ÜBER SYSTEME VON PLANCURVEN

VON

H. KREY

in FREIBURG i/B.

Die vor nunmehr elf Jahren erschienene Abhandlung des Herrn ZEUTHEN: »*Almindelige Egenskaber ved Systemer af plane Kurver*[1]» enthält die Grundlagen für eine Behandlung der auf algebraische ebene Curven bezüglichen anzahlgeometrischen Fragen. Es handelt sich bei Aufgaben dieser Art um die Bestimmung der Anzahl von Curven gegebener Definition, welche so viel Bedingungen genügen, wie ihre Constantenzahl beträgt; und das zur Lösung anzuwendende Verfahren besteht immer in der Einführung von Systemen, deren allgemeine Curve eine um 1 grössere Constantenzahl besitzt, und welche die gesuchten als besondere Curven enthalten. Zugleich werden in einem solchen System noch andere besondere Curven (Ausartungen) vorkommen, und von der Möglichkeit, hinreichend viele Relationen zwischen den Anzahlen derselben zu ermitteln, hängt die Lösbarkeit der gestellten Aufgabe ab. Es hat sich gezeigt, dass, selbst bei der Beschränkung auf sogenannte elementare Systeme, schon für $n = 3$ und $n = 4$ die Auffindung aller Ausartungen, und noch mehr die Aufstellung der zwischen ihren Anzahlen bestehenden Relationen mit bedeutenden Schwierigkeiten verbunden ist. Der Grund hiervon liegt in dem Auftreten von Curven mit *mehrfach zählenden Zweigen* (»Mangefoldsgrene»), welche den elementaren Berührungsbedingungen genügen, wenn die Zahl der letzteren eine gewisse Grenze übersteigt.

Wohl aber ergeben sich allgemeine, d. h. für Curven jeder Ordnung, oder doch für hinreichend grosse n geltende Resultate aus den Formeln

[1] Kopenhagen, Höst. Ursprünglich im 10^ten^ Bande der Videnskabernes Selskabs Skrifter publicirt.

des § 24 der erwähnten ZEUTHEN'schen Abhandlung, von deren Inhalt ich die beiden ersten Abschnitte hier als bekannt voraussetze. Das Bestehen dieser Gleichungen ist an die Bedingung geknüpft, dass die Curven α' mit einer neuen Doppeltangente die einzigen mit einem mehrfach zählenden Punctorte behafteten Ausartungen des Systems sind. Setzt man noch, was im Folgenden geschehen soll, $\alpha' = 0$, dann lässt sich die Gültigkeitsbedingung einfach dahin aussprechen, dass im System keinerlei besondere Curven der genannten Art vorkommen.

Diese Voraussetzung ist es, welche den nachfolgenden Entwicklungen zu Grunde liegt. In dem ersten Theile derselben habe ich mir hauptsächlich die Aufgabe gestellt, nachzuweisen, dass alle hier in Betracht kommenden Zahlen bestimmbar sind. Der zweite Theil enthält die Ausdehnung einiger der erhaltenen Resultate auf Plancurven in nicht fester Ebene.

A. Plancurven in fester Ebene.

§ 1.

Übergang von niederen zu höheren Systemen.

1. Sobald für ein System die Zahlen μ, b, c bekannt sind, findet sich die zweite Characteristik aus der Gleichung

$$\mu' = 2(n-1)\mu - 2b - 3c.$$

Sagen nun die

$$\frac{n(n+3)}{2} - d - 2e - 1 = s + t$$

elementaren Bedingungen aus, dass die Curven durch s gegebene Puncte gehen, und t gegebene Geraden berühren sollen, dann ist μ' die erste Characteristik für ein zweites System, in welchem s, t durch $s-1$, $t+1$ ersetzt sind; immer vorausgesetzt, dass t eine gewisse Grenze nicht überschreitet. Es liegt daher keine wesentliche Beschränkung in der Annahme, welche im Folgenden der Einfachheit wegen gemacht werden soll, dass sich die elementaren Bedingungen sämmtlich auf gegebene Puncte beziehen.

Ein solches System soll kurz (d, e) genannt, und die Zahl μ desselben gelegentlich mit $[d, e]$ bezeichnet werden, auch dann, wenn ein Theil der singulären Puncte den weiteren Bedingungen zu genügen hat, bzw. in gegebenen Geraden, oder an gegebenen Stellen zu liegen, oder wenn gefordert wird, dass zwei der $d + e$ Puncte in einer Geraden liegen sollen, die entweder gegeben ist, oder sich um einen gegebenen Punct dreht.

Ohne Rücksicht darauf, ob die singulären Puncte sämmtlich frei sind oder nicht, möge von zwei Systemen (d_1, e_1), (d, e) ersteres das *einfachere* oder *niedere* heissen, wenn entweder $d_1 + e_1 < d + e$, oder wenn zwar $d_1 + e_1 = d + e$, aber $e_1 < e$ ist. Als *nächst* höheres System zu (d, e) kann man sowohl $(d + 1, e)$ als $(d - 1, e + 1)$, als nächst niederes $(d - 1, e)$ und $(d + 1, e - 1)$ ansehen.

2. Es soll nun untersucht werden, wie weit die ZEUTHEN'schen Gleichungen ausreichen, die in ihnen vorkommenden, auf das System (d, e) bezüglichen Zahlen unter der Voraussetzung zu bestimmen, *dass für die niederen Systeme bereits alle Zahlen bekannt sind.*

Aus jenen Formeln lassen sich zunächst die folgenden drei herleiten:

$$(1)\qquad \alpha = [3(n-1)^2 - 7d - 12e]\mu - (7n - 12e - 18)b \\ - 6(2n - 2d - 3e - 3)c - 24\gamma'_0 - 12y - 18z \\ + 4(2d) + 15(3d) - 18(d2e);$$

$$(2)\qquad \beta = 2d\mu + (2n - 3e - 6)b - 3dc + 3y - 2(2d) - 6(3d) + 4(d2e);$$

$$(3)\qquad \gamma = \frac{5}{2}e\mu - 2eb + \left(\frac{5}{2}n - 2d - 6e - 3\right)c + 12\gamma'_0 + 2y + 6z \\ + \frac{3}{2}(2de) + 6(d2e).$$

Die zweite ergiebt sich aus (15), (10) und (7); die erste dadurch, dass man den Werth von α aus (3') entnimmt, dann b' und c' mit Hülfe von (12) und (9) durch u, v, p, q ausdrückt, endlich die Gleichungen

(4), (14), (11), (10) und den bereits erhaltenen Werth von β benutzt; die dritte findet man aus (5) in Verbindung mit (11) und (14).

Bei ungleicher Definition der Doppelpuncte oder Spitzen darf man selbstverständlich die Formeln (2), (3) *nicht für die Theilzahlen* in Anspruch nehmen, deren Unterscheidung dann erforderlich wird; z. B. wenn ein Doppelpunct in einer Geraden liegt, und es sich um das auf ihn bezügliche Theil-β handelt; oder wenn eine der Spitzen gegeben ist, und gesucht wird, wie oft eine der $e - 1$ freien Spitzen in einen Selbstberührungspunct übergeht. Einen Ausdruck für solche Theilzahlen erhält man ebenfalls aus den zur Herleitung von (2), (3) dienenden Gleichungen, nur hat man die Bedeutung der in letzteren vorkommenden Zahlen auf die betreffenden irreductiblen Theil-Örter einzuschränken.

Die Zahlen α_1, α_2, β', γ_1, γ_0', welche überhaupt nur dann von Null verschieden sind, wenn d eine gewisse von n abhängige Grenze übersteigt, können, bei dem Fortschreiten von niederen zu höheren Systemen, als bekannt angesehen werden. So z. B. bestehen die γ_0' Curven aus einer C_{n-1} mit einem Selbstberührungspunct, $d - n + 5$ Doppelpuncten und $e - 4$ Spitzen, und aus der Tangente des Selbstberührungspunctes (l. c. pag. 16). Die Restcurve hat stets weniger als $d + e$ singuläre Puncte.

Sieht man von diesen als bekannt zu betrachtenden Zahlen ab, dann lassen sich alle übrigen ausdrücken durch die folgenden neun, zwischen welchen keine Relationen mehr bestehen:

$$\mu,\ b,\ c,\ y,\ z,\ (2d),\ (3d),\ (2de),\ (d2e).$$

Dies folgt aus den Gleichungen (3) — (14) für μ', α, β, γ, b', c', u, v, p, q, x, (de), $(2e)$; ferner berechnet man u', v', p', q' aus (4'), (5'), (9'), (12'), dann y', z', $(2d'e')$, $(d'2e')$ aus (7'), (8'), (11'), (14'), u. s. w.

Von den genannten neun Zahlen können

$$\mu,\ b,\ c,\ y,\ z,\ (2d)$$

als bekannt gelten. Es ist μ das durch d dividirte α des Systems $(d - 1, e)$ oder auch das durch e dividirte β des Systems $(d + 1, e - 1)$; b ist das durch $d - 1$ dividirte α eines Systems $(d - 1, e)$, von dessen Doppelpuncten einer in einer gegebenen Geraden liegt; c ist das durch d dividirte α eines Systems $(d - 1, e)$ von dessen Spitzen eine in einer gegebenen Geraden liegt, oder das auf den bevorzugten Doppelpunct des vorerwähnten

Systems bezügliche β. Ferner sind y, z Zahlen α je eines Systems $(d-1, e)$, oder Theil-β von $(d+1, e-1)$, wenn nur in beiden Fällen eine Systemsbedingung aussagt, dass die Verbindungsgerade zweier singulären Puncte durch einen gegebenen Punct gehe. Auch x darf als bekannt gelten, da es, wenn nicht als Zahl α, so doch auf andere Art bestimmbar ist, wie am Schlusse dieses Paragraphen gezeigt werden soll; $(2d)$ endlich ist das γ des einfacheren Systems $(d-2, e+1)$.

3. Dagegen ist nicht ohne Weiteres ersichtlich, dass auch

$$(3d), \quad (2de), \quad (d2e)$$

auf Zahlen niederer Systeme zurückführbar sind. Die Curven, um welche es sich hier handelt, sind solche mit einem dreifachen Puncte, der mit

$$\Delta, \quad \Delta^{(2)}, \quad \Delta^{(3)}$$

bezeichnet werden soll, je nachdem seine Tangenten getrennt liegen, oder zwei derselben, oder alle drei zusammenfallen; und die fraglichen Zahlen sind, in leicht verständlicher Bezeichnung:

$$[\Delta, d-3, e], \quad [\Delta^{(2)}, d-2, e-1], \quad [\Delta^{(3)}, d-1, e-2].$$

Um den Nachweis ihrer Bestimmbarkeit zu führen, wird es nothwendig sein, einige Zahlenrelationen für solche Systeme aufzustellen, deren allgemeine Curve, ausser Doppelpuncten und Spitzen, entweder einen Punct Δ oder $\Delta^{(2)}$ besitzt.

In beiden Fällen sei B die Ordnung des von den dreifachen Puncten gebildeten Ortes, während sich U, ξ, η auf die von Δ oder $\Delta^{(2)}$ ausgehenden, anderswo berührenden Tangenten, bzw. die Verbindungsgeraden mit einem Doppelpuncte oder einer Spitze beziehen. Im ersten Falle sei T der Grad des Tangentenortes von Δ; im zweiten ist zu unterscheiden zwischen T_{12} und T_3, dem Orte der beiden zusammenfallenden und der dritten Tangente. — Bei Systemen dieser Art können wohl die Doppelpuncte und Spitzen sich zu dreien vereinigen, aber es können *nicht gleichzeitig zwei derselben mit Δ oder $\Delta^{(2)}$ zusammenfallen.*

Die einzige Ausartung $(2t)$ von Δ ist ein dreifacher Punct mit zwei zusammenfallenden Tangenten. Durch Coincidenz eines Doppelpunctes mit Δ entsteht ein dreifacher Punct $(\overline{2t})$, von dessen Tangenten zwar nur zwei zusammenfallen, der sich aber von $(2t)$ dadurch unterscheidet, dass die singuläre Tangente fünfpunctig trifft; während zwei Äste einen Selbstberührungspunct bilden, geht der dritte in beliebiger Richtung hindurch. Durch Vereinigung einer Spitze mit Δ entsteht ebenfalls ein dreifacher Punct $(2t)^{(2)}$ mit zwei zusammenfallenden Tangenten, und zwar bilden die beiden einander berührenden Äste eine Spitze zweiter Art.

In dem System, dessen allgemeine Curve bereits einen Punct $\Delta^{(2)}$ besitzt, kommen zwei Ausartungen dieses letzteren in Betracht, welche eine Erniedrigung der Classe um 1 herbeiführen. Derselbe kann nicht nur in einen Punct $(3t)$ mit lauter zusammenfallenden Tangenten übergehen, sondern auch in einen Punct $(\overline{2t})$, und zwar vollzieht sich dieser Übergang in derselben Weise, wie der einer Spitze in einen Selbstberührungspunct. Andere specielle dreifache Puncte entstehen durch Vereinigung eines Doppelpunctes oder einer Spitze mit $\Delta^{(2)}$; jedoch ist es für den vorliegenden Zweck nicht nothwendig, auf diese einzugehen.

Für Systeme der erstgenannten Art gelten unter anderen die folgenden Relationen, welche wie die entsprechend numerirten Zeuthen'schen bewiesen werden:

$$(3_a)\qquad 2(n-1)\mu = \mu' + 6B + 2b + 3c;$$

$$(4_a)\qquad n'B + \mu' = 2T + U + (2t);$$

$$(10_a)\qquad (n-3)B + \mu = T;$$

$$(13_a)\qquad (n-4)[(n-3)B + 2\mu] = U + 2\xi + 3\eta.$$

Aus ihnen folgt für das System

$$(\Delta,\ d-2,\ e-1)$$

$$(2t) = 4\mu + (4n - 2d - 3e - 11)B - 2b - 3c + 2\xi + 3\eta.$$

Die rechte Seite dieser Gleichung enthält nur Bekanntes; denn μ ist das $(3d)$ des Systems $(d+1,\ e-1)$; B, b, c sind Theil-$(3d)$ je eines solchen Systems, von dessen singulären Puncten einer in einer gegebenen Geraden liegt, und Ähnliches gilt von ξ, η. Daher ist

$$(2t) = [\Delta^{(2)},\ d-2,\ e-1]$$

bekannt, und da in Folge der ZEUTHEN'schen Gleichung (6)

$$6\ (3d) + 3(2de) = 6[\Delta,\ d-3,\ e] + 3[\Delta^{(2)},\ d-2,\ e-1]$$

durch Bekanntes ausdrückbar ist, so ist ebenfalls $(3d)$ bestimmbar.

4. Hiernach ist auf der rechten Seite der β-Formel (2) die einzige Unbekannte $(d2e)$, während β im Allgemeinen durch Anwendung der α-Formel auf das System $(d-2,\ e+1)$ gefunden wird. Nur wenn $d = 1$ ist, fehlt diese Möglichkeit. Daher bleibt noch zu zeigen, wie

$$[\Delta^{(3)},\ e-2]$$

aus Zahlen solcher Systeme, welche niedriger als $(1,\ e)$ sind, berechnet werden kann.

Die gesuchten Curven sind in dem System

$$(\Delta^{(2)},\ e-2)$$

enthalten, dessen allgemeine Curve ausser einem dreifachen Puncte mit zwei zusammenfallenden Tangenten nur noch $e-2$ Spitzen hat, und für welches die Gleichungen gelten:

$$(3^b) \qquad 2(n-1)\mu = \mu' + 7B + 3c;$$

$$(5^b) \qquad n'B + \mu' = 3T_{12} + 2T_3 + U + (\overline{2t}) + 3\cdot(3t);$$

$$(10^b) \qquad (n-3)B + \mu = 2T_{12} + T_3$$

$$(13^b) \qquad (n-4)[(n-3)B + 2\mu] = U + 3\eta.$$

Es könnte scheinen, als genügte es zur Bestimmung von $(3t)$, T_{12} und T_3 zu kennen, und als brauchte man nur zu berechnen, wie oft die dritte Tangente mit der singulären coincidirt, ohne dass gleichzeitig eine Spitze in $\Delta^{(2)}$ fällt; dabei aber veranlasst der Umstand Schwierigkeit, dass die Coincidenzen einer Spitze mit $\Delta^{(2)}$ zweierlei Art sind, und nur zum Theil das Zusammenfallen aller drei Tangenten zur Folge haben.

Um T_{12}, T_3 zu bestimmen, gehe man aus von dem System

$$(\Delta_p,\ e-2),$$

wo der Index p die Bedingung ausdrückt, dass eine Tangente T_1 von Δ durch einen gegebenen Punct M gehen soll. Die Aufgabe besteht dann darin, zu ermitteln, wie oft eine der weiteren Tangenten T_2, T_3 mit T_1, und wie oft T_2, T_3 unter sich zusammenfallen, ohne dass gleichzeitig eine Spitze sich mit Δ vereinigt. Werden zur Unterscheidung die Zahlen dieses Systems mit μ_1, B_1, c_1, η_1 bezeichnet, und giebt Δ_0 die Bedingung an, dass ein dreifacher Punct an gegebener Stelle liegen soll, dann ist

$$(n-4)B_1 + \mu_1 + 3[\Delta_0, e-2]$$

der Grad des von T_2, T_3 beschriebenen Linienortes, und es ist daher leicht, die volle Zahl jener Tangentencoincidenzen auszudrücken. — Die Coincidenzen einer Spitze mit Δ vertheilen sich auf solche $(2t)_p^{(2)}$ Curven, welche die singuläre Tangente durch M schicken, und auf $(2t)^{(2)}t_p$ andere, bei welchen sich T_2, T_3 vereinigen; also ist

$$2(2t)_p^{(2)} + (2t)^{(2)}t_p = (e-2)B_1 + c_1 - \eta_1,$$

wo die erste Zahl doppelt gerechnet werden muss, weil die betreffenden Curven zwei Mal die Tangentenbedingung erfüllen. Nun findet man $(2t)_p^{(2)}$ direct aus dem System $(\Delta, e-2)$ dessen Curven eine der Spitzen in der Geraden ΔM haben, als Coincidenzen dieser bevorzugten Spitze mit Δ; mithin ist auch $(2t)^{(2)}t_p$ bekannt, und man braucht nur die Reductionen

$$3\cdot(2t)_p^{(2)}, \qquad 3\cdot(2t)^{(2)}t_p$$

an den erwähnten Tangentencoincidenzen anzubringen, um T_{12}, T_3 zu finden. Die Formel (10b) kann zur Bestätigung dienen; denn sowohl μ, B, als μ_1, B_1, c_1, η_1 sind in einfacher Weise durch die Zahlen des Systems $(\Delta, e-2)$ ausdrückbar. Da nun μ, B, c, η sämmtlich Zahlen $(2de)$ je eines Systems $(2, e-1)$ sind, so bleiben in der Gleichung (5b) nur noch $(\overline{2t})$ und $(3t)$ unbekannt; und der verlangte Beweis wird erbracht sein, sobald es gelingt, $(\overline{2t})$ zu bestimmen.

5. Diese Zahl kann andererseits aufgefasst werden als die der Coincidenzen des Doppelpunctes mit dem dreifachen Puncte in dem System

$$(\Delta, 1, e-2).$$

Dasselbe enthält zwar einen Doppelpunct mehr als die vorher zur Anwendung gekommenen; es lässt sich aber zeigen, dass mindestens diejenigen drei seiner Zahlen bestimmt werden können, welche zur Berechnung von $(\overline{2t})$ erforderlich sind.

Gehen wir *erstens* von dem einfacheren Systeme

$$(\Delta,\ e - 2)$$

aus, und legen aus einem festen Puncte M die Tangenten an die Curven desselben, verbinden ferner die Berührungspuncte X mit einem Puncte M_2 durch eine Gerade, welche noch in $n - 1$ Puncten Y trifft. Eine Coincidenz von Y mit X tritt nicht nur ein für jeden neuen Doppelpunct, sondern auch, wenn X ein von M verschiedener Punct der Geraden MM_2 ist, wenn der Punct Δ oder eine Spitze eine Tangente durch M schickt, ferner für jeden Übergang des Punctes Δ in einen Punct $(2t)$, endlich für jeden aus einer Spitze entstandenen Selbstberührungspunct. Da nun der X-Ort von der Ordnung $\mu' + \mu$ ist, und M zum μ-fachen Punct hat, so hat der Y-Ort die Ordnung $(n - 1)(\mu' + \mu) + n'\mu$, und eben so oft coincidirt Y mit X. Mithin ist

$$\alpha = (n - 2)\mu' + (n + n' - 1)\mu - 2T - 3q - 3(2t) - 3\gamma,$$

wo sich T und $(2t)$, wie früher, durch μ, B, c, η ausdrücken lassen, während aus

$$(5_a) \qquad n'c + (e - 2)\mu' = 3q + v + \gamma;$$

$$(11_a) \qquad (n - 2)c + (e - 2)\mu = 2q + (2t)^{(2)};$$

$$(14_a) \qquad (n - 3)[(n - 2)c + 2(e - 2)\mu] = v + 6z + 6\eta;$$

$$(2t)^{(2)} = (e - 2)B + c - \eta$$

die Darstellbarkeit von q und γ durch μ, B, c, η, z folgt.

Fügt man *zweitens* den Systemsbedingungen $(\Delta,\ e - 2)$ noch die hinzu, dass die Curven eine gegebene Gerade G berühren sollen, dann wird die erste Characteristik des neuen Systems

$$\mu_1 = 2(n - 1)\mu - 6B - 3c,$$

und wenn Δ_0, bzw. E_0 die Bedingung ausdrückt, dass der betreffende singuläre Punct gegeben sein soll, so ist

$$(X) = \mu - 6[\Delta_0, e-2] - 3[E_0, \Delta, e-3]$$

die Zahl der in einem gegebenen Puncte X von G berührenden Curven. Es hat also der Y-Ort, der durch die $n-1$ weiteren Schnittpuncte der Geraden MX erzeugt wird, die Ordnung

$$(Y) = \mu_1 + (n-1)(X),$$

und schneidet in so viel Puncten die Gerade G. Dieses sind theils solche Stellen, in welchen die Berührungsbedingung dadurch erfüllt wird, dass X ein neuer Doppelpunct ist; theils diejenigen dreifachen Puncte und Spitzen, welche G zur Tangente haben; endlich die in G liegenden Puncte $(2t)$ und Selbstberührungspuncte. Um daher

$$[\Delta, D_g, e-2]$$

zu erhalten, braucht man nur (Y) zu vermindern um Zahlen T, q, $(2t)$, γ, die sich auf die Systeme $(\Delta_g, e-2)$, $(\Delta, E_g, e-3)$ beziehen, also bekannt sind. Der Index g bezeichnet hier die Bedingung, dass der singuläre Punct in G liegen soll.

Denkt man *drittens* für jede Lage einer sich um den festen Punct M drehenden Geraden die endlich vielen Curven construirt, welche in ihr einen dreifachen Punct besitzen, sie anderswo in einem Puncte X berühren, und $e-2$ Spitzen haben, so wird ein System erzeugt, dessen erste Characteristik μ_2 gleich dem U des Systems $(\Delta, e-2)$, also bekannt ist. Den Grad (X) des X-Ortes findet man am leichtesten aus der Zahl

$$2(n-4)\{[\Delta_g, e-2] - 3[\Delta_0, e-2]\} - 3[\Delta_g, E_g, e-3]$$

der bei gegebener Lage der Geraden $M\Delta$ vorhandenen berührenden Curven, und aus der Vielfachheit in M, welche letztere durch eine Strahlencorrespondenz ermittelt wird. Man definire wieder einen Ort der Ordnung

$$(Y) = \mu_2 + (n-1)(X)$$

als den der $n-1$ weiteren Schnittpuncte einer Geraden M_2X. Die Coincidenzen von Y mit X treten ein, wenn 1) X ein auf der beweglichen Geraden $M\Delta$ liegender neuer Doppelpunct ist; 2) die Gerade in die Lage MM_2 kommt; 3) die bewegliche Gerade Spitzentangente wird; 4) auf ihr ein Selbstberührungspunct liegt; 5) X mit Δ zusammenfällt. Die Zahlen unter 3) und 4) sind Theil-q, resp. Theil-γ des Systems (Δ, $e - 2$) mit der Nebenbedingung, eine Spitze in der Geraden $M\Delta$ zu haben; die unter 2) und 5) lassen sich ebenfalls durch Bekanntes ausdrücken; man findet daher auf diese Weise das ξ des Systems (Δ, 1, $e - 1$). — Ein analoges Verfahren kann übrigens zur Bestimmung der Zahl x des Systems (d, e) dienen.

Ersetzt man noch in dem System, in Bezug auf welches die α-Formel hergeleitet wurde, die Bedingung Δ durch Δ_g, dann giebt der Ausdruck α das B des Systems (Δ, 1, $e - 2$) an. Das Bekanntsein der drei Zahlen B, b, ξ dieses letzteren genügt zur Bestimmung von $(\overline{2t})$.

Hiermit ist die Möglichkeit der Berechnung von $(3t)$ aus der Formel (5b) dargethan.

§ 2.

Beispiele.

Aus dem Vorhergehenden ist ersichtlich, dass man durch Anwendung der Gleichungen (1), (2) auf ein bekanntes System Zahlen eines nächst höheren Systems erhält. Die anfänglich gemachte Voraussetzung, nach welcher solche Systeme auszuschliessen sind, in welchen Curven mit Doppelzweigen vorkommen, ist immer dann und nur dann erfüllt, wenn

$$\text{mindestens } \frac{n^2 - n + 4}{2}$$

feste Puncte gegeben sind, durch welche die Curven gehen sollen (vgl. l. c. § 34). Als *nothwendige* Bedingung hat man daher zunächst, wenn die singulären Puncte sämmtlich frei sind

$$d + 2e < 2n - 1,$$

und allgemeiner, wenn von den d Doppelpuncten d_g in gegebenen Geraden liegen, und d_0 gegeben sind, ferner e_g, e_0 für die etwa vorhandenen nicht freien Spitzen entsprechende Bedeutung haben:

$$d + 2e + d_g + e_g + d_0 + e_0 < 2n - 1.$$

Eine weitere Einschränkung ist erforderlich, wenn man auch solche Systeme ausschliessen will, welche zwar irreductibel sind, aber *zerfallende Curven* enthalten. Sobald nun $d \geqq n - 1$ ist, enthält das System stets endlich viele Curven, die aus einer Geraden und einer C_{n-1} bestehen, für $d \geqq 2(n - 2)$ auch solche, bei welchen sich zwei gerade Linien abtrennen (l. c. § 6, 8). Diese besonderen Curven α_1, α_2 gehören zu den α, welche einen neuen Doppelpunct besitzen, sind also von dem Ergebniss der Formel (1) in Abzug zu bringen, wenn es sich nur um die nicht zerfallenden, der Aufgabe genügenden Curven handelt. Die Zahl dieser letzteren aber ist es, welche das μ des nächst höheren Systems bestimmt; ohne die erwähnte Reduction würde sich das gefundene μ auf ein zerfallendes System beziehen, auf welches die ZEUTHEN'schen Gleichungen nicht mehr sämmtlich anwendbar sind.

Bei der Berechnung der nachfolgenden Beispiele ist auf diesen Umstand keine Rücksicht genommen, weil bei gegebenen kleinen d, n unbestimmt gross, d. h.

$$d < n - 1$$

für alle zur Verwendung kommenden Systeme vorausgesetzt wurde. Hieraus, in Verbindung mit den obigen Bedingungen, ergiebt sich von selbst, wie weit die erhaltenen Resultate gültig sind.

Statt der bisherigen Bezeichnung $[d, e]$ soll jetzt, wenn d, e gegebene Zahlen sind,

$$[d.D,\ e.E]$$

gesetzt werden. Die Indices g, 0 bedeuten, dass der betreffende singuläre Punct in einer gegebenen Gerade, bzw. an gegebener Stelle liegt. Sind für mehrere singuläre Puncte Bedingungen g vorgeschrieben, und beziehen sich diese auf *verschiedene* Geraden, so sollen auch die Buchstaben g durch Indices unterschieden werden. — S bedeutet einen Selbstberührungspunct. Die Bedeutung der hinzuzudenkenden Bedingungen, so wie der Zeichen Δ, $\Delta^{(2)}$, $\Delta^{(3)}$ ist in 1. und 3. des vorigen Paragraphen erklärt. Für diejenigen Leser, welchen die »*Almindelige Egenskaber*» nicht bekannt sind, sei noch bemerkt, dass (de) eine Spitze zweiter Art ist, wie sie durch Zusammenfallen eines Doppelpunctes mit einer gewöhnlichen Spitze entsteht; $(2e)$ dagegen einen aus der Vereinigung zweier Spitzen entstandenen Selbstosculationspunct bedeutet.

Die jeder Formel als Gültigkeitsbedingung hinzugefügte untere Grenze für n bezieht sich auf die Ausschliessung aller zerfallenden Curven der verlangten Beschaffenheit. Wollte man diese letzteren Lösungen mitzählen, so würden viele der folgenden Resultate auch für kleinere n richtig bleiben. Z. B. giebt der Ausdruck $[3D]$ für $n = 3, 4$ noch die richtigen Zahlen 15, 675; im ersten Falle genügen nur zerfallende Curven der Aufgabe; im zweiten sind 620 eigentliche und 55 uneigentliche Lösungen vorhanden.

$$[D_0 D] = 3(n-1)^2 - 7; \qquad (n>3)$$

$$[D_g D] = 9n^3 - 27n^2 - n + 30; \qquad (n>3)$$

$$[D_0 2D] = \frac{3}{2}(3n^4 - 12n^3 - 10n^2 + 55n + 10); \qquad (n>4)$$

$$[D_g 2D] = \frac{3}{2}(9n^5 - 45n^4 - 8n^3 + 259n^2 - 129n - 250); \qquad (n>4)$$

$$[D_0 3D] = \frac{1}{2}(9n^6 - 54n^5 - 54n^4 + 675n^3 - 128n^2 - 2224n + 318); \qquad (n>5)$$

$$[D_g 3D] = \frac{3}{2}(9n^7 - 63n^6 - 21n^5 + 867n^4 - 771n^3 - 3533n^2 + 3386n + 3288); \qquad (n>5)$$

$$[2D] = \frac{3}{2}(n-1)(n-2)(3n^2 - 3n - 11); \qquad (n>3)$$

$$[3D] = \frac{1}{2}(9n^6 - 54n^5 + 9n^4 + 423n^3 - 458n^2 - 829n + 1050); \qquad (n>4)$$

$$[4D] = \frac{3}{8}(n-3)(9n^7 - 45n^6 - 135n^5 + 801n^4 + 691n^3 - 4671n^2 - 1386n + 7880); \qquad (n>5$$

$$[5D] = \frac{3}{40}(27n^{10} - 270n^9 - 45n^8 + 7830n^7 - 13920n^6 - 84714n^5$$
$$+ 214765n^4 + 393980n^3 - 1176127n^2 - 631286n + 2046840). \quad (n > 6)$$

$$[D_{g_1} D_{g_2}] = 9n^2 - 18n + 2; \quad (n > 3)$$
$$[D_{g_1} D_{g_2} D_{g_3}] = 9(n - 1)(3n^2 - 6n - 4); \quad (n > 4)$$
$$[D_{g_1} D_{g_2} \dots D_{g_h}] = 3(n - 1)[D_{g_1} \dots D_{g_{h-1}}] - 7(h - 1)[D_{g_1} \dots D_{g_{h-2}}]. \quad (n > h+1)$$

Um zu bestimmen, wie viele Curven h Doppelpuncte in *einer und derselben* Geraden G besitzen, stelle man die etwas allgemeinere Forderung, dass die Curven durch a gegebene Puncte von G einfach gehen, an d_0 gegebenen Stellen von G einen Doppelpunct, und ausserdem h Doppelpuncte auf G haben sollen. Es muss

$$a + 2d_0 + 2h \leqq n$$

sein, damit überhaupt irreductible Curven der Aufgabe genügen können.

Von den

$$\frac{n(n + 3)}{2} - a - 3d_0 - 2h$$

weiteren gegebenen Puncten nehme man speciell

$$A = n + 1 - a - 2d_0 - 2h$$

in G liegend an, so dass noch

$$\frac{(n - 1)(n + 2)}{2} - d_0$$

derselben frei bleiben. Diese letzteren und die d_0 Puncte auf G bestimmen eine C_{n-1}, welche, in Verbindung mit G, allen Forderungen genügt, und zwar die Bedingung, h weitere Doppelpuncte auf G zu besitzen, $\binom{n - 1 - d_0}{h}$ mal erfüllt. — Die nicht zerfallenden, der Aufgabe genügenden Curven haben mindestens einen der h Doppelpuncte in den A Puncten, und müssen, wenn λ Doppelpuncte in Puncten A liegen, durch die $A-\lambda+a$ Puncte einfach gehen. Man hat also für die gesuchte Zahl die Recursionsformel

$$f(a,\ d_0,\ h) = \binom{n-1-d_0}{h} + \sum_{\lambda=1}^{\lambda=h} \binom{A}{\lambda} \cdot 2^\lambda f(A+a-\lambda,\ \ d_0+\lambda,\ \ h-\lambda),$$

und findet so

$$[2D_g] = \frac{1}{2}(n-2)(9n-25) \qquad (n>3)$$

$$[3D_g] = \frac{1}{2}(n-3)(9n^2-75n+154) \qquad (n>5)$$

u. s. f.

$$[E_0] = 2; \qquad [E_g] = 8n-12; \qquad [E] = 12(n-1)(n-2); \quad (n>2)$$

$$[E_0D] = 6(n-3)(n+1); \qquad [D_0E] = 12n(n-3); \quad (n>2)$$

$$[D_{g_1}E_{g_2}] = 12(2n^2-5n+1); \quad (n>3)$$

$$[D_gE_g] = 12(n-3)(2n-5); \quad (n>2)$$

$$[E_gD] = 12(n-3)(2n^2-n-5); \quad (n>2)$$

$$[E_g2D] = 6(6n^5-33n^4-16n^3+270n^2-101n-444); \quad (n>4)$$

$$[E_g3D] = 2(18n^7-135n^6-90n^5+2385n^4-1789n^3-13028n^2 + 10737n+19812); \quad (n>5)$$

$$[E_gED] = 12(24n^5-156n^4-10n^3+1422n^2-1107n-2169); \quad (n>4)$$

$$[D_gE] = 12(n-3)(3n^2-3n-4); \quad (n>2)$$

$$[D_g2E] = 18(12n^5-84n^4+43n^3+639n^2-806n-480); \quad (n>4)$$

$$[D_0DE] = 36(n^4-5n^3-2n^2+28n-8); \quad (n>4)$$

$$[D_gDE] = 12(9n^5-54n^4+8n^3+369n^2-326n-324); \quad (n>4)$$

$$[E_0 E] = 12(2n^2 - 6n - 3); \quad (n > 3)$$

$$[E_g E] = 24(4n^3 - 18n^2 + 5n + 33); \quad (n > 3)$$

$$[E_{g_1} E_{g_2}] = 4(16n^2 - 48n + 15); \qquad [2E_g] = (n-3)(32n - 105); \quad (n > 3)$$

$$[2E] = 18(n-3)(4n^3 - 12n^2 - 19n + 45); \quad (n > 2)$$

$$[3E] = 4(72n^6 - 648n^5 + 486n^4 + 9234n^3 - 18938n^2 - 27786n + 67500); \quad (n > 3)$$

Diese Formel giebt auch noch für $n = 4$ die richtige Zahl 400, obgleich dieses aus der Herleitung nicht ohne Weiteres hervorgeht.

$$[DE] = 12(n-3)(3n^3 - 6n^2 - 11n + 18); \quad (n > 3)$$

$$[2D,\ E] = 18(n-3)(3n^5 - 12n^4 - 30n^3 + 125n^2 + 82n - 280); \quad (n > 4)$$

$$[3D,\ E] = 6(9n^8 - 81n^7 + 9n^6 + 1656n^5 - 2831n^4 - 10975n^3 + 24851n^2 + 22414n - 55320); \quad (n > 5)$$

$$[D,\ 2E] = 18(12n^6 - 96n^5 + 47n^4 + 1188n^3 - 2003n^2 - 3330n + 6570); \quad (n > 4)$$

$$[2D,\ 2E] = 9(n-4)(36n^7 - 216n^6 - 759n^5 + 5562n^4 + 4703n^3 - 45799n^2 - 8040n + 110403). \quad (n > 5)$$

$$[S_0] = 5; \qquad [S_g] = 25n - 48; \qquad [S] = 50n^2 - 192n + 168; \quad (n > 3)$$

$$[S_{g_1} D_{g_2}] = 3(25n^2 - 73n + 20); \qquad [S_g D_g] = 75n^2 - 457n + 696; \quad (n > 3)$$

$$[S_0 D] = 3(5n^2 - 10n - 23); \qquad [D_0 S] = 2(25n^2 - 96n + 42); \quad (n > 3)$$

$$[D_g S] = 6(25n^3 - 121n^2 + 96n + 98); \quad (n > 3)$$

$$[S_g D] = 3(25n^3 - 98n^2 - 47n + 316); \quad (n > 3)$$

$$[E_g S] = 2(200n^3 - 1068n^2 + 774n + 1575); \quad (n > 3)$$

$$[S_g E] = 6(50n^3 - 246n^2 + 38n + 669); \qquad (n>3)$$

$$[SD] = 6(n-3)(25n^3 - 71n^2 - 122n + 280); \qquad (n>2)$$

$$[SE] = 12(50n^4 - 342n^3 + 319n^2 + 1695n - 2682); \qquad (n>3)$$

$$[S,\ 2D] = 3(75n^6 - 588n^5 + 244n^4 + 7263n^3 - 11710n^2 - 21162n + 40452); \qquad (n>4)$$

$$[D,\ E,\ S] = 12(150n^6 - 1326n^5 + 899n^4 + 18825n^3 - 37023n^2 - 59346n + 138420). \qquad (n>4)$$

$$(de)_0 = 12; \qquad (de)_g = 24(3n-7); \qquad (de) = 60(n-3)(3n-5). \qquad (n>3)$$

$$(2e)_0 = 30; \qquad (2e)_g = 30(7n-19);$$

$$(2e) = 18(35n^2 - 190n + 239). \qquad (n>3)$$

$$[\Delta_g] = 6(n-2); \qquad [\Delta] = 15(n-2)^2; \qquad (n>3)$$

$$[\Delta_0 D] = 3n^2 - 6n - 17; \qquad [D_0 \Delta] = 5(3n^2 - 12n + 8); \qquad (n>4)$$

$$[\Delta_0 E] = 12(n-4)(n+1); \qquad [E_0 \Delta] = 6(5n^2 - 20n + 8); \qquad (n>4)$$

$$[\Delta_g D] = 18n^3 - 72n^2 - 50n + 276; \qquad (n>4)$$

$$[D_g \Delta] = 45n^3 - 225n^2 + 220n + 132; \qquad (n>4)$$

$$[\Delta_g E] = 72(n-4)(n^2 - n - 4); \qquad (n>3)$$

$$[E_g \Delta] = 12(10n^3 - 55n^2 + 52n + 60); \qquad (n>4)$$

$$[\Delta D] = 3(n-2)(15n^3 - 60n^2 - 65n + 314); \qquad (n>4)$$

$$[\Delta E] = 36(n-4)(5n^3 - 15n^2 - 26n + 76); \qquad (n>3)$$

$$[\Delta_0 2D] = \frac{3}{2}(3n^4 - 12n^3 - 36n^2 + 107n + 158); \qquad (n>4)$$

$$[\Delta_g 2D] = 3(9n^5 - 54n^4 - 56n^3 + 649n^2 - 112n - 1695); \quad {\scriptstyle (n>4)}$$

$$[\Delta, 2D] = \frac{3}{2}(45n^6 - 360n^5 + 120n^4 + 4869n^3 - 8006n^2 - 15006n + 30468); \quad {\scriptstyle (n>4)}$$

$$[\Delta DE] = 36(15n^6 - 135n^5 + 87n^4 + 2035n^3 - 4086n^2 - 6596n + 16160); \quad {\scriptstyle (n>4)}$$

$$[\Delta D_g D] = 3(45n^5 - 315n^4 + 155n^3 + 2514n^2 - 3560n - 1302); \quad {\scriptstyle (n>4)}$$

$$[S_g \Delta] = 3(125n^3 - 740n^2 + 650n + 1284); \quad {\scriptstyle (n>4)}$$

$$[\Delta_g S] = 6(50n^3 - 292n^2 + 147n + 786). \quad {\scriptstyle (n>4)}$$

$$[\Delta_0^{(2)}] = 4; \quad [\Delta_g^{(2)}] = 28n - 66; \quad [\Delta^{(2)}] = 12(n-2)(7n-19); \quad {\scriptstyle (n>3)}$$

$$[\Delta_g^{(2)} D] = 6(14n^3 - 61n^2 - 48n + 293); \quad {\scriptstyle (n>4)}$$

$$[\Delta_g^{(2)} E] = 12(28n^3 - 150n^2 - 7n + 594); \quad {\scriptstyle (n>4)}$$

$$[\Delta^{(2)} D] = 12(21n^4 - 141n^3 + 109n^2 + 814n - 1308); \quad {\scriptstyle (n>4)}$$

$$[\Delta^{(2)} E] = 144(7n^4 - 54n^3 + 64n^2 + 304n - 583). \quad {\scriptstyle (n>4)}$$

$$[\Delta_0^{(3)}] = 3; \quad [\Delta_g^{(3)}] = 3(8n - 21); \quad [\Delta^{(3)}] = 21(n-3)(4n-9); \quad {\scriptstyle (n>3)}$$

$$[\Delta^{(3)} D] = 9(n-4)(28n^3 - 91n^2 - 177n + 567); \quad {\scriptstyle (n>4)}$$

$$[\Delta^{(3)} E] = 36(28n^4 - 231n^3 + 326n^2 + 1281n - 2756). \quad {\scriptstyle (n>4)}$$

---

§ 3.

Curven mit zwei Puncten gegebener Vielfachheit.

1. Es sollen jetzt Systeme untersucht werden, deren allgemeine Curve nur zwei singuläre Puncte, aber von beliebiger Vielfachheit, besitzt. Ein τ-facher Punct wird mit

$$P^\tau$$

bezeichnet, während die Indices g, o die frühere Bedeutung haben. In

$$\overline{PP_1}$$

soll der Strich die Bedingung andeuten, dass die Verbindungsgerade von P, P_1 durch einen gegebenen Punct gehe. Die hinzuzudenkenden elementaren Bedingungen beziehen sich wieder auf gegebene Puncte.

Da in einem System von Curven, welche einen τ_1-fachen Punct X_1 und einen τ-fachen Punct X besitzen sollen, keine vorkommen, bei welchen letzterer in einen $(\tau + 1)$-fachen Punct überginge, so kann man auch *nicht unmittelbar* eine Beziehung zwischen den Zahlen

$$[P^{\tau_1} P^\tau], \qquad [P^{\tau_1} P^{\tau+1}]$$

erhalten. Die Herstellung einer solchen gelingt aber durch Einführung von *Zwischensystemen,* in welchen auch die Tangenten des Punctes X gewissen Bedingungen unterworfen sind; und zwar soll die hinzutretende Forderung, in Zeichen

$$(\sigma t)_p,$$

die sein, dass σ Tangenten des τ-fachen Punctes zusammenfallen und ausserdem durch einen gegebenen Punct M gehen. Das so definirte System, für welches

$$\mu = f(\sigma)$$

gesetzt werden möge, enthält $f(\sigma + 1)$ besondere Curven, deren Anzahl durch $f(\sigma)$ und die übrigen Zahlen des Systems ausdrückbar ist. Es soll im Folgenden immer

$$\tau_1 \geqq \tau, \quad \text{und vorläufig} \quad \sigma < \tau$$

vorausgesetzt, und mit (X_1), (X) bezeichnet werden, wie viele Systemscurven ihren τ_1-fachen, bzw. τ-fachen Punct in einer gegebenen Geraden haben. V bedeutet die Vielfachheit des X-Ortes in M, oder, was dasselbe ist, die Zahl derjenigen Systemscurven, welche ihren τ-fachen Punct in M haben.

Die Geraden, welche einen von M verschiedenen festen Punct Q mit den Puncten X verbinden, schneiden die betreffende Curve noch in je $n - \tau$ Puncten Y, deren Ort die Ordnung

$$\mu + (n - \tau)(X)$$

hat. Dieses ist zugleich die volle Zahl der Coincidenzen von Y mit X. Die letzteren entstehen, wenn QX eine von den σ bevorzugten verschiedene Tangente von X ist; ferner dadurch, dass X in der Geraden MQ, aber nicht in M selbst liegt, und zwar zählt jede dieser Coincidenzen σ-fach; endlich dadurch, dass die beiden singulären Puncte zusammenfallen, was im Ganzen C mal vorkommen möge.

Die Zahl C setzt sich aus zwei anderen zusammen, zwischen welchen eine Unterscheidung erforderlich ist. Es kann ein Zusammenfallen von X mit X_1 in der Weise eintreten, als wäre die σ-fache Systemsbedingung $(\sigma t)_p$ durch die $(\sigma - 1)$-fache

$$(\sigma t)$$

ersetzt, welche nur verlangt, dass σ Tangenten von X zusammenfallen, dafür aber die andere hinzugefügt, dass die Gerade X_1X durch den Punct M gehen soll. Solche Coincidenzen, deren Zahl C' sei, will ich *regelmässige* nennen; jede derselben giebt Anlass zu einer $(\tau_1 - \tau)$-fach zählenden Coincidenz von Y mit X. Für die nicht regelmässigen Coincidenzen von X_1 mit X aber gilt, wie nachgewiesen werden soll, der Coefficient

$$\tau_1 - \tau + \sigma.$$

Dieses vorläufig als richtig vorausgesetzt, erhält man für den Grad des von den $\tau - \sigma$ weiteren Tangenten des τ-fachen Punctes beschriebenen Linienortes

$$(1) \qquad \mu + (n - \tau - \sigma)(X) + \sigma . V - (\tau_1 - \tau + \sigma) C + \sigma . C';$$

so oft geht daher auch eine jener Tangenten durch den Punct M selbst. Da nun diese letztere specielle Bedingung $\tau - \sigma$ mal dadurch erfüllt wird, dass X in M liegt, und ebenso oft dadurch, dass eine regelmässige Coincidenz von X mit X_1 eintritt, so ergiebt sich die Gleichung

$$(2) \qquad f(\sigma + 1) - f(\sigma)$$
$$= (n - \tau - \sigma)(X) - (\tau_1 - \tau + \sigma)C + (2\sigma - \tau)(V + C'),$$

oder, wenn man noch

$$C = (X) + (X_1) - (\overline{XX_1})$$

mit Hülfe des Correspondenzprincips ausdrückt, und nach σ summirt:

$$(3) \qquad f(\sigma) - f(0)$$
$$= \sum_0^{\sigma-1} \{(n - \tau_1 - 2\sigma)(X) - (\tau_1 - \tau + \sigma)[(X_1) - (\overline{XX_1})] + (2\sigma - \tau)(V + C')\}.$$

2. Für ein System, welches sich von dem bisher betrachteten nur dadurch unterscheidet, dass die Bedingung (σt) an die Stelle von $(\sigma t)_p$ tritt, sei

$$\mu = \varphi(\sigma),$$

während (X), (X_1), C in Beziehung auf das neue System ihre frühere Bedeutung behalten. Da es $f(\sigma)$ Curven im System giebt, welche die singuläre Tangente des τ-fachen Punctes durch einen gegebenen Punct schicken, so findet man für den Grad des von den $\tau - \sigma$ weiteren Tangenten gebildeten Linienortes:

$$\mu + (n - \tau)(X) - (\tau_1 - \tau)C - \sigma f(\sigma).$$

Bestimmt man daher mit Hülfe des Correspondenzprincips, wie oft eine dieser Tangenten mit der singulären coincidirt, ohne dass X mit X_1 zusammenfällt, so ergiebt sich die Formel

$$\varphi(\sigma + 1) - \varphi(\sigma) = (\tau - 2\sigma)f(\sigma) + (n - 2\tau + \sigma)(X) - (\tau_1 - \sigma)C,$$

oder

$$(4) \qquad \varphi(\sigma)$$

$$= \sum_1^{\sigma-1} \{(\tau - 2\sigma)f(\sigma) + (n - \tau_1 - 2\tau + 2\sigma)(X) - (\tau_1 - \sigma)[(X_1) - (\overline{XX}_1)]\},$$

von welcher zur Bestimmung von V und C' Gebrauch gemacht werden soll

3. Bei der Herleitung von (2) wurde zwar $\sigma < \tau$ vorausgesetzt; es ist aber leicht zu erkennen, dass jene Formel auch für $\sigma = \tau$ in gewissem Sinne noch richtig bleibt. Der Ausdruck (1) verliert dann seine frühere Bedeutung, er giebt vielmehr an, wie viele Curven des Systems den τ-fachen Punct in einen $(\tau + 1)$-fachen übergehen lassen; diese Curven sind von der Lage des Punctes M ganz unabhängig, und alle Tangentenbedingungen fallen für dieselben weg. Die Gleichung (2) gilt also noch für $\sigma = \tau$, und (3) für $\sigma = \tau + 1$, sobald man nur unter $f(\tau + 1)$ diejenige Zahl versteht, in welche $f(0)$ übergeht, wenn τ durch $\tau + 1$ ersetzt wird. — Die rechte Seite von (4) dagegen verschwindet sowohl für $\sigma = \tau + 1$ als für $\sigma = 0$.

Durch successive Anwendung der Formel (3) gelingt es,

$$[P^{\tau_1}P^{\tau}]$$

zu bestimmen. Vorher aber müssen andere Zahlen berechnet werden, welche sich auf die Bedingungen beziehen, dass mindestens einer der singulären Puncte nicht frei ist, sondern entweder gegeben ist, oder in einer gegebenen Geraden liegt. Dabei wird sich zugleich die Richtigkeit des zur Herleitung der Gleichung (2) benutzten Coefficienten $\tau_1 - \tau + \sigma$ ergeben. Als bekannt werden vorausgesetzt die auf *einen* singulären Punct bezüglichen Zahlen

$$[P^{\tau_1}] = \frac{1}{8}\tau_1(\tau_1^2 - 1)(\tau_1 + 2)(n - \tau_1 + 1)^2,$$

$$[P_g^{\tau_1}] = \frac{1}{2}\tau_1(\tau_1 + 1)(n - \tau_1 + 1),$$

und zur Vereinfachung der im Folgenden zu entwickelnden Ausdrücke sollen die links stehenden Zeichen als Abkürzungen beibehalten werden.

4. Sei zunächst

$$f(\sigma) = [P^{\tau}_{0g}(\sigma t)_p P^{\tau_1}_g],$$

wo der Doppelindex $0g$ ausdrücken soll, dass der gegebene Punct in der Geraden g liegt. Man hat dann

$$(X) = 0, \qquad (X_1) = C = 1, \qquad C' = V = 0.$$

Die Zahl $f(\sigma)$, die für den Augenblick mit

$$F(n, \tau_1, \tau, \sigma)$$

bezeichnet werden möge, lässt sich, ohne Anwendung des Correspondenzprincips, direct durch die Annahme herleiten, dass $n - \tau_1 - \tau + 1$ der gegebenen Puncte in g liegen. So findet man

$$F(n, \tau_1, \tau, \sigma) = \tau_1(n - \tau_1 - \tau + 1) + F(n - 1, \tau_1 - 1, \tau - 1, \sigma),$$
$$\text{wenn } \sigma < \tau,$$

$$F(n, \tau_1, \tau, \tau) = \tau_1(n - \tau_1 - \tau + 1) + F(n - 1, \tau_1 - 1, \tau, 0),$$

und hieraus

$$(5) \qquad [P^{\tau}_{0g}(\sigma t)_p P^{\tau_1}_g]$$
$$= [P^{\tau_1}_g] - \frac{1}{6}\tau(\tau + 1)(3\tau_1 - \tau + 1) - \sigma\left(\tau_1 - \tau + \frac{1}{2}\sigma - \frac{1}{2}\right).$$

Weiter folgt jetzt

$$f(\sigma + 1) - f(\sigma) = -(\tau_1 - \tau + \sigma),$$

d. h. dasselbe, was die Gleichung (2) ergeben haben würde. Hiermit ist der fragliche Coefficient verificirt; man hätte umgekehrt aus (3), wenn $\sigma = \tau + 1$ gesetzt wird, zunächst die Differenz

$$F(n, \tau_1, \tau + 1, 0) - F(n, \tau_1, \tau, 0),$$

sodann

$$F(n, \tau_1, \tau, 0) = [P^{\tau}_{0g} P^{\tau_1}_g] = [P^{\tau_1}_g] - \frac{1}{6}\tau(\tau + 1)(3\tau_1 - \tau + 1),$$

endlich den Ausdruck (5) herleiten können.

Auch die Gleichung

$$(5_a)\qquad [P_{0g}^{\tau_1} P_g^{\tau}(\sigma t)_p] = \frac{1}{6}\tau(\tau+1)(3n-3\tau_1-2\tau+2)+\sigma(n-\tau_1-\sigma+1)$$

lässt, wie (5), und die später zu entwickelnde (7), eine doppelte Herleitung zu. — Aus (5), (5_a) folgt mit Hülfe von (4)

$$(6)\qquad [P_{0g}^{\tau}(\sigma t)P_g^{\tau_1}] = \sigma(\tau+1-\sigma)\{[P_{0g}^{\tau}P_g^{\tau_1}]-(\tau_1-\frac{1}{2}\tau)(\sigma-1)\}$$

$$(6_a)\qquad [P_{0g}^{\tau_1}P_g^{\tau}(\sigma t)] = \sigma(\tau+1-\sigma)\{[P_{0g}^{\tau_1}P_g^{\tau}]+(n-\tau-\tau_1)(\sigma-1)\}.$$

Liegen beide singulären Puncte in einer und derselben gegebenen Geraden, und ist keiner derselben fest, so hat man zu setzen:

$$f(\sigma) = [P_g^{\tau_1}P_g^{\tau}(\sigma t)_p];$$

für (X), (X_1) sind die Ausdrücke (5), (5_a) zu benutzen, während $(\overline{XX_1}) = C' = V' = 0$ ist. Dies giebt

$$(7)\qquad [P_g^{\tau}P_g^{\tau_1}] = \frac{1}{6}\tau(\tau+1)(3n-3\tau_1-2\tau+2)[P_g^{\tau_1}]$$

$$-\frac{1}{36}\tau(\tau^2-1)(\tau+2)[9\tau_1(n-\tau_1)-3(\tau-1)(n+\tau_1)+2\tau^2-4\tau+3].$$

Liegen aber die singulären Puncte in verschiedenen Geraden, d. h. ist

$$f(\sigma) = [P_{g_1}^{\tau_1}P_g^{\tau}(\sigma t)_p],$$

dann hat man in (2) zu setzen

$$(X) = [P_g^{\tau_1}],\qquad C = (X) - [P_{0g}^{\tau}(\sigma t)_p P_g^{\tau_1}],\qquad V = 0,\qquad C' = \sigma(\tau-\sigma+1),$$

und findet

$$(8)\qquad [P_g^{\tau}P_{g_1}^{\tau_1}]$$

$$= [P_g^{\tau}][P_g^{\tau_1}] - \frac{1}{72}\tau(\tau^2-1)(\tau+2)[9\tau_1^2-6(\tau-1)\tau_1+(\tau-3)(\tau+1)].$$

5. Wegen ihrer complicirten Gestalt sollen die aus (3) hervorgehenden Ausdrücke $f(\sigma)$ mit den vier Argumenten n, τ, τ_1, σ, obgleich sie

zur Herleitung der nachstehenden Resultate gebraucht werden, nicht vollständig angegeben werden, sondern nur ihre von σ unabhängigen Anfangsglieder $f(0)$. Die Berechnung der letzteren geschieht immer in der Weise, dass zuerst in (3) die Summirung von $\sigma = 0$ bis $\sigma = \tau$ ausgeführt, und sodann nach τ summirt wird.

Für

$$f(\sigma) = [P_0^{\tau_1} P^{\tau}(\sigma t)_p]$$

hat man auf der rechten Seite von (3) zu setzen:

$$(X_1) = 0, \qquad (X) = [P_g^{\tau}(\sigma t)_p] = [P_g^{\tau}] + \sigma\left(n - \tau - \frac{1}{2}\sigma + \frac{1}{2}\right),$$

$$C' = V = \sigma(\tau - \sigma + 1), \qquad (\overline{XX}_1) = [P_{0g}^{\tau_1} P_g^{\tau}(\sigma t)_p].$$

So folgt die erste der beiden Gleichungen

(9) $$[P_0^{\tau_1} P^{\tau}]$$
$$= [P^{\tau}] - \frac{1}{72}\tau(\tau^2 - 1)(\tau + 2)[9\tau_1^2 - 6(\tau - 1)\tau_1 + (\tau - 3)(\tau + 1)],$$

(9a) $$[P_0^{\tau} P^{\tau_1}]$$
$$= [P^{\tau_1}] - \frac{1}{72}\tau(\tau^2 - 1)(\tau + 2)[9\tau_1^2 - 6(\tau - 1)\tau_1 + (\tau - 3)(\tau + 1)],$$

deren zweite in derselben Weise aus

$$f(\sigma) = [P_0^{\tau}(\sigma t)_p P^{\tau_1}], \qquad (X) = 0, \qquad (X_1) = [P_g^{\tau_1}], \qquad V = 0,$$
$$C' = \sigma(\tau - \sigma + 1), \qquad (\overline{XX}_1) = [P_{0g}^{\tau}(\sigma t)_p P_g^{\tau_1}]$$

hervorgeht. Nach vollständiger Entwicklung von $f(\sigma)$ findet man

$$\varphi(\sigma) = [P_0^{\tau}(\sigma t) P^{\tau_1}]$$

aus der Formel (4), auf deren rechter Seite $(X_1) = \sigma(\tau - \sigma + 1)[P_g^{\tau_1}]$, und für $(\overline{XX}_1)$ der Ausdruck (6) zu setzen ist.

Die bisher gewonnenen Resultate ermöglichen die Berechnung von

$$f(\sigma) = [\overline{P^{\tau_1} P^{\tau}(\sigma t)_p}],$$

da die folgenden, auf der rechten Seite von (3) zu benutzenden Zahlen bereits sämmtlich bekannt sind:

$$(X) = [P_g^{\tau_1} P_g^{\tau}(\sigma t)_p] + [P_0^{\tau}(\sigma t)_p P^{\tau_1}],$$

$$(X_1) = [P_g^{\tau_1} P_g^{\tau}(\sigma t)_p] + [P^{\tau}(\sigma t)_p P_0^{\tau_1}],$$

$$C' = [P_{0g}^{\tau_1} P_g^{\tau}(\sigma t)] + [P_{0g}^{\tau}(\sigma t) P_g^{\tau_1}],$$

$$(\overline{XX_1}) = [P_g^{\tau_1} P_g^{\tau}(\sigma t)_p], \qquad V = [P_{0g}^{\tau}(\sigma t) P_g^{\tau_1}].$$

Insbesondere ergiebt sich

$$\begin{aligned}
(10) \qquad [\overline{P^{\tau} P^{\tau_1}}] &= \frac{1}{6}\tau(\tau+1)[3(n-\tau_1) - 2(\tau-1)][P^{\tau_1}] \\
&+ \frac{1}{72}\tau(\tau^2-1)(\tau+2)[9(n^2+\tau_1^2) - 18n\tau_1 - 12(\tau-1)(n-\tau_1) \\
&\qquad + 2(2\tau^2 - 4\tau + 3)][P_g^{\tau_1}] \\
&+ \frac{1}{144}\tau(\tau^2-1)(\tau+2)(\tau^2+\tau-4)[-9n\tau_1(n-\tau_1) \\
&+ 3(\tau-1)(n^2+4n\tau_1-3\tau_1^2) - (5\tau^2-10\tau+3)n - 3(\tau^2-2\tau+3)\tau_1] \\
&+ \frac{1}{360}\tau(\tau^2-1)(\tau^2-4)(5\tau^4 - 20\tau^2 + 30\tau - 9).
\end{aligned}$$

Der Annahme entsprechend, dass einer der beiden singulären Puncte in einer Geraden liegt, der andere frei ist, hat man

$$f(\sigma) \doteq [P_g^{\tau}(\sigma t)_p P^{\tau_1}], \quad \text{resp.} \quad = [P_g^{\tau_1} P^{\tau}(\sigma t)_p].$$

Im ersten Falle ist

$$(X) = [P_0^{\tau}(\sigma t)_p P^{\tau_1}], \qquad V = 0,$$

$$C = [P_g^{\tau}(\sigma t)_p P_{g_1}^{\tau_1}] - [P_g^{\tau}(\sigma t)_p P_g^{\tau_1}], \qquad C' = [P_{0g}^{\tau}(\sigma t) P_g^{\tau_1}] + [P_g^{\tau}(\sigma t)],$$

wo

$$[P_g^{\tau}(\sigma t)] = \frac{1}{2}\sigma(\sigma + 1 - \tau)[(2n - 3\tau)\sigma + (\tau-1)(\tau+2)n - \tau^3 + 4\tau];$$

im zweiten Falle behält C denselben Werth, dagegen ist

$$(X) = [P_{g_1}^{\tau_1} P_g^{\tau}(\sigma t)_p], \qquad V = \sigma(\tau - \sigma + 1)[P_g^{\tau_1}], \qquad C' = [P_{0g}^{\tau_1} P_g^{\tau}(\sigma t)] + V.$$

Hiernach wird

$$(11) \qquad [P_g^{\tau} P^{\tau_1}] = \frac{\tau(\tau+1)}{2}(n - \tau + 1)[P^{\tau_1}]$$

$$- \frac{1}{72}\tau(\tau^2 - 1)(\tau + 2)[9\tau_1^2 - 6(\tau - 1)\tau_1 + (\tau - 3)(\tau + 1)][P_g^{\tau_1}]$$

$$- \frac{1}{144}\tau(\tau^2 - 1)(\tau + 2)(\tau^2 + \tau - 4)[9\tau_1^2(n - \tau_1) - 6(\tau - 1)n\tau_1$$

$$+ (\tau - 3)(\tau + 1)n + 3(\tau^2 - 2\tau + 3)\tau_1]$$

$$+ \frac{1}{1080}\tau(\tau^2 - 1)(\tau^2 - 4)(5\tau^4 - 35\tau^2 + 18).$$

$$(11\text{a}) \qquad \frac{1}{\tau(\tau^2 - 1)(\tau + 2)}[P_g^{\tau_1} P^{\tau}]$$

$$= \frac{1}{72}[9(n - \tau + 1)^2 - 9\tau_1^2 + 6(\tau - 1)\tau_1 - (\tau - 3)(\tau + 1)][P_g^{\tau_1}]$$

$$- \frac{1}{144}(\tau^2 + \tau - 4)[9\tau_1^2(n - \tau_1) - 6(\tau - 1)n\tau_1 + (\tau - 3)(\tau + 1)n$$

$$+ 3(\tau^2 - 2\tau + 3)\tau_1]$$

$$+ \frac{1}{1080}(\tau - 2)(5\tau^4 - 35\tau^2 + 18).$$

Sind endlich beide singulären Puncte frei, ist also

$$f(\sigma) = [P^{\tau_1} P^{\tau}(\sigma t)_p],$$

dann hat man folgende Zahlen in (3) zu benutzen:

$$(X) = [P^{\tau_1} P_g^{\tau}(\sigma t)_p], \qquad (X_1) = [P_g^{\tau_1} P^{\tau}(\sigma t)_p], \qquad (\overline{XX_1}) = [\overline{P^{\tau_1} P^{\tau}(\sigma t)_p}],$$

$$V = [P_0^{\tau}(\sigma t) P^{\tau_1}], \qquad C' = [P_g^{\tau_1} P_g^{\tau}(\sigma t)_p] + [P_0^{\tau_1} P^{\tau}(\sigma t)_p] + [P_0^{\tau}(\sigma t)_p P^{\tau_1}],$$

und findet

$$(12)\qquad \frac{1}{\tau(\tau^2-1)(\tau+2)}[P^\tau P^{\tau_1}]$$

$$= \frac{1}{72}[(n-\tau+1)^2 - 9\tau_1^2 + 6(\tau-1)\tau_1 - (\tau-3)(\tau+1)][P^{\tau_1}]$$

$$- \frac{1}{144}(\tau^2+\tau-4)[9\tau_1^2(n-\tau_1) - 6(\tau-1)n\tau_1 + (\tau-3)(\tau+1)n$$
$$+ 3(\tau^2-2\tau+3)\tau_1][P_g^{\tau_1}]$$

$$+ \frac{1}{1080}(\tau-2)(5\tau^4-35\tau^2+18)[P_g^{\tau_1}]$$

$$- \frac{1}{576}(\tau-2)(\tau+3)(\tau^2+\tau-4)[9\tau_1^2(n-\tau_1)^2 - 6(\tau-1)\tau_1^2(n-\tau_1)$$
$$+ (\tau-3)(\tau+1)n^2 + 3(\tau^2-2\tau+3)\tau_1(2n-\tau_1)]$$

$$+ \frac{1}{2160}(\tau-2)^2(\tau+3)[(5\tau^4-35\tau^2+18)n + (5\tau^4+10\tau^2+90\tau-63)\tau_1]$$

$$- \frac{1}{12960}(\tau-2)(\tau+3)(10\tau^6-30\tau^5-35\tau^4+195\tau^3-218\tau^2+24\tau+108).$$

Eine Controlle dieser Formel erhält man für $n = \tau_1 + \tau - 1$; in diesem Falle bestehen die fraglichen Curven aus einer C_{n-1} mit einem $(\tau_1 - 1)$-fachen und einem $(\tau - 1)$-fachen Puncte, und aus einer die beiden singulären Puncte verbindenden Geraden, welche 0, 1 oder 2 der gegebenen Puncte enthalten kann. Hiernach ist

$$[P^\tau P^{\tau_1}]_{n=\tau+\tau_1-1} - [P^{\tau-1}P^{\tau_1-1}]_{n=\tau+\tau_1-2}$$

$$= (\tau\tau_1+3)[\overline{P^{\tau-1}P^{\tau_1-1}}]_{n=\tau+\tau_1-2} + \frac{(\tau\tau_1+3)(\tau\tau_1+2)}{2}[P_g^{\tau-1}P_g^{\tau_1-1}]_{n=\tau+\tau_1-2},$$

wie man mit Hülfe von (10) und (7) bestätigt.

Für das System

$$(P^{\tau}P^{\tau_1})$$

sind jetzt, dem Entwickelten zufolge, die Zahlen μ, B, B_1, ξ bekannt, deren Bezeichnung der in § 1 für dreifache Puncte gewählten analog ist. Weiter findet man z. B.

$$2(n-1)\mu = \mu' + \tau(\tau-1)B + \tau_1(\tau_1-1)B_1;$$

$$T = (n-\tau)B + \mu - (\tau_1-\tau)(B + B_1 - \xi);$$

$$T_1 = (n-\tau_1)B_1 + \mu;$$

$$(2t) = (\tau-1)(2T-\tau B) - \tau(\tau-1)(B + B_1 - \xi);$$

$$(2t)_1 = (\tau_1-1)(2T_1-\tau_1 B_1) - \tau(\tau-1)(B + B_1 - \xi);$$

$$\alpha = (n-2)\mu' + (n+n'-1)\mu - (\tau-1)T - (\tau_1-1)T_1 - \tau(2t) - \tau_1(2t)_1.$$

Man könnte ferner einen Doppelpunct mit in das System aufnehmen, und von diesem allmälig zu einem dritten Puncte höherer Vielfachheit übergehen; was hier nicht weiter verfolgt werden soll.

B. Plancurven in nicht fester Ebene.

§ 4.

Zahlen für punctallgemeine Curven.

1. In Bezug auf punctallgemeine Plancurven im Raum bieten sich die folgenden fundamentalen Aufgaben: Bestimmung der Zahl solcher Curven, welche 1) ihre Ebene durch eine feste Axe schicken und $\frac{n(n+3)}{2}+1$ gegebene gerade Linien treffen; 2) ihre Ebene durch einen gegebenen Punct schicken, und $\frac{n(n+3)}{2}+2$ gerade Linien treffen;

3) $\frac{n(n+3)}{2} + 3$ gerade Linien treffen. Diese Zahlen sollen mit $F(n)$, $\Phi(n)$, $\Psi(n)$ bezeichnet, und es soll bewiesen werden, dass

$$(1) \qquad F(n) = \frac{1}{3} n(n+1)(n+2),$$

$$(2) \qquad \Phi(n) = \frac{1}{36} n(n+1)(n+2)(2n^3 + 6n^2 + 7n - 3),$$

$$(3) \qquad \Psi(n) = \frac{1}{324} n(n^2 - 1)(n+2)(2n^5 + 14n^4 + 49n^3 + 91n^2 + 90n + 18)$$

ist.

Der ersten Aufgabe genügen auch dann nur endlich viele Curven, wenn $n+1$ der Geraden die Axe A schneiden. Jede solche specielle Gerade bestimmt mit A eine Ebene, in welcher eine auch die übrigen Geraden treffende Curve liegt; die eine Gerade aber wird n mal getroffen, so dass auf diese Weise $n(n+1)$ Lösungen erhalten werden. Die ausserdem existirenden, den Bedingungen genügenden Curven zerfallen nothwendig in A und je eine C_{n-1}, welche die

$$\frac{n(n+3)}{2} + 1 - (n+1) = \frac{(n-1)(n+2)}{2} + 1$$

die Axe nicht schneidenden Geraden trifft. Es ist also

$$F(n) = n(n+1) + F(n-1),$$

und hieraus folgt der Ausdruck (1).

Eine leichte Verallgemeinerung erhält man durch Hinzufügung der Bedingung, dass die Curve durch k auf der Axe gegebene Puncte gehen soll, und dem entsprechend k gerade Linien weniger gegeben sind. In diesem Falle genügt es, $n + 1 - k$ dieser letzteren die Axe schneiden zu lassen, und man findet

$$(1_a) \qquad F(n, k) = n(n + 1 - k) + F(n-1) = F(n) - kn.$$

Dieser Ausdruck gilt auch noch, wenn die k Puncte zum Theil oder alle einander unendlich nahe liegen.

2. Zu einer Differenzengleichung für $\Phi(n)$ gelangt man zwar auf einfachem Wege durch die Annahme, dass $n + 1$ der gegebenen Geraden in einer Ebene liegen. Es soll aber eine andere Herleitung gezeigt werden, weil die sich ergebenden Nebenresultate für die Lösung der dritten Aufgabe zu benutzen sind.

Der Kürze wegen möge eine in k consecutiven Puncten schneidende Tangente eine T_k, ihr Berührungspunct ein T_k-Punct genannt werden. Man beweist:

Erstens. In fester Ebene giebt es $\frac{k(k-1)}{2}$ Curven n^{ter} Ordnung, welche an gegebener Stelle einen T_k-Punct haben, und durch $\frac{n(n+3)}{2} - k + 1$ andere feste Puncte gehen. — Denn soll z. B. der T_k-Punct in $x = 0$, $y = 0$ liegen, so hat man als allgemeinste Gleichungsform

$$(x + \lambda y)A + B = 0,$$

wo das Polynom A den $(k-2)^{\text{ten}}$ Grad in x, y erreicht, während in B nur Glieder von höherer als der $(k-1)^{\text{ten}}$ Ordnung vorkommen. Durch Einsetzen der Coordinaten der gegebenen Puncte erhält man so viele Gleichungen, wie in A und B homogene Coefficienten enthalten sind, und die Elimination der letzteren giebt eine Gleichung für λ, deren Grad gleich der Zahl der Coefficienten in A ist.

Zweitens. Für die Schaar von Curven, welche durch $\frac{n(n+3)}{2} - k + 1$ gegebene Puncte gehen, und in einer gegebenen Geraden G einen T_k-Punct haben, ist der Grad des Linienortes der zugehörigen T_k

$$(T_k) = 2n - 1 + \frac{1}{2}(k-2)(2n-k-1).$$

Verbindet man nämlich einen Punct der Ebene mit den Puncten ξ von G durch eine Gerade, und construirt die C_n, welche durch die gegebenen Puncte geht, und ξ zum T_{k-1}-Punct, jene Verbindungsgerade zur T_{k-1} hat, dann trifft letztere die jedesmalige Curve noch an $n - k + 1$ Stellen, welche einen Ort der Ordnung

$$n - k + 1 + (T_{k-1})$$

bilden. Diese Zahl muss mit (T_k) übereinstimmen.

Drittens. Die Zahl der C_n in fester Ebene, welche durch $\frac{n(n+3)}{2} - k + 2$ gegebene Puncte gehen, und in einer Geraden G einen T_k-Punct haben, ist

$$(4) \qquad \varphi(n, k) = \frac{1}{8} k(k-1)[4(k-1)n - (k-2)(3k-1)].$$

Für jeden Punct X von G construire man die $\frac{1}{2}(k-1)(k-2)$ Curven, welche X zum T_{k-1}-Punct haben, und durch die gegebenen Puncte gehen. Die zugehörige T'_{k-1} bestimmt $n-k+1$ Puncte Y auf jeder Curve, und wenn einer derselben mit X zusammenfällt, hat man einen T_k-Punct. Um die Ordnung des Y-Ortes zu bestimmen, betrachte man auf einer zweiten Geraden G', die G in M treffen möge, eine Correspondenz zwischen Puncten Z der veränderlichen Curve, und Puncten Z' der zugehörigen T_{k-1}. Jeder von M verschiedene Coincidenzpunct liefert einen in G' liegenden Punct Y, daher ist die Ordnung des Y-Ortes:

$$(Y) = \varphi(n, k-1) + n(T_{k-1}) - \frac{(k-1)(k-2)}{2}(k-1),$$

wo das dritte Glied angiebt, wie viele in M liegende unbrauchbare Coincidenzen in Abzug zu bringen sind. Weiter ist die Zahl der T_k-Puncte auf G

$$\varphi(n, k) = \frac{(k-1)(k-2)}{2}(n-k+1) + (Y) - (n-k+1)(T_{k-1}),$$

und man findet hieraus zur Bestimmung von $\varphi(n, k)$ die Gleichung

$$\varphi(n, k) - \varphi(n, k-1) = \frac{1}{2}(k-1)[(3k-4)n - 3(k-1)(k-2)],$$

aus welcher (4) hervorgeht.

3. Schon der erste dieser Hülfssätze genügt zur Bestimmung von $\Phi(n)$. Anstatt direct auf die letztere auszugehen, kann man folgende Fassung der Aufgabe zu Grunde legen: Die Zahl $\Phi_1(n)$ der Curven zu bestimmen, welche *durch einen gegebenen Punct Q* gehen, und $\frac{n(n+3)}{2} + 1$

gegebene gerade Linien treffen. $\Phi_1(n)$ hängt mit $\Phi(n)$ zusammen durch die Gleichung

$$(5) \qquad \Phi(n) = \Phi_1(n) + nF(n),$$

wie man sogleich erkennt, wenn eine der Geraden der ursprünglichen Aufgabe durch den gegebenen Punct gelegt wird.

Allgemeiner bedeute nun

$$\Phi_1(n, k)$$

die Zahl der Plancurven, welche in dem festen Puncte Q eine Berührung $(k - 1)^{\text{ter}}$ Ordnung mit einer gegebenen, durch Q gelegten Ebene E haben, und

$$\frac{n(n+3)}{2} - k + 2$$

gerade Linien treffen; oder, was auf dasselbe hinauskommt, die Ordnung der Fläche, welche, bei Weglassung einer Geraden-Bedingung, von den ∞^1 die übrigen Bedingungen erfüllenden Curven erzeugt wird.

Der Schnitt der Ebene E mit der Fläche besteht aus den $\frac{k(k-1)}{2}$ Systemscurven, welche ganz in E liegen, und einer Restcurve, die $\Phi_1(n, k+1)$ Zweige durch Q schickt. Da es nun $F(n, k)$ Curven im System giebt, welche die singuläre Tangente, die sie in Q besitzen sollen, mit einer gegebenen, durch Q gehenden und in E liegenden Geraden A zusammenfallen lassen, und jede dieser Curven die Gerade A in $n - k$ von Q verschiedenen Puncten trifft, so ist die Ordnung der Restcurve

$$\Phi_1(n, k+1) + (n-k)F(n, k);$$

mit Rücksicht auf (1a) findet man also

$$(6) \qquad \Phi_1(n, k) = \frac{k(k-1)}{2}n + (n-k)[F(n) - kn] + \Phi_1(n, k+1).$$

Auch für $k = n$ darf man diese Gleichung in Anspruch nehmen, hat aber dann zu untersuchen, was aus dem letzten Gliede der rechten Seite wird. Da eine C_n mit einer T_{n+1} diese letztere ganz enthält, handelt es sich jetzt nur um zerfallende Curven. Die Restcurve $(n-1)^{\text{ter}}$ Ordnung trifft entweder die

$$\frac{n(n+3)}{2}-n+1=\frac{(n-1)(n+2)}{2}+2$$

gegebenen Geraden, und schickt ihre Ebene durch Q; oder sie trifft nur $\frac{(n-1)(n+2)}{2}+1$ jener Geraden, und schickt ihre Ebene durch eine in E liegende, durch Q gehende Axe, welche durch die Bedingung, die noch nicht benutzte Gerade zu treffen, jedesmal vollkommen bestimmt ist.

Als Ergänzung der Gleichungen (6) hat man daher die folgende:

$$\Phi_1(n,\ n)=\frac{n(n-1)}{2}n+\Phi(n-1)+\frac{n^2+n+2}{2}F(n-1),$$

mit deren Hülfe sich aus der Addition der Gleichungen (6) zunächst

$$\begin{aligned}\Phi_1(n) &= \Phi(n-1)+\frac{n^2+n+2}{2}F(n-1)\\ &+\sum_{k=1}^{k=n}\left\{\frac{k(k-1)}{2}n+(n-k)[F(n)-kn]\right\},\end{aligned}$$

und sodann, durch Ausrechnen der Summe, und mit Benutzung der Gleichungen (1) und (5)

$$\Phi(n)-\Phi(n-1)=\frac{1}{6}n(n+1)(2n^3+3n^2+3n-2)$$

ergiebt. Hiermit ist die Richtigkeit der Gleichung (2) bewiesen.

4. Bevor zum Beweise der Gleichung (3) geschritten wird, soll noch die Zahl

$$f(n,\ k)$$

derjenigen Plancurven bestimmt werden, welche ihre Ebene durch eine gegebene Axe A schicken, mit dieser Axe an nicht gegebener Stelle eine Berührung $(k-1)^{\text{ter}}$ Ordnung haben, und

$$\frac{n(n+3)}{2}-k+2$$

gerade Linien treffen. Bezieht sich in

$$f(n, k, h)$$

das dritte Argument h auf die Bedingung, dass die Curve durch h gegebene Puncte von A gehe, während der T_k-Punct anderswo liegen soll, dann besteht auf A folgende Correspondenz: Zu einem gegebenen T_{k-1}-Punct gehören

$$(n-k-h+1)F(n, k+h-1)$$

weitere bewegliche Schnittpuncte; zu einem der letzteren gehören

$$f(n, k-1, h+1)$$

Puncte T_{k-1}. Daher ist, für $k > 2$

$$f(n, k, h) = f(n, k-1, h+1) + (n-k-h+1)[F(n) - n(k+h-1)],$$

und insbesondere

$$f(n, 2, h) = 2(n-h-1)[F(n) - (h+1)n].$$

Hieraus findet man leicht

$$(7) \qquad f(n, k, 0) = f(n, k) = k(n+1-k)[F(n) + n - kn].$$

5. Man verstehe unter

$$\Psi(n, k)$$

die Ordnung der Fläche, welche erzeugt wird von den Plancurven, die eine T_k in einer gegebenen Ebene E, den zugehörigen T_k-Punct auf einer in E liegenden Geraden G haben, und

$$\frac{n(n+3)}{2} - k + 2$$

(ausser G) gegebene gerade Linien treffen. Für $k = 1$ kommt man auf $\Psi(n)$ zurück.

Zu einem anderen Ausdruck für $\Psi(n, k)$ gelangt man am einfachsten durch Untersuchung *des Schnittes der Fläche mit der Ebene E selbst.*

Die Gerade G zählt in diesem Schnitt $k \,.\, \Phi_1(n, k)$-fach. Ganz in E liegen $\varphi(n, k)$ Curven des Systems, deren Zahl aus (4) bekannt ist.

Ausserdem ist noch eine Restcurve vorhanden, von welcher wir nur die Schnittpuncte mit G zu kennen brauchen; es sind dieses erstens die $\Psi(n, k+1)$ Stellen von G, in welchen eine Systemscurve eine Berührung höherer Ordnung mit E hat, zweitens die $(n-k)f(n, k)$ Puncte, in welchen die $f(n, k)$ Curven, deren singuläre Tangente G ist, diese Gerade noch treffen. Demnach hat man

$$(8) \quad \Psi(n, k) = k\Phi_1(n, k) + n\varphi(n, k) + \Psi(n, k+1) + (n-k)f(n, k).$$

Einen Ausdruck für $\Phi_1(n, k)$ findet man aus (6):

$$\Phi_1(n, k) = \Phi(n) - \frac{1}{6}k(2n^4 + 7n^3 + 10n^2 + 5n)$$
$$+ \frac{1}{6}k^2(n^3 + 6n^2 + 8n) - \frac{1}{2}k^3n;$$

hiernach giebt die vorige Gleichung, mit Benutzung von (4) und (7)

$$(9) \qquad \Psi(n, k) - \Psi(n, k+1)$$
$$= \frac{1}{36}k(2n^6 + 24n^5 + 77n^4 + 126n^3 + 83n^2 + 3n)$$
$$- \frac{1}{8}k^2(8n^4 + 36n^3 + 64n^2 + 29n) + \frac{1}{4}k^3(2n^3 + 18n^2 + 21n) - \frac{15}{8}k^4n.$$

Für $k = n$ kommt man auf den Ausdruck $\Psi(n, n+1)$ der sich nur auf zerfallende Curven beziehen kann. Die Zahl der ausser G gegebenen Geraden, welche von den $\Psi(n, n+1)$ Curven getroffen werden sollen, ist jetzt

$$m = \frac{n(n+3)}{2} - (n+1) + 3 = \frac{(n-1)(n+2)}{2} + 3,$$

und den Forderungen wird genügt erstens durch die C_{n-1}, welche diese m Linien treffen, während die ergänzenden Geraden in E liegen; zweitens durch die C_{n-1}, welche $m-1$ Linien treffen, und ihre Ebene durch den Punct schicken, welche die m^{te} Gerade auf E bestimmt; drittens durch die C_{n-1}, welche $m-2$ Linien treffen, und ihre Ebene durch die in E

liegende Gerade schicken, welche die beiden nicht benutzten Linien mit einander verbindet. So ergiebt sich

$$\Psi(n,\ n+1) = \Psi(n-1) + m\Phi(n-1) + \frac{m(m-1)}{2}F(n-1),$$

und durch Summirung der Gleichungen (9) von $k = 1$ bis $k = n$:

$$\Psi(n) - \Psi(n-1) = \frac{1}{36}n^2(n^2-1)(2n^4 + 8n^3 + 23n^2 + 31n + 26).$$

Durch nochmalige Summirung nach n findet man endlich die zu beweisende Gleichung (3).

---

§ 5.

Übergang zu Curven mit Singularitäten.

1. Bei Plancurven im Raum treten an die Stelle der ersten und zweiten Characteristik μ, μ' die Zahlen ν, ρ, welche angeben, wie viele Curven des Systems eine gegebene Gerade treffen, bzw. eine Ebene berühren. Ferner ist eine neue Zahl μ einzuführen, die eine ganz andere Bedeutung hat als das frühere μ; es ist die Zahl derjenigen Curven des Systems, welche ihre Ebene durch einen gegebenen Punct schicken.

Die ZEUTHEN'schen Gleichungen sind von Herrn SCHUBERT[1] verallgemeinert, und auf Systeme im Raum anwendbar gemacht. Aus ihrer neuen Form findet man unter anderen die folgenden, vorzugsweise zur Anwendung kommenden Relationen:

$$(1)\qquad \begin{aligned} \alpha = {} & [3(n-1)^2 - 7d - 12e]\nu \\ & - [2n(n-1)^2 - (7d + 12e)n + 6d + 12e]\mu - (7n - 12e - 18)b \\ & - 6(2n - 2d - 3e - 3)c - 12y - 18z - 24\gamma_0' \\ & + 4(2d) + 15(3d) - 18(d2e); \end{aligned}$$

---

[1] In Math. Annalen Bd. XIII pag. 445. Die an der linken Seite der Gleichung (15) anzubringende Reduction ist nicht $2d(2d-1)\mu$, sondern $2d\mu$.

$$(2)\qquad \beta = 2d\nu - 2d(n-1)\mu + 2(n-3)b - 3dc + 3y - 2(2d) - 6(3d) + 4(d2e);$$

$$(3)\qquad \gamma = \frac{5}{2}e\nu - \left(\frac{5}{2}n - 3\right)e\mu - 2eb + \left(\frac{5}{2}n - 2d - 6e - 3\right)c + 2y + 6z + 12\gamma_0' + \frac{3}{2}(2de) + 6(d2e).$$

Die erste giebt für das System der Plancurven, welche $\frac{n(n+3)}{2} + 2$ gerade Linien treffen:

$$(4)\qquad \alpha = 3(n-1)^2\Psi(n) - 2n(n-1)^2\Phi(n),$$

wo $\Psi(n)$, $\Phi(n)$ die im vorigen Paragraphen berechneten Ausdrücke sind. Andere auf Systeme punctallgemeiner Curven bezügliche Zahlen erhält man aus der Formel

$$(3^a)\qquad \rho = 2(n-1)\nu - n(n-1)\mu - 2b - 3c$$

für $b = c = 0$. Mit Benutzung von Herrn Schubert's Bezeichnung ergiebt sich, nach symbolischer Multiplication mit

$$\mu^h\nu^k\rho^{l-1} \quad \left(h \leqq 3,\ h + k + l = \frac{n(n+3)}{2} + 3\right)$$

$$\mu^h\nu^k\rho^l = 2(n-1)\,.\,\mu^h\nu^{k+1}\rho^{l-1} - n(n-1)\mu^{h+1}\nu^k\rho^{l-1}.$$

Durch wiederholte Anwendung dieser Gleichung lässt sich der Exponent von ρ auf 0 herabdrücken, und man findet, durch Unterscheidung der drei Fälle $h = 2, 1, 0$:

$$(5)\qquad \left\{\begin{aligned} \mu^2\nu^k\rho^l &= (2n-2)^l\left[F(n) - \frac{1}{2}ln\right],\\ \mu\nu^k\rho^l &= (2n-2)^l\left[\Phi(n) - \frac{1}{2}lnF(n) + \frac{1}{8}l(l-1)n^2\right],\\ \nu^k\rho^l &= (2n-2)^l\left[\Psi(n) - \frac{1}{2}ln\Phi(n) + \frac{1}{8}l(l-1)n^2F(n)\right.\\ &\qquad\left. - \frac{1}{24}l(l-1)(l-2)n^3\right]. \end{aligned}\right.$$

Dies ist jedoch nur für $l < 2n - 1$ richtig, weil anderenfalls die Gleichung (3_a) ihre Gültigkeit verliert.

2. Um eine kurze Ausdrucksweise zu ermöglichen, will ich die elementaren Bedingungen, welche sich auf das Getroffenwerden gegebener gerader Linien beziehen, in der Bezeichnung weglassen. Die Bedingung für das Vorhandensein eines Doppelpunctes soll bezeichnet werden mit

$$D, \quad D_\varepsilon, \quad D_g, \quad D_0,$$

je nachdem der Doppelpunct frei ist, oder in gegebener Ebene, in gegebener Geraden, oder an gegebener Stelle liegt; für Spitzen haben E, E_ε, u. s. w. die entsprechende Bedeutung.

$$B_\varepsilon, \quad B_{\varepsilon g}, \quad B_{\varepsilon p}$$

sind die Bedingungen, dass eine Ebene berührt werden soll, bzw. dass der Berührungspunct in einer Geraden, oder an gegebener Stelle der Ebene liegt. Endlich bedeuten die *symbolischen* Factoren

$$\mu, \quad \mu^2, \quad \mu^3,$$

wie bei Herrn SCHUBERT, dass die Ebene der Curve durch einen gegebenen Punct, bzw. eine gegebene Axe gehen soll, oder fest ist.

Hiernach lässt sich z. B. die Gleichung (4) schreiben:

$$[D] = 3(n-1)^2\Psi(n) - 2n(n-1)^2\Phi(n),$$

und die symbolische Multiplication mit μ hat hier, wie immer, zur Folge, dass $\Psi(n)$, $\Phi(n)$ bzw. in $\Phi(n)$, $F(n)$ übergehen.

3. Es sollen jetzt einige Formeln entwickelt werden, welche dazu dienen, die Zahl b eines gegebenen Systems zu bestimmen, und zwar zunächst für den einfachsten Fall $d = 1$, $e = 0$. Dabei werden die folgenden Ausdrücke benutzt:

$$(6) \qquad [B_{\varepsilon g}] = \Psi(n) - \Phi(n) - n(n-2)F(n),$$

$$(7) \qquad [B_{\varepsilon p}] = \Phi(n) - (2n-1)F(n) + n(n-1),$$

welche als Ergänzungen der Gleichung (3_a) für $b = c = 0$ anzusehen sind, und, wie diese, durch Anwendung des Correspondenzprincips auf Punctepaare der Ebene ε bewiesen werden.

In dem System (B_ε) sind endlich viele Curven enthalten, für welche der Berührungspunct X in einen Doppelpunct übergeht. Verbindet man daher eine feste Gerade L mit den Puncten X durch eine Ebene, welche die Curven noch in je $n - 1$ Puncten Y schneidet, so ist $[D_\varepsilon]$ in der Zahl

$$(n-1)(X) + (Y) - \{(n-1)[\mu B_\varepsilon] + (n-1)(X)\}$$

der Coincidenzen von Y mit X enthalten. Da nun

$$(Y) = (n-1)(X) + [B_\varepsilon], \qquad (X) = [B_{\varepsilon g}],$$

und da ferner eine Coincidenz auch dann eintritt, wenn die Curve ihre Ebene durch den Schnittpunct von L mit ε schickt, findet man

$$(8) \qquad [D_\varepsilon] = [B_\varepsilon] + (n-1)[B_{\varepsilon g}] - n[\mu B_\varepsilon],$$

oder mit Benutzung von (3_a) und (6):

$$[D_\varepsilon] = (n-1)[3\Psi(n) - (3n+1)\Phi(n) + 2nF(n)].$$

Eine Bestätigung erhält man wie folgt. Aus der letzten der Gleichungen (5) ergiebt sich für $l = 2$, wie viele Curven zwei Ebenen ε_1, ε_2, berühren. Lässt man nun ε_1, ε_2 in eine Ebene ε zusammenfallen, dann theilen sich die fraglichen Curven in folgende vier Gruppen: Solche, die ε in einem Puncte der Schnittgeraden von ε_1, ε_2 berühren; die eine in ε liegende Doppeltangente oder Wendetangente haben; endlich solche, die in ε einen Doppelpunct haben; in Zeichen:

$$(n-1)^2[4\Psi(n) - 4n\Phi(n) + n^2F(n)] = [B_{\varepsilon g}] + 2[T_\varepsilon] + 3[W_\varepsilon] + [D_\varepsilon].$$

Nun braucht man, um $2[T_\varepsilon]$, $[W_\varepsilon]$ zu erhalten, nur zu untersuchen, wie oft zwei der $n - 2$ weiteren Schnittpuncte der Curven (B_ε) zusammenfallen, und wie oft einer derselben mit dem Berührungspuncte zusammenfällt; durch Ausführung dieser leichten Rechnung findet man den obigen Ausdruck für $[D_\varepsilon]$ wieder. —

Die Curven $[D_g]$, $[D_0]$ sind bzw. in den Systemen $(B_{\varepsilon g})$, $(B_{\varepsilon p})$ enthalten, und auf dieselbe Art wie die Gleichungen (8) werden die folgenden bewiesen:

$$(9)\qquad [D_g] = [B_{\varepsilon g}] + (n-1)[B_{\varepsilon p}] - n[\mu B_{\varepsilon g}] + n$$
$$= \Psi(n) - 2\Phi(n) - (3n^2 - 6n + 1)F(n) + 2n(n-1)^2,$$

$$(10)\qquad [D_0] = [B_{\varepsilon p}] - n[\mu B_{\varepsilon p}] + 1$$
$$= \Phi(n) - (3n-1)F(n) + 3n^2 - 2n + 1.$$

Die Verallgemeinerung der Gleichungen (6), (7) ergiebt sich einfach dadurch, dass man von einem Systeme (d, e), statt von punctallgemeinen Curven ausgeht:

$$(11)\qquad [B_{\varepsilon g}, d, e] = [d, e] - [\mu; d, e] - n(n-2)[\mu^2; d, e]$$
$$- 2[D_g, d-1, e] - 3[E_g, d, e-1]$$

$$(12)\qquad [B_{\varepsilon p}, d, e] = [\mu; d, e] - (2n-1)[\mu^2; d, e] + n(n-1)[\mu^3; d, e]$$
$$- 2[D_0, d-1, e] - 3[E_0, d, e-1].$$

Legt man ferner das System (B_ε, d, e) anstatt des zur Gleichung (8) führenden (B_ε) zu Grunde, so erhält man, mit Berücksichtigung der wegen der singulären Puncte anzubringenden Reductionen:

$$(13)\qquad [D_\varepsilon, d, e] = [B_\varepsilon, d, e] + (n-1)[B_{\varepsilon g}, d, e] - n[\mu B_\varepsilon, d, e]$$
$$- 2\beta_\varepsilon - p_\varepsilon + 2b_\varepsilon - 3\gamma_\varepsilon - 3q_\varepsilon + 3c_\varepsilon.$$

Hier beziehen sich die mit dem Index ε versehenen β, p, b auf den in ε liegenden Doppelpunct des Systems $(D_\varepsilon, d-1, e)$, dagegen die γ, q, c auf die bevorzugte Spitze des Systems $(E_\varepsilon, d, e-1)$.

In ähnlicher Weise lassen sich auch die Gleichungen (9), (10) verallgemeinern, und liefern so, in Verbindung mit (11) und (12) die Mittel, Zahlen b von Systemen $(d+1, e)$ durch Zahlen von Systemen (d, e) auszudrücken.

---

§ 6.

Beispiele. Curven mit einem Puncte höherer Vielfachheit.

1. Um die α-Formel auf das System (D) anwenden zu können, braucht man nur die Zahlen

$$\nu = [D], \qquad \mu = [\mu D], \qquad b = [D_\varepsilon]$$

desselben zu kennen, welche bereits im Vorigen berechnet sind. Man findet

$$[2D] = (n-1)(n-2)\left\{(3n^2 - 3n - 11)\left[\frac{3}{2}\Psi(n) - 2n\Phi(n)\right] + n(2n^3 - 2n^2 - 5n - 6)F(n)\right\}.$$

Für das System (D_ε) dagegen ist

$$\nu = [D_\varepsilon], \qquad \mu = [\mu D_\varepsilon], \qquad b = [D_g],$$

also

$$\begin{aligned}[D_\varepsilon D] = {} & (9n^3 - 27n^2 - n + 30)\Psi(n) \\ & - (15n^4 - 42n^3 - 6n^2 + 33n + 22)\Phi(n) \\ & + (6n^5 - 10n^4 - 6n^3 - 60n^2 + 116n - 24)F(n) \\ & - 2n(n-1)(2n^3 + 3n^2 - 30n + 24). \qquad (n > 3)\end{aligned}$$

Dasselbe ergiebt sich aus (13) für $d = 1$, $e = 0$.

Durch Anwendung der β-Formel auf die Systeme

$$(D_0), \ (D_g), \ (D_\varepsilon), \ (D)$$

erhält man

$$[E_0] = 2\Phi(n) - 4(2n-1)F(n) + 4(3n^2 - 3n + 1); \qquad (n > 2)$$

$$\begin{aligned}[E_g] = {} & 2\Psi(n) - 8\Phi(n) - 12(n^2 - 3n + 1)F(n) \\ & + 8(2n^3 - 6n^2 + 4n - 1); \qquad (n > 2)\end{aligned}$$

$$[E_\varepsilon] = (8n - 12)\Psi(n) - 4(3n^2 - 3n - 2)\Phi(n) + 8(3n^2 - 5n + 1)F(n) + 4n(n - 1)^2(n - 4); \qquad (n > 2)$$

$$[E] = 4(n - 1)(n - 2)[3\Psi(n) - 4n\Phi(n) + n(n + 1)F(n)].$$

Die γ-Formel, auf die Systeme (E_ε), (E) angewandt, giebt

$$[S_\varepsilon] = (25n - 48)\Psi(n) - (50n^2 - 64n - 56)\Phi(n) + (192n^2 - 438n + 152)F(n) + 50n^4 - 384n^3 + 774n^2 - 488n + 96; \qquad (n > 3)$$

$$[S] = (50n^2 - 192n + 168)\Psi(n) - (100n^3 - 384n^2 + 336n)\Phi(n) + (10n^5 - 22n^4 + 54n^3 - 294n^2 + 376n - 72)F(n) - 2n(n - 1)(32n^2 - 114n + 84). \qquad (n > 3)$$

Aus (13) ergiebt sich für $d = 1$, $e = 0$, wenn angenommen wird, dass der Doppelpunct des Systems (1, 0) in einer Ebene ε_2 liege:

$$[D_{\varepsilon_1} D_{\varepsilon_2}] = (9n^2 - 18n + 2)\Psi(n) - (18n^3 - 30n^2 + 6n - 20)\Phi(n) + (9n^4 + 16n^2 - 101n + 38)F(n) - 12n^4 - 36n^3 + 152n^2 - 104n + 24. \qquad (n > 3)$$

Durch Zusammenfallen der beiden Ebenen ε_1, ε_2 geht diese Zahl über in

$$[D_{\varepsilon_1} D_{\varepsilon_2}] = 2[2D_\varepsilon] + [S_\varepsilon];$$

es lässt sich daher auch $[2D_\varepsilon]$ berechnen.

Für das System $(2D)$ kennt man jetzt die Zahlen

$$\nu = [2D], \qquad \mu = [\mu, 2D], \qquad b = [D_\varepsilon D], \qquad (2d) = [S],$$

und aus der α-Formel folgt

$$[3D]$$

$$= (9n^6 - 54n^5 + 9n^4 + 423n^3 - 458n^2 - 829n + 1050)\left[\frac{1}{2}\Psi(n) - n\Phi(n)\right]$$

$$+ \frac{1}{3}(18n^8 - 108n^7 + 39n^6 + 727n^5 - 975n^4 + 13n^3 - 1908n^2 + 3364n - 720)F(n)$$

$$- \frac{2}{3}n(n-1)(2n^7 - 10n^6 - n^5 + 40n^4 - 11n^3 + 338n^2 - 1212n + 840).$$

Insbesondere erhält man für $n = 3$ die von Herrn SCHUBERT berechnete Zahl 7280 der ebenen Dreiseite, welche 9 gerade Linien treffen. —

Diese wenigen Beispiele werden genügen, zu zeigen, wie man allmälig zu Systemen mit grösserer Singularitätenzahl fortschreiten kann.

2. Es soll schliesslich noch die Aufgabe behandelt werden, die Zahl der Plancurven mit einem τ-fachen Puncte zu bestimmen, welche ausserdem nur noch elementare Geradenbedingungen zu erfüllen haben.

Man füge die Bedingungen hinzu, dass σ verschiedene Tangenten des τ-fachen Punctes X je eine von σ gegebenen Geraden $L_1, \ldots, L_\sigma$ treffen, und bezeichne das ν dieses Systems mit $f(\tau, \sigma)$, wo das zweite Argument, wenn es Null ist, weggelassen werden soll. Der X-Ort hat im Allgemeinen Puncte mit jeder der festen Geraden gemeinschaftlich; es soll $\varphi(\tau, \sigma - 1)$ angeben, wie viele Curven den τ-fachen Punct z. B. in L_1 haben; jede dieser Stellen ist $(\tau - \sigma + 1)$-facher Punct des X-Ortes, denn die betreffende Curve erfüllt $\tau - (\sigma - 1)$ mal die auf L_1 bezügliche Systemsbedingung.

Die Ebene, welche eine $(\sigma + 1)^{\text{te}}$ Gerade $L_{\sigma+1}$ mit den Puncten X verbindet, schneidet noch in je $n - \tau$ Puncten Y, deren Ort von der Ordnung

$$\nu + (n - \tau)(X)$$

ist. Daher ergiebt sich für die Zahl der Coincidenzen von Y mit X

$$\nu + (n - \tau)(X) - (n - \tau)[\mu f(\tau, \sigma)],$$

wo wieder der Factor μ symbolische Bedeutung hat, nämlich das Hinzutreten einer Ebenenbedingung zu den Systemsbedingungen anzeigt.

Diese Coincidenzen werden zum Theil dadurch veranlasst, dass eine Tangente von X sowohl $L_{\sigma+1}$ als eine der σ Geraden, z. B. L_1 trifft; und die Frage, wie oft dieses eintritt, kommt auf die beiden anderen zurück, wie oft eine Tangente von X in einer gegebenen, durch L_1 gelegten Ebene liegt, und wie oft sie durch einen gegebenen Punct von L_1 geht. Ersteres findet, nach dem oben Bemerkten,

$$(X) - (\tau - \sigma + 1)\varphi(\tau, \sigma - 1)$$

mal Statt. Ferner erfüllen die $[\mu f(\tau, \sigma)]$ Curven, welche ihre Ebene durch einen gegebenen Punct Q von L_1 schicken, die auf L_1 bezügliche Systemsbedingung entweder dadurch, dass eine Tangente von X durch Q geht, oder, und zwar $\tau - \sigma + 1$ mal, dadurch, dass die Ebene der Curve die Gerade L_1 ganz enthält. Mithin ist die zweite der gesuchten Zahlen

$$[\mu f(\tau, \sigma)] - (\tau - \sigma + 1)[\mu^2 f(\tau, \sigma - 1)].$$

Um daher $f(\tau, \sigma + 1)$ zu erhalten, hat man von der obigen Zahl der Coincidenzen von Y mit X

$$\sigma\{(X) + [\mu f(\tau, \sigma)]\} - \sigma(\tau - \sigma + 1)\{\varphi(\tau, \sigma - 1) + [\mu^2 f(\tau, \sigma - 1)]\}$$

abzuziehen, und findet, für $\sigma < \tau$

$$\begin{aligned} f(\tau, \sigma + 1) - f(\tau, \sigma) = (n - \tau - \sigma)(X) - (n - \tau + \sigma)[\mu f(\tau, \sigma)] \\ + \sigma(\tau - \sigma + 1)\{\varphi(\tau, \sigma - 1) + [\mu^2 f(\tau, \sigma - 1)]\}; \end{aligned}$$

für $\sigma = \tau$ aber ist das erste Glied der linken Seite durch $f(\tau + 1)$ zu ersetzen.

Die etwa noch unbekannten Zahlen auf der rechten Seite lassen sich in derselben Weise reduciren wie $f(\tau, \sigma)$; und da die hinzutretenden Bedingungen theils die Lage des τ-fachen Punctes, theils die Ebene, in welcher die Curve liegen soll, einer weiteren Beschränkung unterwerfen, so führt die hinreichend oft wiederholte Anwendung jener Gleichung auf Bekanntes.

Man erkennt so die Möglichkeit, die gestellte Aufgabe, auch z. B. für den Fall eines freien τ-fachen Punktes, zu lösen. Ich habe jedoch die erforderliche Rechnung nur für den Fall durchgeführt, dass der τ-fache Punct in einer gegebenen Geraden liegt, also $\varphi(\tau, \sigma - 1) = 0$ ist, und so gefunden:

$$\begin{aligned} & 72\{[P_g^\tau] - [P_g^{\tau+1}]\} \\ & = \tau(4n^6 + 48n^5 + 142n^4 + 202n^3 + 76n^2 + 8n) \\ & + \tau^2(4n^6 + 60n^5 + 124n^4 + 11n^3 - 221n^2 - 80n - 44) \\ & + \tau^3(12n^5 - 48n^4 - 338n^3 - 258n^2 + 23n - 26) \\ & - \tau^4(30n^4 + 155n^3 - 225n^2 - 125n - 26) - \tau^5(8n^3 - 228n^2 + 67n - 10) \\ & + \tau^6(42n^2 - 105n + 14) - \tau^7(24n - 16) + 4\tau^8. \end{aligned}$$

Durch Summirung nach τ ergiebt sich ein Ausdruck für $[P_g^\tau]$, wenn $[P_g^1] = \Psi(n)$ bekannt ist. Aber die Herleitung der Gleichung setzt $\Psi(n)$ nicht als bekannt voraus; und da andererseits $[P_g^n]$ als Zahl der Gruppen von n in einer Ebene liegenden, in einem Puncte von g sich schneidenden Strahlen, welche $n + 3$ weitere gerade Linien treffen, leicht direct zu ermitteln, nämlich gleich

$$2\binom{n+3}{3}\binom{n}{2} + 4 \cdot \frac{1}{6}\binom{n+3}{2}\binom{n+1}{2}\binom{n-1}{2} = \frac{1}{12}n^2(n^2 - 1)(n + 2)(n + 3)$$

ist, so giebt die Summirung von $\tau = 1$ bis $\tau = n - 1$ eine Bestätigung des in § 4 auf anderem Wege hergeleiteten Ausdrucks für $\Psi(n)$.

Freiburg, im September 1884.