# DIE INTERMEDIÄRE BAHN DES MONDES

VON

HUGO GYLDÉN
in STOCKHOLM.

Vielfältig ist die Theorie der Mondbewegung behandelt worden. Man hat es an den sorgfältigsten und mühevollsten Anstrengungen nicht fehlen lassen, um die Bewegung dieses Himmelskörpers zu erforschen. Seitdem das NEWTON'sche Gesetz als Fundament der Astronomie angenommen worden war, sehen wir die ersten Männer dieser Wissenschaft mit der erwähnten Aufgabe beschäftigt, und man kann wohl sagen, dass ihre Bemühungen von einem grossartigen Erfolge gekrönt waren.

Es ist nicht zu erwarten, dass je eine Bewegungstheorie den Beobachtungen in dem Maasse entsprechen wird, dass Nichts an ihr zu verbessern wäre; aber die Mängel der jetzt vorhandenen analytischen Ausdrücke für die Mondbewegung erscheinen in der That so gering, wenn man sie mit ihren Leistungen vergleicht, dass man diesen in der That eine hohe Bewunderung zollen muss; und wenn auch die Erreichung einer noch grösseren Genauigkeit mit grossen Schwierigkeiten verbunden sein muss, so erscheint sie auf den bereits angebahnten Wegen doch nicht unmöglich.

Wenn aber auch das practische Bedürfniss eine neue Behandlungsweise der Theorie des Mondes nicht nothwendig erheischen sollte, so ist eine solche doch aus andern Gründen in hohem Maasse wünschenswerth. — Die jetzt vorhandenen Ausdrücke für die Coordinaten des Mondes enthalten nehmlich eine überaus grosse Anzahl von Gliedern, grössere und kleinere durch einander, in deren Reihenfolge und sonstiger Beschaffenheit durchaus kein Gesetz zu erkennen ist, wenn man bloss die Thatsache ihres Vorhandenseins berücksichtigt, sich nicht aber die theoretische Grundlage ihrer Herleitung vergegenwärtigt. Die Resultate der bisherigen Untersuchungen über die Mondbewegung haben mit anderen Worten eine der Anschauung sehr wenig zugängliche Form, obgleich sie zu numerisch richtigen, oder wenigstens nahezu richtigen Ausdrücken geführt haben. Es stellt sich demnach die Frage, ob diese unübersichtliche Form der Ausdrücke, wenn sie auch bei rein numerischen Rechnungen gewisse Vorzüge haben mag, die einzig mögliche sei, oder ob nicht, durch ein tieferes Eindringen in die Natur der Aufgabe, sich andere Formen ergeben werden, durch die man die Resultate mehr concentrirt darstellen kann. Da wir die Bejahung des letzten Theils dieser Frage als überwiegend wahrscheinlich bezeichnen müssen, so haben wir zuzusehen, wie wir die Wege bahnen können, die zu den höheren Formen der Resultate führen sollen.

Man wird zugeben müssen, wenn man sich die Sachlage etwas genauer vergegenwärtigt, dass die Behandlungsweise der in Frage stehenden Aufgabe in mathematischer Hinsicht sehr mangelhaft war. Schon die Grundvorstellung, dass die Bahn des Mondes eine Ellipse mit gestörten Elementen sei, ist keineswegs in der Natur der Sache begründet, obgleich sie bei den grossen Planeten sehr nahe lag. Sie ist, in Hinsicht der Anschauung — nicht als eine erste Annäherung der analytischen Entwicklung betrachtet — der Vorstellung von einem excentrischen Kreise nur sehr wenig überlegen, und zwar nur durch Grössen, die sehr klein sind im Vergleiche zu Gliedern, welche in beiden Hypothesen unberücksichtigt gelassene, Ungleichheiten der Mondbewegung repräsentiren. Dieser Vorstellung entsprechend wurden nun die successiven Annäherungen angeordnet, und mussten auch so angeordnet werden, so lange man an dieser Vorstellung festhielt, trotzdem es sehr bald bemerkt wurde, dass die Bewegung des Mondperigäums in der ersten Annäherung gänzlich entstellt herauskam. Man hat zwar diesen Übelstand in indirecter Weise umgangen, indem man das formelle Resultat der ersten Annäherung sogleich berücksichtigte und somit gewissermaassen zwei Annäherungen zugleich absolvirte. Durch derartige Operationen verlor aber die Entwicklung, wiewohl sie keineswegs an sich unberechtigt war, ihren streng deductiven Character, indem die Form des Resultates durch die erste Annäherung schon bedingt war. Auf diesem Wege kann man nicht erwarten, zu einer höheren, und der Natur der Aufgabe mehr entsprechenden Form des Resultates zu gelangen.

Es ist jedenfalls anzunehmen, dass die vielen Glieder in den Ausdrücken für die Mondbewegung aus Entwicklungen einer geringeren Anzahl Functionen entstanden sind, obwohl wir bis jetzt nicht diese Functionen selbst, sondern bloss ihre Entwicklungen gefunden haben. Selbstverständlich müssen diese Functionen desto complicirter erscheinen, je geringer ihre Anzahl ist. Eine einzige Function, aus der man durch algebraische Operationen, Differentiationen oder Quadraturen die verschiedenen, in der Mondbewegung vorkommenden Glieder entwickeln könnte, müsste als dermaassen complicirt gedacht werden, dass wir vor der Hand gar keine Aussicht haben, sie zu erkennen. Unser Ziel dürfen wir daher nicht etwa mit der Erforschung einer solchen Function identificiren; wir müssen uns mit einer mässigeren Reduction bescheiden. Andererseits aber werden wir die Fortschritte in der Erkenntniss der Mondbewegung desto höher schätzen müssen, je mehr es uns gelingt Gliedercomplexe als durch Entwicklung uns bekannter Functionen entstanden angeben zu können; oder, je mehr wir Gliedercomplexe, und namentlich solche, worin grosse Coefficienten vorkommen, durch Functionen darstellen können, deren Eigenschaften uns bekannt oder leicht zu untersuchen sind; oder endlich, um die Sache kurz auszudrücken, eine je elegantere Form der Lösung wir gewinnen können. Der Forderung nach mathematischer Eleganz liegt in der That auch ein tieferes erkenntnisstheoretisches Bedürfniss zu Grunde, als gewöhnlich zugegeben wird.

Die vorliegende Abhandlung bezweckt, die Resultate eines ersten Schrittes in der angedeuteten Richtung darzulegen. Hierbei hatte ich mir die Aufgabe gestellt, eine intermediäre Bahn des Mondes von der Beschaffenheit zu bestimmen, dass die Unterschiede der, in dieser Bahn berechneten Coordinaten und der wahren (welche Unterschiede ich Störungen der intermediären Coordinaten nennen werde) stets kleine Grössen seien, deren Quadrate und Producte man mit sehr wenigen Ausnahmen übergehen dürfe. — Die Bewegung der Bahnebene habe ich dabei unberücksichtigt gelassen, da sie nur einen sehr untergeordneten Einfluss auf die Bewegung des Mondes in der Bahnebene selbst ausübt, und es besonders auf diese Bewegung ankommt, weil sie der Untersuchung die meisten Schwierigkeiten entgegenstellt. Dessgleichen habe ich die s. g. Seculaänderung der mittleren Länge nicht in den Kreis dieser Untersuchungen gezogen. Die Schwierigkeiten sie zu bestimmen, sowie die aus den Planetenanziehungen herrührenden Ungleichheiten, sind ganz anderer Art, als diejenigen, welche ich in der vorliegenden Untersuchung zu überwinden gesucht habe.

Man wird finden, dass die Ausdrücke, durch welche die intermediären Coordinaten dargestellt werden, sich wesentlich auf solche Functionen zurückführen lassen, durch die Herr HERMITE die LAMÉ'sche Differentialgleichung integrirt hat. Die vorliegende Untersuchung wird sich daher als eine Anwendung der Resultate des berühmten Verfassers von *Quelques applications des fonctions elliptiques* herausstellen, und ich kann nicht umhin, dieser Leistung meine grosse Bewunderung hier auszusprechen. — Die Einsetzung numerischer Werthe in die algebraischen Ausdrücke ist mit grosser Leichtigkeit auszuführen. Es genügt in diesen Vorbemerkungen der Thatsache zu erwähnen, dass die Bewegung des Mondperigäums in der ersten Annäherung bis auf $\frac{1}{15}$ des Betrages richtig gefunden wurde, während bei der früheren Anordnung der Annäherungen, die erste derselben nur etwa die Hälfte des Betrages ergeben kann. In entsprechend günstiger Weise ergeben sich die übrigen grossen Gleichungen der Mondbewegung, wesshalb ich nicht in der Meinung zu irren glaube, dass die Theorie der Mondbewegung, die bisher als eine der schwierigeren Aufgaben der theoretischen Astronomie angesehen wurde, gegenwärtig zu den leichteren zu zählen sind.

Die numerischen Resultate, welche dieser Abhandlung beigefügt sind, wurden grösstentheils von Herrn A. SHDANOW berechnet, wofür ich ihm hier meine besondere Dankbarkeit ausspreche.

---

## 1.

Die rechtwinkligen Coordinaten des Mondes, bezogen auf den Schwerpunkt der Erde und auf eine, durch den Radius-vector und der Tangente gelegte Ebene, seien $x$ und $y$; die Massen der Sonne, der Erde und des Mondes: respective $M$, 1 und $m$; indem wir nun unter $l^2$ eine Constante verstehen, deren Werth von der Einheit der Zeit und der Entfernung abhängt, stellen wir die Bezeichnungen

$$\mu_1 = l^2(1 + m)$$
$$\mu' = l^2 M$$

fest.

Nennen wir noch den Radius-vector $r$, und die Störungsfunction $(\Omega)$, so sind die Gleichungen, in deren Integration unsere Aufgabe besteht, die folgenden:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{\mu_1 x}{r^3} = \frac{\partial(\Omega)}{\partial x}$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} + \frac{\mu_1 y}{r^3} = \frac{\partial(\Omega)}{\partial y}$$

Zunächst werde ich aus diesen andere Gleichungen herleiten, die als gesuchte Grössen die intermediären Coordinaten des Mondes enthalten sollen. Diese bezeichne ich durch $x_0$ und $y_0$, und stelle vor Allem die Bedingungen fest:

$$\frac{x_0}{x} = \frac{y_0}{y} = 1 + \psi, \tag{1}$$

wo $\psi$ eine Function bedeutet, die wir als eine sehr kleine Grösse ansehen, und als Störung der intermediären Coordinaten bezeichnen. Die reducirte Zeit $\tau$ definiren wir durch die Gleichung

$$dt = \frac{1 + S}{(1 + \psi)^2} d\tau, \tag{2}$$

wo $S$ eine Grösse von derselben Ordnung wie $\psi$ bezeichnet.

Wenn nun $x_0$, $y_0$ und $\tau$ statt $x$, $y$, $t$ in die ursprünglichen Gleichungen eingeführt werden, so erhalten wir

$$(3) \quad \left\{ \begin{aligned} &\frac{d^2x_0}{d\tau^2} - \frac{1}{1+S}\frac{dS}{d\tau}\frac{dx_0}{d\tau} + \left\{ -\frac{d^2\psi}{d\tau^2} + \frac{\mu_1(1+S)^2}{r_0^3} + \frac{1}{1+S}\frac{dS}{d\tau}\frac{d\psi}{d\tau} \right\} \frac{x_0}{1+\psi} \\ &\qquad = \frac{(1+S)^2}{(1+\psi)^3}\frac{\partial(\Omega)}{\partial x} \\ &\frac{d^2y_0}{d\tau^2} - \frac{1}{1+S}\frac{dS}{d\tau}\frac{dy_0}{d\tau} + \left\{ -\frac{d^2\psi}{d\tau^2} + \frac{\mu_1(1+S)^2}{r_0^3} + \frac{1}{1+S}\frac{dS}{d\tau}\frac{d\psi}{d\tau} \right\} \frac{y_0}{1+\psi} \\ &\qquad = \frac{(1+S)^2}{(1+\psi)^3}\frac{\partial(\Omega)}{\partial y}, \end{aligned} \right.$$

in denen wir uns der Bezeichnung

$$r_0 = \sqrt{x_0^2 + y_0^2} = r(1 + \psi)$$

bedient haben. Es bedeutet also $r_0$ den intermediären Radius-vector.

Wenn die wahre Länge des Mondes in der Bahnebene durch $v$ bezeichnet wird, so gelten die Ausdrücke:

$$x = r \cos v, \qquad y = r \sin v;$$

vermöge der Gleichungen (1) haben wir daher auch:

$$x_0 = r_0 \cos v, \qquad y_0 = r_0 \sin v,$$

woraus gefolgert wird:

$$x_0 \frac{dy_0}{d\tau} - y_0 \frac{dx_0}{d\tau} = r_0^2 \frac{dv}{d\tau}$$

Aus den Gleichungen (3) bilden wir nun zunächst die folgende:

$$x_0 \frac{d^2 y_0}{d\tau^2} - y_0 \frac{d^2 x_0}{d\tau^2} - \frac{1}{1+S} \frac{dS}{d\tau} \left( x_0 \frac{dy_0}{d\tau} - y_0 \frac{dx_0}{d\tau} \right) = \frac{(1+S)^2}{(1+\psi)^3} \left\{ x_0 \frac{\partial(\Omega)}{\partial y} - y_0 \frac{\partial(\Omega)}{\partial x} \right\}$$

$$= \frac{(1+S)^2}{(1+\psi)^2} \left\{ x \frac{\partial(\Omega)}{\partial y} - y \frac{\partial(\Omega)}{\partial x} \right\}$$

$$= \frac{(1+S)^2}{(1+\psi)^2} \frac{\partial(\Omega)}{\partial v};$$

und das Integral derselben können wir in der nachstehenden Form angeben:

$$r_0^2 \frac{dv}{d\tau} = (1+S) \left\{ \sqrt{c} + \int \frac{1+S}{(1+\psi)^2} \frac{\partial(\Omega)}{\partial v} d\tau \right\}, \tag{4}$$

wobei $\sqrt{c}$ die Integrationsconstante bezeichnet.

Wir setzen hierauf:

$$v = v_0 + \chi, \tag{5}$$

und bestimmen die intermediäre Länge $v_0$ aus der Gleichung:

$$\frac{dv_0}{d\tau} = \frac{\sqrt{c}}{r_0^2} \tag{6}$$

Hiermit erhalten wir:

$$\sqrt{c} + r_0^2 \frac{d\chi}{d\tau} = (1 + S)\left\{\sqrt{c} + \int \frac{1 + S}{(1 + \psi)^2} \frac{\partial(\Omega)}{\partial v} d\tau\right\}$$

oder

$$1 + \frac{d\chi}{dv_0} = (1 + S)\left\{1 + \int (1 + S) \frac{r^2}{c} \frac{\partial(\Omega)}{\partial v} dv_0\right\}$$

Die Glieder, welche in $\frac{r^2}{c}\frac{\partial(\Omega)}{\partial v}$ vorkommen, theilen wir in zwei Gruppen: $Q_0$ und $Q_1$, indem wir setzen

$$(1 + S)\frac{r^2}{c}\frac{\partial(\Omega)}{\partial v} = (1 + S)Q_0 + Q_1$$

und bestimmen hierauf $\chi$ aus der Gleichung:

$$\frac{d^2\chi}{dv_0^2} = Q_0, \tag{7}$$

wonach wir zur Bestimmung von $S$ die Gleichung

$$\frac{dS}{dv_0}\left[1 + \frac{d\chi}{dv_0}\right] + (2S + S^2)(Q_0 + Q_1) = -Q_1 \tag{8}$$

zurück behalten.

Das Integral dieser Gleichung können wir, wie man leicht bemerkt, näherungsweise schreiben

$$S = -\frac{\int Q_1\left(1 + \frac{d\chi}{dv_0}\right) dv_0}{\left(1 + \frac{d\chi}{dv_0}\right)^2}, \tag{9}$$

wobei keine Integrationsconstante hinzugefügt zu werden braucht, indem sie als in $\chi$ oder in $c$ enthalten gedacht werden kann.

Aus den Gleichungen (3) erhalten wir ferner:

$$x_0 \frac{d^2 x_0}{d\tau^2} + y_0 \frac{d^2 y_0}{d\tau^2} - \frac{1}{1+S}\frac{dS}{d\tau}\left\{x_0 \frac{dx_0}{d\tau} + y_0 \frac{dy_0}{d\tau}\right\}$$

$$+ \frac{r_0^2}{1+\psi}\left\{-\frac{d^2\psi}{d\tau^2} + \frac{\mu_1(1+S)^2}{r_0^3} + \frac{1}{1+S}\frac{dS}{d\tau}\frac{d\psi}{d\tau}\right\}$$

$$= \frac{(1+S)^2}{(1+\psi)^2}\left(x\frac{\partial(\Omega)}{\partial x} + y\frac{\partial(\Omega)}{\partial y}\right)$$

$$= \frac{(1+S)^2}{(1+\psi)^3} r \frac{\partial(\Omega)}{\partial r}$$

Da aber:

$$x_0 \frac{d^2 x_0}{d\tau^2} + y_0 \frac{d^2 y_0}{d\tau^2} = r_0 \frac{d^2 r_0}{d\tau^2} + \left(\frac{dr_0}{d\tau}\right)^2 + \left\{\left(\frac{dx_0}{d\tau}\right)^2 + \left(\frac{dy_0}{d\tau}\right)^2\right\}$$

$$= r_0 \frac{d^2 r_0}{d\tau^2} - r_0^2 \left(\frac{dv}{d\tau}\right)^2,$$

so finden wir aus der vorhergehenden Gleichung:

$$r_0 \frac{d^2 r_0}{d\tau^2} - r_0^2\left(\frac{dv}{d\tau}\right)^2 - \frac{1}{1+S}\frac{dS}{d\tau} r_0 \frac{dr_0}{d\tau}$$

$$+ \frac{r_0^2}{1+\psi}\left\{-\frac{d^2\psi}{d\tau^2} + \frac{\mu_1(1+S)}{r_0^3} + \frac{1}{1+S}\frac{dS}{d\tau}\frac{d\psi}{d\tau}\right\} = \frac{(1+S)^2}{(1+\psi)^3} r \frac{\partial(\Omega)}{\partial r}$$

In diesem Resultate haben wir sowohl $\tau$ durch die Veränderliche $v_0$, als auch $v$ durch $v_0 + \chi$ zu ersetzen. Wir beachten dabei, dass

$$\frac{dr_0}{d\tau} = -r_0^2 \frac{d\frac{1}{r_0}}{d\tau} = -\sqrt{c}\,\frac{d\frac{1}{r_0}}{dv_0}$$

$$\frac{d^2 r_0}{d\tau^2} = -\frac{c}{r_0^2}\frac{d^2\frac{1}{r_0}}{dv_0^2},$$

und erhalten demzufolge zunächst:

$$-\frac{d^2\frac{1}{r_0}}{dv_0^2}-\frac{1}{r_0}\left\{1+2\frac{d\chi}{dv_0}+\left(\frac{d\chi}{dv_0}\right)^2\right\}+\frac{1}{1+S}\frac{dS}{dv_0}\frac{d\frac{1}{r_0}}{dv_0}$$

$$+\frac{r_0^3}{c(1+\psi)}\left\{-\frac{d^2\psi}{d\tau^2}+\frac{\mu_1(1+S)^2}{r_0^3}+\frac{1}{1+S}\frac{dS}{d\tau}\frac{d\psi}{d\tau}\right\}=\frac{(1+S)^2}{(1+\psi)^2}\frac{r_0 r}{c}\frac{\partial(\Omega)}{\partial r}$$

und ferner, weil:

$$\frac{d\psi}{d\tau}=\frac{\sqrt{c}}{r_0^2}\frac{d\psi}{dv_0}, \qquad \frac{d^2\psi}{d\tau^2}=\frac{c}{r_0^4}\frac{d^2\psi}{dv_0^2}+\frac{2c}{r_0^3}\frac{d\frac{1}{r_0}}{dv_0}\frac{d\psi}{dv_0},$$

die Gleichung:

$$-\frac{d^2\frac{1}{r_0}}{dv_0^2}-\frac{1}{r_0}\left\{1+2\frac{d\chi}{dv_0}+\left(\frac{d\chi}{dv_0}\right)^2\right\}+\frac{1}{1+S}\frac{dS}{dv_0}\frac{d\frac{1}{r_0}}{dv_0}+\frac{\mu_1}{c}(1+S)^2$$

$$+\frac{1}{1+\psi}\left\{-\frac{1}{r_0}\frac{d^2\psi}{dv_0^2}-\frac{\mu_1}{c}(1+S)^2\psi-2\frac{d\frac{1}{r_0}}{dv_0}\frac{d\psi}{dv_0}+\frac{1}{r_0(1+S)}\frac{dS}{dv_0}\frac{d\psi}{dv_0}\right\}$$

$$=\frac{(1+S)^2}{1+\psi}\frac{r^2}{c}\frac{\partial(\Omega)}{\partial r}$$

Diese Gleichung multipliciren wir mit einem, vorläufig noch unbestimmten constanten Factor $a$, und zerlegen dabei die Glieder des Productes $\frac{ar^2}{c}\frac{\partial(\Omega)}{\partial r}$ in zwei Gruppen $P_0$ und $P_1$, so dass die Gleichung

$$\frac{ar^2}{c}\frac{\partial(\Omega)}{\partial r}=P_0+P_1$$

zu Geltung kommt; hierauf stellen wir folgende Bedingung auf:

$$\frac{d^2\frac{a}{r_0}}{dv_0^2}+\frac{a}{r_0}\left\{1+2\frac{d\chi}{dv_0}+\left(\frac{d\chi}{dv_0}\right)^2\right\}-\frac{\mu_1 a}{c}=-P_0, \tag{10}$$

und erhalten endlich als Bestimmungsgleichung für $\psi$ die nachstehende:

$$a\frac{d^2\psi}{dv_0^2}+\frac{a\mu_1}{c}(1+S)^2 r_0\psi-\frac{1+\psi}{1+S}r_0\frac{dS}{dv_0}\frac{d\frac{a}{r_0}}{dv_0}$$

$$-\frac{a\mu_1}{c}(1+\psi)r_0(2S+S^2)+2r_0\frac{d\frac{a}{r_0}}{dv_0}\frac{d\psi}{dv_0}-\frac{a}{1+S}\frac{dS}{dv_0}\frac{d\psi}{dv_0}$$

$$=-(1+S)^2 r_0 P_1-(2S+S^2-\psi)r_0 P_0$$

Dieses Resultat gestaltet sich jedoch für spätere Anwendungen zweckmässiger, wenn man statt $\psi$ eine neue Function $\xi$ einführt, die mit ersterer durch die Gleichung

$$a\psi = r_0\xi \tag{11}$$

verbunden ist. Man findet dabei die Beziehungen:

$$a\frac{d\psi}{dv_0}=r_0\frac{d\xi}{dv_0}-r_0^2\xi\frac{d\frac{1}{r_0}}{dv_0},$$

$$a\frac{d^2\psi}{dv_0^2}=r_0\frac{d^2\xi}{dv_0^2}-2r_0^2\frac{d\frac{1}{r_0}}{dv_0}\frac{d\xi}{dv_0}-\xi\left\{r_0^2\frac{d^2\frac{1}{r_0}}{dv_0^2}-2r_0^3\left(\frac{d\frac{1}{r_0}}{dv_0}\right)^2\right\};$$

und hiermit geht die vorstehende Differentialgleichung in die folgende über:

$$\frac{d^2\xi}{dv_0^2}-\frac{r_0}{a}\left\{\frac{d^2\frac{a}{r_0}}{dv_0^2}-\frac{a\mu_1}{c}\right\}\xi-\frac{1}{1+S}\frac{dS}{dv_0}\frac{d\xi}{dv_0}$$

$$-\frac{a\mu_1}{c}(2S+S^2)-\frac{1}{1+S}\frac{dS}{dv_0}\frac{d\frac{a}{r_0}}{dv_0}=-(1+S)^2P_1-\left(2S+S^2-\frac{r_0}{a}\xi\right)P_0$$

Ersetzt man aber den Coefficienten des zweiten Gliedes linker Hand durch seinen Werth aus der Gleichung (10), so erlangt man:

$$\begin{aligned}&\frac{d^2\xi}{dv_0^2}+\left\{1+2\frac{d\chi}{dv_0}+\left(\frac{d\chi}{dv_0}\right)^2\right\}\xi-\frac{1}{1+S}\frac{dS}{dv_0}\frac{d\xi}{dv_0}\\&-\frac{a\mu_1}{c}(2S+S^2)-\frac{1}{1+S}\frac{dS}{dv_0}\frac{d\frac{a}{r_0}}{dv_0}=-P_1-(2S+S^2)(P_1+P_0)\end{aligned}\tag{12}$$

Durch die Integration der Gleichungen (7) und (10) wird die intermediäre Bahn bestimmt; die Gleichungen (8) und (12) bestimmen hingegen die Störungen.

2.

In der Mondtheorie sind sehr wenige Glieder aus der Hauptentwicklung der Störungsfunction hinreichend um als Grundlage einer intermediären Bahn zu dienen, die nur sehr wenig von der wirklichen abweicht. Diese Glieder sind aus folgendem Ausdrucke zu entnehmen:

$$(\Omega) = \mu' \left\{ \frac{1}{r'} + \frac{1}{4}\frac{r^2}{r'^3} + \frac{3}{4}\frac{r^2}{r'^3}\cos 2H \right\}$$

Es bedeutet hier: $r'$ der Radius-vector der Sonne und $H$ der Winkel zwischen den Radien-vectoren der Sonne und des Mondes. Hieraus erhalten wir:

$$\frac{r^2}{c}\frac{\partial(\Omega)}{\partial v} = \frac{3}{4}\frac{\mu'}{c}\frac{r^4}{r'^3}\frac{\partial \cos 2H}{\partial v}$$

$$\frac{ar^2}{c}\frac{\partial(\Omega)}{\partial r} = \frac{1}{2}\frac{a\mu'}{c}\left(\frac{r}{r'}\right)^3 + \frac{3}{2}\frac{a\mu'}{c}\left(\frac{r}{r'}\right)^3\cos 2H$$

Mit diesen Ausdrücken werden wir einige wesentliche Vereinfachungen vornehmen können, indem wir immer festhalten, nur die grössten, und für die Bewegung des Mondes characteristischen Glieder herauszuheben.

Zunächst vernachlässigen wir das Quadrat der Neigung der Mondbahn über die Ekliptik; wir haben alsdann einfach, indem $v'$ die wahre Länge der Sonne bezeichnet:

$$H = v - v'$$

Ferner bezeichnen wir die mittleren Bewegungen des Mondes und der Sonne mit $n$ und $n'$, und das Verhältniss beider mit $\mu$, so dass:

$$\frac{n}{n'} = \mu$$

Die mittleren Längen beider Himmelskörper zu einer bestimmten Zeitepoche seien $\Lambda$ und $\Lambda'$; in der Relation:

$$v' - \Lambda' = \mu(v_0 - \Lambda) + G$$

bedeutet alsdann $G$ eine kleine Grösse von der Ordnung der Excentriciteten. Um die folgende Darstellung möglichst zu vereinfachen, werde ich $G$ zunächst vernachlässigen, was geschehen darf, erstens weil ihr Einfluss überhaupt gering ist, zweitens aber weil derselbe leicht später zu berücksichtigen ist, ohne dass das Wesen der befolgten Methode irgendwie abgeändert wird.

Wir nehmen nun an, dass die vorhin eingeführte Constante $a$ die mittlere Entfernung des Mondes von dem Schwerpunkt der Erde bezeichne; die Veränderliche $r_0$ ersetzen wir nach dieser Voraussetzung durch eine neue $\rho_0$, indem wir die Relation

$$r_0 = \frac{ap}{1 + \rho_0} \tag{13}$$

aufstellen, und dabei unter $p$ eine zu unserer Verfügung stehende Constante bezeichnen. Dieser Werth von $r_0$, in die Gleichung (10) eingeführt giebt uns:

$$\frac{1}{p}\frac{d^2\rho_0}{dv_0^2} + \frac{1+\rho_0}{p}\left\{1 + 2\frac{d\chi}{dv_0} + \left(\frac{d\chi}{dv_0}\right)^2\right\} - \frac{\mu_1 a}{c} = -P_0;$$

und wenn wir die Constante $p$ aus der Gleichung

$$\frac{1}{p} - \frac{\mu_1 a}{c} = 0$$

bestimmen, so erhalten wir:

$$\frac{d^2\rho_0}{dv_0^2} + \left\{1 + 2\frac{d\chi}{dv_0} + \left(\frac{d\chi}{dv_0}\right)^2\right\}\rho_0 = -2\frac{d\chi}{dv_0} - \left(\frac{d\chi}{dv_0}\right)^2 - pP_0 \tag{14}$$

Bei der Mondbahn ist nun $\rho_0$ immer eine ziemlich kleine Grösse; eine Folge dieses Umstandes ist, dass $p$ von der Einheit um eine sehr kleine Grösse verschieden ist, dessen Product mit der Sonneneinwirkung wir bei der intermediären Bahn vernachlässigen werden. Dass $p - 1$

eine Grösse zweiter Ordnung in Bezug auf den Modul von $\rho_0$ ist, kann man übrigens leicht nachweisen.

Es seien $+e$ und $-e$ die extremen Werthe von $\rho_0$; die entsprechenden Werthe von $r_0$ sind dabei

$$r_1 = \frac{ap}{1+e}; \qquad r_2 = \frac{ap}{1-e};$$

soll nun die Gleichung

$$\frac{1}{2}(r_1 + r_2) = a$$

bestehen, welche unserer Annahme, dass $a$ die mittlere Entfernung bedeutet, entspricht, wenigstens in einem gewissen Sinne, so muss $p$ den Werth $1 - e^2$ haben. Im Allgemeinen werden aber die absoluten Beträge der extremen Werthe von $\rho_0$ nicht dieselben sein; der Ausdruck für $p$ muss sich daher auch in der Regel etwas anders gestalten, und zwar findet man

$$p = \frac{1 + e_1 - e_2 - e_1 e_2}{1 + \frac{e_1 - e_2}{2}}$$

wenn $\rho_0$ zwischen den Grenzen $+e_1$ und $-e_2$ variirt. Formell genommen, ist allerdings die Differenz $e_1 - e_2$ als eine Grösse erster Ordnung anzusehen, allein in thatsächlich vorkommenden Fällen, insbesondere bei der Bahn des Mondes ist diese Differenz doch so viel kleiner als $e_1$ und $e_2$, dass sie als eine Grösse zweiter Ordnung angesehen werden muss.

Es kann aber die Constante $a$ auch in anderer Weise definirt werden als durch das arithmetische Mittel der extremen Werthe von $r_0$, und in der That scheint auch eine andere Definition dieser Grösse bei der Mondbahn wesentliche Vorzüge zu haben.

Wir nehmen nun wieder die Gleichung (6) vor, drücken in derselben die Function $r_0$ durch $\rho_0$ aus, und ersetzen die Grösse $c$ durch ihren Werth

$$c = \mu_1 ap$$

Wenn wir endlich den, bei dieser Untersuchung zu befolgenden Principien gemäss, die eigentlichen Störungen vernachlässigen, d. h. hier, die reducirte

Zeit mit der wahren identificiren, so haben wir aus der betreffenden Gleichung:

$$\frac{p^{\frac{3}{2}} dv_0}{(1+\rho_0)^2} = \frac{\sqrt{\mu_1}}{a^{\frac{3}{2}}} dt \tag{15}$$

Die Entwicklung der Grösse linker Hand wird nun, vorausgesetzt, dass $\rho_0$ schon bekannt ist, ausser zu rein periodischen Gliedern, zu einem, nur in $dv_0$ multiplicirten Gliede Veranlassung geben, dessen Coefficienten wir, durch eine passende Bestimmung der Grösse $p$, zu 1 machen können. Durch eine solche Bestimmung wird der Coefficient von $dt$ die Bedeutung der mittleren Bewegung des Mondes erhalten, d. h. die Gleichung

$$n = \frac{\sqrt{\mu_1}}{a^{\frac{3}{2}}}$$

zu Geltung bringen. Die Grösse $a$ verliert aber dabei die Bedeutung der mittleren Entfernung in irgend welchem geometrischen Sinne, und ist nur als Maass oder Modul der Entfernungen anzusehen.

Für die Sonne können wir eine, mit der Gleichung (15) ganz analoge ansetzen, nehmlich

$$\frac{p'^{\frac{3}{2}} dv'_0}{(1+\rho'_0)^2} = n' dt,$$

in welcher selbstverständlich alle mit Accenten versehenen Grössen dieselbe Bedeutung in Bezug auf die Sonnenbahn haben, wie die unaccentuirten Grössen in Bezug auf die Mondbahn, und in's Besondere hat man

$$n' = \frac{\sqrt{\mu'_1}}{a'^{\frac{3}{2}}}$$

und wenn man die Erdmasse neben der Sonnenmasse, wie es hier unbedenklich geschehen kann, vernachlässigt, so darf man in dieser Formel $\mu'$ statt $\mu'_1$ setzen. — Durch Vergleichung der beiden Werthe von $dt$ erhält man nun:

$$\frac{dv'_0}{dv_0} = \mu \left(\frac{p}{p'_0}\right)^{\frac{3}{2}} \left(\frac{1+\rho'_0}{1+\rho_0}\right)^2,$$

und überdies:

$$\frac{\mu'}{\mu_1}\left(\frac{a}{a'}\right)^3 = \mu^2$$

Indem man sich nun bloss die rein periodischen Glieder in $\rho_0$ und $\rho'_0$ berücksichtigt denkt, kann man also die Gleichung

$$dv'_0 = \mu(1 + 2\rho'_0 - 2\rho_0 + \ldots)dv_0$$

ansetzen, und findet hiermit als Ausdruck für die oben mit $G$ bezeichnete Function die Formel

$$G = 2\mu\int\rho'_0 dv_0 - 2\mu\int\rho_0 dv_0 \tag{16}$$

3.

Unter Berücksichtigung der Werthe, welche wir für $c$, $r_0$ und $r'_0$ gefunden oder angenommen haben, ergeben sich für die partiellen Differentialquotienten der Störungsfunction die nachstehenden Ausdrücke, in denen wir die Störungen sowie die Function $G$ vernachlässigt, und also auch $v'$ mit $v'_0$ identificirt haben,

$$\frac{r^2}{c}\frac{\partial(\Omega)}{\partial v} = -\frac{3}{2}\mu^2\frac{(1+\rho'_0)^3}{(1+\rho_0)^4}\sin 2[(1-\mu)v_0 + \chi - A' + \mu A]$$

$$\frac{ar^2}{c}\frac{\partial(\Omega)}{\partial r} = \frac{1}{2}\mu^2\left(\frac{1+\rho'_0}{1+\rho_0}\right)^3 + \frac{3}{2}\mu^2\left(\frac{1+\rho'_0}{1+\rho_0}\right)^3\cos 2[(1-\mu)v_0 + \chi - A' + \mu A]$$

Diese Ausdrücke werden wir nun nach den steigenden Potenzen von $\rho_0$ und $\rho'_0$ entwickeln und dabei nur die Glieder erster Ordnung beibehalten. Die folgenden Glieder sind zwar nicht unmerklich, üben aber doch auf die Resultate, welche wir bei der vorliegenden Untersuchung im Auge haben, einen ganz unwesentlichen Einfluss aus. Wir erhalten also, indem wir uns noch der Bezeichnung

$$\beta_1 = \frac{3}{2}\mu^2$$

bedienen, die nachstehenden Ausdrücke, mit denen wir die Grössen $Q_0$ und $P_0$ identificiren,

$$Q_0 = -\beta_1(1 - 4\rho_0 + 3\rho_0') \sin 2[(1-\mu)v_0 + \chi - \Lambda' + \mu\Lambda]$$

$$\begin{aligned} P_0 &= \frac{1}{3}\beta_1(1 - 3\rho_0 + 3\rho_0') \\ &\quad + \beta_1(1 - 3\rho_0 + 3\rho_0') \cos 2[(1-\mu)v_0 + \chi - \Lambda' + \mu\Lambda] \end{aligned}$$

Die Gleichungen (7) und (10) nehmen nun die nachstehenden Formen an, wobei wir der Kürze wegen

$$\lambda = 2(1-\mu)$$

$$A = 2(\Lambda' - \mu\Lambda)$$

gesetzt haben,

$$(17) \left\{ \begin{aligned} &\frac{d^2\chi}{dv_0^2} = -\beta_1(1 - 4\rho_0 + 3\rho_0') \sin(\lambda v_0 + 2\chi - A) \\ &\frac{d^2\rho_0}{dv_0^2} + \left\{1 - \beta_1 - 3\beta_1 \cos(\lambda v_0 + 2\chi - A) + 2\frac{d\chi}{dv_0} + \left(\frac{d\chi}{dv_0}\right)^2\right\}\rho_0 \\ &= -\frac{1}{3}\beta_1 - \beta_1\rho_0' - \beta_1\cos(\lambda v_0 + 2\chi - A) - 3\beta_1\rho_0'\cos(\lambda v_0 + 2\chi - A) \\ &\qquad - 2\frac{d\chi}{dv_0} - \left(\frac{d\chi}{dv_0}\right)^2 \end{aligned} \right.$$

Dieses System lässt sich zwar nur durch fortgesetzte Annäherungen integriren; man kann diese aber so anordnen, dass die Convergenz eine äusserst rapide wird. Ich muss es mir versagen, jetzt alle zu diesem Zwecke dienlichen Hülfsmittel in Anwendung zu bringen, die mir zu Gebote stehen; theils würde ihre Darlegung zu viel Platz in Anspruch nehmen, theils gelangt man auch ohne dieselben bei der Mondtheorie leicht genug zum Ziele. Ich will nur beiläufig bemerken, dass dieses Hülfsmittel in der Anwendung eines veränderlichen Moduls der elliptischen Functionen seine Wurzel hat.

Einen für die Bewirkung einer hinreichend starken Convergenz genügenden Ausgangspunkt erhält man, wie ich mich durch numerisches

Nachrechnen überzeugt habe, wenn in der ersten Gleichung des Systems (17) die Function $\chi$ in den Argumenten der trigonometrischen Functionen vernachlässigt wird. Es ergiebt sich alsdann:

$$\frac{d\chi}{dv_0} = \frac{\beta_1}{\lambda}\cos(\lambda v_0 - A) + 4\beta_1\int\rho_0 \sin(\lambda v_0 - A)\,dv_0 - 3\beta_1\int\rho_0' \sin(\lambda v_0 - A)\,dv_0,$$

aber die Form dieses Resultates ist für unsern Zwecke nicht die erwünschte, indem die unbekannte Grösse $\rho_0$ unter einem Integralzeichen vorkommt. Die Umgestaltung, welche hier nöthig wäre, können wir indessen aufschieben bis der angesetzte Werth von $\frac{d\chi}{dv_0}$ in die zweite der Gleichungen (17) eingeführt worden ist; denn erst bei ihrer Integration kommt es uns darauf an, eine Form zu erhalten, in welcher die in $\rho_0$ multiplicirten Glieder, oder wenigstens die einflussreichsten derselben von dem Integralzeichen befreit sind.

Aus der erwähnten Gleichung findet sich, mit Hülfe des angegebenen Werthes von $\frac{d\chi}{dv_0}$ die nachstehende

$$\begin{aligned}\frac{d^2\rho_0}{dv_0^2} + \left\{1 - \beta_1 + \frac{1}{2}\frac{\beta_1^2}{\lambda^2} - \left(3\beta_1 - \frac{2\beta_1}{\lambda}\right)\cos(\lambda v_0 - A)\right\}\rho_0 \\ = - 8\beta_1\int\rho_0 \sin(\lambda v_0 - A)\,dv_0 - \frac{1}{3}\beta_1 - \frac{1}{2}\frac{\beta_1^2}{\lambda^2} \\ - \left(\beta_1 + \frac{2\beta_1}{\lambda}\right)\cos(\lambda v_0 - A) \\ - 3\beta_1\rho_0'\cos(\lambda v_0 - A) - \beta_1\rho_0' \\ - 8\beta_1\rho_0\int\rho_0 \sin(\lambda v_0 - A)\,dv_0 \\ + \cdots\cdots,\end{aligned}$$

wo schon das letzte Glied rechter Hand, und noch mehr die übergangenen bei der vorliegenden Untersuchung unwesentlich sind.

Um grössere Kürze bei der Darstellung zu bewirken, führe ich nun folgende Bezeichnungen ein:

$$\beta_0 = \beta_1 - \frac{1}{2}\frac{\beta_1^2}{\lambda^2}$$

$$\beta = 3\beta_1 - 2\frac{\beta_1}{\lambda}$$

$$\gamma_0 = \frac{1}{3}\beta_1 + \frac{1}{2}\frac{\beta_1^2}{\lambda^2}$$

$$\gamma_1 = \beta_1 + 2\frac{\beta_1}{\lambda},$$

und erhalte hierauf:

$$(18) \qquad \frac{d^2\rho_0}{dv_0^2} + \{1 - \beta_0 - \beta\cos(\lambda v_0 - A)\}\rho_0$$
$$= -8\beta_1 \int \rho_0 \sin(\lambda v_0 - A)dv_0 - \gamma_0 - \beta_1\rho_0' - \gamma_1\cos(\lambda v_0 - A) + \cdots$$

Das wesentlichste Glied rechter Hand ist das erste, und eben dieses muss transformirt werden. Wenn wir die Summe aller übrigen Glieder kurzweg mit $W_1$ bezeichnen, also die Gleichung

$$(19) \qquad W_1 = -\gamma_1 - \beta_1\rho_0' - \gamma_1\cos(\lambda v_0 - A) - 3\beta_1\rho_0'\cos(\lambda v_0 - A) - \ldots$$

aufstellen, so haben wir

$$\rho_0 = -\frac{1}{1-\beta_0}\frac{d^2\rho_0}{dv_0^2} + \frac{\beta}{1-\beta_0}\rho_0\cos(\lambda v_0 - A)$$
$$+ \frac{W_1}{1-\beta_0} - \frac{8\beta_1}{1-\beta_0}\int\rho_0\sin(\lambda v_0 - A)dv_0,$$

und dieser Werth von $\rho_0$ soll in das zu transformirende Glied eingesetzt werden. Wir erhalten dadurch:

$$\int\rho_0 \operatorname{Sin}(\lambda v_0 - A)dv_0 = -\frac{1}{1-\beta_0}\int\frac{d^2\rho_0}{dv_0^2}\sin(\lambda v_0 - A)dv_0$$
$$+ \frac{1}{2}\frac{\beta}{1-\beta_0}\int\rho_0\sin 2(\lambda v_0 - A)dv_0$$
$$+ \frac{1}{1-\beta_0}\int W_1\sin(\lambda v_0 - A)dv_0$$
$$- \frac{8\beta_1}{1-\beta_0}\int\sin(\lambda v_0 - A)dv_0\int\rho_0\sin(\lambda v_0 - A)dv_0$$

Nun ist aber:

$$\int \frac{d^2\rho_0}{dv_0^2} \sin(\lambda v_0 - A) dv_0 = \frac{d\rho_0}{dv_0} \sin(\lambda v_0 - A) - \lambda\rho_0 \cos(\lambda v_0 - A)$$

$$- \lambda^2 \int \rho_0 \sin(\lambda v_0 - A) dv_0$$

$$\int \sin(\lambda v_0 - A) dv_0 \int \rho_0 \sin(\lambda v_0 - A) dv_0$$

$$= - \frac{1}{\lambda} \cos(\lambda v_0 - A) \int \rho_0 \sin(\lambda v_0 - A) dv_0 + \frac{1}{2\lambda} \int \rho_0 \sin 2(\lambda v_0 - A) dv_0 ,$$

welche Ausdrücke, in der vorhergehenden Formel eingeführt, zu der nachstehenden führen:

$$(\lambda^2 + \beta_0 - 1) \int \rho_0 \sin(\lambda v_0 - A) dv_0 = \frac{d\rho_0}{dv_0} \sin(\lambda v_0 - A) - \lambda\rho_0 \cos(\lambda v_0 - A)$$

$$+ \frac{1}{2}\left(\frac{8\beta_1}{\lambda} - \beta\right) \int \rho_0 \sin 2(\lambda v_0 - A) dv_0$$

$$- \frac{8\beta_1}{\lambda} \cos(\lambda v_0 - A) \int \rho_0 \sin(\lambda v_0 - A) dv_0$$

$$- \int W_1 \sin(\lambda v_0 - A) dv_0$$

Indem wir nun diesen Werth in die Gleichung (18) substituiren, bedienen wir uns der nachstehenden Bezeichnungen:

$$\eta_0 = \lambda^2 + \beta_0 - 1$$

$$\eta_1 = \frac{8\beta_1}{\lambda\eta_0}$$

$$\eta_2 = \frac{1}{2\eta_0}\left(\frac{8\beta_1}{\lambda} - \beta\right);$$

unser Resultat ist alsdann das folgende:

$$\frac{d^2\rho_0}{dv_0^2} + \frac{\lambda\eta_1 \sin(\lambda v_0 - A)}{1 + \eta_1 \cos(\lambda v_0 - A)} \frac{d\rho_0}{dv_0} \tag{20}$$

$$+ \left\{1 - \beta_0 - \beta \cos(\lambda v_0 - A) - \frac{\eta_1 \lambda^2 \cos(\lambda v_0 - A)}{1 + \eta_1 \cos(\lambda v_0 - A)}\right\} \rho_0$$

$$= - \frac{8\eta_2\beta_1}{1 + \eta_1 \cos(\lambda v_0 - A)} \int \rho_0 \sin 2(\lambda v_0 - A) dv_0$$

$$+ \frac{\eta_1 \lambda}{1 + \eta_1 \cos(\lambda v_0 - A)} \int W_1 \sin(\lambda v_0 - A) dv_0$$

$$+ W_1$$

Die mit Integralzeichen behafteten Glieder dieser Gleichung gehören der zweiten Ordnung in Bezug auf die Grösse $\mu^2$ an. Sie sind daher sehr klein, und da sie weder durch die Ausführung der bezeichneten Integrationen, noch durch die Integration der Differentialgleichung wesentlich vergrössert werden, so haben sie hier kein Interesse und können daher vernachlässigt, oder mit anderen, aus ähnlichen Gründen bei Seite gelassenen Gliedern als vereinigt gedacht werden.

Nach dieser Vernachlässigung werden wir die Gleichung (20) noch dadurch vereinfachen, dass wir in derselben das zweite Glied wegschaffen, was dadurch bewerkstelligt werden kann, dass wir die Function $\rho_0$ durch eine andere $E$ ersetzen, die mit der früheren durch die Gleichung

$$\rho_0 = E\sqrt{1 + \eta_1 \cos(\lambda v_0 - A)} \tag{21}$$

verbunden ist. Es findet sich hieraus:

$$\frac{d\rho_0}{dv_0} = \frac{dE}{dv_0}\sqrt{1 + \eta_1 \cos(\lambda v_0 - A)} - \frac{1}{2} E \frac{\eta_1 \lambda \sin(\lambda v_0 - A)}{\sqrt{1 + \eta_1 \cos(\lambda v_0 - A)}}$$

$$\frac{d^2\rho_0}{dv_0^2} = \frac{d^2E}{dv_0^2}\sqrt{1 + \eta_1 \cos(\lambda v_0 - A)} - \frac{dE}{dv_0} \frac{\eta_1 \lambda \sin(\lambda v_0 - A)}{\sqrt{1 + \eta_1 \cos(\lambda v_0 - A)}}$$

$$- \frac{1}{2} E \left\{ \frac{\eta_1 \lambda^2 \cos(\lambda v_0 - A)}{\sqrt{1 + \eta_1 \cos(\lambda v_0 - A)}} + \frac{1}{2} \frac{\eta_1^2 \lambda^2 \sin(\lambda v_0 - A)^2}{[1 + \eta_1 \cos(\lambda v_0 - A)]^{\frac{3}{2}}} \right\},$$

mit welchen Werthen man aus der Gleichung (20) die nachstehende erhält

$$(22)\qquad \frac{d^2E}{dv_0^2} + \left\{ 1 - \beta_0 - \beta\cos(\lambda v_0 - A) - \frac{3}{2}\frac{\gamma_1\lambda^2\cos(\lambda v_0 - A)}{1 + \gamma_1\cos(\lambda v_0 - A)} \right.$$

$$\left. - \frac{3}{4}\frac{\gamma_1^2\lambda^2\sin(\lambda v_0 - A)^2}{[1 + \gamma_1\cos(\lambda v_0 - A)]^2} \right\} E$$

$$= \frac{W_1}{\sqrt{1 + \gamma_1\cos(\lambda v_0 - A)}}$$

In dieser Gleichung werden wir nun auch mehrere Glieder höherer Ordnung in Bezug auf $\mu^2$ von der linken auf die rechte Seite hinüberführen. Indem wir also unter $W_2$ eine Grösse verstehen, welche mit $E$ multiplicirt ist und also bei der ersten Annäherung nicht berücksichtigt werden kann, jedenfalls aber zweiter Ordnung in Bezug auf $\mu^2$ ist, und indem wir die Bezeichnungen:

$$\overline{\beta}_0 = \beta_0 - \frac{3}{8}\gamma_1^2\lambda^2$$

$$\overline{\beta} = \beta + \frac{3}{2}\gamma_1\lambda^2$$

feststellen, erhalten wir:

$$(23)\qquad \frac{d^2E}{dv_0^2} + \{1 - \overline{\beta}_0 - \overline{\beta}\cos(\lambda v_0 - A)\} E = \frac{W_1}{\sqrt{1 + \gamma_1\cos(\lambda v_0 - A)}} + W_2$$

4.

Auf die Integration der zuletzt gefundenen Differentialgleichung werden wir nun unsere Aufmerksamkeit richten müssen, und zwar werde ich dabei die Integrationsmethode in Anwendung bringen, die ich schon in der ersten Abhandlung über die Theorie der Bewegungen der Himmelskörper vorgeschlagen habe. Eine geringe Abänderung werde ich zwar dabei vornehmen, welche jedoch zu unwesentlich ist um hier einer besonderen Erwähnung zu bedürfen.

In der in Frage stehenden Gleichung setze ist:

$$\lambda v_0 - A = 2\frac{\pi}{2K}x - 180^0,$$

wo $K$ ein vollständiges elliptisches Integral erster Gattung bezeichnet, dessen Modul vorläufig unbestimmt gelassen wird. Bezeichnet man nun der Kürze wegen:

$$\frac{W_1}{\sqrt{1 + \eta_1 \cos(\lambda v_0 - A)}} + W_2 = W,$$

so erhält man

$$\frac{d^2E}{dx^2} + \frac{4\left(\frac{\pi}{2K}\right)^2}{\lambda^2}\left\{1 - \bar\beta_0 + \bar\beta\cos 2\frac{\pi}{2K}x\right\}E = \frac{4\left(\frac{\pi}{2K}\right)^2}{\lambda^2}W$$

Nun hat man aber die Entwicklung

$$\cos 2\,\mathrm{am}\,x = \Gamma_0^{(2)} + \left(\frac{\pi}{2K}\right)^2\frac{16}{k^2}\left\{\frac{q}{1-q^2}\cos 2\frac{\pi}{2K}x + \frac{2q^2}{1-q^4}\cos 4\frac{\pi}{2K}x + \ldots\right\},$$

wo $\Gamma_0^{(2)}$ eine von $k$ oder $q$ abhängige Constante bedeutet, deren Werth wir weiter unten angeben werden. Es folgt hieraus:

$$\left(\frac{\pi}{2K}\right)^2\cos 2\frac{\pi}{2K}x = \frac{k^2(1-q^2)}{16q}\cos 2\,\mathrm{am}\,x - \frac{k^2(1-q^2)}{16q}\Gamma_0^{(2)}$$

$$-\left(\frac{\pi}{2K}\right)^2(1-q^2)\left\{\frac{2q}{1-q^4}\cos 4\frac{\pi}{2K}x + \frac{3q^2}{1-q^6}\cos 6\frac{\pi}{2K}x + \ldots\right\}$$

Mit Rücksicht auf diese Entwicklung erhält man aus der vorhergehenden Differentialgleichung, indem der Modul $k^2$ oder vielmehr $q$ aus der Bedingungsgleichung

$$k^2 = \frac{k^2\bar\beta(1-q^2)}{4q\lambda^2} \tag{24}$$

bestimmt wird, die folgende:

$$\frac{d^2E}{dx^2} + \left[k^2 \cos 2\,\mathrm{am}\, x + \frac{4\left(\frac{\pi}{2K}\right)^2}{\lambda^2}(1 - \bar{\beta}_0) - k^2\Gamma_0^{(2)}\right]E$$

$$= \frac{4\left(\frac{\pi}{2K}\right)^2}{\lambda^2}\left\{W + \bar{\beta}(1 - q^2)E\left[\frac{2q}{1 - q^4}\cos 4\frac{\pi}{2K}x + \ldots\right]\right\}$$

Bei der Integration dieser Gleichung müssen wir damit anfangen, die in $E$ multiplicirten Glieder rechter Hand wegzulassen. Die Summe dieser Glieder, welche wir mit $W_2$ zusammenschlagen, ist, ebenso wie diese Function, immer eine sehr kleine Grösse zweiter Ordnung in Bezug auf $\mu^2$. Bei der Integration wird zwar die Function, welche $E$ als Factor enthält, zu Gliedern Veranlassung geben, welche entweder vergrössert werden oder auch in $v_0$ multiplicirt erscheinen; diese Glieder sind aber von der Ordnung $\mu^6$ und können, ihres geringen Betrages wegen, mit Leichtigkeit erst später berücksichtigt, und in die Hauptglieder von $E$ aufgenommen werden.

Wir bezeichnen noch

$$(25)\qquad \frac{4\left(\frac{\pi}{2K}\right)^2}{\lambda^2}(1 - \bar{\beta}_0) - k^2\Gamma_0^{(2)} = 1 - k^2\,\mathrm{sn}\, i\omega^2,$$

wo $i$ die Bedeutung der imaginären Einheit hat, und erhalten alsdann die obige Differentialgleichung auf die von Herrn Hermite angewandte Form der Lamé'schen Differentialgleichungen gebracht, nehmlich

$$(26)\qquad \frac{d^2E}{dx^2} - [2k^2\,\mathrm{sn}\, x^2 - 1 - k^2 + k^2\,\mathrm{sn}\, i\omega^2]E = \frac{4\left(\frac{\pi}{2K}\right)^2}{\lambda^2}\{W + \ldots\}$$

Die elegante, von Herrn Hermite angegebene Form des Integrales dieser Gleichung ohne das Glied rechter Hand, ist die folgende:

$$(27)\qquad E = C_1\frac{\mathrm{H}(x + i\omega)}{\Theta(x)}e^{-\frac{\Theta'(i\omega)}{\Theta(i\omega)}x} + C_2\frac{\mathrm{H}(x - i\omega)}{\Theta(x)}e^{\frac{\Theta'(i\omega)}{\Theta(i\omega)}x}$$

wo $C_1$ und $C_2$ die beiden Integrationsconstanten bedeuten. Diese Glieder enthalten die Mittelpunktsgleichung und die Evection und geben einen sehr genäherten Werth der Bewegung des Mondperigäums.

Die Grösse $\frac{\Theta'(i\omega)}{\Theta(i\omega)}$ bezeichne ich durch $i\frac{\pi}{2K}\nu$, wo $\nu$ eine reelle positive Zahl, von derselben Ordnung wie $\mu$, bedeutet. Mit Berücksichtigung des Werthes

$$\frac{\pi}{2K}x = (1-\mu)v_0 - \Lambda' + \mu\Lambda + \frac{1}{2}\pi$$

findet man also:

$$\frac{\Theta'(i\omega)}{\Theta(i\omega)}x = i\nu\left\{(1-\mu)v_0 - \Lambda' + \mu\Lambda + \frac{1}{2}\pi\right\}$$

Wenn wir nun die beiden Constanten $C_1$ und $C_2$ durch zwei andere $\varkappa$ und $\Gamma$ ersetzen, indem wir die Beziehungen

$$C_1 = \frac{\varkappa}{2}\frac{e^{-\frac{\pi}{2K}\omega}}{\sqrt[4]{q}}e^{i\Gamma - i\nu\left(\Lambda' - \mu\Lambda - \frac{\pi}{2}\right) - i(\Lambda' - \mu\Lambda)}$$

$$C_2 = \frac{\varkappa}{2}\frac{e^{-\frac{\pi}{2K}\omega}}{\sqrt[4]{q}}e^{-i\Gamma + i\nu\left(\Lambda' - \mu\Lambda - \frac{\pi}{2}\right) + i(\Lambda' - \mu\Lambda)}$$

feststellen, erhalten wir:

$$(28)\quad \Theta(x)E = \frac{\varkappa}{2}\frac{e^{-\frac{\pi}{2K}\omega}}{\sqrt[4]{q}}\{\mathrm{H}(x+i\omega)+\mathrm{H}(x-i\omega)\}\cos[\nu(1-\mu)v_0 - \Gamma + \Lambda' - \mu\Lambda]$$

$$-\,i\frac{\varkappa}{2}\frac{e^{-\frac{\pi}{2K}\omega}}{\sqrt[4]{q}}\{\mathrm{H}(x+i\omega)-\mathrm{H}(x-i\omega)\}\sin[\nu(1-\mu)v_0 - \Gamma + \Lambda' - \mu\Lambda]$$

Dieses Resultat werde ich etwas näher entwickeln und auf die in der Astronomie gebräuchliche Form bringen, wodurch man in den Stand gesetzt wird, die Bedeutung desselben leicht zu übersehen.

Zunächst ist an die Entwicklung

$$\mathrm{H}(x) = 2\sqrt[4]{q}\left\{\sin\frac{\pi}{2K}x - q^2\sin 3\frac{\pi}{2K}x + q^6\sin 5\frac{\pi}{2K}x - \dots\right\}$$

zu erinnern. Hieraus findet sich sogleich

$$H(x + i\omega) = -\frac{1}{i}\sqrt[4]{q}\,e^{\frac{\pi}{2K}\omega}\left\{e^{-i\frac{\pi}{2K}x} - e^{-\frac{\pi}{K}\omega + i\frac{\pi}{2K}x} - \ldots\right\}$$

$$H(x - i\omega) = \frac{1}{i}\sqrt[4]{q}\,e^{\frac{\pi}{2K}\omega}\left\{e^{i\frac{\pi}{2K}x} - e^{-\frac{\pi}{K}\omega - i\frac{\pi}{2K}x} - \ldots\right\};$$

und wenn man den Werth von $\frac{\pi}{2K}x$ einsetzt, so gewinnt man die Ausdrücke:

$$\begin{aligned} H(x + i\omega) + H(x - i\omega) = 2\sqrt[4]{q}\,e^{\frac{\pi}{2K}\omega}\Big\{ & \cos[(1-\mu)v_0 - \Lambda' + \mu\Lambda] \\ & + e^{-\frac{\pi}{K}\omega}\cos[(1-\mu)v_0 - \Lambda' + \mu\Lambda] \\ & + q^2 e^{\frac{\pi}{K}\omega}\cos 3[(1-\mu)v_0 - \Lambda' + \mu\Lambda] \\ & + \ldots\ldots\Big\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} H(x + i\omega) - H(x - i\omega) = -2i\sqrt[4]{q}\,e^{\frac{\pi}{2K}\omega}\Big\{ & \sin[(1-\mu)v_0 - \Lambda' + \mu\Lambda] \\ & - e^{-\frac{\pi}{K}\omega}\sin[(1-\mu)v_0 - \Lambda' + \mu\Lambda] \\ & + q^2 e^{\frac{\pi}{K}\omega}\sin 3[(1-\mu)v_0 - \Lambda' + \mu\Lambda] \\ & - \ldots\ldots\Big\} \end{aligned}$$

Bezeichnet man nun:

$$\varsigma = \mu - \nu(1 - \mu),$$

so giebt die Gleichung (28):

$$\begin{aligned} \theta(x)E = {} & \varkappa\cos[(1-\varsigma)v_0 - \Gamma] \\ & + \varkappa e^{-\frac{\pi}{K}\omega}\cos\{2(1-\mu)v_0 - 2(\Lambda' - \mu\Lambda) - [(1-\varsigma)v_0 - \Gamma]\} \\ & + \varkappa q^2 e^{\frac{\pi}{K}\omega}\cos\{2(1-\mu)v_0 - 2(\Lambda' - \mu\Lambda) + [(1-\varsigma)v_0 - \Gamma]\} \end{aligned}$$

Das erste Glied rechter Hand ist das Hauptglied der Mittelpunktsgleichung, insofern diese in den Ausdruck für den Radius-vector eingeht; das zweite Glied entspricht der Evection; das Argument $\varsigma v_0$ ist endlich die Bewegung des Mondperigäums.

Mit Hinweglassung der Glieder, welche in höheren Potenzen von $q$ multiplicirt sind, hat man:

$$\frac{1}{\theta(x)} = 1 + 2q\cos 2\frac{\pi}{2K}x$$

$$= 1 - 2q\cos 2[(1-\mu)v_0 - \Lambda' + \mu\Lambda]$$

und mit demselben Grade der Genauigkeit hat man:

$$\sqrt{1 + \eta_1\cos(\lambda v_0 - \Lambda)} = 1 + \frac{1}{2}\eta_1\cos 2[(1-\mu)v_0 - \Lambda' + \mu\Lambda]$$

Durch Multiplication mit diesen beiden Factoren erhält man aus dem vorhergehenden Ausdrücke für $\theta(x)E$, der Gleichung (17) gemäss, den folgenden:

$$(29)\qquad \begin{aligned}\rho_0 = {} & \varkappa\left[1 - \left(q - \frac{1}{4}\eta_1\right)\left(e^{-\frac{\pi}{K}\omega} + q^2 e^{\frac{\pi}{K}\omega}\right)\right]\cos[(1-\varsigma)v_0 - \Gamma] \\ & + \varkappa\left[e^{-\frac{\pi}{K}\omega} - \left(q - \frac{1}{4}\eta_1\right)\right]\cos\{2[(1-\mu)v_0 - \Lambda' + \mu\Lambda] - [(1-\varsigma)v_0 - \Gamma]\} \\ & - \varkappa\left[q - \frac{1}{4}\eta_1 - q^2 e^{\frac{\pi}{K}\omega}\right]\cos\{2[(1-\mu)v_0 - \Lambda' + \mu\Lambda] + [(1-\varsigma)v_0 - \Gamma]\} \\ & - \varkappa\left[q - \frac{1}{4}\eta_1\right]e^{-\frac{\pi}{K}\omega}\cos\{4[(1-\mu)v_0 - \Lambda' + \mu\Lambda] - [(1-\varsigma)v_0 - \Gamma]\} \\ & - \ldots\ldots\end{aligned}$$

Dieser Ausdruck von $\rho_0$ ist indessen noch unvollständig, indem derselbe nicht diejenigen Glieder enthält, welche aus der Function $W$ rechter Hand in der Gleichung (26) entspringen. Diese Glieder werden, wenn man sie zunächst in der Function $E$ berücksichtigt, aus der nachstehenden Formel erhalten:

$$(30)\quad E = -\frac{1}{\lambda}\frac{\pi}{2K}\frac{[\theta(0)]^2\,\theta(i\omega)}{k'\mathrm{H}(i\omega)\,\mathrm{H}_1(i\omega)\,\theta_1(i\omega)}\frac{\mathrm{H}(x+i\omega)}{\theta(x)}e^{-\frac{\theta'(i\omega)}{\theta(i\omega)}x}\int\frac{\mathrm{H}(x-i\omega)}{\theta(x)}e^{\frac{\theta'(i\omega)}{\theta(i\omega)}x}\,W dv_0$$

$$+\frac{1}{\lambda}\frac{\pi}{2K}\frac{[\theta(0)]^2\,\theta(i\omega)}{k'\mathrm{H}(i\omega)\,\mathrm{H}_1(i\omega)\,\theta_1(i\omega)}\frac{\mathrm{H}(x-i\omega)}{\theta(x)}e^{\frac{\theta'(i\omega)}{\theta(i\omega)}x}\int\frac{\mathrm{H}(x+i\omega)}{\theta(x)}e^{-\frac{\theta'(i\omega)}{\theta(i\omega)}x}\,W dv_0,$$

und diese Grösse ist dem Ausdrucke (27) hinzuzufügen, damit die vollständige Function $E$ erhalten werde.

Die Ermittelung des gemeinschaftlichen Coefficienten der beiden Glieder in dem vorstehenden Ausdrucke habe ich in der ersten Abhandlung über die Theorie der Bewegungen der Himmelskörper durchgeführt.[1] An sich ist diese Ermittelung nicht von Interesse und kann daher hier übergangen werden, und dies um so mehr, da sie leicht, auf Grund bekannter Regeln, aus der Integralrechnung bewerkstelligt werden kann.

Von den Gliedern in $W_1$ gedenke ich nur der nachstehenden, als der grössten und einflussreichsten

$$W_1 = -\gamma_0 - \beta_1\rho_0' - \gamma_1\cos(\lambda v_0 - A)$$

und eben diese Glieder bilden auch den Haupttheil der Function $W$. Das zweite dieser drei Glieder ist aber noch nicht auf eine solche Form gebracht, dass die Functionen unter dem Integralzeichen in der Gleichung (30) unmittelbar integrabel sind, wenn dieses Glied für $W$ daselbst eingeführt wird. Aus der Theorie der Erdbewegung hat man aber, wenn man bloss den intermediären Werth von $\rho_0'$ berücksichtigt,

$$\rho_0' = \varkappa'\cos[(1-\varsigma')v_0' - \Gamma']$$

in welchem Ausdrucke $\varkappa'$ mit der Excentricität der Erdbahn identificirt werden, $\varsigma' v_0'$ die Bewegung des Erdperiheliums, und $\Gamma'$ die um 180° vermehrte Länge des Perihels (also das Perigäum der Sonne) bedeutet. Indem man ferner die Länge $v_0'$ durch $v_0$ ersetzt und dabei die mit $G$ bezeichnete Grösse vernachlässigt, ergiebt sich

$$\rho_0' = \varkappa'\cos[(1-\varsigma')(\mu v_0 - \mu A + A') - \Gamma']$$

[1] Bihang till k. svenska Vetenskaps-akademiens handlingar, Bd. 6.

Mit Anwendung dieses Ausdruckes erhält man sämmtliche Glieder in $W$ auf solche Form gebracht, dass die in der Gleichung (30) vorkommenden Integrationen unmittelbar auszuführen sind.

Die Einzelnheiten der hierauf bezüglichen leichten Rechnungen werde ich nun nicht weiter berühren, indem wir die allgemeine Form der Resultate auch ohne solche Details erkennen werden, und die bereits mitgetheilten Entwicklungen uns in den Stand setzen, über die numerische Genauigkeit, die bei der ersten Annäherung erreicht wird, uns ein Urtheil zu bilden. Zum Erkennen der allgemeinen Form der Resultate genügt folgende Bemerkung: Wenn in dem Producte

$$W\frac{\mathrm{H}(x-i\omega)}{\Theta(x)}e^{\frac{\Theta'(i\omega)}{\mathrm{H}(i\omega)}x}$$

ein Glied der Form

$$he^{igv_0-iB}$$

vorkommt, wo $h$, $g$ und $B$ beliebige aber doch reelle Constanten bedeuten, so enthält das Product

$$W\frac{\mathrm{H}(x+i\omega)}{\Theta(x)}e^{-\frac{\Theta'(i\omega)}{\mathrm{H}(i\omega)}x}$$

das entsprechende Glied

$$he^{-igv_0+iB}$$

Wenn nun diese beiden Glieder in die Gleichung (30) eingesetzt werden, so erhalten wir das entsprechende Glied in $E$ wie folgt:

$$E = -\frac{h}{i\lambda g}\frac{\pi}{2K}\frac{[\Theta(0)]^2\,\Theta(i\omega)}{k'\mathrm{H}(i\omega)\mathrm{H}_1(i\omega)\Theta_1(i\omega)}\frac{\mathrm{H}(x+i\omega)}{\Theta(x)}e^{-\frac{\Theta'(i\omega)}{\Theta(i\omega)}x+igv_0-iB}$$
$$-\frac{h}{i\lambda g}\frac{\pi}{2K}\frac{[\Theta(0)]^2\,\Theta(i\omega)}{k'\mathrm{H}(i\omega)\mathrm{H}_1(i\omega)\Theta_1(i\omega)}\frac{\mathrm{H}(x-i\omega)}{\Theta(x)}e^{\frac{\Theta'(i\omega)}{\Theta(i\omega)}x-igv_0+iB}$$

oder, wenn man jetzt $B$ für $B-\nu\left(\Lambda'-\mu\Lambda-\frac{1}{2}\pi\right)$ schreibt,

$$(31)\quad E = -\frac{h}{i\lambda g}\frac{\pi}{2K}\frac{[\Theta(0)]^2\,\Theta(i\omega)}{k'\mathrm{H}(i\omega)\mathrm{H}_1(i\omega)\Theta_1(i\omega)}\frac{\mathrm{H}(x+i\omega)+\mathrm{H}(x-i\omega)}{\Theta(x)}\cos\{[g-\nu(1-\mu)]v_0-B\}$$
$$-\frac{h}{\lambda g}\frac{\pi}{2K}\frac{[\Theta(0)]^2\,\Theta(i\omega)}{k'\mathrm{H}(i\omega)\mathrm{H}_1(i\omega)\Theta_1(i\omega)}\frac{\mathrm{H}(x+i\omega)-\mathrm{H}(x-i\omega)}{\Theta(x)}\sin\{[g-\nu(1-\mu)]v_0-B\}$$

## 5.

Die Glieder, welche wir jetzt theils entwickelt, theils angedeutet haben, entsprechen den Hauptgleichungen der Mondbewegung, nehmlich der Mittelpunktsgleichung, der Evection, der Variation und der jährlichen Gleichung. Dabei ist auch die Bewegung des Mondperigäums, die wir durch $\varsigma v_0$ bezeichnet haben, ziemlich vollständig gegeben. Durch eine geringe Abänderung der betreffenden constanten Coefficienten, von der weiter unter die Rede sein soll, lässt sich die Genauigkeit noch steigern, ohne dass an der bisher befolgten Behandlung der Aufgabe formell Etwas geändert wird, so dass die Resultate immer noch als der ersten Annäherung entsprechend anzusehen sind. In der zweiten Annäherung kommen die Glieder, welche von den höheren Potenzen der Grössen $\rho_0$ und $\rho_0'$ abhängen, mit in Rechnung, in so fern sie nehmlich die Glieder der intermediären Bahn, und namentlich die Bewegung des Perigäums beeinflussen. Unsere Aufgabe ist nun aber nicht die betreffenden Entwicklungen wirklich auszuführen, sondern vielmehr, die Resultate unter einer möglichst concentrirten Form zu erhalten. Zu diesem Zwecke werden wir zwei Functionen $l$ und $L_1$ bilden, indem wir setzen:

$$(32) \qquad \begin{cases} \mathrm{H}(x+i\omega) + \mathrm{H}(x-i\omega) = 2l\theta(x)\cos L_1 \\ i\{\mathrm{H}(x+i\omega) - \mathrm{H}(x-i\omega)\} = 2l\theta(x)\sin L_1 \end{cases}$$

Aus diesen Bestimmungen folgen verschiedene Relationen, nehmlich

$$[\theta(x)]^2 l^2 = \mathrm{H}(x+i\omega)\mathrm{H}(x-i\omega)$$

$$\operatorname{tang} L_1 = i\frac{\mathrm{H}(x+i\omega) - \mathrm{H}(x-i\omega)}{\mathrm{H}(x+i\omega) + \mathrm{H}(x-i\omega)}$$

$$L_1 = \frac{1}{2}i\log\frac{\mathrm{H}(x+i\omega)}{\mathrm{H}(x-i\omega)}$$

$$\frac{dL_1}{dx} = \frac{1}{2}i\left\{\frac{\mathrm{H}'(x+i\omega)}{\mathrm{H}(x+i\omega)} - \frac{\mathrm{H}'(x-i\omega)}{\mathrm{H}(x-i\omega)}\right\}$$

Erinnert man sich ferner der Beziehung:

$$\frac{\theta(0)^2}{k\,\theta(i\omega)^2}\frac{\mathrm{H}(x+i\omega)\,\mathrm{H}(x-i\omega)}{[\theta(x)]^2} = -\operatorname{sn} i\omega^2 + \operatorname{sn} x^2,$$

so leuchtet die Richtigkeit des Ausdruckes

$$l = \sqrt{k}\,\frac{\theta(i\omega)}{\theta(0)}\sqrt{-\operatorname{sn} i\omega^2 + \operatorname{sn} x^2}$$

sofort ein.

Aus der Gleichung (28) ergiebt sich nun, indem die Gleichungen (32) berücksichtigt werden,

$$E = \varkappa\frac{e^{-\frac{\pi}{2K}\omega}}{\sqrt[4]{q}}\,l\cos[L_1 + \nu(1-\mu)v_0 - \Gamma + \Lambda' - \mu\Lambda],$$

und, wie wir aus der Gleichung (31) ersehen, können die übrigen Glieder in $E$ auf eine ähnliche Form gebracht werden. Fassen wir also alle Glieder in $E$ zusammen, so können wir das Resultat, wie folgt, angeben,

$$(33)\qquad \begin{aligned} E = {} & \varkappa_0 l\cos(L_1 + \lambda_0 v_0 - B_0) \\ & + \varkappa_1 l\cos(L_1 + \lambda_1 v_0 - B_1) \\ & + \varkappa_2 l\cos(L_1 + \lambda_2 v_0 - B_2) \\ & + \ldots\ldots, \end{aligned}$$

wo die $\varkappa$ und die $\lambda$ constante Coefficienten bezeichnen, deren Werthe ebenso wie die der Winkel $B$ sehr einfach zu ermitteln sind, und daher hier übergangen werden. Ins Besondere hat man

$$\begin{aligned} \varkappa_0 &= \varkappa\frac{e^{-\frac{\pi}{2K}\omega}}{\sqrt[4]{q}} \\ \lambda_0 &= \nu(1-\mu) \\ B_0 &= \Gamma - \Lambda' + \mu\Lambda \end{aligned}$$

Den Ausdruck (33) für $E$ kann man indessen formell noch mehr zusammenziehen, was für die späteren Operationen nicht ohne Nutzen sein wird. Wir bilden die Functionen:

$$
(34) \qquad \left\{
\begin{aligned}
\delta \cos D = {} & \varkappa_0 \\
& + \varkappa_1 \cos[(\lambda_1 - \lambda_0)v_0 - (B_1 - B_0)] \\
& + \varkappa_2 \cos[(\lambda_2 - \lambda_0)v_0 - (B_2 - B_0)] \\
& + \cdots\cdots \\
\delta \sin D = {} & \varkappa_1 \sin[(\lambda_1 - \lambda_0)v_0 - (B_1 - B_0)] \\
& + \varkappa_2 \sin[(\lambda_2 - \lambda_0)v_0 - (B_2 - B_0)] \\
& + \cdots\cdots
\end{aligned}
\right.
$$

Die numerischen Werthe der Constanten sind nun in der Theorie des Mondes solche, dass $\varkappa_0$ die Summe der Übrigen bei Weitem übertrifft. Man kann daher annehmen, dass $\delta$ eine immer positive Grösse bezeichnet; dabei wird $D$ einen Winkel bedeuten, der wenige Grade zu beiden Seiten von Null hin und her schwankt.

Für die Function $\delta^2$ führe ich noch den folgenden Ausdruck an

$$
(35) \qquad \delta^2 = \varkappa_0^2 + \varkappa_1^2 + \varkappa_2^2 + \cdots
$$

$$
\begin{aligned}
& + 2\varkappa_0 \{\varkappa_1 \cos[(\lambda_1 - \lambda_0)v_0 - (B_1 - B_0)] + \varkappa_2 \cos[(\lambda_2 - \lambda_0)v_0 - (B_2 - B_0)] + \cdots\} \\
& + 2\varkappa_1 \{\varkappa_2 \cos[(\lambda_2 - \lambda_1)v_0 - (B_2 - B_1)] + \varkappa_3 \cos[(\lambda_3 - \lambda_1)v_0 - (B_3 - B_1)] + \cdots\} \\
& + \cdots\cdots,
\end{aligned}
$$

aus dem die Entwicklungen der verschiedenen Potenzen von $\delta$ erhalten werden können.

In dem Falle, dass von den Coefficienten $\varkappa_0, \varkappa_1, \ldots,$ alle mit Ausnahme der beiden ersten verschwinden, gestalten sich die Formeln besonders einfach, und weil dieser Fall factisch in Betracht gezogen werden wird, so gebe ich die betreffenden Formeln an.

Zunächst bezeichne ich

$$
(\lambda_1 - \lambda_0)v_0 - (B_1 - B_0) = w
$$

und erhalte

$$\delta \cos D = x_0 + x_1 \cos w$$

$$\delta \sin D = x_1 \sin w$$

$$\operatorname{tang} D = \frac{x_1 \sin w}{x_0 + x_1 \cos w}$$

$$\delta^2 = x_0^2 + 2 x_0 x_1 \cos w + x_1^2$$

$$\frac{dD}{dv_0} = \frac{x_0 x_1 \cos w + x_1^2}{\delta^2} (\lambda_1 - \lambda_0)$$

$$\frac{d\delta}{dv_0} = -\frac{x_0 x_1 \sin w}{\delta} (\lambda_1 - \lambda_0)$$

Aus der Gleichung (33) ergiebt sich nun, nachdem wir uns der Bezeichnungen (34) bedient haben,

$$E = \delta . l . \cos (L + D);$$

man findet ferner, indem man der Gleichung (21) gemäss den Werth von $\rho_0$ bildet, und dabei die Bezeichnungen

$$\eta = \delta . l . \sqrt{1 + \eta_1 \cos (\lambda v_0 - A)} \tag{36}$$

einführt, das Resultat

$$\rho_0 = \eta \cos (L + D) \tag{37}$$

In gewisser Hinsicht ist diese Form des Resultates mit wesentlichen Vortheilen verbunden, die jedoch andererseits von Nachtheilen aufgewogen werden, welche ihr eigenthümlich sind. Wenn man nehmlich, mit Hülfe dieses Werthes, die reducirte Zeit $\tau$ als Function der intermediären Länge $v_0$ entwickelt, so treten Glieder langer und kurzer Perioden durch einander auf, eine Unbequemlichkeit, die man doch auf ein möglichst geringes Maass zurückzubringen suchen muss. Eine solche Reduction ist auch sehr einfach auszuführen, wenn man von den Gliedern der Gleichung (33) alle solche abtrennt, die in ihren Haupttheilen entweder constant oder langer Periode sind. Die Functionen $\delta \cos D$ und $\delta \sin D$ werden nun auch diese Glieder nicht mehr enthalten und also wesentlich reducirt erscheinen. In der Mondtheorie wird es sich sogar empfehlen, von diesen Functionen alle diejenigen Glieder abzutrennen, die nicht in $x_0$ oder $x_1$ multiplicirt sind, wobei indessen vorausgesetzt wird, dass das in $x_1$ multiplicirte Glied der Variation entspricht. Die jährliche Gleichung ist alsdann unter den abgetrennten Gliedern zu suchen. Bezeichnen wir die Summe dieser durch $R$, so haben wir nun, statt der Gleichung (37), die folgende

$$\rho_0 = R + \eta \cos(L + D) \tag{38}$$

Es ist aber bei dieser Gleichung zu bemerken, dass $R$ an sich sehr klein ist, aber Glieder enthält, die im Integrale $\int R dv_0$ gross werden. Da nun die Function $\eta \cos(L + D)$ keine, oder wenigstens keine wesentlichen Glieder langer Periode enthält, so können solche auch nicht in $\frac{\eta \cos(L + D)}{1 + R}$ vorkommen. Diesem Umstande gemäss muss die Entwicklung der reducirten Zeit als Function von $v_0$ angeordnet werden.

Mit der Erreichung der angeführten Resultate ist das Wesentlichste der vorliegenden Untersuchung absolvirt; denn wir haben in dem gefundenen Ausdrucke von $\rho_0$ bereits einen Werth dieser Grösse, welcher sehr genähert ist und die wesentlichen Eigenthümlichkeiten der Mondbahn angiebt. Es sind aber noch einige Bemerkungen hinzuzufügen, theils in Bezug auf die Ausführung der fortgesetzten Annäherungen, um die Function $\rho_0$ genauer zu bestimmen, theils in Bezug auf die Ermittelung der Functionen $\chi$ und $\tau$.

## 6.

Sobald ein genäherter Werth der Function $\rho_0$ oder $E$ gefunden worden ist, hat man denselben in die rechte Seite der Gleichung (26) zu substituiren. Im allgemeinen sind die hierbei vorkommenden Operationen mit keinen Schwierigkeiten verknüpft, jedoch mit der Ausnahme, dass Glieder auftreten, welche $x$ oder $v_0$ als Factor haben und welche daher

Operationen veranlassen diese zu vernichten. Solche Glieder entstehen, wenn für $W$ ein Product der Form

$$fE \cos 2s \frac{\pi}{2K} x$$

in die rechte Seite der Gleichung (30) eingesetzt wird, und zwar ist hierbei 2 der geringste Werth der ganzen Zahl $s$, und kommt von $E$ nur der Theil in Betracht, welcher durch die Gleichung (27) gegeben ist. Der Coefficient $f$ dieses Productes ist immer eine Grösse wenigstens zweiter Ordnung in Bezug auf $\beta$ oder $\mu^2$, und es wird sich zeigen, dass das resultirende, in $v_0$ multiplicirte Glied wenigstens dritter Ordnung ist. In Bezug auf dieses Glied, welches wir $E_1$ nennen wollen, giebt nun die Gleichung (30) ein Resultat der Form

$$E_1 = -f_1 C_1 \frac{\mathrm{H}(x+i\omega)}{\Theta(x)} e^{-\frac{\Theta'(i\omega)}{\Theta(i\omega)}x} \int \frac{\mathrm{H}(x+i\omega)\mathrm{H}(x-i\omega)}{[\Theta(x)]^2} \cos 2s \frac{\pi}{2K} x\, dx$$

$$+ f_1 C_2 \frac{\mathrm{H}(x-i\omega)}{\Theta(x)} e^{\frac{\Theta'(i\omega)}{\Theta(i\omega)}x} \int \frac{\mathrm{H}(x+i\omega)\mathrm{H}(x-i\omega)}{[\Theta(x)]^2} \cos 2s \frac{\pi}{2K} x\, dx + \ldots,$$

wo $f_1$ das Product von $f$ und den constanten Factor in der Gleichung (30) bezeichnet.

Erwägen wir nun, dass

$$\frac{\mathrm{H}(x+i\omega)\mathrm{H}(x-i\omega)}{[\Theta(x)]^2} = \frac{k\Theta(i\omega)^2}{[\Theta(0)]^2}\{-\operatorname{sn} i\omega^2 + \operatorname{sn} x^2\},$$

und erinnern wir uns der Entwicklung

$$\operatorname{sn} x^2 = \text{const.}$$
$$-\left(\frac{\pi}{2K}\right)^2 \frac{1}{k^2}\left\{\frac{8q}{1-q^2}\cos 2\frac{\pi}{2K}x + \frac{16q^2}{1-q^4}\cos 4\frac{\pi}{2K}x + \ldots\right\},$$

so ersehen wir, dass das Resultat in Bezug auf $E_1$ das folgende wird:

$$E_1 = f_1\left(\frac{\pi}{2K}\right)^2 \frac{\Theta(i\omega)^2}{k[\Theta(0)]^2}\frac{4sq^s}{1-q^{2s}}\, x\left\{C_1 \frac{\mathrm{H}(x+i\omega)}{\Theta(x)} e^{-\frac{\Theta'(i\omega)}{\Theta(i\omega)}x} - C_2 \frac{\mathrm{H}(x-i\omega)}{\Theta(x)} e^{\frac{\Theta'(i\omega)}{\Theta(i\omega)}x}\right\} + \ldots$$

Andererseits erhält man aus der Gleichung (27), wenn man daselbst, und zwar nur in dem Quotienten $\frac{\theta'(i\omega)}{\theta(i\omega)}$, die Grösse $\omega$ um $\Delta\omega$ vermehrt denkt,

$$\Delta E = -x\left\{C_1 \frac{\mathrm{H}(x+i\omega)}{\theta(x)} e^{-\frac{\theta'(i\omega)}{\theta(i\omega)}x} - C_2 \frac{\mathrm{H}(x-i\omega)}{\theta(x)} e^{\frac{\theta'(i\omega)}{\theta(i\omega)}x}\right\} \frac{d^2 \log \theta(i\omega)}{id\omega^2} \Delta\omega$$

Es geht aus der Form dieses Resultates sogleich hervor, dass man durch eine passende Bestimmung von $\Delta\omega$, die jedenfalls eine sehr kleine Grösse bezeichnet, dass Glied $E_1$ vernichten kann.

Dass die Änderung von $\omega$ übrigens keine seculären Glieder veranlasst, ist leicht nachzuweisen. Zunächst ist ersichtlich, dass sie nicht durch Differentiation der Functionen $\mathrm{H}(x+i\omega)$ und $\mathrm{H}(x-i\omega)$ entstehen können, aber auch in den Gliedern der Gleichung (30) hat eine Differentiation in Bezug auf $\omega$ kein seculäres Glied zu Folge. Wir betrachten den Ausdruck

$$A = e^{\alpha x}\int F e^{-\alpha x} dx$$

wo $\alpha$ eine beliebige Function von $\omega$ und $F$ eine Function von $x$ bedeutet. Man erhält hieraus, indem nach $\omega$ differentiirt wird,

$$\frac{\partial A}{\partial\omega} = \frac{d\alpha}{d\omega}\left\{x e^{\alpha x}\int F e^{-\alpha x} dx - e^{\alpha x}\int x F e^{-\alpha x} dx\right\}$$

$$= \frac{d\alpha}{d\omega} e^{\alpha x}\int\int F e^{-\alpha x} dx^2,$$

ein Resultat, worin die Glieder, welche $x$ als Factor enthielten, einander aufgehoben haben.

## 7.

Das Resultat, welches wir für $\frac{d\chi}{dv_0}$ angegeben haben, ist, obschon für die bisherige Verwendung hinreichend genau, doch nicht so genähert, wie wir es in der ersten Annäherung ohne Mühe finden können. Da wir aber bereits einen genäherten Werth dieser Grösse besitzen, so können wir die erste der Gleichungen (17) mit Rücksicht hierauf behandeln.

Wir schreiben diese Gleichung zunächst in der folgenden Weise:

$$\frac{d^2\chi}{dv_0^2} = -\beta_1 \sin(\lambda v_0 + 2\chi - A) + \beta_1(4\rho_0 - 3\rho_0') \sin(\lambda v_0 - A)$$
$$+ \beta_1(4\rho_0 - 3\rho_0')\chi \cos(\lambda v_0 - A)$$
$$+ \ldots\ldots$$

und führen in das dritte und die folgenden Glieder rechter Hand den genäherten Werth

$$\chi = \frac{\beta_1}{\lambda^2} \sin(\lambda v_0 - A) + 4\beta_1 \int\int \rho_0 \sin(\lambda v_0 - A) dv_0^2 - 3\beta_1 \int\int \rho_0' \sin(\lambda v_0 - A) dv_0^2$$

ein. Das Resultat, welches wir somit erhalten, bezeichnen wir, wie folgt:

$$(39) \quad \frac{d^2\chi}{dv_0^2} = -\beta_1 \sin(\lambda v_0 + 2\chi - A) + \beta_1(4\rho_0 - 3\rho_0') \sin(\lambda v_0 - A)$$
$$+ \frac{\beta_1^2}{2\lambda^2}(4\rho_0 - 3\rho_0') \sin 2(\lambda v_0 - A) + X_1,$$

wobei wir gesetzt haben:

$$(40) \qquad X_1 = 4\beta_1^2(4\rho_0 - 3\rho_0') \cos(\lambda v_0 - A) \int\int \rho_0 \sin(\lambda v_0 - A) dv_0^2$$
$$- 3\beta_1^2(4\rho_0 - 3\rho_0') \cos(\lambda v_0 - A) \int\int \rho_0' \sin(\lambda v_0 - A) dv_0^2$$

Die Function $X_1$ ist also, wie man leicht erkennt, eine sehr kleine Grösse, erstens zweiter Ordnung in Bezug auf $\beta_1$, dann aber auch zweiter Ordnung in Bezug auf die Constanten $\varkappa$ und $\varkappa'$.

Für die Integration einer Gleichung der Form (39) habe ich in der ersten Abhandlung über die Theorie der Bew. d. Himmelsk. eine Methode gegeben, die zwar keine directe ist, sondern das Resultat durch fortgesetzte Annäherungen giebt. Im vorliegenden Falle convergiren diese aber äusserst rasch, weil die in der ersten Annäherung vernachlässigten Glieder eine sehr kleine Grösse, von der Ordnung $\beta_1^2(4\rho_0 - 3\rho_0')^2$ bilden. Die Auseinandersetzung der Methode brauche ich hier nicht zu wiederholen; es genügt, die Resultate der ersten Annäherung anzuführen.

Aus der Gleichung:

$$k\left(\frac{2K}{\pi}\right) = \frac{\sqrt{8\beta_1}}{\lambda}$$

bestimmen wir den Modul $k$, und bezeichnen

$$\xi = \frac{2K}{\pi}\frac{1}{2}(\lambda v_0 - A);$$

wir erhalten alsdann:

$$\chi = \operatorname{am}\xi - \frac{1}{2}(\lambda v_0 - A) + V_1, \tag{41}$$

wobei $V_1$ aus der nachstehenden Gleichung zu bestimmen ist:

$$V_1 = C_1 \operatorname{dn}\xi + C_2 \operatorname{dn}\xi\left[\frac{\Theta_1'(\xi)}{\Theta_1(\xi)} + \frac{E}{K}\xi\right]$$
$$+ \frac{\operatorname{dn}\xi}{\frac{\lambda^2}{4}\left(\frac{2K}{\pi}\right)^2 - 2\beta_1}\int\frac{k'^2 d\xi}{(\operatorname{dn}\xi)^2}\int X \operatorname{dn}\xi d\xi$$

Die Buchstaben $K$ und $E$ bedeuten hier, wie gewöhnlich, die vollständigen elliptischen Integrale erster und zweiter Gattung, und die Grösse $X$ bezeichnet die Summe aller Glieder rechter Hand in der Gleichung (39). Die willkürliche Constante $C_1$ kann sofort gleich Null gesetzt werden; die andere Constante $C_2$ muss man aber in der Weise bestimmen, dass die Glieder, welche den Factor $\xi$ erhalten, zum Verschwinden gebracht werden. Solche Glieder lassen sich übrigens direct, durch eine geringe Änderung des Coefficienten $\beta_1$, vermeiden.

Handelt es sich nun darum, die $\chi$-Function an und für sich zu entwickeln, so muss der bereits gefundene Werth von $\rho_0$ in die Function $X$ substituirt werden; beabsichtigt man aber eine neue Annäherung in Bezug auf $\rho_0$ durchzuführen, so ist diese Grösse als noch unbestimmt in den Formeln beizubehalten, und man erhält alsdann ein Resultat für $\frac{d\chi}{dv_0}$, welches in derselben Weise, wie es in dem Artikel 3 gezeigt wurde, zu verwenden ist.

Die Herstellung der Function erheischt indessen noch die Entwicklung des Integrales

$$\int \eta \cos(L + D) \sin(\lambda v_0 - A) dv_0$$

und anderer, mit diesem verwandten. Ich werde daher die allgemeine Form

$$U = \int \eta^s e^{i[m(L+D)+\lambda_0 v_0+M]} dv_0$$

in Betrachtung ziehen, aus welchem die Entwicklungen der vorkommenden Specialfälle zu erhalten sind. In diesem Ausdrucke bedeutet $s$, nicht minder als $m$ ganze Zahlen, von welchen $m$ auch negativ sein kann; $M$ eine Constante, und $\lambda_0$ einen beliebigen positiven oder negativen Coefficienten, welcher natürlich auch die, dem Buchstaben $\lambda$ vorhin beigelegten Werth haben kann. — Man könnte nun die Function $dU$ in leichter Weise, in eine direct integrable Form gebracht erhalten, indem man die Entwicklung der Function $\eta^s e^{im(L+D)}$ zuerst durchführte — in welcher die Differenz $s - m$ immer eine positive gerade Zahl, Null nicht ausgenommen, bedeutet — allein dadurch würde man die concentrirte Form der Resultate, die wir doch beizubehalten bestrebt sind, aufgeben. Ein anderer Ausweg, die Integration durchzuführen, ist daher erforderlich.

Um eine solche vorzubereiten, setze ich:

$$U = P\eta^s e^{i[m(L+D)+\lambda_0 v_0+M]}$$

Wenn nun dieser Ausdruck, nach ausgeführter Differentiation, mit dem vorhergehenden verglichen wird, so finden wir die Gleichung:

$$1 = \left\{\frac{s}{\eta}\frac{d\eta}{dv_0} + mi\left(\frac{dL}{dv_0} + \frac{dD}{dv_0}\right) + i\lambda_0\right\} P + \frac{dP}{dv_0}$$

in welcher Gleichung die bekannten Werthe der Differentialquotienten einzusetzen sind. Man erhält somit ein Resultat der Form:

$$1 = [ig - 2\varepsilon \sin(\lambda v_0 - A) + \Psi] P + \frac{dP}{dv_0},$$

indem man sich unter $g$ und $2\varepsilon$ zwei constante Coefficienten denkt, von denen die zweite von der Ordnung des Verhältnisses zwischen Evection und Mittelpunktsgleichung, multiplicirt mit einer ganzen Zahl, ist. Die Function $\Psi$ bedeutet dabei ein Reihe Glieder, deren Summe immer klein im Verhältniss zu $2\varepsilon$ bleibt.

Wir setzen hierauf:

$$P = P_0 + P_1 + P_2 + \ldots,$$

und bestimmen die einzelnen $P$ aus den Gleichungen:

$$1 = [ig - 2\varepsilon \sin(\lambda v_0 - A)] P_0 + \frac{dP_0}{dv_0},$$

$$-P_0 \Psi = [ig - 2\varepsilon \sin(\lambda v_0 - A)] P_1 + \frac{dP_1}{dv_0}$$

$$-P_1 \Psi = [ig - 2\varepsilon \sin(\lambda v_0 - A)] P_2 + \frac{dP_2}{dv_0}$$

u. s. w.

Hieraus findet sich:

$$P_0 = e^{-igv_0 - \frac{2\varepsilon}{\lambda}\cos(\lambda v_0 - A)} \int e^{igv_0 + \frac{2\varepsilon}{\lambda}\cos(\lambda v_0 - A)} dv_0$$

$$P_1 = -e^{-igv_0 - \frac{2\varepsilon}{\lambda}\cos(\lambda v_0 - A)} \int e^{igv_0 + \frac{2\varepsilon}{\lambda}\cos(\lambda v_0 - A)} P_0 \Psi dv_0$$

$$= -e^{-igv_0 - \frac{2\varepsilon}{\lambda}\cos(\lambda v_0 - A)} \int \Psi dv_0 \int e^{igv_0 + \frac{2\varepsilon}{\lambda}\cos(\lambda v_0 - A)} dv_0$$

u. s. w. — Ohne Schwierigkeit würde man, auf Grund dieser Ausdrücke, die betreffenden Functionen entwickeln können, allein wenigstens die erste derselben lässt sich durch die Methode der unbestimmten Coefficienten noch einfacher ermitteln.

Zu diesem Zwecke setzen wir:

$$iP_0 = p_0 + p_1 e^{i(\lambda v_0 - A)} + p_2 e^{2i(\lambda v_0 - A)} + \ldots$$
$$+ p_{-1} e^{-i(\lambda v_0 - A)} + p_{-2} e^{-2i(\lambda v_0 - A)} + \ldots.$$

welche Bezeichnungsweise die folgenden Bedingungsgleichungen nach sich zieht:

$$1 = p_0 g + p_{-1}\varepsilon - p_1\varepsilon$$

$$0 = (\lambda + g)p_1 + \varepsilon p_0 - \varepsilon p_2$$

$$0 = (2\lambda + g)p_2 + \varepsilon p_1 - \varepsilon p_3$$

u. s. w.

$$0 = (\lambda - g)p_{-1} + \varepsilon p_0 - \varepsilon p_{-2}$$

$$0 = (2\lambda - g)p_{-2} + \varepsilon p_{-1} - \varepsilon p_{-3}$$

u. s. w.

Aus diesen Gleichungen folgen, indem $s$ eine positive ganze Zahl bedeutet,

$$\frac{p_s}{p_{s-1}} = -\frac{\dfrac{\varepsilon}{s\lambda + g}}{1 - \dfrac{p_{s+1}}{p_s}\dfrac{\varepsilon}{s\lambda + g}}; \qquad \frac{p_{-s}}{p_{-s+1}} = -\frac{\dfrac{\varepsilon}{s\lambda - g}}{1 - \dfrac{p_{-s-1}}{p_{-s}}\dfrac{\varepsilon}{s\lambda - g}};$$

und die Beziehungen geben zu den nachstehenden Kettenbrüchen Anlass:

$$\frac{p_s}{p_{s-1}} = -\cfrac{\dfrac{\varepsilon}{s\lambda + g}}{1 + \cfrac{\dfrac{\varepsilon^2}{(s\lambda + g)[(s+1)\lambda + g]}}{1 + \cfrac{\dfrac{\varepsilon^2}{[(s+1)\lambda + g][(s+2)\lambda + g]}}{1 + \ldots\ldots}}}$$

$$\frac{p_{-s}}{p_{-s+1}} = -\cfrac{\dfrac{\varepsilon}{s\lambda - g}}{1 + \cfrac{\dfrac{\varepsilon^2}{(s\lambda - g)[(s+1)\lambda - g]}}{1 + \cfrac{\dfrac{\varepsilon^2}{[(s+1)\lambda - g][(s+2)\lambda - g]}}{1 + \ldots\ldots}}}$$

Diese Ausdrücke erweisen, nicht nur dass die Kettenbrüche convergent sind, wenn $s$ einen hinlänglich grossen Werth hat, sondern auch dass die Reihe, welche die Function $P_0$ darstellt, immer convergirt, den Fall jedoch ausgenommen, wo $s\lambda - g$ den Werth Null annehmen kann. Solche Fälle können indessen vermieden werden.

Hat man nach den angeführten Formeln die Verhältnisse $\frac{p_1}{p_0}$ und $\frac{p_{-1}}{p_0}$ gefunden, so ergiebt sich der absolute Werth von $p_0$ aus der Gleichung:

$$\frac{1}{p_0} = g + \varepsilon\left(\frac{p_{-1}}{p_0} - \frac{p_1}{p_0}\right)$$

Die übrigen Gleichungen des Systems, welches die Function $P$ bestimmt, lassen sich in eine Reihe anderer Gleichungen zerlegen, von denen jede einzelne die Form der soeben betrachteten hat, und also durch die angeführten Ausdrücke integrirbar sind. In der That, wenn die Gleichung:

$$- P_{n-1}\Psi = \sum \gamma_s e^{i(\lambda_s v_0 - A_s)}$$

besteht, so setze man:

$$P_n = \gamma_0 P_{n.0} e^{i(\lambda_0 v_0 - A_0)} + \gamma_1 P_{n.1} e^{i(\lambda_1 v_0 - A_1)} + \dots;$$

zur Bestimmung der Function $P_{n.s}$ erhält man alsdann die Gleichung:

$$1 = [i(g + \lambda_s) - 2\varepsilon \sin(\lambda v_0 - A)] P_{n.s} + \frac{dP_{n.s}}{dv_0},$$

welche mit der Gleichung, woraus $P_0$ bestimmt wurde, ganz analog ist; nur steht $g + \lambda_s$ anstatt der Constante $g$.

Wir kommen endlich zu der Aufgabe, die reducirte Zeit $\tau$ als Function von $v_0$ zu ermitteln: dieselbe ist jedoch nunmehr leicht zu lösen, weil die soeben auseinandergesetzte Integrationsmethode auch jetzt Verwendung finden wird. Man hat nehmlich nur den Werth von $d\tau$ aus der Gleichung (15) nach den steigenden Potenzen der Grösse $\rho_0$ zu entwickeln, wonach die Reduction auf integrirbare Formen ohne besondere Vorschriften äusserst leicht auszuführen ist. — Man hat aber hierbei die Glieder besonders zu beachten, die aus $R$ herrühren; der constante Theil dieser Grösse, ebenso wie die constanten Theile von $R^2, R^3, \dots, \eta^2, \eta^4, \dots$ müssen in dem Factor $p$ berücksichtigt werden, und man kann diesen, wie schon hervorgehoben wurde, in solcher Weise bestimmen, dass die mittlere Bewegung durch das Product $\sqrt{\mu_1}\, a^{-\frac{3}{2}}$ ausgedrückt wird. Die

Glieder langer Periode, welche in den erwähnten Functionen vorkommen, werden durch die Integration direct vergrössert, und es ist zweckmässig, sie besonders zu behandeln, d. h. sie nicht mit den Gliedern kurzer Periode, wie z. B. $\eta\cos(L+D)$, $\eta^2\cos 2(L+D)$, u. s. w. zusammenzuschlagen. Man kann nehmlich mit den zuletzt genannten Gliedern, oder vielmehr mit der Function, aus welcher sie entstehen, eine gewisse Transformation vornehmen, wodurch der Ausdruck für $\tau$ wesentlich an Übersichtlichkeit gewinnt; ich muss sie indessen hier bei Seite lassen, um diese Abhandlung nicht zu sehr auszudehnen.

## 8.

Bevor ich zu der Mittheilung der numerischen Resultate übergehe, will ich einiger Zusatzglieder gedenken, welche bisher vernachlässigt wurden, die aber leicht nachträglich Berücksichtigung finden können. Es sind dies die Glieder, welche aus der Function

$$G = 2\mu\int\rho_0' dv_0 - 2\mu\int\rho_0 dv_0$$

herrühren. Diese Function, die bisher vernachlässigt wurde, veranlasst in $Q_0$ und $P_0$, als den wesentlichsten, die Zusatzglieder:

$$\Delta Q_0 = -6\mu^3\cos(\lambda v_0 - A)\int p_0 dv_0$$

$$\Delta P_0 = -6\mu^3\sin(\lambda v_0 - A)\int\rho_0 dv_0$$

Hiermit ergeben sich:

$$\Delta\frac{d\chi}{dv_0} = -6\mu^3\int\cos(\lambda v_0 - A)\,dv_0\int\rho_0 dv_0$$

$$-\Delta P_0 - 2\Delta\frac{d\chi}{dv_0} = 6\mu^3\sin(\lambda v_0 - A)\int\rho_0 dv_0 + 12\mu^3\int\cos(\lambda v_0 - A)dv_0\int\rho_0 dv_0;$$

und wenn man auch hier die im Art. 3 angeführte Transformation anwendet, und dabei alle unwesentlichen Glieder weglässt, so wird zunächst:

$$-\Delta P_0 - 2\Delta\frac{d\chi}{dv_0} = -6\mu^3\sin(\lambda v_0 - A)\frac{d\rho_0}{dv_0} - 12\mu^3\int\cos(\lambda v_0 - A)\frac{d\rho_0}{dv_0}dv_0$$

$$= -6\mu^3\sin(\lambda v_0 - A)\frac{d\rho_0}{dv_0} - 12\mu^3\cos(\lambda v_0 - A)\rho_0$$

$$- 12\mu^3\lambda\int\sin(\lambda v_0 - A)\rho_0 dv_0$$

In dem letzten Gliede dieses Ausdruckes setzen wir den Werth:

$$\int\rho_0\sin(\lambda v_0 - A)dv_0 = \frac{\sin(\lambda v_0 - A)\frac{d\rho_0}{dv_0} - \lambda\cos(\lambda v_0 - A)\rho_0}{\eta_0[1 + \eta_1\cos(\lambda v_0 - A)]}$$

ein, und erhalten, immer mit Hinweglassung unwesentlicher Glieder:

$$-\Delta P_0 - 2\Delta\frac{d\chi}{dv_0} = -6\mu^3\left(1 + 2\frac{\lambda}{\eta_0}\right)\sin(\lambda v_0 - A)\frac{d\rho_0}{dv_0}$$

$$- 12\mu^3\left(1 - \frac{\lambda^2}{\eta_0}\right)\cos(\lambda v_0 - A)\rho_0$$

Hiernach findet man leicht, als Correction von $\bar{\beta}$, den Werth:

$$\Delta\bar{\beta} = 3\mu^3\left(6\frac{\lambda^2}{\eta_0} + \lambda - 4\right)$$

Diese Vorbemerkung musste vorausgeschickt werden um eine der folgenden Zahlen motiviren zu können, die mit Rücksicht auf die zuletzt gegebene Correction berechnet worden ist.

Mit den bekannten Werthen der mittleren Bewegungen des Mondes und der Sonne, nehmlich:

$$\left.\begin{aligned}\log n &= 7.2350019\\ \log n' &= 6.1125936\end{aligned}\right\} \text{ in } 365\tfrac{1}{4} \text{ Tagen}$$

ergaben sich:

$$\log\mu = 8.8775917$$
$$\log\lambda = 0.2669659$$
$$\log\beta_1 = 7.9312747;$$

und hierauf:

$$\log \beta_0 = 7.9307323$$
$$\log \beta = 8.2142154$$
$$\log \gamma_0 = 7.4557767$$
$$\log \gamma_1 = 8.2496706;$$

ferner:

$$\log \eta_0 = 0.3852098$$
$$\log \eta_1 = 8.1821890$$
$$\log \eta_2 = 7.6266856;$$

und endlich:

$$\log \overline{\beta}_0 = 7.9153485$$
$$\log \overline{\beta} = 9.0107692,$$

in welchem letzten Werthe die Correction $\Delta\overline{\beta}$ bereits aufgenommen worden ist.

Nachdem diese Vorbereitungsrechnungen erledigt waren, ergab sich die Grösse $q$ aus der Gleichung (24), oder vielmehr aus der, dieser Gleichung entstammenden Reihe:

$$q = \frac{1}{4}\frac{\overline{\beta}}{\lambda^2} - \frac{1}{64}\left(\frac{\overline{\beta}}{\lambda^2}\right)^3 + \ldots$$

Es fand sich:

$$\log q = 7.8747530$$

Vermittelst der bekannten Formeln:

$$k = 4\sqrt{q}\left\{\frac{(1+q^2)(1+q^4)\ldots}{(1+q)(1+q^3)\ldots}\right\}^4$$

$$\frac{2K}{\pi} = 1 + \frac{4q}{1-q} - \frac{4q^3}{1-q^3} + \ldots$$

ergaben sich ferner:

$$\log k = 9.5265621$$

$$\log \frac{2K}{\pi} = 0.0129229$$

Zur Berechnung des Gliedes $k^2 \Gamma_0'^{(2)}$ dient die Formel:

$$k^2\left(\frac{2K}{\pi}\right)^2 \Gamma_0'^{(2)} = -32\left\{\frac{q^2}{(1-q^2)^2} + \frac{q^6}{(1-q^6)^2} + \frac{q^{10}}{(1-q^{10})^2} + \ldots\right\}$$

$$= -32q^2\{1 + 2q^2 + 4q^4 + \ldots\}$$

welche leicht aus der Gleichung

$$\Gamma_0^{(2)} = 1 - \frac{2}{k^2}\left(\frac{\pi}{2K}\right)^2\left\{\frac{8q}{(1-q)^2} + \frac{8q^3}{(1-q^3)^2} + \ldots\right\}$$

gefolgert wird.

Setzt man nun in die Gleichung (25):

$$\frac{4\left(\frac{\pi}{2K}\right)^2}{\lambda^2}(1-\bar{\beta}_0) - k^2\Gamma_0'^{(2)} = \frac{4\left(\frac{\pi}{2K}\right)^2}{\lambda^2}(1-\bar{\bar{\beta}}_0),$$

so findet man, auf Grund der vorhergehenden Entwicklung,

$$\bar{\bar{\beta}}_0 = \bar{\beta}_0 - 8\lambda^2 q^2(1 + 2q^2 + 4q^4 + \ldots)$$

Die Einsetzung der bereits angeführten Werthe in die rechte Seite dieser Gleichüng ergab:

$$\log\bar{\bar{\beta}}_0 = 7.8255800;$$

und da die Grösse $\operatorname{sn} i\omega$ aus der Gleichung

$$k^2 \operatorname{sn} i\omega^2 = 1 - \frac{4}{\lambda^2}\left(\frac{\pi}{2K}\right)^2(1-\bar{\bar{\beta}}_0)$$

bestimmt wird, so ist:

$$\log k^2 \operatorname{sn} i\omega^2 = 8.9771709_n$$

Zur Ermittelung von $e^{\frac{\pi}{2K}\omega}$ dient die Entwicklung

$$-ik \operatorname{sn} i\omega = \frac{\pi}{2K}\left(e^{\frac{\pi}{2K}\omega} - e^{-\frac{\pi}{2K}\omega}\right)\left\{\frac{2\sqrt{q}(1+q)}{(1-q)^2 - q\left(e^{\frac{\pi}{2K}\omega} - e^{-\frac{\pi}{2K}\omega}\right)^2}\right.$$

$$\left. + \frac{2\sqrt{q^3}(1+q^3)}{(1-q^3)^2 - q^3\left(e^{\frac{\pi}{2K}\omega} - e^{-\frac{\pi}{2K}\omega}\right)^2} + \ldots\right\}$$

Der Kürze wegen bezeichne ich:

$$x = e^{\frac{\pi}{2K}\omega} - e^{-\frac{\pi}{2K}\omega}$$

und setze:

$$\sigma = -ik \operatorname{sn} i\omega,$$

so dass

$$\log \sigma = 9.4885855,$$

und erhalte hierauf die erste Annäherung in Bezug auf $x$, wenn ich diese Grösse aus der quadratischen Gleichung

$$\sigma(1-q)^2 = 2\sqrt{q}(1+q)\frac{\pi}{2K}x + q\sigma x^2$$

bestimme, woraus für die Unbekannte die nachstehende Reihe erhalten wird:

$$x = \frac{\sigma(1-q)^2}{2\sqrt{q}(1+q)}\frac{2K}{\pi}\left\{1 - \frac{\sigma^2(1-q)^2}{4(1+q)^2}\left(\frac{2K}{\pi}\right)^2 - \ldots\right\}$$

Nachdem $x$ in solcher Weise näherungsweise bekannt geworden ist, setzt man diesen Näherungswerth in den Ausdruck:

$$p = \frac{q(1+q^2)}{(1-q^3)^2 - q^3x^2} + \frac{q^2(1+q^6)}{(1-q^5)^2 - q^5x^2} + \ldots$$

und erhält hierauf einen schon sehr nahe richtigen Werth aus der kubischen Gleichung

$$\sigma = 2\sqrt{q}(1+q)\frac{\pi}{2K}x\left\{\frac{1}{(1-q)^2 - qx^2} + p\right\}$$

Nach Einsetzung der numerischen Werthe fand sich:

$$\log x = 0.2401030$$

woraus sogleich folgt:

$$\log e^{\frac{\pi}{2K}\omega} = 0.3412369$$

Die Berechnung der Grösse, die wir mit $\nu$ bezeichneten, kann mit Hülfe der Entwicklung

$$\frac{\theta'(i\omega)}{\theta(i\omega)} = 2i\frac{\pi}{2K}x\left(e^{\frac{\pi}{2K}\omega} + e^{-\frac{\pi}{2K}\omega}\right)\left\{\frac{q}{(1-q)^2 - qx^2} + \frac{q^3}{(1-q^3)^2 - q^3x^2} + \ldots\right\}$$

gefunden werden, wo wir unter der Bezeichnung $x$ fortwährend die Grösse $e^{\frac{\pi}{2K}\omega} - e^{-\frac{\pi}{2K}\omega}$ verstehen. Aus diesem Werthe folgt:

$$\nu = 2x(e^{\frac{\pi}{2K}\omega} + e^{-\frac{\pi}{2K}\omega})\left\{\frac{q}{(1-q)^2 - qx^2} + \dots\right\},$$

wonach die nachstehende Formel für $\varsigma$ gefunden wird:

$$\varsigma = \mu - 2(1-\mu)\,x(e^{\frac{\pi}{2K}\omega} + e^{-\frac{\pi}{2K}\omega})\left\{\frac{q}{(1-q)^2 - qx^2} + \dots\right\}$$

Das Resultat ergiebt sich aber aus dieser Formel nicht sehr genau, weil $\varsigma$ sehr viel kleiner ist, als die beiden Zahlen, deren Differenz sie ausmacht. Eine Formel für $\varsigma$, die schärfere Resultate liefert, erhält man in der folgenden Weise.

Die bekannte Entwicklung der elliptischen Function $\mathrm{dn}\, i\omega$ giebt uns

$$\frac{2}{\lambda}\left(\frac{\pi}{2K}\right)\sqrt{1 - \overline{\overline{\beta}}_0} = \mathrm{dn}\, i\omega = 1 + 2\frac{\pi}{2K}x^2\left\{\frac{q\dfrac{1+q}{1-q}}{(1-q)^2 - qx^2} - \frac{q^3\dfrac{1+q^3}{1-q^3}}{(1-q^3)^2 - q^3x^2} + \dots\right.$$

Erinnert man sich des Werthes

$$\frac{1}{2}\lambda = 1 - \mu,$$

so leitet man aus der vorstehenden Formel ohne Mühe die folgenden ab, wobei die Entwicklung von $\frac{2K}{\pi}$ zu berücksichtigen ist,

$$0 = \frac{1}{2}\overline{\overline{\beta}}_0 + \frac{1}{8}\overline{\overline{\beta}}_0^2 + \dots + (1-\mu)\left(\frac{4q}{1-q} - \dots\right) - \mu$$
$$+ 2(1-\mu)x^2\left\{\frac{q + \dfrac{2q^2}{1-q}}{(1-q)^2 - qx^2} - \dots\right\}$$

Diese Gleichung addiren wir zu dem vorstehenden Ausdrucke von $\varsigma$, wodurch die grössten Glieder sich aufheben, und es bleibt:

$$\varsigma = \frac{1}{2}\overline{\overline{\beta}}_0 + \frac{1}{8}\overline{\overline{\beta}}_0^2 + \dots + (1-\mu)\left(\frac{4q}{1-q} - \dots\right)$$
$$- 4(1-\mu)xe^{-\frac{\pi}{2K}\omega}\frac{q}{(1-q)^2 - qx^2} + 4(1-\mu)\frac{q^2x^2}{(1-q)[(1-q)^2 - qx^2]},$$

eine Formel, welche unter Berücksichtigung, dass

$$x e^{-\frac{\pi}{2K}\omega} = 1 - e^{-\frac{\pi}{K}\omega}$$

ist, sowie unter Hinweglassung der Grössen von der Ordnung $q^3$ gefunden wurde und welche endlich in die folgende übergeht:

$$\varsigma = \frac{1}{2}\overline{\overline{\beta}}_0 + \frac{1}{8}\overline{\overline{\beta}}_0^2 + \dots + \frac{4(1-\mu)q}{(1-q)[(1-q)^2 - qx]}\left\{e^{-\frac{\pi}{K}\omega}(1-q) - q\right\}$$

Nach dieser Formel wurde $\varsigma$ berechnet, und es fand sich:

$$\varsigma = 0.009117$$

während der wahre Werth 0.008539 beträgt. Das in unserer ersten Annäherung gefundene Resultat ist also um etwa $\frac{1}{15}$ des wahren Werthes zu gross gefunden. Der Unterschied beider hätte noch erheblich geringer gemacht werden können, wenn wir die Glieder, welche vom Quadrat der Neigung und von den Quadraten der Excentricitäten abhängen, berücksichtigt, und überhaupt alle Glieder höherer Ordnung sorgfältig mitgenommen hätten, deren Mitberücksichtigung die Form unserer Lösung nicht geändert haben würde. Dies lag jedoch ausser dem Bereiche unserer Aufgabe, die nur eine erste Annäherung bezweckte.