation est irréductible on pourra encore adjoindre ω_ν sans altérer l'irréductibilité de cette équation.

Si l'équation

$$V^{n_{\nu-1}} = F_{\nu-1}(V_\nu)$$

est réductible après l'adjonction de V_ν et ω_ν, on pourra exclure le radical $V_{\nu-1}$ des équations de la chaîne (1).

Après avoir exclu de cette manière tous les radicaux *superflus,* nous obtenons un nouveau système d'équations binômes contenant quelques-unes des racines de l'unité $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_\nu$. Exprimons ces racines par des radicaux et éloignons de nouveau les radicaux superflus. Dans la chaîne des équations (1) pourront entrer les racines de l'unité, dont les degrés sont inférieurs à $n_1, n_2, \ldots, n_\nu$. Ces racines de l'unité, nous les exprimerons de nouveau par des radicaux.

Cette opération sera enfin terminée, car la chaîne finale des équations binômes ne peut contenir que quelques-uns des radicaux $V_1, V_2, \ldots, V_\nu$ et des radicaux servant à exprimer les racines de l'unité des degrés $n_1, n_2, \ldots, n_\nu$ et des degrés inférieurs.

On peut donc supposer que les équations binômes de la chaîne

$$V^{n_\gamma} = F_\gamma(V_{\gamma+1}, V_{\gamma+2}, \ldots, V_\nu), \qquad {\scriptstyle (\gamma=1,2,3,\ldots,\nu)}$$

sont irréductibles après l'adjonction de

$$\omega_{\gamma+1}, \omega_{\gamma+2}, \ldots, \omega_\nu, \quad V_{\gamma+1}, V_{\gamma+2}, \ldots, V_\nu.$$

D'après le théorème démontré l'irréductibilité de cette équation sera encore conservée après l'adjonction de ω_γ.

La fonction F_γ a la forme

$$(3) \qquad F_\gamma = U_0 + U_1 V_{\gamma+1} + U_2 V_{\gamma+1}^2 + \ldots + U_{n_{\gamma+1}-1} V_{\gamma+1}^{n_{\gamma+1}-1},$$

les coefficients $U_0, U_1, U_2, \ldots, U_{n_{\gamma+1}-1}$ étant des fonctions entières de $V_{\gamma+2}, V_{\gamma+3}, \ldots, V_\nu$ avec des coefficients rationnels.

L'équation (3) peut être simplifiée en remplaçant $V_{\gamma+1}$ par une autre quantité.

Si U_h est différent de zéro, nous poserons

$$(4) \qquad U_h V_{\gamma+1}^h = W_{\gamma+1}.$$

En élevant les deux membres de cette équation à la puissance $n_{\gamma+1}$, on obtient que $W_{\gamma+1}$ est une racine d'une équation de la forme suivante

$$(5) \qquad W^{n_{\gamma+1}} = F'_{\gamma+1}(V_{\gamma+2}, V_{\gamma+3}, \ldots, V_\nu),$$

$F'_{\gamma+1}$ étant une fonction entière de $V_{\gamma+2}, V_{\gamma+3}, \ldots, V_\nu$ avec des coefficients rationnels.

Déterminons deux nombres entiers r et s de manière qu'on ait

$$hr - n_{\gamma+1}s = 1, \qquad r < n_{\gamma+1}.$$

On déduit de l'équation (4) que

$$U_h^r(V_{\gamma+1}^{n_{\gamma+1}})^s \cdot V_{\gamma+1} = W_{\gamma+1}^r.$$

Il en résulte que

$$V_{\gamma+1} = U' \cdot W_{\gamma+1}^r, \tag{6}$$

U' étant une fonction entière de $V_{\gamma+2}, V_{\gamma+3}, \ldots, V_\nu$ avec des coefficients rationnels.

En introduisant cette valeur de $V_{\gamma+1}$ dans l'expression (3) on obtient

$$F_\gamma = U_0 + W_{\gamma+1} + U_2' W_{\gamma+1}^2 + \ldots + U'_{n_{\gamma+1}-1} W_{\gamma+1}^{n_{\gamma+1}-1}.$$

L'équation (5) reste irréductible après l'adjonction de

$$\omega_{\gamma+2}, \omega_{\gamma+3}, \ldots, \omega_\nu, \quad V_{\gamma+2}, V_{\gamma+3}, \ldots, V_\nu.$$

Dans le cas contraire $W_{\gamma+1}$ serait rationnel en

$$\omega_{\gamma+1}, \omega_{\gamma+2}, \ldots, \omega_\nu, \quad V_{\gamma+2}, V_{\gamma+3}, \ldots, V_\nu;$$

d'après l'équation (6) $V_{\gamma+1}$ serait aussi exprimable par ces mêmes quantités, ce qui est impossible.

Supposons maintenant que dans la série

$$F_\gamma, F_{\gamma+1}, F_{\gamma+2}, \ldots, F_1, F$$

la première fonction qui contienne $V_{\gamma+1}$ soit

$$F_a(V_{a+1}, V_{a+2}, \ldots, V_\nu).$$

Cette fonction a la forme

$$\sum C_{\alpha\beta\ldots\gamma} V_\gamma^\alpha V_{\gamma-1}^\beta \ldots V_{a+1}^\lambda. \qquad \begin{pmatrix} \alpha=0,1,\ldots,n_\gamma-1 \\ \beta=0,1,\ldots,n_{\gamma-1}-1 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \lambda=0,1,\ldots,n_{a+1}-1 \end{pmatrix}$$

Les coefficients C sont des fonctions entières de $V_{\gamma+1}, V_{\gamma+2}, \ldots, V_\nu$ avec des coefficients rationnels. Au moyen de la transformation indiquée plus haut pour F_γ un de ces coefficients peut être mis sous la forme

$$U_0 + V_{\gamma+1} + U_2 V_{\gamma+1}^2 + \ldots + U_{n_{\gamma+1}-1} V_{\gamma+1}^{n_{\gamma+1}-1}.$$

Nous dirons qu'une expression algébrique a *la forme normale,* si l'on a exécuté toutes les transformations indiquées.

Les expressions algébriques de la forme normale ont des propriétés remarquables que nous allons étudier.

§ 3. Supposons qu'on ait identiquement

$$(1) \qquad \Phi(x, V_\gamma, V_{\gamma+1}, \ldots, V_\nu) = \Phi(x, \omega_\gamma V_\gamma, V_{\gamma+1}, \ldots, V_\nu),$$

Φ étant une fonction entière des arguments indiqués avec des coefficients rationnels.

En égalant les coefficients des mêmes puissances de x on trouve au moins une relation de la forme

$$\varphi(V_\gamma, V_{\gamma+1}, \ldots, V_\nu) = \varphi(\omega_\gamma V_\gamma, V_{\gamma+1}, \ldots, V_\nu),$$

φ étant une fonction entière différente de zéro.

L'équation

$$(2) \qquad \varphi(V, V_{\gamma+1}, \ldots, V_\nu) = \varphi(\omega_\gamma V, V_{\gamma+1}, \ldots, V_\nu),$$

dont le degré peut être supposé inférieur à n_γ, est vérifiée pour $V = V_\gamma$. Mais V_γ est racine d'une équation irréductible du degré n_γ. Donc l'équation (2) est une identité. Par conséquent les coefficients des termes semblables dans les deux membres de cette relation sont égaux. En égalant deux coefficients différents de zéro on trouve

$$\psi(V_{\gamma+1}, V_{\gamma+2}, \ldots, V_\nu) = \omega_\gamma^p \cdot \psi(V_{\gamma+1}, V_{\gamma+2}, \ldots, V_\nu).$$

Il en résulte

$$\omega_\gamma^p = 1.$$

C'est impossible, p étant inférieur à n_γ.

On peut donc affirmer que

les fonctions

$$\Phi(x, V_\gamma, V_{\gamma+1}, \ldots, V_\nu), \quad \Phi(x, \omega_\gamma V_\gamma, V_{\gamma+1}, \ldots, V_\nu),$$

$$\Phi(x, \omega_\gamma^2 V_\gamma, V_{\gamma+1}, \ldots, V_\nu), \ldots, \Phi(x, \omega_\gamma^{n_\gamma - 1} V_\gamma, V_{\gamma+1}, \ldots, V_\nu)$$

sont différentes entre elles.

En appliquant le théorème IV (§ 1) on conclut que le produit

$$\prod_{k_1=1}^{k_1=n_1-1} [x - F(\omega_1^{k_1} V_1, V_2, \ldots, V_\nu)] = \Phi(x, V_a, V_{a+1}, \ldots, V_\nu)$$

est irréductible après l'adjonction de

$$\omega_a, \omega_{a+1}, \ldots, \omega_\nu, V_a, V_{a+1}, \ldots, V_\nu.$$

Ce produit ne contient pas de radical V_1, et en même temps peuvent disparaître les radicaux

$$V_2, V_3, \ldots, V_{a-1}.$$

Pour la même raison sont irréductibles les fonctions suivantes

$$\prod_{k_a=1}^{k_a=n_a-1} \Phi(x, \omega_a^{k_a} V_a, V_{a+1}, \ldots, V_\nu) = \Phi_1(x, V_b, V_{b+1}, \ldots, V_\nu), \quad b > a;$$

$$\prod_{k_b} \Phi_1(x, \omega_b^{k_b} V_b, V_{b+1}, \ldots, V_\nu) = \Phi_2(x, V_c, V_{c+1}, \ldots, V_\nu), \quad c > b;$$

. . . .

$$\prod_{k_m} \Phi_p(x, \omega_m^{k_m} V_m, V_{m+1}, \ldots, V_\nu) = \Psi(x).$$

La fonction $\Psi(x)$ est une fonction entière en x avec des coefficients rationnels. Le coefficient de la plus haute puissance de x est égal à un. Cette fonction n'a pas d'autres racines que les différentes valeurs de l'expression algébrique

$$F(V_1, V_2, \ldots, V_\nu).$$

De la même manière on pourra former l'équation irréductible avec des coefficients rationnels qui est satisfaite par l'expression

$$\varphi(V_a, V_{a+1}, \ldots, V_\nu),$$

φ étant une fonction entière de $V_a, V_{a+1}, \ldots, V_\nu$ avec des coefficients rationnels.

Supposons qu'une fonction entière de ν variables indépendantes avec des coefficients rationnels

$$\Phi(v_1, v_2, \ldots, v_\nu) \tag{3}$$

s'annule pour

$$v_1 = V_1, \quad v_2 = V_2, \quad \ldots, \quad v_\nu = V_\nu.$$

Réduisons les puissances de $v_1, v_2, \ldots, v_\nu$ au moyen des équations

$$(4)\qquad \begin{cases} v_1^{n_1} &= F_1(v_2, v_3, \ldots, v_\nu),\\ v_2^{n_2} &= F_2(v_3, v_4, \ldots, v_\nu),\\ \ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots\\ v_{\nu-1}^{n_{\nu-1}} &= F_{\nu-1}(v_\nu),\\ v_\nu^{n_\nu} &= A. \end{cases}$$

La fonction Φ aura la forme

$$(5)\qquad \Phi = a_0 + a_1 v_1 + a_2 v_1^2 + \ldots + a_{n_1-1} v_1^{n_1-1},$$

les coefficients $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_{n_1-1}$ étant des fonctions entières de $v_2, v_3, \ldots, v_\nu$ avec des coefficients rationnels.

En posant

$$v_1 = V_1, \quad v_2 = V_2, \quad \ldots, \quad v_\nu = V_\nu$$

on trouve

$$a'_0 + a'_1 V_1 + a'_2 V_1^2 + \ldots + a'_{n_1-1} V_1^{n_1-1} = 0.$$

Mais V_1 est la racine d'une équation irréductible du degré n_1. Donc

$$a'_0 = 0, \quad a'_1 = 0, \quad a'_2 = 0, \quad \ldots, \quad a'_{n_1-1} = 0.$$

Par conséquent la fonction (5) devient nulle, quand on pose

$$v_2 = V_2, \quad v_3 = V_3, \quad \ldots, \quad v_\nu = V_\nu,$$

en laissant v_1 tout à fait arbitraire.

Après avoir mis les fonctions $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_{n_1-1}$ sous la forme

$$b_0 + b_1 v_2 + b_2 v_2^2 + \ldots + b_{n_2-1} v_2^{n_2-1}$$

au moyen de l'équation

$$v_2^{n_2} = F_2(v_3, v_4, \ldots, v_\nu),$$

on démontrera de la même manière que toutes ces fonctions s'annulent pour une valeur arbitraire de v_2 et pour

$$v_3 = V_3, \quad v_4 = V_4, \quad \ldots, \quad v_\nu = V_\nu.$$

Il résulte de ce raisonnement que la fonction (3)

$$\Phi(v_1, v_2, \ldots, v_\nu),$$

étant réduite au moyen du système (4), devient nulle pour des valeurs arbitraires de $v_1, v_2, v_3, \ldots, v_\nu$.

Donc *en changeant les valeurs des radicaux dans la relation*

$$\Phi(V_1, V_2, \ldots, V_\nu) = 0$$

on obtient une autre relation

$$\Phi(V_1', V_2', \ldots, V_\nu') = 0.$$

Voici une conséquence de ce théorème.

La fonction $\Psi(x)$ que nous avons formée s'annule pour

$$x = F(V_1, V_2, \ldots, V_\nu).$$

Cette fonction devient aussi nulle pour toute autre valeur de l'expression algébrique $F(V_1, V_2, \ldots, V_\nu)$.

On peut donc affirmer que

toutes les valeurs de l'expression algébrique de forme normale sont racines de la seule équation $\Psi(x) = 0$.

Une autre conséquence du théorème démontré est la suivante:

Les équations binômes

$$V^{n_\gamma} = F_\gamma(V_{\gamma+1}, V_{\gamma+2}, \ldots, V_\nu)$$

restent irréductibles quand on change les valeurs des radicaux $V_{\gamma+1}, V_{\gamma+2}, \ldots, V_\nu$.

Supposons que l'équation

$$V^{n_{\nu-1}} = F_{\nu-1}(V_\nu') \tag{6}$$

soit réductible. On aura la décomposition en facteurs

$$V^{n_{\nu-1}} - F_{\nu-1}(V_\nu') = \Phi(V, V_\nu') \cdot \Psi(V, V_\nu').$$

En remplaçant V_ν', racine de l'équation irréductible

$$V^{n_\nu} = A, \tag{7}$$

par V_ν on obtient la relation impossible

$$V^{n_{\nu-1}} - F_{\nu-1}(V_\nu) = \Phi(V, V_\nu) . \Psi(V, V_\nu).$$

Il résulte de l'irréductibilité des équations (6) et (7) que si l'équation

$$\varphi(v_{\nu-1}, v_\nu) = 0, \tag{8}$$

φ étant une fonction entière de $v_{\nu-1}$ et v_ν avec des coefficients rationnels, est satisfaite pour

$$v_{\nu-1} = V'_{\nu-1}, \qquad v_\nu = V'_\nu,$$

la fonction $\varphi(v_{\nu-1}, v_\nu)$ devient identiquement nulle quand on réduit les puissances de $v_{\nu-1}$ et v_ν au moyen des équations

$$v_{\nu-1}^{n_{\nu-1}} = F_{\nu-1}(v_\nu), \qquad v_\nu^{n_\nu} = A.$$

L'équation (8) sera donc aussi vérifiée pour

$$v_{\nu-1} = V_{\nu-1}, \qquad v_\nu = V_\nu.$$

Supposons maintenant qu'on ait

$$V^{n_{\nu-2}} - F_{\nu-2}(V'_{\nu-1}, V'_\nu) = \Phi(V, V'_{\nu-1}, V'_\nu) . \Psi(V, V'_{\nu-1}, V'_\nu).$$

En remplaçant ici $V'_{\nu-1}$ et V'_ν par $V_{\nu-1}$ et V_ν on obtient une décomposition en facteurs de la fonction irréductible

$$V^{n_{\nu-1}} - F_{\nu-2}(V_{\nu-1}, V_\nu),$$

ce qui est impossible.

L'irréductibilité de l'équation

$$V^{n_{\nu-2}} - F_{\nu-2}(V'_{\nu-1}, V'_\nu) = 0$$

est donc démontrée.

La même démonstration est applicable aux autres équations binômes.

De l'irréductibilité de l'équation

$$V^{n_\gamma} = F_\gamma(V'_{\gamma+1}, V'_{\gamma+2}, \ldots, V'_\nu)$$

résulte que *les fonctions entières à coefficients rationnels*

$$\Phi(x\,, V'_\gamma\,, V'_{\gamma+1}\,, \ldots, V'_\nu)\ ,\quad \Phi(x\,, \omega_\gamma V'_\gamma\,, V'_{\gamma+1}\,, \ldots, V'_\nu),$$

$$\Phi(x\,, \omega_\gamma^2 V'_\gamma\,, V'_{\gamma+1}\,, \ldots, V'_\nu)\,, \ldots,\ \Phi(x\,, \omega_\gamma^{n_\gamma-1} V'_\gamma\,, V'_{\gamma+1}\,, \ldots, V'_\nu)$$

sont différentes entre elles.

§ 4. Soit

$$f(x) = x^n + p_1 x^{n-1} + p_2 x^{n-2} + \ldots + p_{n-1} x + p_n = 0$$

l'équation irréductible proposée, dont les coefficients sont des nombres rationnels.

Désignons les racines de cette équation par

$$x_1\,, x_2\,, x_3\,, \ldots, x_n.$$

Supposons qu'on ait

$$x_1 = F(V_1\,, V_2\,, \ldots, V_\nu),$$

F étant une expression algébrique de forme normale.

Par le procédé indiqué dans le paragraphe précédent on forme la fonction irréductible $\Psi(x)$ qui s'annule pour $x = x_1$.

Les équations irréductibles

$$\Psi(x) = x^{n_1 n_a n_b \ldots n_m} + q_1 x^{n_1 n_a \ldots n_m - 1} + \ldots = 0,$$

$$f(x) = x^n \qquad + p_1 x^{n-1} \qquad + \ldots = 0$$

ayant une racine commune sont identiques. Donc

$$f(x) = \Psi(x),$$

$$n_1 n_a n_b \ldots n_m = n.$$

Les nombres $n_1\,, n_a\,, n_b\,, \ldots, n_m$ sont les exposants des radicaux $V_1\,, V_a\,, V_b\,, \ldots, V_m$.

En résumant les résultats obtenus, on peut énoncer les théorèmes suivants d'Abel:

1) *Dans l'expression algébrique d'une racine d'une équation irréductible du degré n sont nécessairement contenus les radicaux, dont les exposants sont les diviseurs premiers de n.*

2) *L'expression algébrique satisfaisant à l'équation irréductible du degré n a n valeurs différentes, qui sont les racines de l'équation proposée.*

3) *Si une racine de l'équation irréductible est exprimable par radicaux, toutes les autres racines sont aussi exprimables par radicaux.*

Nous allons encore démontrer le théorème suivant:

4) *Les radicaux contenus dans l'expression des racines de l'équation proposée sont des fonctions entières des racines de cette équation et des racines de l'unité.*

Soit

$$(1)\quad \begin{cases} x_1 = U_0 + V_1 + U_2 V_1^2 + \dots + U_{n_1-1} V_1^{n_1-1}, \\ x_2 = U_0 + \omega_1^{-1} V_1 + \omega_1^{-2} U_2 V_1^2 + \dots + \omega_1^{-(n_1-1)} U_{n_1-1} V_1^{n_1-1}, \\ x_3 = U_0 + \omega_1^{-2} V_1 + \omega_1^{-4} U_2 V_1^2 + \dots + \omega_1^{-2(n_1-1)} U_{n_1-1} V_1^{n_1-1}, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ x_{n_1} = U_0 + \omega_1^{-(n_1-1)} V_1 + \omega_1^{-2(n_1-1)} U_2 V_1^2 + \dots + \omega_1^{-(n_1-1)^2} U_{n_1-1} V_1^{n_1-1}. \end{cases}$$

En ajoutant ces équations après les avoir multipliées respectivement par

$$1\,,\ \omega_1\,,\ \omega_1^2\,,\ \dots\,,\ \omega_1^{n_1-1}$$

on trouve

$$(2)\qquad n_1 V_1 = x_1 + \omega_1 x_2 + \omega_1^2 x_3 + \dots + \omega_1^{n_1-1} x_{n_1}.$$

En prenant les autres valeurs des radicaux on aura

$$(3)\qquad n_1 V_1' = x_{h_1} + \omega_1 x_{h_2} + \omega_1^2 x_{h_3} + \dots + \omega_1^{n_1-1} x_{h_{n_1}},$$

les nombres $h_1\,, h_2\,, \dots\,, h_{n_1}$ étant différents entre eux.

Du système (1) résultent encore les formules

$$\begin{aligned} n_1 U_0 &= x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_{n_1}, \\ n_1 U_2 V_1^2 &= x_1 + \omega_1^2 x_2 + \omega_1^4 x_3 + \dots + \omega_1^{2(n_1-1)} x_{n_1}, \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ n_1 U_{n_1-1} V_1^{n_1-1} &= x_1 + \omega_1^{n_1-1} x_2 + \omega_1^{2(n_1-1)} x_3 + \dots + \omega_1^{(n_1-1)^2} x_{n_1}. \end{aligned}$$

L'expression algébrique

$$z = V_1$$

satisfait à une équation $\psi(z) = 0$ dont les coefficients sont des nombres rationnels (§ 3). Les fonctions rationnelles

$$\frac{1}{V_1^2}, \frac{1}{V_1^3}, \ldots, \frac{1}{V_1^{n_1-1}}$$

de la racine de cette équation peuvent être transformées en fonctions entières de V_1. Par conséquent

(4) $$V_1, U_0, U_2, \ldots, U_{n_1-1}$$

sont des fonctions entières de $x_1, x_2, \ldots, x_n$ et ω_1.

Toutes les valeurs des expressions algébriques (4) jouissent de la même propriété.

Passons au radical V_2.

Si le second membre de l'équation

(5) $$V^{n_1} = F_1(V_2, V_3, \ldots, V_\nu)$$

contient V_2, on peut poser

$$V_1^{n_1} = u_0 + V_2 + u_2 V_2^2 + \ldots + u_{n_2-1} V_2^{n_2-1},$$

$u_0, u_2, \ldots, u_{n_2-1}$ étant des fonctions entières de $V_3, V_4, \ldots, V_\nu$ avec des coefficients rationnels.

Supposons que la valeur

$$V_1^{n_1} = y_1$$

se change en

$$y_2, y_3, \ldots, y_{n_2},$$

quand on remplace V_2 par

$$\omega_2^{-1} V_2, \omega_2^{-2} V_2, \ldots, \omega_2^{-(n_2-1)} V_2.$$

On trouve

$$\begin{aligned}
n_2 V_2 &= y_1 + \omega_2 y_2 + \omega_2^2 y_3 + \ldots + \omega_2^{n_2-1} y_{n_2},\\
n_2 u_0 &= y_1 + y_2 + y_3 + \ldots + y_{n_2},\\
n_2 u_2 V_2^2 &= y_1 + \omega_2^2 y_2 + \omega_2^4 y_3 + \ldots + \omega_2^{2(n_2-1)} y_{n_2},\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
n_2 u_{n_2-1} V_2^{n_2-1} &= y_1 + \omega_2^{n_2-1} y_2 + \omega_2^{2(n_2-1)} y_3 + \ldots + \omega_2^{(n_2-1)^2} y_{n_2}.
\end{aligned}$$

Il en résulte que les quantités

$$V_2, u_0, u_2, \ldots, u_{n_2-1}$$

sont des fonctions entières de

$$x_1, x_2, \ldots, x_n, \omega_1, \omega_2.$$

Supposons maintenant que l'équation (5) ne contienne pas V_2.

Une des quantités $U_0, U_2, U_3, \ldots, U_{n_1-1}$ qui entrent dans les relations (1) contient nécessairement V_2. Supposons que ce soit U_h. On peut poser

$$U_h = A_0 + V_2 + A_2 V_2^2 + \ldots + A_{n_2-1} V_2^{n_2-1},$$

$A_0, A_2, \ldots, A_{n_2-1}$ étant des fonctions entières de $V_3, V_4, \ldots, V_\nu$ avec des coefficients rationnels.

Designons par

$$z_2, z_3, \ldots, z_{n_2}$$

les valeurs que prend

$$z_1 = U_h,$$

quand on y remplace V_2 par

$$\omega_2^{-1} V_2, \omega_2^{-2} V_2, \ldots, \omega_2^{-(n_2-1)} V_2.$$

On trouve que

$$n_2 V_2 = z_1 + \omega_2 z_2 + \omega_2^2 z_3 + \ldots + \omega_2^{n_2-1} z_{n_2}$$

et par conséquent V_2 est une fonction entière de

$$x_1, x_2, \ldots, x_n, \omega_1, \omega_2$$

avec des coefficients rationnels.

On fera voir de la même manière que les radicaux $V_3, V_4, \ldots, V_\nu$ sont des fonctions entières de

$$x_1, x_2, \ldots, x_n, \omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_\nu.$$

Le théorème 4) est donc démontré.

Les propriétés des expressions algébriques que nous avons étudiées ont une grande importance. Elles donnent la méthode générale pour résoudre les équations littérales du deuxième, troisième et quatrième degré. Elles servent pour base à la démonstration de l'impossibilité de la résolution algébrique des équations littérales des degrés supérieurs.

Galois a obtenu les conditions de la résolubilité algébrique des équations numériques en supposant que toutes les racines d'une équation soient exprimables par des radicaux. D'après le théorème 3) il aurait suffi de supposer qu'une seule racine de l'équation soit exprimable algébriquement.