ÜBER VERSCHIEDENE THEOREME AUS DER THEORIE DER PUNCTMENGEN IN EINEM n-FACH AUSGEDEHNTEN STETIGEN RAUME G_n.

ZWEITE MITTHEILUNG [1]

VON

GEORG CANTOR

in HALLE.

Indem ich die weitere Darstellung meiner Untersuchungen über Punctmengen beginne, will ich *zunächst* in § 1 kurz diejenigen hierher gehörigen Sätze anführen, welche theils schon in einer Abhandlung sich vorfinden, die ich im XXIII[ten] Bande der Mathematischen Annalen, p. 453 veröffentlicht habe, theils auch in Aufsätzen der Herren Bendixson und Phragmén (Acta mathematica, T. 2, p. 415 und T. 5, p. 47) von anderen Gesichtspuncten aus behandelt worden sind. Dabei möchte ich mich auf eine einfache Erklärung und Formulirung der in Betracht kommenden Theoreme und auf eine Andeutung ihrer Beweise beschränken; denn die ausführliche Entwickelung kann in der erwähnten Annalenarbeit gefunden werden.

§ 1.

Es ist eine sehr häufig in der Punctmengenlehre auftretende Erscheinung, dass *Eigenschaften* von Punctmengen in Betracht kommen, die den folgenden *beiden* Bedingungen genügen:

[1] Fortsetzung des Aufsatzes in Acta mathematica, T. 2, p. 409.

Erstens: wenn P *irgend* eine mit der *betreffenden Eigenschaft* behaftete Punctmenge innerhalb eines Gebietes H von G_n bedeutet, wo H *ganz* im Endlichen liegt, und man zerlegt H *mit gehöriger Vertheilung der Begrenzungsstücke* in eine *endliche* Anzahl von *Theilgebieten* $H_1, H_2, \ldots, H_m$, in welche resp. die *Theilmengen* $P_1, P_2, \ldots, P_m$ von P fallen, so hat *immer mindestens eine* von diesen *Theilmengen* ebenfalls die *betreffende Eigenschaft.*

Zweitens: ist P *irgend* eine mit der *betreffenden* Eigenschaft begabte Punctmenge, so hat immer auch $P + Q$ *dieselbe* Eigenschaft, was auch Q sei.

Ich will nun unter Υ *irgend eine Punctmengenbeschaffenheit* verstehen, welche diesen *beiden* Bedingungen genügt; dann gilt der folgende allgemeine Satz:

Theorem I. »*Ist H irgend ein ganz im Endlichen liegender continuirlicher Theil von G_n und P eine in H enthaltene Punctmenge mit der Eigenschaft Υ, so giebt es wenigstens einen Punct g von H in solcher Lage, dass, wenn $K(\rho)$ die n-dimensionale Vollkugel mit dem Mittelpunct g und dem Radius ρ ist, derjenige Bestandtheil von P, welcher in das Gebiet $K(\rho)$ fällt, stets die Eigenschaft Υ hat, der Radius ρ der Vollkugel mag so klein genommen werden, wie man wolle.*»

Unter einer *abgeschlossenen* Punctmenge (ensemble fermé) verstehe ich eine solche P, bei welcher die Bedingung erfüllt ist:

$$\mathfrak{D}(P,\ P^{(1)}) = P^{(1)}. \tag{1}$$

Dagegen nenne ich eine Punctmenge P *insichdicht* (ensemble condensé en soi) wenn bei ihr die Gleichung erfüllt ist:

$$\mathfrak{D}(P,\ P^{(1)}) = P. \tag{2}$$

Ist eine Punctmenge so beschaffen, dass sie *keinen insichdichten* Bestandtheil hat, so nenne ich sie eine *separirte* Punctmenge.

Zur Erläuterung dieser Definitionen führe ich an, dass jede *perfecte* Punctmenge *sowohl abgeschlossen, wie* auch *insichdicht* ist, dass die *Ableitung* einer *insichdichten* Punctmenge stets *perfect* ist und dass die *isolirten* Punctmengen eine besondere Art von *separirten* Mengen bilden; auch sind alle *abgeschlossenen* Punctmengen *erster* Mächtigkeit (wegen Theorem A) ebensowohl, wie alle Mengen der Form $P - \mathfrak{D}(P, P^{(\Omega)})$ *separirte* Mengen; letztere Behauptung kann leicht mit Hülfe des gleich folgenden Theorems III bewiesen werden. Im weiteren Verlauf dieser Arbeit wird sich der Satz ergeben, dass *alle separirten* Mengen höchstens von der *ersten* Mächtigkeit sind.

Theorem II. »*Ist eine in G_n vorkommende Punctmenge P so beschaffen, dass, wenn H ein ganz im Endlichen befindlicher Theil von G_n ist, alsdann immer der in H enthaltene Bestandtheil von P endlich ist oder die erste Mächtigkeit besitzt, so ist P selbst entweder endlich oder von der ersten Mächtigkeit.*»

Theorem III. »*Es sei Q irgend eine abgeschlossene Punctmenge und R eine Punctmenge von solcher Beschaffenheit, dass erstens R keinen Punct mit Q gemein hat, wie auch zweitens, dass, wenn H irgend ein stetiger Bestandtheil von G_n ist, in den kein einziger Punct von Q fällt, alsdann der zum Gebiete H gehörige Bestandtheil von R endlich ist oder die erste Mächtigkeit hat, so ist auch R selbst höchstens von der ersten Mächtigkeit.*»

Zum Beweise des letzteren Theorems bediene ich mich eines n-fach ausgedehnten, aus einem oder mehreren getrennten *stetigen Theilen* bestehenden Raumtheils, den ich mit:

$$\Pi(\rho, Q)$$

bezeichne, weil er sowohl von einer beliebigen positiven Grösse ρ, wie auch von der abgeschlossenen Menge Q abhängt; er geht dadurch aus der Menge Q hervor, dass man *sämmtliche* n-dimensionalen Vollkugeln vom Radius ρ zusammennimmt, deren *Centra* zu Q gehörige Puncte sind. Wegen der in Bezug auf R gemachten Voraussetzungen fällt in den Raumtheil:

$$G_n - \Pi(\rho, Q),$$

wie klein auch ρ sei, stets ein Bestandtheil von R, der höchstens die *erste* Mächtigkeit hat und andererseits kann ρ immer so klein gewählt werden, dass dieser Raumtheil $G_n - \Pi(\rho, Q)$ einen beliebig vorher ins Auge gefassten Punct r von R enthält, da sonst dieser Punct auch der *abgeschlossenen* Menge Q angehören würde. Daraus schliesst man leicht, indem man ρ unendlich klein werden lässt, dass R selbst *höchstens* die erste Mächtigkeit besitzt.

Theorem D. »*Ist P eine innerhalb G_n gelegene Punctmenge von solcher*

Beschaffenheit, dass ihre erste Ableitung $P^{(1)}$ eine höhere Mächtigkeit hat, als die erste, so giebt es immer Puncte, welche allen Ableitungen $P^{(\alpha)}$ zugleich angehören, wo α irgend eine Zahl der ersten oder zweiten Zahlenclasse ist und der Inbegriff aller dieser Puncte, der nichts Anderes ist als $P^{(\Omega)}$, ist stets eine perfecte Menge.»

Theorem E. *»Ist P von derselben Beschaffenheit wie in Theorem D und ist $S = P^{(\Omega)}$ die perfecte Menge, deren Existenz in Theorem D ausgesprochen ist, so ist die Differenz:*

$$R = P^{(1)} - S$$

stets höchstens von der ersten Mächtigkeit und es lässt sich daher die erste Ableitung $P^{(1)}$ einer solchen Punctmenge P in zwei Bestandtheile R und S zerlegen, derart dass:

$$P^{(1)} = R + S$$

wo R höchstens von der ersten Mächtigkeit und S eine perfecte Menge ist.»

Theorem F. *»Ist P von derselben Beschaffenheit wie in den Theoremen D und E, so giebt es stets eine kleinste der ersten oder zweiten Zahlenclasse zugehörige Zahl α, so dass:*

$$P^{(\alpha)} = P^{(\alpha+1)} = P^{(\alpha+\lambda)}$$

wo λ eine ganz beliebige endliche oder transfinite Zahl ist und es ist also bereits die α^{te} Ableitung von P gleich der perfecten Menge S, d. h. man hat:

$$P^{(\alpha)} = P^{(\Omega)} = S.»$$

Theorem G. *»Ist R die in Theorem E vorkommende Menge, α die in Theorem F so bezeichnete Zahl, so ist immer:*

$$\mathfrak{D}(R,\ R^{(\alpha)}) = 0$$

und umsomehr:

$$\mathfrak{D}(R,\ R^{(\Omega)}) = 0.»$$

Dieses letzte Theorem G rührt von Herrn Bendixson her. Die Beweise dieser Sätze D, E, F, G beruhen sowohl auf den Theoremen I und III, wie auch auf den früher gebrachten Theoremen A, B, C; die Ausführung hiervon findet sich in den Mathematischen Annalen, Bd. XXIII.

Die Ableitung $P^{(1)}$ und daher auch alle höheren Ableitungen *irgend einer* Punctmenge P sind stets *abgeschlossene* Mengen und es lässt sich leicht auch das Umgekehrte beweisen, dass *jede abgeschlossene* Menge als die *erste* (oder auch höhere) Ableitung von anderen Mengen dargestellt werden kann (Mathematische Annalen, Bd. XXIII, p. 470); daher sind wir im Stande auf Grund unserer Theoreme Folgendes über die *abgeschlossenen* Mengen zu behaupten:

Theorem H. »*Ist P irgend eine abgeschlossene Punctmenge, so besteht dieselbe immer aus zwei wesentlich verschiedenen, getrennten Bestandtheilen R und S (von welchen einer auch Null sein kann), so dass:*

$$P = R + S, \quad . \tag{3}$$

wo R eine separirte Menge und höchstens von der ersten Mächtigkeit, während S, falls sie nicht gleich Null, eine perfecte Menge und daher (Acta mathematica, T. 4, p. 381)[1] *von der Mächtigkeit des Linearcontinuums ist. Falls die abgeschlossene Menge P endlich oder von der ersten Mächtigkeit ist, verschwindet der Theil S und man hat alsdann von einem gewissen kleinsten α der ersten oder zweiten Zahlenclasse an (welches kleinste α stets von der ersten Art ist);*

$$P^{(\alpha)} = 0.$$

Ist aber die abgeschlossene Menge P von höherer als der ersten Mächtigkeit, so ist S immer eine von Null verschiedene perfecte Menge und man hat von einem gewissen kleinsten α der ersten oder zweiten Zahlenclasse an:

$$P^{(\alpha)} = P^{(\alpha+\lambda)} = S$$

und somit auch:

$$P^{(\Omega)} = S.$$

Die separirte Menge R hat dabei die Eigenschaft, dass:

$$\mathfrak{D}(R,\ R^{(\alpha)}) = \mathfrak{D}(R,\ R^{(\Omega)}) = 0.$$

Alle abgeschlossenen unendlichen Punctmengen sind entweder von der ersten Mächtigkeit oder von der Mächtigkeit des Linearcontinuums (Mathematische Annalen, Bd. XXIII, p. 488).»

Ich will nun im Folgenden zeigen, wie sich alle diese Sätze auf *beliebige*, also auch auf *nicht abgeschlossene* Punctmengen *verallgemeinern* lassen.

---

[1] Man vergleiche auch: I. Bendixson, *Sur la puissance des ensembles parfaits de points* (Bihang till Svenska Vetenskapsakademiens handlingar Bd. 9, N° 6, 1884).

§ 2.

Ist eine *insichdichte* Punctmenge P so beschaffen, dass der in hinreichend nahe Umgebung (d. h. Vollkugel mit dem betreffenden Punct als Centrum) jedes ihrer Puncte fallende Bestandtheil derselben *stets*, d. h. für *alle* ihre Puncte *eine und dieselbe Mächtigkeit* hat, so wollen wir eine solche insichdichte Menge eine *homogene* Punctmenge nennen und wenn jene Mächtigkeit die α^{te} ist, so möge P eine *homogene Punctmenge* α^{ter} *Ordnung* heissen. Es ist leicht zu zeigen, dass eine homogene Menge α^{ter} Ordnung immer selbst von der α^{ten} Mächtigkeit ist.

So ist z. B. die Menge *aller rationalen* Zahlen eine *homogene* Menge *erster* Ordnung, die Menge *aller irrationalen* Zahlen aber eine *homogene* Menge von der *Mächtigkeit des Linearcontinuums*.

Sei nun P eine *ganz beliebige* Punctmenge innerhalb G_n. Sie wird aus *zweierlei* Puncten bestehen; die *ersteren* liegen so, dass in *hinreichend naher* Umgebung von ihnen keine anderen Puncte von P fallen, es sind dies sogenannte *isolirte* Puncte von P; die *anderen* Puncte von P sind *gleichzeitig Grenzpuncte* von P, gehören also auch als *Puncte* zu $P^{(1)}$.

Den Inbegriff der *ersteren* wollen wir mit Pa bezeichnen und die *Adhärenz* von P nennen; der Inbegriff der letzteren werde mit Pc bezeichnet und heisse die *Cohärenz* von P.

Wir haben alsdann:

$$Pc = \mathfrak{D}(P,\ P^{(1)}) \tag{4}$$

$$P = Pa + Pc. \tag{5}$$

Pa und Pc sind also bestimmte Theile von P.

Pa ist immer eine *isolirte* Menge oder Null; Pc braucht weder das eine noch das andere zu sein, auch ist klar, dass *jeder insichdichte Bestandtheil von P zugleich Bestandtheil von Pc ist und dass Pc dann und nur dann gleich P (daher $Pa = 0$ und umgekehrt) ist, wenn P eine insichdichte Menge ist.*

Auf Pc können wir dieselbe Zerlegung anwenden und haben, wenn Pcc mit Pc^2 bezeichnet wird:

$$Pc = Pca + Pc^2; \qquad P = Pa + Pca + Pc^2.$$

Wird die ν-malige wiederholte Anwendung der *Operation* c auf P mit Pc^ν bezeichnet, so hat man auch:

$$P = Pa + Pca + Pc^2a + \ldots + Pc^{\nu-1}a + Pc^\nu.$$

Pc^ν heisse die ν^{te} *Cohärenz* von P.

Es lässt sich nun aber auch auf Grund *vollständiger Induction* der Begriff der γ^{ten} *Cohärenz* von P definiren, wo γ eine beliebige *transfinite* Zahl ist.

Bedeutet γ eine *transfinite* Zahl der *ersten* Art, so definirt man:

$$(6) \qquad Pc^\gamma = (Pc^{\gamma-1})c.$$

Ist aber γ eine *transfinite* Zahl der *zweiten* Art, so sei:

$$(7) \qquad Pc^\gamma = \mathfrak{D}(\ldots, Pc^{\gamma'}, \ldots)$$

wo γ' *alle* Zahlen zu durchlaufen hat, die kleiner sind als γ. Zum Verständniss der letzten Gleichung (7) beachte man, dass *stets* $Pc^{\gamma'}$ *ganz* in $Pc^{\gamma''}$ enthalten ist, wenn $\gamma'' < \gamma'$ ist.

Nach diesen Festsetzungen besteht für alle Zahlenpaare γ und δ die Gleichung:

$$(8) \qquad (Pc^\gamma)c^\delta = Pc^{\gamma+\delta}$$

und, was auch γ für eine *finite* oder *transfinite* Zahl sei, wie leicht zu beweisen, das folgende Theorem:

$$(9) \qquad P = \sum_{\gamma'=0,1,\ldots<\gamma} Pc^{\gamma'}a + Pc^\gamma.$$

Hier haben die verschiedenen Bestandtheile der rechten Seite $Pc^{\gamma'}a$ und Pc^γ unter einander keinen Zusammenhang, d. h. keine gemeinschaftlichen Puncte; jedes Glied $Pc^{\gamma'}a$ stellt als *Adhärenz* von $Pc^{\gamma'}$ eine *isolirte* Menge dar, die Summe $\sum\limits_{\gamma'=0,1,\ldots<\gamma} Pc^{\gamma'}a$ *selbst* ist offenbar immer eine *separirte* Menge, weil *jeder insichdichte* Bestandtheil von P auch Bestandtheil von Pc^γ ist, mithin jene Summe *keinen insichdichten* Bestandtheil haben kann.

Es soll nun bewiesen werden, »*das wenn P eine separirte Menge ist, alsdann eine der ersten oder zweiten Zahlenclasse angehörige kleinste Zahl α existirt, so dass: $Pc^\alpha = 0$ und daher auch $Pc^{\alpha+\lambda} = 0$, dass aber wenn P*

nicht eine separirte Menge ist, alsdann eine ebensolche Zahl α *in der ersten oder zweiten Zahlenclasse vorhanden ist, so dass* Pc^{α}, *und daher auch* $Pc^{\alpha+\lambda}$ *eine insichdichte Menge ist.*»

Den *Beweis* des zuletzt behaupteten Satzes führen wir wie folgt.

1°. Betrachten wir *zuerst* den Fall, *dass* P *von der ersten Mächtigkeit* ist und wenden den in (9) ausgesprochenen Satz für $\gamma = \Omega$ an, wo Ω die *kleinste* Zahl der *dritten* Zahlenclasse ist, so haben wir:

$$P = \sum_{\gamma' = 0, 1, 2, \ldots, \omega, \ldots < \Omega} Pc^{\gamma'} a + Pc^{\Omega}.$$

Wären nun auf der rechten Seite alle Glieder $Pc^{\gamma'} a$ von Null verschieden, so hätte diese Seite unsrer Gleichung *zum Mindesten die zweite Mächtigkeit*, das gleiche würde also auch von der linken Seite, d. h. von P gelten, gegen unsere Voraussetzung, dass P die *erste* Mächtigkeit besitzt. Es muss also Zahlen γ' und unter ihnen eine *kleinste* α geben (denn es ist eine Eigenthümlichkeit der *ganzen* Zahlen, dass *jeder* Inbegriff von solchen, möge er aus *endlichen* oder *transfiniten* Zahlen bestehen, ein *Minimum* besitzt), so dass:

$$Pc^{\alpha} a = 0.$$

Nun ist aber:

$$Pc^{\alpha} = Pc^{\alpha} a + Pc^{\alpha+1},$$

daher:

$$Pc^{\alpha} = Pc^{\alpha+1} = (Pc^{\alpha})c.$$

Ist hier Pc^{α} von Null verschieden, so folgt aus der letzten Gleichung, dass Pc^{α} und daher auch $Pc^{\alpha+\lambda}$ eine *insichdichte* Menge ist. Ist P eine separirte Menge, so kann nicht Pc^{α} eine insichdichte Menge sein und ist folglich *Null*; ist aber P keine separirte Menge, so kann Pc^{α} nicht Null sein und ist folglich *insichdicht.*

2°. Gehen wir nun zu der Annahme über, *dass* P *eine höhere Mächtigkeit hat, als die erste.*

Die *Eigenschaft* eine *höhere* Mächtigkeit, als die *erste* zu haben, genügt den *beiden* Bedingungen, welche wir zu *Anfang* dieser Arbeit angeführt haben, sie ist also eine solche, auf welche das Theorem I Anwendung findet, worin wir daher unter Γ die soeben characterisirte *Mengenbeschaffenheit* uns denken können. Wenn man ausserdem noch das Theorem II berücksichtigt, so folgt, dass im Raum G_n Puncte q vorhanden sein müssen derart, dass in *jede* um q als Mittelpunct mit dem Radius ρ beschriebene

n-dimensionale Vollkugel $K(\rho)$ ein Bestandtheil von P fällt, welcher eine *höhere* Mächtigkeit hat, als die *erste.* Bezeichnen wir den *Inbegriff aller dieser Puncte* q mit Q, so sieht man leicht dass Q eine *abgeschlossene* Menge ist; denn jeder *Grenzpunct* von Q erfüllt dieselbe Bedingung, wie diejenige ist, durch welche wir die Puncte q definirt haben, er gehört also selbst zu Q.

Die beiden Mengen P und Q müssen nun *gemeinschaftliche* Puncte haben, oder mit anderen Worten, es ist $\mathfrak{D}(P, Q)$ *von Null verschieden.*

Dies folgt aus Theorem III, wenn wir darin an die Stelle der mit R bezeichneten Menge unsere Menge P setzen, während die dort mit Q bezeichnete die Bedeutung der uns *hier vorliegenden* Menge Q erhält.

Betrachten wir nämlich einen stetigen Theil H von G_n, in den *kein* Punct von Q fällt, so wird *der in das Gebiet H fallende Bestandtheil P_1 von P höchstens von der ersten Mächtigkeit sein;* denn wäre P_1 von *höherer* Mächtigkeit, so würde es nach dem *soeben Bewiesenen* eine Menge Q_1 geben, die zu P_1 dasselbe Verhältniss hat, wie Q zu P und es würde offenbar Q_1 ein Bestandtheil von Q sein, der ganz innerhalb des Gebietes H läge, gegen die Voraussetzung, welche mit Bezug auf H gemacht worden ist.

Wäre also $\mathfrak{D}(P, Q) = 0$, so wären *beide* Bedingungen, denen das Theorem III unterliegt, erfüllt und wir würden daraus schliessen können, dass P selbst eine Menge von *höchstens der ersten* Mächtigkeit sei, während wir es doch hier mit einer Menge P von *höherer* Mächtigkeit zu thun haben. *Also ist $\mathfrak{D}(P, Q)$ von Null verschieden.*

Fassen wir nun die Menge $\mathfrak{D}(P, Q)$ näher ins Auge und bezeichnen sie mit V. Sie besteht aus den zu P gehörigen Puncten v, die eine solche Lage haben, dass in *jeder* Umgebung von v Puncte von P liegen, deren Inbegriff von *höherer* Mächtigkeit ist, als von der ersten. *Kein Punct v von V ist ein isolirter* Punct von V und P; denn umgeben wir v als Mittelpunct mit einer beliebigen Vollkugel $K(\rho)$, so fällt in dieselbe ein Bestandtheil V_1 von P, der von *höherer* als der *ersten* Mächtigkeit ist; das letztere können wir auch von der Menge $V_1 - v$ sagen, die aus V_1 hervorgeht, wenn man von letzterer den *einzigen* Punct v in Abzug bringt; daher muss es nach dem vorhin für P Bewiesenen auch unter den Puncten von $V_1 - v$ *solche* geben, dass die in jede Umgebung von ihnen fallenden Bestandtheile von $V_1 - v$ eine *höhere* als die *erste* Mächtigkeit besitzen und letztere Puncte sind offenbar auch Puncte von V. Man sieht also, dass wenn ein beliebiger Punct v als Mittelpunct mit einer Vollkugel $K(\rho)$ von beliebig kleinem Radius ρ umgeben wird, in das Innere dieser Vollkugel noch *andere* Puncte von V hinein fallen, als v; es ist also v sicherlich *kein isolirter* Punct von V.

Da nun bewiesen ist, dass *jeder* Punct v von V ein *Grenzpunct* von V ist, so ist V eine *insichdichte Menge.*

Wir sehen daher, dass jede Punctmenge P von *höherer als der ersten* Mächtigkeit einen *bestimmten insichdichten Bestandtheil* V besitzt, der aus *allen Puncten* v von P zusammengesetzt ist, welche eine solche Lage haben, dass in jede um v als Centrum beschriebene Vollkugel $K(\rho)$ ein Bestandtheil von P hinein fällt, der von *höherer als der ersten Mächtigkeit* ist.

Daraus folgt zunächst, dass eine *separirte unendliche Menge stets von der ersten Mächtigkeit* ist; denn wir nannten *separirte* Menge eine solche, die *keinen insichdichten* Bestandtheil hat; wäre sie von *höherer* als der *ersten Mächtigkeit,* so müsste sie nach dem soeben Bewiesenen einen *insichdichten* Bestandtheil besitzen. Bei dieser Gelegenheit möchte ich erwähnen, dass auch Herr Bendixson, wie ich von ihm brieflich erfahren, einen ähnlichen Beweis dieses letzteren Satzes gefunden hat, nachdem ich ihn zur Untersuchung dieser Frage angeregt hatte. Kehren wir nun unter der *vorliegenden Annahme,* dass P von *höherer* Mächtigkeit, als der *ersten* ist, zu der Gleichung (9) zurück und setzen auch hier $\gamma = \Omega$, betrachten also die folgende Gleichung:

$$P = \sum_{\gamma'=0,1,\ldots,\omega,\ldots<\Omega} Pc^{\gamma'}a + Pc^{\Omega}.$$

Der Bestandtheil $\sum\limits_{\gamma'=0,1,\ldots,\omega,\ldots<\Omega} Pc^{\gamma'}a$ der rechten Seite, welchen wir R nennen wollen, stellt, wie schon früher hervorgehoben worden ist, eine *separirte* Menge vor, weil jeder *insichdichte* Bestandtheil von P auch in *jeder Cohärenz* von P, also auch in Pc^{Ω} enthalten ist; jeder *insichdichte* Bestandtheil von R wäre auch ein solcher von P, und daher auch von Pc^{Ω}, was dadurch ausgeschlossen ist, dass $\mathfrak{D}(R, Pc^{\Omega}) = 0$ ist.

R als *separirte* Menge hat, wie wir gesehen, höchstens die *erste* Mächtigkeit.

Nun ist:

$$R = \sum_{\gamma'=0,1,\ldots,\omega,\ldots<\Omega} Pc^{\gamma'}a \tag{10}$$

und wir schliessen aus dieser Gleichung, dass unter den Gliedern $Pc^{\gamma}a$ der rechten Seite solche vorhanden sein müssen, welche verschwinden, weil sonst R von *höherer als der ersten Mächtigkeit* sein würde. Ist darnach α die *kleinste* der *ersten* oder *zweiten* Zahlenclasse angehörige Zahl, für welche:

$$Pc^{\alpha}a = 0,$$

so folgt daraus, dass:

$$Pc^{\alpha} = (Pc^{\alpha})c.$$

Hier ist der Fall $Pc^{\alpha} = 0$ ausgeschlossen, weil Pc^{α} *zum Mindesten* aus dem *insichdichten* Bestandtheil V von P besteht; also ist Pc^{α} und daher auch $Pc^{\alpha+\lambda} = Pc^{\Omega}$ eine *insichdichte* Menge.

Der mit V bezeichnete *insichdichte* Bestandtheil von P, dessen Existenz in dem Falle nachgewiesen ist, dass P eine höhere Mächtigkeit, als die *erste* hat, ist Bestandtheil der *insichdichten* Menge $Pc^{\alpha} = Pc^{\Omega}$; bezeichnen wir nun den Inbegriff *aller* übrigen Puncte von Pc^{α} mit U, derart dass:

$$(11) \qquad Pc^{\alpha} = Pc^{\Omega} = U + V,$$

so sieht man leicht, *dass U nur Null* oder eine *homogene* Menge *erster Ordnung* sein kann. Denn in *jeder* Nähe eines Punctes u von U fallen, da Pc^{α} *insichdicht* ist, unendlich viele Puncte von Pc^{α}; diese können aber in *hinreichender* Nähe nur dem Theil U, nicht aber dem Theil V angehören, weil sonst u nach der Definition von V ein Punct der letzteren Menge sein würde; es liegen also in *jeder* Umgebung von u andere Puncte von U, deren Inbegriff aber *keine* höhere Mächtigkeit, als die *erste* haben kann, weil sonst ebenfalls u zu V gehören würde.

Bemerken wir noch, dass wir wegen $Pc^{\alpha}a = Pc^{\alpha+\lambda}a = 0$ die Gleichung (10) wie folgt schreiben können:

$$(12) \qquad R = \sum_{\alpha'=0,1,\ldots<\alpha} Pc^{\alpha'}a$$

und fassen die gewonnenen Resultate in Folgendem zusammen.

Theorem J. »*Ist P eine separirte unendliche Menge, so ist sie von der ersten Mächtigkeit und es giebt eine kleinste Zahl der ersten oder zweiten Zahlenclasse, so dass:*

$$Pc^{\alpha} = 0;$$

man hat also in diesem Falle (*wegen* (9), *wenn darin* $\gamma = \alpha$ *gesetzt wird*):

$$P = \sum_{\alpha'=0,1,\ldots<\alpha} Pc^{\alpha'} a.»$$

Theorem K. »*Ist P von der ersten Mächtigkeit, ohne jedoch eine separirte Menge zu sein, so giebt es eine der ersten oder zweiten Zahlenclasse angehörige kleinste Zahl* α, *so dass* Pc^{α} *eine homogene Menge erster Ordnung wird; bezeichnen wir diese mit U und* $\sum\limits_{\alpha'=0,1,\ldots<\alpha} Pc^{\alpha'} a$ *mit R, so ist R entweder Null oder eine separirte Menge und man hat:*

$$P = R + U.$$

Dabei ist:

$$\mathfrak{D}(R,\ U^{(1)}) = 0.»$$

Die letzte Behauptung hat ihren Grund darin, dass, wenn ein Punct r von R zu $U^{(1)}$ gehören würde, $r + U$ ebenso wie U eine *insichdichte* Menge und somit ein Bestandtheil von $U = Pc^{\alpha}$ wäre.

Theorem L. »*Ist P von höherer als der ersten Mächtigkeit, so giebt es eine der ersten oder zweiten Zahlenclasse angehörige kleinste Zahl* α, *derart dass* Pc^{α} *eine insichdichte Menge ist; letztere besteht aus einem Bestandtheil V, welcher insichdicht ist und alle Puncte von P umfasst, welche so liegen, dass in jeder Umgebung von ihnen Bestandtheile von P enthalten sind, die von höherer als der ersten Mächtigkeit sind und aus einem Bestandtheil U, der, falls er nicht Null ist, aus der Zusammensetzung der übrigen Puncte von* Pc^{α} *besteht und eine homogene Menge erster Ordnung bildet; wird die Summe* $\sum\limits_{\alpha'=0,1,\ldots<\alpha} Pc^{\alpha'} a$ *mit R bezeichnet, so ist R entweder Null oder eine separirte Menge und man hat:*

$$P = R + U + V.$$

Dabei ist:

$$\mathfrak{D}(R,\ U^{(1)}) = 0; \qquad \mathfrak{D}(R,\ V^{(1)}) = 0; \qquad \mathfrak{D}(U,\ V^{(1)}) = 0.»$$

Die letzten Relationen werden ganz ebenso bewiesen, wie die entsprechende Behauptung in Theorem K.

§ 3.

Die in § 2 nachgewiesenen wesentlich verschiedenen und auseinander fallenden Bestandtheile einer *beliebigen* Punctmenge P scheinen mir wichtig genug, um besondere *Bezeichnungen* und *Namen* zu rechtfertigen.

Wir wollen R den *Rest* oder das *Residuum* von P nennen und mit Pr bezeichnen, dagegen heisse $Pc^{\Omega} = U + V$ die *totale Inhärenz* von P und werde mit Pi bezeichnet, so dass man hat:

$$Pr = \sum_{\alpha' = 0, 1, \ldots < \alpha} Pc^{\alpha'} a \tag{13}$$

$$Pi = Pc^{\alpha} = Pc^{\Omega} \tag{14}$$

$$P = Pr + Pi. \tag{15}$$

U heisse die *Inhärenz erster Ordnung* von P oder auch die *erste Inhärenz* von P und es werde dafür das Zeichen Pi_1 gebraucht.

Was nun die *insichdichte* Menge V anbetrifft, so sieht man zwar aus § 2 leicht: sie ist derart, dass in jeder Nähe *jedes* ihrer Puncte v eine höhere Mächtigkeit, als die erste, von Puncten, nicht bloss der Menge P, *sondern von V selbst* liegen, indessen steht zunächst noch nicht fest, dass sie stets eine *homogene* Menge ist, falls sie nicht verschwindet; dies wird erst dann sicher gestellt sein, wenn wir gezeigt haben werden, dass bei den *Punctmengen innerhalb G_n keine höhere Mächtigkeit* vorkommen kann, als die *zweite;* denn sobald dies bewiesen wäre, würde daraus folgen, dass V, falls sie nicht verschwindet, eine *homogene Menge zweiter Ordnung* ist. Indem wir also fürs Erste die Möglichkeit des Vorkommens *höherer Mächtigkeiten,* als der *zweiten* zu berücksichtigen haben, ergiebt sich hier allgemein Folgendes.

Ist v irgend ein Punct von V und ist $\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_\nu, \ldots$ irgend eine Reihe von positiven Grössen, derart dass:

$$\rho_\nu > \rho_{\nu+1} \quad \text{und} \quad \lim_{\nu=\infty} \rho_\nu = 0,$$

und bezeichnet man mit V_ν den Theil von V welcher in die um v als *Mittelpunct* beschriebene Vollkugel $K(\rho_\nu)$ fällt, mit α_ν die *Ordnungszahl* der *Mächtigkeit* von V_ν, so ist klar, dass α_ν *nicht kleiner* sein kann, als $\alpha_{\nu+1}$, dass also:

$$\alpha_\nu \geqq \alpha_{\nu+1};$$

denn $V_{\nu+1}$ ist ein *Theil* von V_ν.

Wir haben also eine einfach unendliche Reihe von *endlichen* oder *transfiniten ganzen* Zahlen α_ν, welche mit wachsendem ν *nicht* zunehmen; von einer *solchen* Reihe *ganzer* Zahlen ist aber *leicht* zu zeigen, dass ihre Glieder von einem Gewissen $\nu = \nu_0$ an *alle einander gleich* sein müssen, so dass:

$$\alpha_{\nu_0} = \alpha_{\nu_0+1} = \alpha_{\nu_0+2} = \ldots$$

Man setze den gemeinsamen Werth aller dieser Zahlen $= \beta$.

Wir sehen also, dass V_{ν_0}, V_{ν_0+1}, V_{ν_0+2}, ... *alle* von der β^{ten} Mächtigkeit sind und erkennen daraus leicht, dass wenn $\rho \leqq \rho_{\nu_0}$, derjenige Bestandtheil von V, welcher in die um v als *Mittelpunct* beschriebene Vollkugel $K(\rho)$ fällt, *immer* die β^{te} *Mächtigkeit* hat; denn, da ρ seiner Grösse nach zwischen zwei bestimmte Glieder der Reihe ρ_{ν_0}, ρ_{ν_0+1}, ρ_{ν_0+2}, ... fällt, so stösst man ebensowohl bei der Annahme, dass die Mächtigkeit des bezeichneten Theils von V *grösser* als β, wie auch, dass sie *kleiner* als β sei, auf einen Widerspruch.

Wir sehen hieraus, dass zu jedem Punct v von V eine ganz bestimmte *endliche* oder *überendliche* Zahl β gehört, derart, dass für *hinreichend kleine* Werthe von ρ der in die, um v als *Centrum* beschriebene Vollkugel $K(\rho)$ fallende Bestandtheil von V die β^{te} *Mächtigkeit* hat; wir wollen daher auch β die zum Puncte v gehörige *Ordnungszahl* und v einen *Punct* β^{ter} *Ordnung von* V *oder* P nennen.

Der Inbegriff *aller* Puncte β^{ter} *Ordnung* von V, falls solche überhaupt vorhanden sind, bildet, wie leicht zu sehen, eine *homogene Punctmenge* β^{ter} *Ordnung* und *Mächtigkeit*, welche wir die β^{te} *Inhärenz* oder die *Inhärenz* β^{ter} *Ordnung* von P nennen und mit Pi_β bezeichnen.

Wir haben nun:

$$V = \sum_{\beta=2,3,\ldots} Pi_\beta, \tag{16}$$

wo auf der Rechten die einzelnen Glieder auch Null sein können und β *alle endlichen* und *überendlichen* ganzen Zahlen, die grösser als 1 sind zu durchlaufen hat.

Da nun nach (14) $Pi = Pc^{\Omega} = U + V$ und $V = Pi_1$, so können wir schreiben:

$$(17) \qquad Pi = \sum_{\beta=1,2,\ldots} Pi_\beta,$$

wo hier β alle positiven ganzen Zahlen von 1 an zu durchlaufen hat. Zwischen den verschiedenen von uns nachgewiesenen Bestandtheilen einer Punctmenge herrschen allgemein Beziehungen, die hervorgehoben zu werden verdienen.

Betrachten wir zuerst die Definitionen von Pa und Pc, wie sie uns in den Formeln (4) und (5) entgegentreten, so sehen wir, dass:

$$(18) \qquad \mathfrak{D}(Pa,\ Pc) = 0,$$

$$(19) \qquad \mathfrak{D}[Pa,\ (Pa)^{(1)}] = 0,$$

$$(20) \qquad \mathfrak{D}[Pa,\ (Pc)^{(1)}] = 0,$$

(18) sagt aus, dass die beiden Mengen Pa und Pc völlig getrennt (zusammenhangslos) sind, d. h. keine ihnen gemeinsam angehörigen Puncte haben; (19) besagt, dass Pa eine *isolirte* Menge ist, (20) lässt erkennen, dass Pa auch keinen Punct hat, der Grenzpunct von Pc wäre.

Die *isolirten* Puncte von P bilden Pa, wir wollen sie *Puncte* 0^{ter} *Art von* P nennen; die *isolirten* Puncte von Pc bilden Pca, wir wollen sie *Puncte* 1^{ter} *Art von* P nennen.

Allgemein wollen wir die Puncte der *isolirten* Menge $Pc^{\alpha'}a$ *Puncte* α'^{ter} *Art von* P nennen.

Die aus (13), (15) und (17) hervorgehende Formel:

$$(21) \qquad P = \sum_{\alpha'=0,1,\ldots<\alpha} Pc^{\alpha'}a + \sum_{\beta=1,2,\ldots} Pi_\beta$$

zeigt, dass ein beliebiger Punct p von P entweder einem Bestandtheil $Pc^{\alpha'}a$ von P angehört, dann ist p ein *Punct* α'^{ter} *Art von* P und α' ist eine bestimmte Zahl der *ersten* oder *zweiten* Zahlenclasse, kleiner als α oder 0, oder es gehört p einem Bestandtheil Pi_β von P an und ist alsdann ein *Punct* β^{ter} *Ordnung von* P. Die *sämmtlichen* Puncte α'^{ter} *Art* von P bilden daher, wenn überhaupt welche vorhanden sind, eine *isolirte* Menge, die sämmtlichen Puncte β^{ter} *Ordnung* von P bilden dagegen, falls es deren überhaupt giebt, eine *homogene* Menge β^{ter} Ordnung.

Man kann die in Pr enthaltenen Puncte *Artpuncte* von P und die in Pi vorkommenden Puncte *Ordnungspuncte* von P nennen.

Aus der *Abwesenheit* von Puncten α'^{ter} Art von P folgt auch das *Nichtvorhandensein* von Puncten $(\alpha' + \lambda)^{\text{ter}}$ Art, wo λ eine beliebige Zahl der ersten oder zweiten Zahlenclasse ist; denn, wenn $Pc^{\alpha'}a = 0$, so ist $Pc^{\alpha'}$ entweder *Null* oder eine *insichdichte* Menge und es ist daher allgemein: $Pc^{\alpha'+\lambda} = Pc^{\alpha'}$ und $Pc^{\alpha'+\lambda}a = 0$. Daher zeigt *umgekehrt* das *Vorhandensein* von Puncten α'^{ter} Art auch *immer* das *Vorhandensein* von Puncten *jeder niedrigeren* Art an.

Dagegen hat die *Abwesenheit* oder das *Vorhandensein* von Puncten β^{ter} *Ordnung* keinerlei Einfluss auf das *Vorkommen* oder *Nichtvorkommen* von *Ordnungspuncten* mit *andrer* Ordnungszahl oder von *Artpuncten.*

Wenden wir die Relation (20) auf $Pc^{\alpha'}$ an Stelle von P an, so haben wir:

$$\mathfrak{D}[Pc^{\alpha'}a,\ (Pc^{\alpha'})^{(1)}] = 0. \tag{22}$$

Nun ist aber sowohl $Pc^{\alpha'+\lambda}a$, wie auch Pi_β Bestandtheil von $Pc^{\alpha'}$; wir haben also auch:

$$\mathfrak{D}[Pc^{\alpha'}a,\ (Pc^{\alpha'+\lambda}a)^{(1)}] = 0 \tag{23}$$

$$\mathfrak{D}[Pc^{\alpha'}a,\ (Pi_\beta)^{(1)}] = 0. \tag{24}$$

So sehen wir, dass der Bestandtheil $Pc^{\alpha'}a$ von P weder *Grenzpuncte* von $Pc^{\alpha'+\lambda}a$, noch *Grenzpuncte* von Pi_β zu *Puncten* hat.

Alle Puncte der rechten Seite von (21), *mit Ausnahme der im ersten Gliede Pa enthaltenen,* sind zugleich *Grenzpuncte* von P und man ist daher berechtigt, wenn $\alpha' > 0$, einen *Punct* α'^{ter} Art von P auch *Grenzpunct* α'^{ter} Art von P und einen *Punct* β^{ter} Ordnung von P auch *Grenzpunct* β^{ter} Ordnung von P zu nennen; nur die Puncte 0^{ter} *Art* von P können *nicht* zugleich *Grenzpuncte von P* heissen, weil sie *isolirte Puncte* von P sind.

$Pc^{\alpha'}$ können wir offenbar characterisiren als den Inbegriff sowohl *aller Artpuncte von P, deren Artzahl* $\geqq \alpha'$, wie auch *aller Ordnungspuncte* von P; $Pi = V = Pc^{\Omega}$ ist der Inbegriff *aller Ordnungspuncte von P.*

Was nun das Verhältniss der *Inhärenzen* zu einander sowohl, wie zu dem *Rest* von P anbetrifft, so können wir allgemein darüber Folgendes behaupten:

$$\mathfrak{D}[Pr,\ (Pi)^{(1)}] = 0 \tag{25}$$

und daher ist auch:

$$\mathfrak{D}[Pr,\ (Pi_\beta)^{(1)}] = 0. \tag{26}$$

Denn da Pi eine *insichdichte* Menge ist, so ist auch $Pi + Z$ eine *insichdichte* Menge, falls Z irgend ein Bestandtheil von $(Pi)^{(1)}$ ist; wäre also $\mathfrak{D}[Pr,\ (Pi)^{(1)}]$ von Null verschieden und bezeichnen wir diese Menge mit Z, so würde $Pi + Z$ ein *insichdichter* Bestandtheil von P und daher auch von $Pi = Pc^{\Omega}$ sein, während doch Z als Bestandtheil von Pr nicht in Pi enthalten sein kann.

Ferner können wir sagen, dass:

$$\mathfrak{D}[Pi_\beta,\ (Pi_{\beta'})^{(1)}] = 0 \tag{27}$$

vorausgesetzt, dass: $\beta' > \beta$.

Denn jeder *Grenzpunct* von $Pi_{\beta'}$ ist, falls er *Punct* von P ist, nothwendig ein *Ordnungspunct* von P von *mindestens* der β^{ten} Ordnung, kann also nicht *Punct* von Pi_β sein, da alle Puncte von Pi_β *Puncte* β^{ter} Ordnung von P sind und $\beta < \beta'$ angenommen ist.

Es liessen sich unsere Betrachtungen noch nach mancher Richtung vervollständigen, was für eine spätere Gelegenheit vorbehalten bleibt.

Ich will nun zeigen, wie unsere früheren Theoreme, die wir im Theorem H zusammengezogen haben, sich aus den neuen Resultaten ergeben, sobald man nur die Menge P als *abgeschlossen* voraussetzt.

Unter einer *abgeschlossenen* Menge verstanden wir nach (1) eine solche P, deren Ableitung $P^{(1)}$ *ganz* in ihr enthalten ist, so dass:

$$\mathfrak{D}(P,\ P^{(1)}) = P^{(1)}.$$

Es fällt daher bei *abgeschlossenen* Mengen, nach (4), die *erste Cohärenz* von P, die wir Pc nennen, mit der *ersten Ableitung* zusammen; wir haben:

$$Pc = P^{(1)}, \tag{28}$$

vorausgesetzt, dass P *abgeschlossen* ist.

Nun wissen wir aber, dass auch *alle* Ableitungen $P^{(\gamma)}$ *abgeschlossene* Mengen sind, woraus folgt, dass *allgemein* in unserm Fall:

(29) $$Pc^{\gamma} = P^{(\gamma)},$$

und daher:

(30) $$Pc^{\gamma}a = P^{(\gamma)} - P^{(\gamma+1)},$$

wo für $\gamma = 0$ unter $P^{(0)}$ nichts anderes als P zu verstehen ist.

Endlich haben wir hier:

(31) $$Pi = Pc^{\Omega} = P^{(\Omega)}.$$

$P^{(\Omega)}$ ist daher, falls sie nicht Null ist, eine *insichdichte* Menge, und da sie ausserdem als *Ableitung* von P eine *abgeschlossene* Menge ist, so folgt hieraus, dass $P^{(\Omega)}$, falls sie nicht verschwindet, eine *perfecte* Menge ist.

Man sieht also, dass im vorliegenden Falle der Bestandtheil $U = Pi_1$ von Pi *stets verschwindet* und dass daher Pi sich auf V reducirt; denn, da Pi eine *perfecte* Menge ist, so ist nach Theorem A der Bestandtheil von Pi, welcher in eine Vollkugel fällt, die einen Punct von Pi umgiebt, stets von *höherer* als der *ersten* Mächtigkeit; es kann also *kein* Punct von Pi ein Punct *erster* Ordnung sein.

Daher ist jede *abgeschlossene* Menge *erster* Mächtigkeit eine *separirte* Menge. Je nachdem nun die *abgeschlossene* Menge P von der *ersten* oder von *höherer* Mächtigkeit ist, ergeben sich aus den Theoremen J und L und den auf sie folgenden Resultaten die verschiedenen Behauptungen in Theorem H.

Die im Vorstehenden zu einer Art von Abschluss gelangten Untersuchungen über *Punctmengen* habe ich von Anfang an nicht bloss aus speculativem Interesse, sondern zugleich im Hinblick auf Anwendungen unternommen, welche ich mir davon in der *mathematischen Physik* und in anderen Wissenschaften versprach.

Die *Hypothesen*, welche den meisten theoretischen Untersuchungen über *Naturerscheinungen* zu Grunde gelegt werden, haben mich niemals sehr befriedigt und ich glaubte dies dem Umstande zuschreiben zu müssen, dass die *Theoretiker* zumeist entweder über die *letzten* Elemente der *Materie* eine völlige Unbestimmtheit herrschen lassen oder dass sie dieselben als sogenannte *Atome* von zwar *sehr kleinem* aber doch *nicht gänzlich verschwindendem Rauminhalte* annehmen. Mir unterlag es keinem Zweifel, dass, um zu einer befriedigenderen *Naturerklärung* zu gelangen, die letzten oder eigentlichen *einfachen* Elemente der Materie in *actual unendlicher Zahl* vorauszusetzen und in Bezug auf das *Räumliche* als *völlig ausdehnungslos* und *streng punctuell* zu betrachten sind; ich wurde in dieser Ansicht bestärkt, indem ich bemerkte, dass in der neueren Zeit so hervorragende *Physiker*, wie FARADAY, AMPÈRE, WILH. WEBER und von *Mathematikern* neben Anderen CAUCHY dieselbe Überzeugung vertreten haben.

Um aber diese *Grundanschauung* zur Durchführung bringen zu können, schienen mir allgemeine Untersuchungen über *Punctmengen*, wie ich sie angestellt habe, vorhergehen zu müssen. Ich nenne im Anschluss an LEIBNIZ die *einfachen* Elemente der Natur, aus deren Zusammensetzung in gewissem Sinne die *Materie* hervorgeht, *Monaden* oder *Einheiten* (man vergleiche namentlich die beiden LEIBNIZ'schen Abhandlungen: »*La Monadologie*«, Edit. ERDMANN, p. 705 oder Edit. DUTENS, T. II, p. 20 und »*Principes de la nature et de la grâce, fondés en raison*«, Edit. ERDMANN, p. 714 und Edit. DUTENS, T. II, p. 32) und gehe von der Ansicht aus, mit welcher ich mich in Übereinstimmung mit der heutigen Physik zu befinden glaube, dass *zwei specifisch verschiedene, auf einander wirkende Materien* und demgemäss auch *zwei* verschiedene Classen von *Monaden* neben einander zu Grunde zu legen sind, die *Körpermaterie* und die *Aethermaterie*, die *Körpermonaden* und die *Aethermonaden*, indem diese beiden *Substrate* zur *Erklärung* der *bisher beobachteten sinnfälligen Erscheinungen* auszureichen scheinen.

Auf diesem Standpuncte ergiebt sich als die *erste Frage*, woran aber weder LEIBNIZ noch die Späteren gedacht haben, welche *Mächtigkeiten* jenen beiden Materien in Ansehung ihrer Elemente, sofern sie als *Mengen* von *Körper-* resp. *Aethermonaden* zu betrachten sind, zukommen; in dieser Beziehung habe ich mir schon vor Jahren die *Hypothese* gebildet, dass die *Mächtigkeit* der *Körpermaterie* diejenige ist, welche ich in meinen Untersuchungen die *erste* Mächtigkeit nenne, dass dagegen die *Mächtigkeit* der *Aethermaterie* die *zweite* ist.

Für diese Ansicht und Meinung lassen sich *sehr viele* Gründe ins Feld führen, wie ich bei einer späteren Gelegenheit auseinandersetzen will;

nehmen wir sie vorläufig an, so müssen wir uns in jedem *Zeitmoment* die *Körpermaterie* (sei es im ganzen Weltraume G_3, sei es in irgend einem abgegrenzten Theil H_3 derselben) unter dem *Bilde* einer Punctmenge P von der ersten Mächtigkeit, die *Aethermaterie* in demselben Raume unter dem *Bilde* einer *daneben* bestehenden Punctmenge Q von der *zweiten* Mächtigkeit denken, und diese beiden Punctmengen P und Q wären gewissermaassen als Functionen der *Zeit* zu betrachten. Aus den Untersuchungen des § 2 folgt aber, dass:

$$P = Pr + Pi_1,$$

wo Pr die *separirte* Menge ist, welche wir den *Rest* von P genannt und wo Pi_1, wenn sie nicht verschwindet, die *erste Inhärenz* von P, eine *homogene* Punctmenge *erster* Ordnung ist; die *übrigen Inhärenzen* fallen hier fort, weil P die *erste* Mächtigkeit hat. Ebenso haben wir:

$$Q = Qr + Qi_1 + Qi_2$$

da Q von der *zweiten* Mächtigkeit ist und somit *höhere Inhärenzen*, als die *zweite* hier nicht vorkommen.

Es wird sich zunächst darum handeln, zu entscheiden, ob vielleicht den *fünf* wesentlich verschiedenen Bestandtheilen, in welche hiernach die *Körper-* und *Aethermaterie* in jedem Zeitmoment getrennt erscheint und etwa auch den verschiedenen Theilen, in welche Pr und Qr nach (13) zerfallen, auch wesentlich verschiedene *Erscheinungs-* und *Wirkungsweisen* der Materie, wie: *Aggregatzustände, chemische Unterschiede, Licht* und *Wärme, Electricität* und *Magnetismus* entsprechen mögen.

Ich möchte jedoch die Vermuthungen, welche ich in dieser Beziehung habe, nicht früher in bestimmter Form aussprechen, als bis eine genauere Prüfung derselben stattgefunden haben wird.

Halle, d. 29 Jan. 1885.