DÉDUCTION ARITHMÉTIQUE
D'UNE RELATION DUE À JACOBI.

Extrait d'une lettre adressée à M. Hermite

PAR

R. LIPSCHITZ
à BONN.

. . . . . Il y a quelque temps que vous m'avez fait savoir, comme vous jugiez désirable, que la relation de JACOBI

$$\vartheta_0(0,\ q)\vartheta_2(0,\ q)\vartheta_3(0,\ q) = \frac{1}{\pi}\left(\frac{d\vartheta_3(w,\ q)}{dw}\right)_{(w=0)}$$

fût établie arithmétiquement. Ces derniers jours j'ai réussi à en trouver une démonstration, que vous me permettez de vous communiquer.

Je suis parti de l'observation, que, si l'on représente les fonctions $\vartheta_0(0, q)$, $\vartheta_2(0, q)$, $\vartheta_3(0, q)$ à l'aide du produit infini $\prod_{n=1}^{n=\infty}(1-q^n) = G(q)$, comme dans la lettre que j'ai eu le plaisir de vous adresser le 20 Décembre 1883, et qui a été imprimée dans les Acta mathematica, T. 4, p. 195—196, de sorte que l'on ait

$$\vartheta_0(0,\ q) = \frac{G^2(q)}{G(q^2)}, \qquad \vartheta_2(0,\ q) = 2q^{\frac{1}{4}}\frac{G^2(q^4)}{G(q^2)}, \qquad \vartheta_3(0,\ q) = \frac{G^2(-q)}{G(q^2)},$$

le produit des trois fonctions prend la forme

$$\frac{2q^{\frac{1}{4}}G^2(q)G^2(q^4)G^2(-q)}{G^3(q^2)},$$

qui, par l'équation

$$G(q)G(q^4)G(-q) = G^3(q^2)$$

se change dans l'expression $2q^{\frac{1}{4}}G^3(q^2)$. Or l'équation en question est transformée dans celle-ci

$$2q^{\frac{1}{4}}G^3(q^2) = \frac{1}{\pi}\left(\frac{d\vartheta_3(w,\ q)}{dw}\right)_{(w=0)}$$

qui coïncide avec la formule (5) de l'article 66 des *Fundamenta,* et qui a été ramenée à des considérations purement arithmétiques par JACOBI dans le travail: *Elementarer Beweis einer merkwürdigen analytischen Formel nebst einigen aus ihr folgenden Zahlensätzen,* Journal de CRELLE, T. 21, p. 13. Cela étant, j'ai essayé de démontrer l'équation dont il s'agit, en suivant une route semblable à celle de JACOBI.

En désignant par a et c tous les nombres depuis $-\infty$ à $+\infty$, par b et f tous les nombres impairs positifs, on a

$$\vartheta_0(0,\ q) = \Sigma(-1)^a q^{a^2},$$

$$\vartheta_2(0,\ q) = \Sigma 2q^{\frac{b^2}{4}},$$

$$\vartheta_3(0,\ q) = \Sigma q^{c^2},$$

$$\frac{1}{\pi}\left(\frac{d\vartheta(w,\ q)}{dw}\right)_{(w=0)} = \Sigma 2(-1)^{\frac{f-1}{2}} f q^{\frac{f^2}{4}}.$$

Dans l'équation, qui est à établir, je prends les coëfficients différentiels des deux côtés par rapport à la variable $\log q$, ce qui donne la relation

$$\frac{\Sigma(-1)^a a^2 q^{a^2}}{\Sigma(-1)^a q^{a^2}} + \frac{\Sigma \frac{b^2}{4} q^{\frac{b^2}{4}}}{\Sigma q^{\frac{b^2}{4}}} + \frac{\Sigma c^2 q^{c^2}}{\Sigma q^{c^2}} = \frac{\Sigma(-1)^{\frac{f-1}{2}} \frac{f^3}{4} q^{\frac{f^2}{4}}}{\Sigma(-1)^{\frac{f-1}{2}} q^{\frac{f^2}{4}}},$$

ou bien, en se débarrassant des dénominateurs,

$$\Sigma\Sigma\Sigma\Sigma\left(a^2 + \frac{b^2}{4} + c^2 - \frac{f^2}{4}\right)(-1)^{a+\frac{f-1}{2}} f q^{a^2+\frac{b^2}{4}+c^2+\frac{f^2}{4}} = 0.$$

Evidemment il suffit d'établir cette relation pour en conclure l'équation proposée.

Comme les lettres a et c signifient la même chose et les lettres b et f pareillement, il est permis de changer a avec c, et b avec f. Il y a donc quatre expressions de la même série qui, ajoutées ensemble, donnent le résultat

$$\sum\sum\sum\sum\left(a^2+c^2+\frac{b^2}{4}-\frac{f^2}{4}\right)[(-1)^a+(-1)^c](-1)^{\frac{f-1}{2}} f q^{a^2+\frac{b^2}{4}+c^2+\frac{f^2}{4}}$$

$$+\sum\sum\sum\sum\left(a^2+c^2+\frac{f^2}{4}-\frac{b^2}{4}\right)[(-1)^a+(-1)^c](-1)^{\frac{b-1}{2}} b q^{a^2+\frac{b^2}{4}+c^2+\frac{f^2}{4}}$$

$$=\sum\sum\sum\sum\left|\begin{array}{l}\left\{a^2+c^2-\left[\dfrac{(-1)^{\frac{b-1}{2}}b-(-1)^{\frac{f-1}{2}}f}{2}\right]^2\right\}\\ \times[(-1)^a+(-1)^c][(-1)^{\frac{b-1}{2}}b+(-1)^{\frac{f-1}{2}}f]q^{a^2+\frac{b^2}{4}+c^2+\frac{f^2}{4}}\end{array}\right|$$

D'ailleurs en remplaçant $2(a^2+c^2)$ par $(a+c)^2+(a-c)^2$ le double de la série devient égal à la somme de la série

$$\sum\sum\sum\sum\left|\begin{array}{l}\left\{(a+c)^2-\left[\dfrac{(-1)^{\frac{b-1}{2}}b-(-1)^{\frac{f-1}{2}}f}{2}\right]^2\right\}\\ \times[(-1)^a+(-1)^c][(-1)^{\frac{b-1}{2}}b+(-1)^{\frac{f-1}{2}}f]q^{a^2+\frac{b^2}{4}+c^2+\frac{f^2}{4}}\end{array}\right|,$$

et de celle qui s'en déduit en substituant $-c$ au lieu de c. Mais ces deux séries se trouvant égales il suffit de démontrer que la première s'évanouit.

Or l'exposant de q est égal à la quatrième partie de la somme de quatre carrés

$$(2a)^2+b^2+(2c)^2+f^2,$$

dont deux sont pairs, et deux impairs. Elle représente donc tous les nombres de l'une des deux formes $8n+2$ et $8n+6$. Pour la première on a $a+c\equiv 0 \pmod 2$, pour la seconde $a+c\equiv 1 \pmod 2$. Dans le deuxième cas il suit $(-1)^a+(-1)^c\equiv 0 \pmod 2$, partant dans notre série quadruple tous les termes, où $a+c\equiv 1 \pmod 2$, sont nuls. Reste donc le double de la série

$$\sum\sum\sum\sum(-1)^a\left|\begin{array}{l}\left\{(a+c)^2-\left[\dfrac{(-1)^{\frac{b-1}{2}}b-(-1)^{\frac{f-1}{2}}f}{2}\right]^2\right\}\\ \times[(-1)^{\frac{b-1}{2}}b+(-1)^{\frac{f-1}{2}}f]q^{a^2+\frac{b^2}{4}+c^2+\frac{f^2}{4}}\end{array}\right|,$$

étendue à tous les nombres a et c, qui remplissent la condition $a+c\equiv 0 \pmod 2$. Mais on peut déduire de chaque combinaison de nombres a, b, c, f une combinaison a', b', c', f' telle, que, partant de la première on arrive à la seconde, et que l'on a en même temps, en posant $(-1)^{\frac{b-1}{2}}=\beta$, $(-1)^{\frac{f-1}{2}}=\delta$, $(-1)^{\frac{b'-1}{2}}=\beta'$, $(-1)^{\frac{f'-1}{2}}=\delta'$, les deux équations

$$a^2+\frac{b^2}{4}+c^2+\frac{f^2}{4}=a'^2+\frac{b'^2}{4}+c'^2+\frac{f'^2}{4},$$

$$(-1)^a\left[(a+c)^2-\left(\frac{\beta b-\delta f}{2}\right)^2\right](\beta b+\delta f)$$
$$+(-1)^{a'}\left[(a'+c')^2-\left(\frac{\beta' b'-\delta' f'}{2}\right)^2\right](\beta' b'+\delta' f')=0.$$

Il suit des définitions données, que les quantités $a+c$ et $\frac{\beta b-\delta f}{2}$ sont paires, la quantité $\frac{\beta b+\delta f}{2}$ est impaire. On peut donc toujours déterminer $\varepsilon=\pm 1$ de sorte que la condition

$$a+c+\varepsilon\left(\frac{\beta b+\delta f}{2}\right)\equiv 1 \pmod 4$$

soit satisfaite. Maintenant faisons

$$a+c=\frac{\beta' b'-\delta' f'}{2}, \qquad \frac{\beta b+\delta f}{2}=\varepsilon\left(\frac{\beta' b'+\delta' f'}{2}\right)$$
$$a-c=a'-c', \qquad \frac{\beta b-\delta f}{2}=a'+c'.$$

Alors viennent les équations

$$2a'=\quad a-c+\frac{\beta b-\delta f}{2}$$
$$2c'=-(a-c)+\frac{\beta b-\delta f}{2}$$
$$\beta' b'=\quad a+c+\varepsilon\left(\frac{\beta b+\delta f}{2}\right)$$
$$\delta' f'=-(a+c)+\varepsilon\left(\frac{\beta b+\delta f}{2}\right),$$

où

$$2a' \equiv 0, \qquad 2c' \equiv 0, \qquad \beta' b' \equiv 1, \qquad \delta' f' \equiv 1 \pmod 4,$$

puis:

$$a^2 + \frac{b^2}{4} + c^2 + \frac{f^2}{4} = a'^2 + \frac{b'^2}{4} + c'^2 + \frac{f'^2}{4},$$

et:

$$\left[(a+c)^2 - \left(\frac{\beta b - \delta f}{2}\right)^2\right](\beta b + \delta f)$$

$$= -\left[(a'+c')^2 - \left(\frac{\beta' b' - \delta' f'}{2}\right)^2\right]\varepsilon(\beta' b' + \delta' f').$$

Il s'agit donc de démontrer la relation

$$(-1)^a = (-1)^{a'}\varepsilon.$$

Mais nous avons $2a' - 2a = -(a+c) + \frac{\beta b - \delta f}{2}$,

$$2a' - 2a \equiv -(a+c) + \varepsilon\left(\frac{\beta b - \delta f}{2}\right) \pmod 4$$

$$1 \equiv \quad (a+c) + \varepsilon\left(\frac{\beta b + \delta f}{2}\right) \pmod 4,$$

partant

$$2a' - 2a \equiv -1 + \varepsilon\beta b \equiv -1 + \varepsilon \pmod 4,$$

ou bien

$$a' - a \equiv \frac{-1+\varepsilon}{2} \pmod 2,$$

ce qui donne la relation cherchée. Il est donc fondé, que dans la série

$$\sum\sum\sum\sum(-1)^a\left[(a+c)^2 - \left(\frac{\beta b - \delta f}{2}\right)^2\right](\beta b + \delta f)q^{a^2+\frac{b^2}{4}+c^2+\frac{f^2}{4}},$$

où $a + c \equiv 0 \pmod 2$, tous les termes pris deux à deux se détruisent, et que pour les cas où l'on a les équations $a = a'$, $c = c'$ les termes correspondants de la série deviennent égaux à zéro. La série s'évanouit donc toujours, ce qu'il fallait démontrer.

Pour les combinaisons de nombres a, b, c, f, où c diffère de zéro, il n'est pas sans intérêt de considérer la combinaison a'', b'', c'', f'', $\eta = \pm 1$, qui correspond à la combinaison $a, \; b, \; -c, \; f.$ Alors nos équations donnent

$$a - c = \frac{\beta''b'' - \delta''f''}{2}, \qquad \frac{\beta b + \delta f}{2} = \eta\left(\frac{\beta''b'' + \delta''f''}{2}\right)$$

$$a + c = a'' - c'', \qquad \frac{\beta b - \delta f}{2} = a'' + c''.$$

En éliminant les nombres $a, \; b, \; c, \; f,$ on trouve

$$a' - c' = \frac{\beta''b'' - \delta''f''}{2}, \qquad \frac{\beta'b' + \delta'f'}{2} = \varepsilon\eta\left(\frac{\beta''b'' + \delta''f''}{2}\right)$$

$$a' + c' = a'' + c'', \qquad \frac{\beta'b' - \delta'f'}{2} = a'' - c'',$$

ce qui fait voir, qu'à la combinaison $a', \; b', \; -c', \; f'$ correspond la combinaison $a'', \; b'', \; -c'', \; f''.$ On a donc ces trois couples de combinaisons

$$\begin{array}{lcl} (a, \; b, \; c, \; f) & \text{et} & (a', \; b', \; c', \; f') \\ (a, \; b, \; -c, \; f) & \text{et} & (a'', \; b'', \; c'', \; f'') \\ (a', \; b', \; -c', \; f') & \text{et} & (a'', \; b'', \; -c'', \; f''). \end{array}$$

Pour celles, où a diffère de zéro, on peut faire de la manière semblable; mais dans les cas où $a = 0$ et $c = 0$ les trois couples de combinaisons rentrent dans un seul.

Bonn, 2 Février 1885.