ÜBER DIE BEGRENZUNGEN VON CONTINUA

VON

EDVARD PHRAGMÉN
in STOCKHOLM.

Wenn man von der WEIERSTRASS'schen Auffassung des Begriffes einer analytischen Function ausgeht, so ist, wie bekannt, immer die Gesammtheit der regulären und der ausserwesentlich singulären Stellen einer eindeutigen analytischen Function ein *Continuum.* [1]

Dies Continuum kann aber grössere oder kleinere Theile der Ebene umschliessen. Einer Angabe von Hrn. SCHWARZ zufolge, wurde das erste Beispiel einer analytischen Function, von deren Existenz-Bereich continuirliche Stücke der Ebene ausgeschlossen waren, von Hrn. WEIERSTRASS im Jahre 1863 gegeben. Heut zu tage ist nichts leichter als solche Beispiele zu bilden. Die Modulfunctionen sind ein solches; mit Hülfe der Darstellungssätze von Hrn. Prof. MITTAG-LEFFLER kann man sich deren beliebig viele bilden, und die Untersuchungen von Hrn. POINCARÉ über die linearen Differentialgleichungen führen mit Nothwendigkeit auf solche Functionen.

Wenn man nun, vermöge der Darstellungssätze des Hrn. Prof. MITTAG-LEFFLER oder in anderer Weise, sich einen analytischen Ausdruck gebildet hat, der in allen Punkten der Ebene sich regulär verhält — mit Aus-

[1] Unter *Continuum* verstehe ich im Folgenden eine Punktmenge wie sie Hr. WEIERSTRASS, *Zur Functionenlehre*, S. 5, betrachtet und eine aus *einem* Stück bestehende Fläche nennt.

nahme derjenigen welche zu einer gewissen Punktmenge[1] P gehören, von der kein Theil ein Continuum ist, — so kann dieser Ausdruck, der verschiedenen Beschaffenheit der Punktmenge P zufolge, mehrere verschiedene analytische Functionen — welche dann sämmtlich der oben angedeuteten Art sind — oder eine einzige Function darstellen, je nachdem die Ebene durch das Ausschliessen der Punktmenge P in mehrere getrennte Continua zerfällt oder nicht.

Von Hrn. Prof. MITTAG-LEFFLER aufgefordert, habe ich in Öfversigt af Kongl. Vetenskaps-Akademiens Förhandlingar, 1884, n° 1, Seite 121, bewiesen, dass:

wenn kein Theil einer abgeschlossenen Punktmenge P zusammenhängend[2] *ist, so bildet die Gesammtheit derjenigen Punkte der Ebene, welche nicht zu P gehören, ein einziges Continuum.*

Da Prof. MITTAG-LEFFLER gewünscht hat, dass ich diesen Satz in den Acta Mathematica reproducire, will ich jetzt einen einfacheren, mehr direkten Beweis desselben geben oder vielmehr einen anderen, etwas umfassenderen Satz beweisen.

Da die Punkte, welche übrig bleiben, nachdem man eine gewisse *abgeschlossene* Punktmenge ausgeschlossen hat, nothwendiger Weise ein oder mehrere Continua bilden, so kann der obige Satz auch in dieser Form ausgesprochen werden:

Ist die Punktmenge P die vollständige Begrenzung eines Continuums A und existiren in der Ebene Punkte die ausserhalb A liegen, so muss irgend ein Theil von P zusammenhängend sein.

Für den Beweis dieses Satzes kann ich offenbar annehmen, dass der Punkt ∞ *ausserhalb* A liegt, d. h. dass A ganz und gar im Endlichen liegt, denn auf diesen Fall kann man ja immer den entgegengesetzten

[1] Ich will hier schon darauf aufmerksam machen, dass eine solche Punktmenge P immer *abgeschlossen* ist, um den Ausdruck des Hrn. CANTOR (Mathematische Annalen, B. 23, S. 470) zu gebrauchen, d. h. dass die Punkte der ersten abgeleiteten Menge alle zu P gehören.

[2] Nach CANTOR, *Grundlagen einer allgemeinen Mannigfaltigkeitslehre,* Mathematische Annalen, B. 21, S. 575 (französische Übersetzung in Acta Mathematica, B. 2, S. 406), heisst ein System von Punkten *zusammenhängend,* wenn man für zwei willkürlich gegebene Punkte t und t' des Systems und eine gegebene, beliebig kleine Zahl ε, stets eine endliche Anzahl von Punkten des Systems finden kann, der Art dass die Entfernungen $\overline{tt_1}$, $\overline{t_1t_2}$, $\overline{t_2t_3}$, ... $\overline{t_\nu t'}$ sämmtlich kleiner als ε sind.

durch eine oder, wenn man so will, mehrere Transformationen durch reciproke Radii Vectores zurückführen.

Da also angenommen wird, dass das Continuum A ganz und gar im Endlichen gelegen ist, so kann man ein Quadrat finden, welches A vollkommen einschliesst. Dieses Quadrat theile ich in m_1^2 gleiche Quadrate, jedes dieser Quadrate wieder in m_2^2 gleiche u. s. f., wo m_1, m_2, ... ganze Zahlen bezeichnen.

Für jede neue Eintheilung bilde ich mir aus allen denjenigen Quadraten, welche, im Innern oder auf der Grenze, einen zu P gehörigen Punkt enthalten, eine Punktmenge, welche für die ν^{te} Eintheilung Q_ν heissen möge. Hiervon ist es eine unmittelbare Folge, dass $Q_{\nu+1}$ ein Theil von Q_ν ist.

Betrachten wir nun eine solche Punktmenge Q_ν, so sehen wir leicht ein, dass wenn sie aus mehreren getrennten continuirlichen Stücken besteht, es nothwendig ist, dass eins derselben die übrigen in der Form eines Ringes umschliesst. Denn die entgegengesetzte Annahme würde mit der Voraussetzung im Widerspruch stehen, dass A ein im Endlichen gelegenes Continuum sei. Es muss dies auch dann noch gelten, wenn man zwei Quadrate, welche nur in einem Eckpunkte zusammenstossen, als gar nicht zusammenhängend betrachtet. Dieser Eckpunkt kann nämlich dann nicht zu P gehören, weil in dem Falle die zwei anderen Quadrate, welche in diesem Punkte einen Eckpunkt haben, zu Q_ν gehören müssten; wenn man also von Q_ν diejenigen Punkte ausschliesst, welche zu einer gewissen kleinen Umgebung dieses Punktes gehören, so gelten die obigen Schlüsse.

Dieses, die anderen Stücke ringförmig umschliessende Stück, oder wenn nur ein Stück vorhanden ist, Q_ν selbst, bezeichnen wir mit R_ν.

Dann muss, wie leicht einzusehen ist, $R_{\nu+1}$ ein Theil von R_ν sein. Denn $R_{\nu+1}$ ist ein Theil von Q_ν; wenn es also nicht ein Theil von R_ν wäre, so müsste es ein Theil von einem der anderen Continua sein, welche zusammen Q_ν ausmachen, und demnach von R_ν ringförmig umschlossen sein, was nicht möglich ist, da R_ν Punkte aus der Begrenzung von A enthält, also Punkte, welche zu $Q_{\nu+1}$ gehören. Es ist demnach $R_{\nu+1}$ immer ein Theil von R_ν.

Geht man mit diesen Eintheilungen in kleinere und immer kleinere Quadrate genügend weit, so muss man zu einer solchen Eintheilung gelangen, bei welcher irgend ein Quadrat ganz und gar innerhalb A fällt. Bei dieser Eintheilung und bei all den folgenden muss also R_ν dieses Quadrat ringförmig umschliessen. Dies folgt unmittelbar aus der Annahme dass A ganz und gar im Endlichen liegt.

Jetzt wollen wir diejenige Punktmenge, R, betrachten, welche aus sämmtlichen den Punktmengen

$$R_1, R_2, \ldots, R_\nu, \ldots$$

gemeinschaftlichen Punkten besteht.

Diese Punktmenge ist ein Theil der Begrenzung von A, denn in jeder Umgebung eines zu ihr gehörigen Punktes finden sich Punkte, welche auf der Grenze von A liegen. Sie ist ferner zusammenhängend. Dies sieht man durch die folgende Betrachtung ohne Schwierigkeit ein. Die Gesammtheit der Quadrate von R_ν, welche mit R einen Punkt gemein haben, möge mit R'_ν bezeichnet werden. Man betrachte nun eins der Quadrate von R_ν. Wenn dieses Quadrat nicht zu R'_ν gehört, so kann man offenbar den Index μ so gross annehmen, dass es auch mit R_μ keinen Punkt gemein hat. Da aber die Anzahl der Quadrate in R_ν endlich ist, kann man μ so gross wählen, dass keines der Quadrate von R_ν, welche nicht zu R'_ν gehören, mit R_μ einen gemeinschaftlichen Punkt haben. R'_ν oder die Gesammtheit der Quadrate der ν^{ten} Eintheilung der Ebene welche mit R einen Punkt gemein haben, ist also mit der Gesammtheit derjenigen Quadrate von R_ν identisch, welche mit R_μ gemeinschaftliche Punkte besitzen. Und da R_μ für hinreichend grosse Werthe des Index die Gestalt eines Ringes hat, welcher ein gewisses, endliches Quadrat völlig umschliesst, so muss dasselbe offenbar von R'_ν gelten. Daraus kann man aber unmittelbar schliessen, dass R eine nach der Definition des Hrn. Cantor zusammenhängende Punktmenge ist.

Man hat indess die charakteristischen Eigenschaften der Punktmenge R keineswegs erschöpft, wenn man sagt, sie sei zusammenhängend. In der That hat man viel mehr ausgesprochen, wenn man sagt, die Punktmenge R besitze für eine gewisse Art, die Ebene in kleinere und kleinere Quadrate einzutheilen, die Eigenschaft, dass die den Punktmengen $Q_1, Q_2, \ldots, Q_\nu, \ldots$ entsprechenden Punktmengen $R'_1, R'_2, \ldots, R'_\nu, \ldots$ Continua sind, die für hinreichend grosse Werthe des Index ν ein gewisses endliches Quadrat ringförmig umschliessen, oder, was nach dem früher

Entwickelten dasselbe sein muss,[1] deren Begrenzungen aus wenigstens zwei geschlossenen, gebrochenen Linien gebildet sind, welche ein gewisses Quadrat von endlicher Grösse umschliessen.

Erstens nämlich ist es leicht zu zeigen, dass eine abgeschlossene Punktmenge R, welche für eine Art der Eintheilung diese Eigenschaft besitzt, sie auch für jede andere Art die Ebene in Quadrate zu zerlegen behalten muss. Es seien nämlich

$$Q_1,\ Q_2,\ \ldots,\ Q_\nu,\ \ldots,$$
$$Q'_1,\ Q'_2,\ \ldots,\ Q'_\nu,\ \ldots,$$

die, zwei besonderen Eintheilungen entsprechenden Punktmengen, welche aus allen denjenigen Quadraten bestehen, die mit R einen Punkt gemein haben. Dann kann man μ so gross wählen, dass Q'_ν alle diejenigen Quadrate aus der ν^{ten} Eintheilung der zweiten Art enthält, welche mit Q_μ gemeinschaftliche Punkte besitzen. Daraus sieht man leicht, dass wenn R die fragliche Eigenschaft für die erste Art der Eintheilung besitzt, dieselbe auch für die zweite Art bestehen muss.

Zweitens aber kann man, wie leicht zu übersehen ist, den bewiesenen Satz in der folgenden Weise umkehren.

Wenn man aus der Ebene eine im Endlichen gelegene, abgeschlossene Punktmenge P ausschliesst, welche die folgende Eigenschaft hat: für eine gewisse Art die Ebene in kleinere und kleinere Quadrate zu zerlegen, sind die Punktmengen $Q_1,\ Q_2,\ \ldots,\ Q_\nu,\ \ldots,$ welche aus denjenigen Quadraten bestehen, die mit P gemeinschaftliche Punkte haben, sämmtlich Continua, welche, sobald ν einen gewissen Werth übersteigt, von wenigstens zwei geschlossenen, gebrochenen Linien, die ein gegebenes, endliches Quadrat umschliessen, begrenzt sind, so bilden die übrigen Punkte der Ebene mehrere getrennte Continua, von denen eins im Endlichen gelegen ist.

Die oben angegebene Methode lässt sich unmittelbar anwenden, um die entsprechenden Sätze in einem Raum von n Dimensionen zu beweisen.

Der Kürze halber wollen wir folgende Benennungen einführen.

Unter dem Ausdrucke *ein gebrochener* $(n - 1)$*-dimensionaler Raum* in einem ebenen Raume von n oder mehr Dimensionen verstehen wir die

[1] Da zwei Quadrate, welche nur in einem Eckpunkt zusammentreffen, als gar nicht zusammenstossend betrachtet werden können.

Gesammtheit einer endlichen Anzahl *ebener* (n — 1)-dimensionaler Räume, die durch *gebrochene* (n — 2)-dimensionale Räume begrenzt sind.

Einen solchen Raum nennen wir *geschlossen,* wenn jeder der ebenen (n — 1)-dimensionalen Räume, aus denen er gebildet ist, jeden der begrenzenden (n — 2)-dimensionalen ebenen Räume mit einem anderen der (n — 1)-dimensionalen Räume gemein hat.

Dies vorausgeschickt, können wir den folgenden Satz aussprechen:

Wenn in einem Raume von n Dimensionen A ein im Endlichen gelegenes Continuum ist, so kann man aus der Begrenzung desselben einen Theil P ausscheiden, welcher nicht nur zusammenhängend ist, sondern vielmehr die folgende Eigenschaft besitzt:

Wenn man einen »Würfel von n Dimensionen», der hinreichend gross ist, um das Continuum A vollständig zu enthalten, in m_1^n gleiche »Würfel» eintheilt, jeden dieser »Würfel» wieder in m_2^n gleiche u. s. f. und für jede Eintheilung eine Punktmenge (Q_1, Q_2, ...) aus allen denjenigen »Würfeln» bildet, welche mit P einen Punkt gemein haben, so ist jede solche Punktmenge ein Continuum von n Dimensionen, und, wenn man eine gewisse endliche Anzahl ausnimmt, wird jede der übrigen von wenigstens zwei *geschlossenen,* gebrochenen (n — 1)-dimensionalen Räumen begrenzt, welche einen gewissen »Würfel» endlicher Grösse umschliessen.

Auch dieser Satz lässt eine Umkehrung zu.