SUR LES SÉRIES DE FACULTÉS.

PAR

N. E. NÖRLUND

À LUND.

Introduction.

Par une série de facultés on entend une série de l'une des deux formes suivantes:

$$\Omega(x) = \sum_{s=0}^{s=\infty} \frac{a_{s+1}\, s!}{x(x+1)\dots(x+s)}, \tag{1}$$

$$W(x) = a_0 + \sum_{s=1}^{s=\infty} a_s \frac{(x-1)(x-2)\dots(x-s)}{s!}, \tag{1 bis}$$

où les a_s sont indépendants de x. Comme l'a fait remarquer M. JENSEN[1] le domaine de convergence de ces séries est un demi-plan, limité à gauche par une droite perpendiculaire à l'axe des abscisses et coupant celui-ci dans un certain point λ, dit l'abscisse de convergence.[2] Elles représentent des fonctions analytiques, holomorphes à l'intérieur de ce domaine en exceptant, pour les séries de la forme (1), les points $0, -1, -2, \dots$ qui sont des pôles ou des points réguliers de la fonction $\Omega(x)$, s'ils sont situés à l'intérieur du domaine de convergence.

M. PINCHERLE a démontré que les séries de la forme (1 bis) ont l'inconvénient de pouvoir représenter zéro sans que tous les coefficients soient zéro. Quand une fonction admet un développement de la forme (1 bis) elle en admet donc une infinité. La représentation d'une fonction, par une série de la forme (1) est au contraire unique. Ce sont ces séries qui sont les plus intéressantes et

---

[1] Tidsskrift for Mathematik sér. 4, t. 5, p. 130, problème 451; voir aussi sér. 5, t. 2, p. 70—72.

[2] Si la série est convergente dans tout le plan, λ est égal à $-\infty$.

c'est exclusivement d'elles que nous allons nous occuper dans les pages suivantes. Leur importance résulte de ce fait qu'elles sont capables de représenter une fonction analytique dans un certain environ d'un point singulier; en effet, on peut toujours supposer que le point en question se trouve à l'infini. Posons $x = \sigma + i\tau$ et

$$\Omega(x) = \sum_{s=0}^{s=n-1} \frac{a_{s+1}\, s!}{x(x+1)\ldots(x+s)} + R_n(x);$$

soit $\varkappa$ un nombre positif plus grand que l'abscisse de convergence λ.

Nous allons démontrer que $|x^{n+1} R_n(x)|$ reste plus petit qu'une constante fixe dans le demi-plan $\sigma \geqq \varkappa$. La série de facultés indique donc l'allure de la fonction $\Omega(x)$ avec autant d'approximation qu'on le veut quand la variable tend vers l'infini en restant à l'intérieur du domaine de convergence. Mais l'infini est en général un point singulier essentiel de la fonction $\Omega(x)$. (Elle peut être non-uniforme aux environs de $x = \infty$, et elle présente en général une infinité de points singuliers, ayant le point $x = \infty$ comme point limite.)

Il en résulte que la série de facultés est un instrument analytique, très utile quand il s'agit d'étudier une fonction analytique au voisinage d'un point singulier et d'en trouver une représentation analytique qui reste convergente quand on s'approche au point singulier en restant dans un certain angle; elle présente à ce point de vue des avantages considérables sur les séries de puissances, qui amènent, comme on sait, à des développements toujours divergents. Les points singuliers dont on peut ainsi aborder l'étude à l'aide de séries de facultés convergentes sont ceux qui se comportent à peu près comme des points réguliers quand on s'approche du point en question en restant à l'intérieur d'un certain angle.

Pour en citer un exemple où l'on réussît à caractériser la singularité non seulement dans un angle mais dans tout voisinage de l'infini, j'ai démontré,[1] à l'aide des résultats contenus dans ce Mémoire, que les solutions des équations linéaires aux différences finies à coefficients rationnels se représentent, quel que soit la variable x, par une somme de séries de facultés convergentes multipliées respectivement par certaines fonctions exponentielles. Ces séries indiquent complètement l'allure de la fonction, non seulement dans la partie finie du plan, mais aussi quand x tend vers l'infini en suivant une ligne quelconque. Si par exemple x tend vers l'infini le long d'un rayon vecteur en restant à l'intérieur d'un certain angle la partie principale de l'intégrale est formée d'une seule de ces séries à cause du fàcteur exponentiel, mais pour certaines valeurs de l'argument de x la partie principale passe brusquement d'une série à une autre. On voit donc que

[1] Voir ma Thèse: Bidrag til de lineære Differensligningers Theori. Copenhague 1910, et un Mémoire qui paraîtra dans ce journal.

ce sont des singularités d'une nature assez compliquée dont on peut aborder l'étude à l'aide de la série de facultés.

Mais la série de facultés peut rendre service dans des cas beaucoup plus compliqués encore. Il y a lieu de se demander d'une manière générale qu'elle est la classe de singularités la plus générale au voisinage desquelles on peut trouver un développement convergent de la forme (1), c'est à dire qu'elle est la condition nécessaire et suffisante pour qu'une fonction donnée $\Omega(x)$ admette un développement de la forme (1). MM. Pincherle et Nielsen en ont déjà donné une reponse en démontrant que la condition nécessaire et suffisante c'est que la fonction $\Omega(x)$ puisse se mettre sous la forme

$$\Omega(x) = \int_0^1 t^{x-1} \varphi(t)\, dt,$$

$\varphi(t)$ étant une fonction analytique, holomorphe à l'intérieur du cercle $|t-1| = 1$ et d'ordre fini sur ce cercle. Il faut admettre que ce n'est pas là une réponse très simple.

Mais il convient de se poser le problème d'une manière un peu différente. Remarquons d'abord que, si $\Omega(x)$ admet un développement de la forme (1) elle admet également un développement de la forme suivante:

$$\Omega(x) = \sum_{s=0}^{s=\infty} \frac{c_{s+1}\, s!}{x(x+\omega)\dots(x+s\omega)}, \tag{2}$$

ω étant un nombre positif plus grand que 1. Plus généralement, nous allons démontrer l'existence d'un nombre positif Θ tel que le développement (2) existe pour $\omega > \Theta$ mais non pour $\omega < \Theta$.

Pour $\omega = \Theta$ le développement peut exister ou non. Mais on ne peut pas, de la seule connaissance de quelques propriétés analytiques simples de $\Omega(x)$, prévoir si le développement converge pour $\omega = \Theta$ ou non; c'est un problème tout aussi difficile que celui de trouver la condition nécessaire et suffisante pour qu'une série de Taylor converge sur son cercle de convergence, exprimée par des propriétés analytiques simples de la fonction qu'elle représente.

Il convient donc de se poser le problème de la manière suivante: Qu'elle est la classe des fonctions qui admettent un développement de la forme (2) pour des valeurs *convenablement* choisies de ω (c'est à dire en donnant à ω une valeur supérieure à Θ). Ainsi posé, il y a une réponse des plus intéressantes. Nous allons démontrer que cette classe de fonctions est la même[1] que celle qui donne naissance à des séries de puissances de la forme

[1] Comparez pourtant § 15.

$$\frac{A_1}{x}+\frac{A_2}{x^2}+\frac{A_3}{x^3}+\cdots$$

qui sont divergentes mais absolument et uniformément sommables par la méthode exponentielle de M. É. BOREL. Il y a, il est vrai, une infinité de fonctions qui donnent naissance à la même série; mais c'est la fonction que M. BOREL attribue à cette série comme somme généralisée qui admet le développement (2). Notre problème se trouve ainsi mis en rapport avec une des questions les plus intéressantes de l'Analyse, à savoir le sens qu'il faut attribuer à une série divergente et la série de facultés en donne une réponse aussi simple qu'on puisse l'imaginer; il suffit en effet de transformer la série divergente en série de facultés, opération qui est toujours facile. Ou encore, si, par un calcul quelconque, on est amené à une série de puissances divergente mais absolument et uniformément sommable au sens de M. BOREL, on aurait pu, en dirigeant convenablement le calcul, être amené à une série de facultés convergente au lieu de la série divergente.

On sait que H. POINCARÉ a réalisé un grand progrès dans l'étude des fonctions définies par certaines équations différentielles à l'aide des séries asymptotiques. De ce qu'on vient de dire on conclut qu'on aurait pu arriver au même but en se servant de séries de facultés *convergentes*, ce qui est peut-être plus satisfaisant pour l'esprit. Ces séries permettent donc de compléter les résultats de POINCARÉ sur un point qui n'est pas sans importance pour des applications ultérieures.[1]

On connaît le rôle important que joue, dans presque toutes les applications de la série de TAYLOR à la théorie des fonctions, le théorème de CAUCHY d'après lequel le cercle de convergence est le plus grand cercle à l'intérieur duquel la fonction est holomorphe. Il y avait lieu de se demander s'il existe un théorème analogue pour les séries de facultés, c'est à dire si la droite de convergence $\sigma=\lambda$ est en quelque rapport simple avec les singularités de la fonction. On sait qu'il n'y a pas nécessairement de point singulier sur la droite de convergence. Pour savoir déterminer la droite de convergence il ne suffit donc pas de connaître l'affixe du point singulier dont l'abscisse est la plus grande, il faut encore avoir des renseignements sur la nature de la singularité à l'infini.

Nous démontrerons à cet égard le théorème suivant:

Supposons:

1°. Que la fonction $\Omega(x)$ admette un développement en séries de facultés de la forme (2), convergente pour des valeurs suffisamment grandes de σ.

2°. Qu'il existe un nombre positif l, tel que la fonction $\Omega(x)$ soit holo-

[1] M. MITTAG-LEFFLER, dans son Cours 1909, a déjà attiré l'attention sur ce fait. M. HORN, dans deux Mémoires récents, a donné quelques indications sur le sujet. Voir: Journal für die reine und angewandte Mathematik t. 144, p. 167—189; Mathematische Annalen t. 71, p. 510—532.

morphe et bornée pour $\sigma > l + \varepsilon$, mais non dans la bande $l + \varepsilon > \sigma > l - \varepsilon$ quelque petit que soit le nombre positif ε.

L'abscisse de convergence de la série (2) est alors égal à l ou supérieur à l d'une quantité qui tend vers zéro, quand ω tend vers l'infini.

Il existe des séries de facultés pour lesquelles la limite inférieure l de l'abscisse de convergence n'est pas atteinte pour aucune valeur finie de ω.

Mais dans les cas ordinaires, tels que les solutions des équations linéaires aux différences finies à coefficients rationnels, l'abscisse de convergence est égale à l quand on donne à ω une valeur quelconque supérieure au nombre Θ dont il a été question plus haut.

Pour $\omega = \Theta$ l'abscisse de convergence λ est généralement supérieure à l et elle n'est pas, semble-t-il, en rapport avec des propriétés analytiques simples de la fonction $\Omega(x)$; rien ne distingue, en apparence, la bande $\lambda > \sigma > l$ du domaine de convergence. La fonction $\Omega(x)$ et toutes ses dérivées par rapport à $\frac{1}{x}$ tendent uniformément vers une limite quand x tend vers l'infini en restant dans le demi-plan $\sigma > l$.

La droite $\sigma = l$, au contraire, est une droite caractéristique pour la fonction $\Omega(x)$.

Deux cas pourront arriver.

1°. Il se trouve sur la droite $\sigma = l$ un point singulier à distance finie ou bien il se trouve dans la bande $l - \varepsilon < \sigma < l$ une infinité de points singuliers qui s'approchent indéfiniment de la droite $\sigma = l$ à mésure qu'on s'éloigne de l'axe des abscisses.

2°. La fonction $\Omega(x)$ est holomorphe pour $\sigma > l_1$, l_1 étant inférieur à l; la série cesse en ce cas de converger dans la bande $l_1 < \sigma < l$ parce que la fonction $\Omega(x)$ ne tend pas vers une limite quand x tend vers l'infini en restant dans cette bande; nous allons même démontrer qu'elle croît plus vite qu'une puissance quelconque de l'ordinat dans cette bande.

L'étude des séries de facultés remonte à NEWTON et STIRLING. La relation étroite qu'il y a entre ces séries et les intégrales définies de la forme

$$\int_0^\infty e^{-xt} F(t)\, dt$$

a été remarquée, pour la première fois je crois, par SCHLÖMILCH.[1] On connaît le

[1] Über Facultätenreihen, Berichte über die Verhandlungen der K. Sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften zu Leipzig. Mathematisch-Physische Classe t. 11, 1859, p. 109—137.

Über die Entwickelung von Funktionen complexer Variablen in Fakultätenreihen, ibid. t. 15, 1863, p. 58—62.

rôle important que joue ces intégrales dans différentes branches de l'Analyse, rappelons seulement les travaux de LAPLACE et d'ABEL, de POINCARÉ, de M. BOREL, de M. MITTAG-LEFFLER, de M. PHRAGMÉN et la généralisation intéressante de M. MITTAG-LEFFLER. M. PINCHERLE[1] a consacré un beau Mémoire à ces intégrales et leurs applications à divers questions d'Analyse entre autres les séries de facultés.

On doit à M. N. NIELSEN[2] la première étude systématique de la théorie des séries de facultés. Mais les démonstrations de M. NIELSEN manquent quelquefois de la rigueur et il y a de grandes réserves à faire à l'égard des théorèmes eux-mêmes.

D'ailleurs on peut faire l'objection générale suivante à M. NIELSEN; ses démonstrations reposent essentiellement sur la considération de deux nombres λ et λ' dits nombres critiques, mais ces nombres n'existent pas en général; tous les résultats de M. NIELSEN concernent donc seulement la classe particulière de séries pour lesquelles ces nombres existent. Néanmoins les Mémoires de M. NIELSEN sont d'une importance considérable et je tiens à dire que la lecture de ces Mémoires m'a été très utile. Dans ce qui suit, nous traitons plusieurs des problèmes étudiés par M. NIELSEN.

La véritable base d'une théorie a été donné par M. LANDAU dans son Mémoire: Über die Grundlagen der Theorie der Fakultätenreihen.[3] Au commencement du Chapitre II nous rappelons, pour la commodité du lecteur, ceux des résultats, démontrés par M. LANDAU, qui ont rapport avec ce Mémoire.

Dans le chapitre I j'énonce divers théorèmes auxiliaires dont j'ai à faire usage.

Dans le chapitre II j'étudie une transformation qui joue un rôle fondamental dans la théorie de la série de facultés et qui permet de prolonger analytiquement, dans un certain domaine, la fonction définie par la série; mais elle ne permet pas d'atteindre la droite $\sigma = l$ dont il a été question plus haut.

Dans le chapitre III je m'occupe d'une autre transformation qui est d'une

---

[1] Sur les fonctions déterminantes, Annales scientifiques de l'École Normale Supérieure sér. 3, t. 22, 1905, p. 9—68.

Voir aussi les Mémoires suivants de M. PINCHERLE relativement aux séries de facultés:

Sulle serie di fattoriali, Atti della R. Accad. dei Lincei, Rendiconti, serie 5ª, t. XI, sem. 1, 1902, p. 139—144 et p. 417—426. Sulla sviluppabilità di una funzioni in serie di fattoriali, ibid. t. 12, sem. 2, p. 336—343. Sulle funzioni meromorfe, ibid. p. 436—439. Sulle serie di fattoriali generalizzate, Rendiconti del Circolo matematico di Palermo t. 37, 1914, p. 379—390.

[2] Recherches sur les séries de factorielles, Annales scientifiques de l'École Normale Supérieure sér. 3, t. 19, 1902, p. 416—429.

Les séries de factorielles et les opérations fondamentales, Mathematische Annalen t. 59, 1904, p. 356—359.

Handbuch der Theorie der Gammafunktion. Leipzig 1906, p. 237—299.

[3] Sitzungsberichte der mathematisch-physikalischen Klasse der K. B. Akademie der Wissenschaften zu München, t. 36, 1906, p. 151—218.

$$k = \limsup_{n=\infty} \frac{\log |n a_n|}{\log n}; \tag{3}$$

il en résulte qu'il existe un nombre positif N tel que

$$|a_n| < n^{k-1+\varepsilon}, \tag{4}$$

si $n > N$, quelque petit que soit le nombre positif ε, pendant que, pour une infinité de valeurs de n, on a

$$|a_n| > n^{k-1-\varepsilon}.$$

Pour arriver à la définition de l'ordre dans un point ou sur une partie du cercle de convergence on introduit la notion d'écart d'une fonction sur un arc de courbe. Si les intégrales

$$n \int_a^b \cos n\Theta f(e^{i\Theta})\, d\Theta, \qquad n \int_a^b \sin n\Theta f(e^{i\Theta})\, d\Theta$$

restent finies et moindres en valeurs absolues qu'un nombre fixe I quand n tend vers l'infini, a et b étant des limites quelconques intérieures à l'intervalle (α, β), la fonction $f(z)$ est dite à écart fini et égal à I sur l'arc (α, β) du cercle $|z| = 1$. Posons

$$z^a D_z^a f(z) = \sum_{n=0}^{n=\infty} a_n \frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma(n+1-\alpha)} z^n.$$

On entend par l'ordre de $f(z)$ sur l'arc (α, β) un nombre k tel que

$$D_z^{-k-\varepsilon} f(z)$$

soit finie, continue et à écart fini sur l'arc (α, β) quel que soit le nombre positif ε mais que l'une au moins de ces propriétés fasse défaut à la fonction:

$$D_z^{-k+\varepsilon} f(z).$$

L'ordre dans un point singulier $z = e^{i\Theta_0}$ est égal à l'ordre sur un arc (α, β) comprenant le point Θ_0 et de longueur aussi petite que ce soit.

L'ordre dans un point régulier est égal à $-\infty$. Si l'ordre total sur le cercle $|z| = 1$ est égal à k, il y a sur ce cercle un point au moins d'ordre k.

Relativement à ce nombre k on a les théorèmes importants suivants:

A. *L'ordre d'une fonction sur un arc (α, β) n'est pas altéré quand on la multiplie par une fonction holomorphe et différente de zéro le long de (α, β).*

B. *L'ordre du produit de deux fonctions d'ordre positif est au plus égal à la somme des ordres des facteurs.*

nature plus radicale, et qui consiste à remplacer la variable x par $\frac{x}{\omega}$, ω étant un nombre positif.

Dans le chapitre IV je démontre que cette transformation permet de prolonger analytiquement la fonction définie par la série jusqu'à la ligne $\sigma = l$. Dans le même chapitre j'étudie le rapport entre les séries de facultés et les séries de puissances divergentes.

L'utilité d'un instrument analytique tel que la série (1) dépend d'une part de sa faculté de représenter une fonction analytique dans des domaines aussi étendus que possible d'autre part de la facilité avec laquelle elle se prête aux opérations fondamentales de l'Analyse. La série de facultés est à cet égard presque aussi souple que la série de puissances. Elle se prête un peu moins facilement que celle-ci à la différentiation et l'intégration mais plus facilement à l'opération Δ et son inverse. Nous étudierons dans le dernier chapitre le problème de la multiplication de deux séries de facultés, et nous terminons avec quelques mots sur la différentiation d'une série de facultés. L'application des autres opérations fondamentales ne présente aucune difficulté.

CHAPITRE I.

§ 1. L'étude du domaine de convergence d'une série de facultés repose essentiellement sur la notion d'ordre d'une série de TAYLOR sur son cercle de convergence, introduite par M. HADAMARD[1] dans sa Thèse bien connue. Relativement à cet ordre M. HADAMARD a démontré un certain nombre de théorèmes qui nous seront très utiles. Pour la commodité du lecteur nous commencerons par rappeler ceux des résultats de M. HADAMARD, dont nous allons faire usage, en y joignant quelques remarques simples pour les adapter à notre but.

Soit $f(z)$ une fonction définie par une série de TAYLOR:

$$f(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + \cdots$$

à rayon de convergence 1. L'ordre k de $f(z)$ sur le cercle $|z| = 1$ est d'après la définition de M. HADAMARD

[1] Journal de mathématiques sér. 4, t. 8 (1892), p. 154—186.

Voir aussi DARBOUX: Mémoire sur l'approximation des fonctions de très grands nombres et sur une classe étendue de développements en série. Journal de Mathématiques, 3e série, t. IV, p. 5—56 et p. 377—416, 1878.

E. FABRY: Comptes rendus de l'Académie des Sciences de Paris, t. 149, 1909, p. 767—768, p. 1043—1045; t. 151, 1910, p. 922—925. Acta mathematica t. 36, 1912, p. 69—104.

P. DIENES: Leçons sur les singularités des fonctions analytiques. Paris 1913, p. 1—32.

Si l'une des fonctions est d'ordre négatif il suffit dans la démonstration que donne M. HADAMARD de ce théorème de remplacer l'ordre négatif par zéro; donc:

C. *Le produit de deux fonctions, dont l'une est d'ordre positif k, est d'ordre au plus égal à k.*

Le produit de deux fonctions d'ordres négatifs est au plus d'ordre zéro, mais on peut ici obtenir un résultat un peu plus précis. En effet, soit f_1 et f_2 d'ordre k_1 et k_2 respectivement $(0 > k_1 \geqq k_2)$ et soit n le plus petit entier positif qui est plus grand que $-k_1$; considérons

$$D_z^n [f_1(z) f_2(z)] = \sum_{s=0}^{s=n} \binom{n}{s} D_z^{n-s} f_1(z)\, D_z^s f_2(z).$$

Le premier terme au deuxième membre est $D_z^n f_1(z) . f_2(z)$; $D_z^n f_1(z)$ est d'ordre $n + k_1 > 0$ et cet ordre ne sera pas augmenté par la multiplication par une fonction d'ordre négatif; ce terme est donc d'ordre $n + k_1$ au plus. L'ordre du dernier terme au deuxième membre est $\leqq n + k_2 \leqq n + k_1$. Tous les autres termes, étant le produit de deux fonctions d'ordre non-positif, sont au plus d'ordre zéro. Mais de la définition résulte immédiatement que la somme de deux fonctions d'ordre k est d'ordre k au plus, et que la somme de deux fonctions dont l'une est d'ordre k pendant que l'autre est d'un ordre inférieur à k, est nécessairement d'ordre k. $D_z^n [f_1(z) f_2(z)]$ est donc d'ordre $n + k_1$ au plus. Il en résulte que:

D. *L'ordre d'un produit de deux fonctions d'ordres négatifs est au plus égal au plus grand des ordres des facteurs.*

L'intérêt de cette notion d'ordre résulte surtout de ce qu'elle établit une certaine correspondance entre l'ordre de grandeur de $f(z)$ dans les points singuliers situés sur le cercle de convergence et l'ordre de croissance des coefficients a_n. On a, en effet, les quatre théorèmes suivants, dont les deux premiers sont dus à M. HADAMARD.

E. *Si l'ordre de $f(z)$ sur un arc déterminé (α, β) du cercle de convergence et à ses extrémités est égal au nombre positif k on a:*

1°.
$$\lim_{|z|=1} (1 - |z|)^{k+\varepsilon} f(z) = 0,$$

(ε étant un nombre positif aussi petit qu'on veut) et cela uniformément, pourvu que z tende vers un point de l'arc (α, β) par des valeurs intérieures au cercle.

2°. *Si $I(z)$ désigne l'écart sur l'arc de cercle de rayon $|z|$ et limité aux mêmes rayons que (α, β), le produit*

$$(1 - |z|)^{k+\varepsilon} I(z)$$

tend aussi vers 0.

Et inversement:

F. *Si les quantités*

$$(1-|z|)^k |f(z)| \quad \textit{et} \quad (1-|z|)^k |I(z)|$$

restent moindres qu'un nombre fixe lorsque l'on fait tendre z vers un point de l'arc (α, β) *par des valeurs intérieures au cercle, la fonction* $f(z)$ *est d'ordre au plus égal à* k *sur l'arc* (α, β).

Mais il faut reconnaître qu'il est presque toujours très difficile de bien discerner quel est l'ordre de grandeur de l'écart I d'une fonction donnée sur son cercle de convergence. Le théorème suivant, voisin à F, est plus facile à appliquer.

G. *Si la quantité*

$$(1-|z|)^k |f(z)| \qquad k \geqq 0$$

reste moindre qu'un nombre fixe A *lorsque l'on fait tendre z vers un point de l'arc* (α, β) *par des valeurs intérieures au cercle de convergence, la fonction* $f(z)$ *est d'ordre au plus égal à* $k+1$ *sur l'arc* (α, β)[1].

En effet, soit ε un nombre positif et formons la dérivée généralisée[2] d'ordre $-k-\varepsilon$

$$z^{-k-\varepsilon} D_z^{-k-\varepsilon} f(z) = \frac{1}{\Gamma(k+\varepsilon)} \int_0^1 (1-t)^{k+\varepsilon-1} f(tz)\, dt. \tag{5}$$

D'après l'hypothèse faite relativement à $f(z)$ on a, t étant < 1,

$$|f(tz)| < \frac{A}{(1-t)^k}$$

quelle que soit la valeur de z de module $\leqq 1$ et d'argument compris entre α et β; l'intégrale est donc uniformément convergente, et elle représente, par conséquent, une fonction qui est finie et continue sur l'arc (α, β). La fonction

$$z^{-k-\varepsilon-1} D_z^{-k-\varepsilon-1} f(z)$$

est à fortiori finie et continue sur l'arc (α, β), elle est d'ailleurs holomorphe à l'intérieur du cercle $|z| = 1$, et elle a une dérivée finie sur l'arc (α, β). Il en

[1] Cf. Horn l. c. p. 516—517.

[2] Sur l'extension de la notion de dérivée à des ordres non-entiers (positifs ou négatifs) voir Hadamard l. c. p. 154—162, et Riemann: Gesammelte mathematische Werke; Leipzig 1892, p. 353—366.

résulte qu'elle est à écart fini sur cette arc, et, par conséquent, d'ordre au plus égal à zéro. On voit donc que l'ordre de $f(z)$ sur l'arc (α, β) est $\leqq k + \varepsilon + 1$, or comme on peut choisir ε aussi petit qu'on veut, la proposition est démontrée. Ce théorème donne moins de précision que **F** mais on ne peut pas arriver à mieux,[1] c'est à dire qu'avec l'hypothèse faite sur la fonction $f(z)$ il n'existe aucun nombre $k' < k + 1$ tel que l'ordre de $f(z)$ sur l'arc (α, β) est nécessairement inférieur ou égal à k'.

Cela résulte de l'exemple suivant. Considérons la fonction de WEIERSTRASS[2]

$$f(z) = 1 + bz^{\nu} + b^2 z^{\nu^2} + b^3 z^{\nu^3} + \cdots \tag{6}$$

b étant un nombre positif inférieur à 1, et ν étant un entier positif supérieur à 1; supposons en plus que $b\nu > 1$. $f(z)$ admet, comme on sait, son cercle de convergence $|z| = 1$ comme coupure; elle est d'ailleurs absolument et uniformément convergente et par suite finie et continue sur ce cercle (mais elle n'est pas à écart fini[3]). L'ordre k de $f(z)$ sur le cercle $|z| = 1$ est d'après le théorème **G** inférieur ou égal à 1. Mais il est facile de déterminer directement cet ordre à l'aide de l'égalité (3); on trouve

$$k = 1 + \frac{\log b}{\log \nu}$$

ce nombre est inférieur à 1, mais en choisissant ν suffisamment grand, la différence $1 - k$ peut être rendue aussi petite qu'on veut.

Le degré d'infinitude de la fonction dans les points singuliers ne permet donc pas, à lui seul, de déterminer l'ordre sur le cercle de convergence, mais en résserrant un peu les hypothèses on démontrera ce résultat assez précis.

H. *Soit $f(z)$ holomorphe à l'intérieur du cercle $|z| = 1$; soit (α, β) un arc de ce cercle comprenant le point $z = 1$; supposons qu'il existe un nombre $k \geqq 1$ tel que le produit*

$$|f(z)(1 - |z|)^{k-1}(1 - z)|$$

dans le domaine $1 > |z| \geqq 0$, $\beta \geqq \operatorname{Arg} z \geqq \alpha$ reste plus petit qu'une constante fixe A, l'ordre de $f(z)$ sur l'arc (α, β) est alors $\leqq k$.

---

[1] Comparez avec les remarques de M. É. BOREL dans ses Leçons sur les séries à termes positifs. Paris 1902, p. 77—79.

[2] Abhandlungen aus der Funktionenlehre; Berlin 1886, p. 97—101 et Mathematische Werke t. II, p. 71—74.

[3] HADAMARD l. c. p. 170.

Il en résulte en particulier que, si $z = 1$ est le seul point singulier sur l'arc (α, β), et si le produit

$$|f(z)(1-z)^k| \qquad k \geqq 1$$

reste plus petit qu'une constante fixe A quand z tend vers 1 par des valeurs intérieures au cercle $|z| = 1$ ou le long de ce cercle, alors l'ordre de $f(z)$ dans le point $z = 1$ est $\leqq k$.

Démonstration. Considérons la dérivée d'ordre $-k-\varepsilon$

$$D_z^{-k-\varepsilon} f(z) = \frac{1}{\Gamma(k+\varepsilon)} \int_0^z (z-\zeta)^{k+\varepsilon-1} f(\zeta)\, d\zeta,$$

ε étant un nombre positif; on voit de la même manière que plus haut qu'elle est finie et continue sur l'arc (α, β); nous allons démontrer qu'elle est également à écart fini sur cette arc. Posons:

$$I = \frac{n}{\Gamma(k+\varepsilon)} \int_0^\gamma e^{in\Theta} \int_0^{e^{i\Theta}} (e^{i\Theta} - \zeta)^{k+\varepsilon-1} f(\zeta)\, d\zeta\, d\Theta;$$

il faut démontrer que $|I|$ reste plus petit qu'un nombre fixe quand le nombre entier n tend vers $+\infty$ ou vers $-\infty$, et cela quelle que soit la valeur de γ dans l'intervalle (α, β). En intégrant par partie, on trouve:

$$I = \frac{e^{in\gamma}}{i\Gamma(k+\varepsilon)} \int_0^{e^{i\gamma}} (e^{i\gamma} - \zeta)^{k+\varepsilon-1} f(\zeta)\, d\zeta - \frac{1}{i\Gamma(k+\varepsilon)} \int_0^1 (1-\zeta)^{k+\varepsilon-1} f(\zeta)\, d\zeta -$$

$$- \frac{1}{\Gamma(k+\varepsilon-1)} \int_0^\gamma e^{i(n+1)\Theta} \int_0^{e^{i\Theta}} (e^{i\Theta} - \zeta)^{k+\varepsilon-2} f(\zeta)\, d\zeta\, d\Theta.$$

Désignons les trois intégrales qui figurent au second membre par I_1, I_2 et I_3 respectivement. En changeant la variable dans I_1 on trouve

$$|I_1| \leqq \frac{1}{\Gamma(k+\varepsilon)} \int_0^1 (1-t)^{k+\varepsilon-1} |f(te^{i\gamma})|\, dt < \frac{A}{\Gamma(k+\varepsilon)} \int_0^1 (1-t)^\varepsilon \frac{dt}{|1-te^{i\gamma}|};$$

la dernière intégrale est évidemment finie et indépendante de n quel que soit γ entre α et β. $|I_2|$ est également fini et indépendant de n. Considérons l'intégrale double; on trouve:

$$|I_3| < \frac{1}{\Gamma(k+\varepsilon-1)} \int_0^{\gamma} \int_0^1 (1-t)^{k+\varepsilon-2} |f(e^{i\Theta}t)| \, dt \, d\Theta$$

et en vertu de l'hypothèse faite sur la manière dont $f(z)$ devient infinie

$$|I_3| < \frac{A}{\Gamma(k+\varepsilon-1)} \int_0^{\gamma} \int_0^1 (1-t)^{\frac{\varepsilon}{2}-1} \frac{dt}{|1-te^{i\Theta}|^{1-\frac{\varepsilon}{2}}} d\Theta.$$

Cette dernière intégrale est convergente quel que soit γ. La fonction $D_z^{-k-\varepsilon} f(z)$ est donc bien finie, continue et à écart fini sur l'arc (α, β). Il en résulte que l'ordre de $f(z)$ sur l'arc (α, β) est $\leqq k+\varepsilon$, ε étant un nombre positif qu'on peut choisir aussi petit qu'on veut c. q. f. d.

Il va sans dire que le théorème reste vrai, s'il y a sur l'arc (α, β) un nombre fini de points singuliers de la même nature que $z=1$.

§ 2. Les théorèmes précédents permettent dans des cas étendus, sinon de déterminer l'ordre, du moins d'assigner une borne supérieure et inférieure de celui-ci. Mais il y a un cas particulier important, où on peut déterminer la valeur exacte de l'ordre, c'est celui où la fonction $f(z)$ se comporte sur le cercle de convergence comme une solution d'une équation différentielle linéaire à points singuliers réguliers. Supposons que $f(z)$ soit holomorphe pour $|z| \leqq 1$ à l'exception du point $z=1$, et qu'elle admette au voisinage de $z=1$ une représentation de la forme

$$f(z) = \sum_{i=1}^{i=p} (1-z)^{\alpha_i} \{\psi_{i,0}(z) + \psi_{i,1}(z) \log(1-z) + \cdots + \psi_{i,r}(z) \log^r(1-z)\}, \qquad (7)$$

les $\psi_{i,s}(z)$ étant des fonctions holomorphes au voisinage de $z=1$ et telles que l'un au moins des nombres $\psi_{i,s}(1)$ $(s=0, 1, \ldots r)$ soit différent de zéro. $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots$ sont des nombres complexes quelconques; soit pour fixer les idées

$$\Re(\alpha_1) \leqq \Re(\alpha_2) \leqq \Re(\alpha_3) \leqq \cdots$$

L'ordre de $(1-z)^{\alpha} \log^r(1-z)$ dans le point $z=1$ est égal à $-\Re(\alpha)$; il y a exception seulement dans le cas où α est égal à un entier non-négatif et en même temps $r=0$; l'ordre est alors égal à $-\infty$. Pour le voir supposons d'abord que $\Re(\alpha+1) \leqq 0$; l'ordre est alors, d'après le théorème **H**, $\leqq -\Re(\alpha)$ et d'après le théorème **E** $\geqq -\Re(\alpha)$. L'ordre est donc nécessairement égal à $-\Re(\alpha)$.

Dans le cas où $n > \Re(\alpha+1) > 0$, n étant un entier positif, il suffit de considérer la dérivée d'ordre n de $(1-z)^{\alpha} \log^r(1-z)$ et l'on arrive au même résultat. L'ordre n'est pas altéré par la multiplication par une fonction holomorphe et différente de zéro; on voit donc que $f(z)$ est d'ordre $-\Re(\alpha_1)$ sur le cercle $|z|=1$ à moins que α_1 ne soit un entier non-négatif et que $\psi_{1,1}(1)=\cdots=\psi_{1,r}(1)=0$. L'ordre est alors égal à $-R(\alpha_2)$ etc. ...

Soit ω un nombre dont la partie réelle est positive. Posons

$$1-z=(1-t)^{\frac{1}{\omega}}.$$

Nous aurons besoin plus loin de pouvoir reconnaître quel sera l'ordre de $f(z)$ considérée comme fonction de t dans le point $t=1$. On le voit presque immédiatement. Considérons le terme

$$(1-z)^{\alpha_1}\psi_{1,0}(z)=(1-t)^{\frac{\alpha_1}{\omega}}\sum_{s=0}^{s=\infty}A_s(1-t)^{\frac{s}{\omega}}.$$

Il est d'ordre $-\Re\left(\frac{\alpha_1}{\omega}\right)$ dans le point $t=1$, pourvu que A_0 soit différent de zéro. On voit donc que l'ordre de $f(z)$, considérée comme fonction de t, dans le point $t=1$ est égal au plus grand des nombres

$$-\Re\left(\frac{\alpha_i}{\omega}\right) \qquad\qquad i=1,2,\ldots,p,$$

en mettant de côté le cas d'exception dont nous avons parlé plus haut.

§ 3. Rappelons encore un dernier lemme, concernant la valeur asymptotique de la fonction $\Gamma(s)$, dont nous aurons à nous servir. Soit β un nombre complexe quelconque indépendant de s, on a:

$$\frac{\Gamma(s)\,s^\beta}{\Gamma(s+\beta)}=1+\epsilon,$$

ϵ tendant uniformément vers zéro quand $|s|$ tend vers l'infini de manière que s s'éloigne indéfiniment de l'axe des nombres négatifs.

CHAPITRE II.

§ 4. Cela posé, considérons la série de facultés

$$\Omega(x)=\sum_{s=0}^{s=\infty}\frac{a_{s+1}\,s!}{x(x+1)\ldots(x+s)}, \tag{1}$$

et commençons par rappeler brièvement les principaux résultats, concernant ces séries, démontrés par M. Landau dans le Mémoire cité.

Le domaine de convergence est, comme nous l'avons déjà dit, un demi-plan limité à gauche par une droite perpendiculaire à l'axe des abscisses et coupant celui-ci en un certain point λ, dit l'abscisse de convergence. La convergence est uniforme dans tout domaine fini situé à l'intérieur du demi-plan de convergence et ne contenant aucun des points $0, -1, -2, \ldots$ La série représente donc une fonction analytique, holomorphe pour toute valeur finie de x telle que $\sigma > \lambda$[1] en exceptant les points $0, -1, -2, \ldots$ qui sont des pôles simples ou des points réguliers de la fonction $\Omega(x)$, s'ils sont situés à l'intérieur du demi-plan de convergence. Sur la droite $\sigma = \lambda$ la série peut être convergente ou divergente, ou elle peut converger seulement sur une partie de cette ligne. L'abscisse de convergence λ se détermine, du moins si elle n'est pas négative, de la manière suivante. Posons:

$$c = \limsup_{n=\infty} \frac{\log \left|\sum_{s=0}^{s=n} a_{s+1}\right|}{\log n}. \tag{8}$$

Si $\lambda \geqq 0$, on a $\lambda = c$, et quel que soit λ, on a $\lambda \leqq c$; λ peut en particulier prendre la valeur $-\infty$, la série représente dans ce cas une fonction méromorphe de x.

Généralement la série ne converge absolument que dans une partie de son domaine de convergence $\sigma > \lambda$; le domaine de convergence absolue est également un demi-plan $\sigma > \bar{\lambda}$; $\bar{\lambda}$ est dite l'abscisse de convergence absolue et l'on a $\lambda \leqq \bar{\lambda} \leqq \lambda + 1$. Il va sans dire que $\bar{\lambda}$ se détermine, si elle n'est pas négative, par la formule:

$$\bar{\lambda} = \limsup_{n=\infty} \frac{\log \sum_{s=0}^{s=n} |a_{s+1}|}{\log n}.$$

M. Landau fait en outre voir l'analogie formelle qu'il y a entre la série (1) et la série de Dirichlet

$$\psi(x) = \sum_{s=1}^{s=\infty} \frac{a_{s+1}}{s^x} \tag{9}$$

avec les mêmes coefficients. Les deux séries sont convergentes et divergentes pour les mêmes valeurs de x (en exceptant les points $0, -1, -2, \ldots$) et plus encore, la fonction analytique

$$\frac{\Omega(x)}{\Gamma(x)} - \psi(x),$$

[1] Nous posons toujours $x = \sigma + i\tau$.

définie par les séries pour $\sigma > \lambda$, est holomorphe pour $\sigma > \lambda - 1$. Il serait intéressant de voir si cette analogie peut se poursuivre plus loin; nous comparerons souvent, dans ce qui suit, nos résultats avec les théorèmes correspondants rélatifs aux séries de DIRICHLET.

Il peut arriver qu'il se trouve un point singulier de la fonction $\Omega(x)$ sur la droite de convergence $\sigma = \lambda$, mais en général il n'en est pas ainsi, comme l'a fait observer M. PINCHERLE.[1] Il existe, au contraire, en général une bande $l < \sigma \leqq \lambda$ située à gauche du domaine de convergence dans laquelle la fonction $\Omega(x)$ est holomorphe et bornée.

Le premier problème que nous allons traiter consiste à trouver le prolongement analytique de la fonction $\Omega(x)$ dans la bande $l < \sigma \leqq \lambda$ ou du moins dans une partie de cette bande. On y réussît en introduisant dans la série (1) un paramètre dont elle ne dépend qu'apparemment pendant qu'au contraire le domaine de convergence de la série dépend de la valeur qu'on attribue à ce paramètre. C'est au fond le même procédé que M. MITTAG-LEFFLER a appliqué avec tant de succès à la série de TAYLOR. Ici, étant donné la forme sous laquelle nous l'employons, nous en obtenons un résultat beaucoup moins parfait. Nous avons pourtant cru utile d'y insister un peu, parce que ce que nous allons faire n'est que de transformer la série de facultés (1) en une autre série de facultés avec la variable $\alpha x + \beta$ au lieu de x, (α et β étant des constantes convenablement choisies). Mais l'étude de ces transformations s'impose pour d'autres raisons encore, et dans presque toutes les applications des séries de facultés on est amené à en faire constamment usage. Nous aurons souvent, dans ce Mémoire même, l'occasion de nous en servir.

§ 5. Soit β un nombre dont la partie réelle est positive; nous allons étudier la formule:

$$\Omega(x) = \sum_{s=0}^{s=\infty} \frac{a_{s+1}\, s!}{x(x+1)\dots(x+s)} = \sum_{s=0}^{s=\infty} \frac{\left[a_{s+1} + \binom{\beta}{1} a_s + \binom{\beta+1}{2} a_{s-1} + \cdots + \binom{\beta+s-1}{s} a_1\right] s!}{(x+\beta)(x+\beta+1)\dots(x+\beta+s)} \tag{10}$$

où le second membre ne dépend qu'apparemment de β et où l'on a posé

$$\binom{\beta+s-1}{s} = \frac{\beta(\beta+1)\dots(\beta+s-1)}{s!}.$$

[1] Sui limiti della convergenza di alcune espressioni analitiche, Rendiconti della sessioni della R. Accademia delle Scienze dell'Istituto di Bologna, sér. 2, t. 8, 1904, p. 13. Comparez aussi LANDAU: l. c. Grundlagen etc., p. 188.

Nous démontrerons d'abord que la relation (10) est valable dans le domaine de convergence absolue de la première série, si l'on suppose en plus que $\sigma > 0$.

En effet on a:

$$\frac{1}{x} = \int_0^1 t^{x+\beta-1} t^{-\beta} dt;$$

développons $t^{-\beta}$ par la formule du binôme

$$t^{-\beta} = \sum_{s=0}^{s=\infty} \binom{\beta + s - 1}{s} (1-t)^s$$

et intégrons terme par terme; on trouve

$$\frac{1}{x} = \frac{1}{x+\beta} + \frac{\beta}{(x+\beta)(x+\beta+1)} + \frac{\beta(\beta+1)}{(x+\beta)(x+\beta+1)(x+\beta+2)} + \cdots \tag{11}$$

cette série de facultés converge absolument si $\sigma > 0$, pourvu que x ne soit pas égal à un des nombres $-\beta, -\beta-1, -\beta-2, \ldots$. En effet d'après le § 3 il existe un nombre fixe K indépendant de s tel que

$$\left| \frac{\beta(\beta+1)\ldots(\beta+s-1)}{(x+\beta)(x+\beta+1)\ldots(x+\beta+s)} \right| < \frac{K}{s^{\sigma+1}}$$

quel que soit l'entier positif s.

Formons la différence $n^{\text{ième}}$ des deux membres de (11), on trouve:

$$\frac{n!}{x(x+1)\ldots(x+n)} = \sum_{s=0}^{s=\infty} \frac{\beta(\beta+1)\ldots(\beta+s-1)}{(x+\beta)(x+\beta+1)\ldots(x+\beta+n+s)} \frac{(n+s)!}{s!}, \tag{11 bis}$$

où la série converge absolument, si $\sigma > 0$.

Cela posé, considérons la série double

$$\sum_{n,s} u_{n,s},$$

où la sommation doit être étendue à toutes les valeurs non-négatives de n et de s, et où nous avons posé

$$u_{n,n+s} = \binom{\beta+s-1}{s} \frac{(n+s)!\, a_{n+1}}{(x+\beta)(x+\beta+1)\ldots(x+\beta+n+s)} \qquad s \geq 0,$$

pendant que $u_{n,s} = 0$, si $s < n$. Je veux démontrer que la série double est absolument convergente. Posons $\beta_1 = \Re(\beta)$; d'après le § 3 on sait trouver un nombre positif K indépendant de n et de s tel que l'inégalité

$$\left|\frac{\beta(\beta+1)\ldots(\beta+s-1)}{(x+\beta)(x+\beta+1)\ldots(x+\beta+n+s)}\right| < K\frac{\beta_1(\beta_1+1)\ldots(\beta_1+s-1)}{(\sigma+\beta_1)(\sigma+\beta_1+1)\ldots(\sigma+\beta_1+n+s)}$$

a lieu quels que soient les entiers non-négatifs n et s. La formule (11 bis) nous donne donc l'inégalité suivante:

$$\sum_{s=0}^{s=\infty}|u_{n,n+s}| < K|a_{n+1}|\sum_{s=0}^{s=\infty}\frac{(n+s)!\,\beta_1(\beta_1+1)\ldots(\beta_1+s-1)}{s!\,(\sigma+\beta_1)(\sigma+\beta_1+1)\ldots(\sigma+\beta_1+n+s)} = \frac{K.n!\,|a_{n+1}|}{\sigma(\sigma+1)\ldots(\sigma+n)}.$$

Il en résulte que la série double

$$\sum_{n,s} u_{n,s}$$

est absolument convergente, si $\sigma > 0$, et $\sigma > \bar{\lambda}$, $\bar{\lambda}$ étant l'abscisse de convergence absolue de la série (1), et l'on a par conséquent l'identité

$$\sum_{n=0}^{n=\infty}\left(\sum_{s=0}^{s=\infty}u_{n,s}\right) = \sum_{s=0}^{s=\infty}\left(\sum_{n=0}^{n=\infty}u_{n,s}\right),$$

qui entraine l'identité (10). Le cas $\beta = 1$ est particulièrement intéressant. On trouve

$$\Omega(x) = \sum_{s=0}^{s=\infty}\frac{s!\,a_{s+1}}{x(x+1)\ldots(x+s)} = \sum\frac{s!\,(a_1+a_2+\cdots+a_{s+1})}{(x+1)(x+2)\ldots(x+s+1)}. \tag{12}$$

Nous avons démontré l'exactitude de cette relation dans le domaine de convergence *absolue* de la série au premier membre. Mais, les séries étant uniformément convergentes, la relation subsiste partout où les deux séries convergent.

Soit c le nombre défini par l'égalité (8), on sait trouver un nombre fixe K tel que, pour $s = 1, 2, 3, \ldots$, on ait

$$|a_1 + a_2 + \cdots + a_{s+1}| < K s^{c+\varepsilon}, \tag{13}$$

quelque petit que soit le nombre positif ε. Soit, comme plus haut, λ l'abscisse de convergence de la série au premier membre de (12), on voit que la série au deuxième membre converge *absolument*, si $\sigma > \lambda$, $\sigma > 0$. Dans les applications des séries de facultés on est souvent gêné par le fait que la convergence n'est absolue que dans une partie du domaine de convergence. On évite cet inconvénient en transformant préalablement la série à l'aide de la formule (12).

§ 6. Cette formule nous permet aussi de tirer une conclusion importante relativement à la fonction $\Omega(x)$ définie par le développement (1). Soit $\varkappa$ un nombre positif plus grand que λ, soit x un nombre tel que $\sigma \geqq \varkappa$, on a d'après (12)

$$|\Omega(x)| \leqq \frac{\varkappa + 1}{|x + 1|} \sum_{s=0}^{s=\infty} \frac{s!\, |a_1 + a_2 + \cdots + a_{s+1}|}{(\varkappa + 1)(\varkappa + 2) \ldots (\varkappa + s + 1)},$$

mais l'inégalité (13) montre qu'on sait trouver un nombre positif M indépendant de s tel que

$$|a_1 + a_2 + \cdots + a_{s+1}| < M \frac{(c' + \varepsilon + 1)(c' + \varepsilon + 2) \ldots (c' + \varepsilon + s)}{s!} \qquad s = 1, 2, 3, \ldots \tag{14}$$

où c' désigne le plus grand des nombres c et 0. En ayant soin de choisir en outre M plus grand que $|a_1|$ on trouve

$$|\Omega(x)| < M \frac{\varkappa + 1}{|x + 1|} \sum_{s=0}^{s=\infty} \frac{(c' + \varepsilon + 1)(c' + \varepsilon + 2) \ldots (c' + \varepsilon + s)}{(\varkappa + 1)(\varkappa + 2) \ldots (\varkappa + s + 1)};$$

mais on peut toujours choisir ε suffisamment petit pour que $\varkappa > c' + \varepsilon$; la série est donc convergente et la formule (11) nous donne

$$|\Omega(x)| < \frac{M}{|x + 1|} \frac{\varkappa + 1}{\varkappa - c' - \varepsilon};$$

il en résulte que $|x\Omega(x)|$ reste plus petit qu'une constante fixe dans le domaine $\sigma \geqq \varkappa$.

Posons

$$\Omega(x) = \sum_{s=0}^{s=n-1} \frac{a_{s+1}\, s!}{x(x + 1) \ldots (x + s)} + R_n(x) \tag{15}$$

et appliquons le même raisonnement à la fonction $R_n(x)$ on trouve d'abord

$$R_n(x) = \sum_{s=n}^{s=\infty} \frac{(a_{n+1} + a_{n+2} + \cdots + a_{s+1})\, s!}{(x + 1)(x + 2) \ldots (x + s + 1)};$$

soit $\sigma \geqq \varkappa$, on a

$$|R_n(x)| \leqq \frac{(\varkappa + 1)(\varkappa + 2) \ldots (\varkappa + n + 1)}{|x + 1||x + 2| \ldots |x + n + 1|} \sum_{s=n}^{s=\infty} \frac{|a_{n+1} + a_{n+2} + \cdots + a_{s+1}|\, s!}{(\varkappa + 1)(\varkappa + 2) \ldots (\varkappa + s + 1)},$$

enfin on sait trouver un nombre positif M indépendant de n et de s tel que

$$|a_{n+1}+a_{n+2}+\cdots+a_{s+1}|<M\frac{(c'+\varepsilon+1)(c'+\varepsilon+2)\dots(c'+\varepsilon+s)}{s!} \qquad s=n,\, n+1,\, n+2,\dots$$

ε étant un nombre positif qu'on peut choisir assez petit pour que l'on ait $\varkappa>c'+\varepsilon$; on trouve donc

$$|R_n(x)|<M\frac{(\varkappa+1)(\varkappa+2)\dots(\varkappa+n+1)}{|x+1||x+2|\dots|x+n+1|}\sum_{s=n}^{s=\infty}\frac{(c'+\varepsilon+1)(c'+\varepsilon+2)\dots(c'+\varepsilon+s)}{(\varkappa+1)(\varkappa+2)\dots(\varkappa+s+1)}; \tag{16}$$

la série (11) étant absolument convergente, si $\sigma>0$, on voit que la série au second membre de cette inégalité est le terme reste d'une série convergente, dont les termes sont indépendants de x; σ étant $\geqq\varkappa$ on a

$$\frac{(\varkappa+1)(\varkappa+2)\dots(\varkappa+n+1)}{|x+1||x+2|\dots|x+n+1|}\leqq 1;$$

il en résulte que $|R_n(x)|$, dans le domaine $\sigma\geqq\varkappa$, tend uniformément vers zéro quand n tend vers l'infini.

Théorème I. *La série* (1) *est uniformément convergente dans le domaine* $\sigma\geqq\varkappa$, $\varkappa$ *désignant un nombre positif plus grand que l'abscisse de convergence* λ.

M. Landau[1] a déjà démontré que la série (1) converge uniformément dans tout domaine *fini*, situé à l'intérieur du demi-plan de convergence et ne contenant aucun des points $x=0,\,-1,\,-2,\dots$

Pour les séries de Dirichlet[2] de la forme (9) la convergence est également uniforme dans tout domaine fini situé à l'intérieur du domaine de convergence $\sigma>\lambda$, et même dans tout domaine de la forme

$$\sigma>\lambda+\varepsilon, \qquad -e^{M\sigma}\leqq\tau\leqq e^{M\sigma},$$

ε étant un nombre positif et M étant un nombre réel; *mais la convergence n'est pas uniforme dans le demi-plan* $\sigma\geqq\lambda+\varepsilon$.

De l'inégalité (16) on peut tirer une autre conclusion importante. Soit maintenant n un nombre fixe on voit que

$$|x+1||x+2|\dots|x+n+1||R_n(x)|,$$

---

[1] l. c. Grundlagen etc., p. 161.

[2] Voir Landau: Handbuch der Lehre von der Verteilung der Primzahlen. Leipzig und Berlin 1909, p. 735—742.

ou, ce qui revient au même, que

$$|x^{n+1} R_n(x)|$$

reste plus petit qu'une constante fixe indépendante de x dans le domaine $\sigma \geqq \varkappa$; on a donc le théorème suivant.

Théorème II. *La fonction $\Omega(x)$ définie par la série* (1) *peut se mettre sous la forme*

$$\Omega(x) = \frac{a_1}{x} + \frac{\mu(x)}{x(x+1)}, \tag{17}$$

$\mu(x)$ étant une fonction dont le module admet une borne supérieure dans le domaine $\sigma \geqq \varkappa$, et l'on a uniformément dans ce domaine

$$\begin{aligned} &\lim_{x=\infty} x\Omega(x) = a_1, \\ &\lim_{x=\infty} (x+1)[x\Omega(x) - a_1] = a_2 \,.\, 1! \\ &\lim_{x=\infty} (x+2)\{(x+1)[x\Omega(x) - a_1] - a_2\} = a_3 \,.\, 2! \\ &\text{etc.} \end{aligned} \tag{18}$$

Nous verrons plus loin qu'on peut encore préciser un peu ce résultat; on y arrive le plus facilement à l'aide de l'intégrale définie que nous allons maintenant étudier.

§ 7. Soit C un contour rectangulaire dont les côtés sont parallèles aux axes des coordonnées et avec les sommets $\varkappa - in$, $\varkappa + in$, $\varkappa + m + in$, $\varkappa + m - in$, où m et n désignent des nombres positifs et $\varkappa$ ayant la même signification que plus haut. Soit x un point situé à l'intérieur du contour, on a

$$\Omega(x) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_C \frac{\Omega(z)}{z-x} dz.$$

Nous venons de voir que $|z\Omega(z)|$ reste borné dans le domaine $\sigma \geqq \varkappa$; faisons tendre n vers l'infini, on trouve

$$\Omega(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\varkappa - i\infty}^{\varkappa + i\infty} \frac{\Omega(z)}{x-z} dz + \frac{1}{2\pi i} \int_{\varkappa + m - i\infty}^{\varkappa + m + i\infty} \frac{\Omega(z)}{z-x} dz,$$

or la dernière intégrale est identiquement zéro; on a donc

$$\Omega(x) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\varkappa-i\infty}^{\varkappa+i\infty} \frac{\Omega(z)}{x-z}\, dz, \tag{19}$$

le chemin d'intégration étant une droite perpendiculaire à l'axe des abscisses et coupant celui-ci dans le point $\varkappa$; mais, la partie réelle de x étant plus grande que $\varkappa$, cette dernière intégrale peut s'écrire

$$\Omega(x) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\varkappa-i\infty}^{\varkappa+i\infty} \Omega(z) \int\limits_{0}^{\infty} e^{(z-x)\xi}\, d\xi\, dz. \tag{20}$$

On peut ici renverser l'ordre des intégrations; pour le voir appliquons le théorème II et substituons, dans l'intégrale (20), au lieu de $\Omega(z)$ l'expression (17); (20) se trouve ainsi décomposé en une somme de deux intégrales. Pour la première il n'y a pas de difficultés. La seconde est

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\varkappa-i\infty}^{\varkappa+i\infty} \frac{\mu(z)}{z(z+1)} \int\limits_{0}^{\infty} e^{(z-x)\xi}\, d\xi\, dz;$$

mais cette intégrale est absolument convergente ainsi que les deux intégrales simples

$$\int\limits_{0}^{\infty} e^{(z-x)\xi}\, d\xi \quad \text{et} \quad \int\limits_{\varkappa-i\infty}^{\varkappa+i\infty} \frac{\mu(z)}{z(z+1)}\, e^{\xi z}\, dz;$$

on peut donc renverser l'ordre des intégrations[1] et on trouve

$$\Omega(x) = \int\limits_{0}^{\infty} e^{-x\xi}\, F(\xi)\, d\xi, \tag{21}$$

où

$$F(\xi) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\varkappa-i\infty}^{\varkappa+i\infty} e^{\xi z}\, \Omega(z)\, dz; \tag{21 bis}$$

en posant $e^{-\xi} = t$ on trouve encore

---

[1] Bromwich: Theory of infinite series, p. 457. London 1908.

$$\Omega(x) = \int_0^1 t^{x-1}\varphi(t)\,dt, \tag{22}$$

où

$$\varphi(t) = F\left(\log\frac{1}{t}\right) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\varkappa-i\infty}^{\varkappa+i\infty} t^{-z}\,\Omega(z)\,dz. \tag{22 bis}$$

Nous avons supposé que $\varkappa$ est un nombre réel quelconque tel que $\varkappa > \lambda$, $\varkappa > 0$; les intégrales (21 bis) et (22 bis) sont donc indépendantes de la valeur qu'on attribue à $\varkappa$ ces hypothèses étant satisfaites.

S'il existe un nombre positif l inférieur à $\varkappa$ (et inférieur à λ) tel que $\Omega(x)$ est holomorphe pour $\sigma \geqq l$ et susceptible d'une représentation de la forme (17) $|\mu(x)|$ admettant une borne supérieure dans le domaine $\sigma \geqq l$, on peut même, sans changer la valeur des intégrales (21 bis) et (22 bis), substituer à $\varkappa$ ce nombre l ou tout autre nombre positif supérieur à l. C'est d'ailleurs facile de le vérifier directement à l'aide du théorème de Cauchy sur les intégrales complexes.

Ces intégrales sont convergentes respectivement pour $0 < \xi < \infty$ et pour $1 > t > 0$, mais la convergence n'est pas absolue; en effet on a

$$\varphi(t) = \frac{a_1}{2\pi i}\int_{l-i\infty}^{l+i\infty} \frac{t^{-z}}{z}\,dz + \frac{1}{2\pi i}\int_{l-i\infty}^{l+i\infty} t^{-z}\,\frac{\mu(z)}{z(z+1)}\,dz, \tag{23}$$

la seconde intégrale est absolument convergente, mais la première est seulement convergente. Sa valeur est d'ailleurs bien connue;[1] à l'aide du théorème de Cauchy on démontre aisément qu'on a:

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{l-i\infty}^{l+i\infty} \frac{t^{-z}}{z-\alpha}\,dz = \begin{cases} t^{-\alpha}, & \text{si } 1 > t > 0, \\ 0\ , & \text{si } \quad t > 1, \end{cases} \tag{24}$$

l étant supérieur à la partie réelle de α; pour $t = 1$ cette intégrale est divergente. Formons la différence finie d'ordre s par rapport à α; on trouve

$$\frac{s!}{2\pi i}\int_{l-i\infty}^{l+i\infty} \frac{t^{-z}\,dz}{(z-\alpha)(z-\alpha+1)\ldots(z-\alpha+s)} = \begin{cases} t^{-\alpha}(1-t)^s, & \text{si } 1 > t > 0, \\ 0, & \text{si } \quad t > 1. \end{cases} \tag{25}$$

[1] Landau l. c. Handbuch etc., p. 342—345.

Cela posé, nous allons démontrer que la fonction $\varphi(t)$, qui est définie par l'intégrale[1] (22 bis) pour $1 > t > 0$, est une fonction analytique de t, holomorphe à l'intérieur du cercle $|t-1| = 1$ et d'ordre fini sur ce cercle. Pour le voir posons dans l'expression (23) l égal à un nombre positif plus grand que l'abscisse de convergence absolue de la série

$$\frac{\mu(z)}{z(z+1)} = \sum_{s=1}^{s=\infty} \frac{a_{s+1}\, s!}{z(z+1)\ldots(z+s)}$$

et intégrons terme par terme; on trouve

$$\varphi(t) = \sum_{s=0}^{s=\infty} a_{s+1}(1-t)^s. \tag{26}$$

Pour justifier cette opération remarquons d'abord que la série est absolument et uniformément convergente dans tout intervalle finie $(l - iN,\ l + iN')$. Posons

$$\frac{\bar{\mu}(z)}{|z|\,|z+1|} = \sum_{s=1}^{s=\infty} \frac{|a_{s+1}|\, s!}{|z|\,|z+1|\ldots|z+s|};$$

il existe une constante fixe K tel que $\bar{\mu}(z) < K$ le long de la ligne d'intégration; il en résulte que l'intégrale

---

[1] Cette intégrale représente zéro, si $t > 1$; si $t = 1$ elle est divergente; pour les valeurs complexes de t il en est de même. Dans la théorie des séries de Dirichlet

$$\psi(z) = \sum_{s=1}^{s=\infty} \frac{a_s}{s^z},$$

on rencontre une intégrale de la même forme

$$\lim_{T=\infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{x-iT}^{x+iT} t^{-z} \frac{\psi(z)}{z}\, dz,$$

mais cette intégrale est discontinue dans les points $t = 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots$ avec les sauts brusques $a_1, a_2, a_3, a_4, \ldots$; dans toutes les intervalles $\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n+1}\right)$ elle a une valeur constante. La présence du facteur $\frac{1}{z}$ sous le signe dans cette dernière intégrale, mais non dans l'intégrale (22 bis), provient de ce que nous avons préalablement divisé la série de facultés par z ou, ce qui revient au même, supprimé son terme constant.

$$\int_{l-i\infty}^{l+i\infty} t^{-z} \frac{\overline{\mu}(z)\,dz}{|z||z+1|}$$

est absolument convergente. L'intégration terme par terme est par conséquent légitime.[1] Divisons les deux membres de l'équation (26) par t, on trouve

$$\frac{\varphi(t)}{t} = \sum_{s=0}^{s=\infty} (a_1 + a_2 + \cdots + a_{s+1})(1-t)^s.$$

Soit c le nombre défini par l'équation (8), on voit que $t^{-1}\varphi(t)$ est holomorphe à l'intérieur du cercle $|t-1| = 1$ et d'ordre $c+1$ sur ce cercle. On a donc le théorème suivant:

Théorème III.[2] *La série* (1), *ayant l'abscisse de convergence* λ, *définit une fonction analytique* $\Omega(x)$ *admettant une représentation de la forme*

$$\Omega(x) = \int_0^1 t^{x-1}\varphi(t)\,dt, \tag{22}$$

$\varphi(t)$ *étant une fonction analytique, définie par l'équation* (22 bis) *pour* $1 > t > 0$, *et holomorphe à l'intérieur du cercle* $|t-1| = 1$. *L'ordre* k *de* $t^{-1}\varphi(t)$ *sur ce cercle est égal à* $\lambda + 1$, *si* $k > 1$; *si* $k \leq 1$ *on a* $\lambda \leq k - 1$.

Il est souvent plus facile de déterminer λ à l'aide de ce théorème que par l'égalité (8).

MM. Phragmén, Lerch et Pincherle ont démontré que le domaine de convergence de l'intégrale (22) est, comme pour la série (1), un demi-plan et qu'elle représente une fonction holomorphe à l'intérieur de ce demi-plan. Mais l'abscisse de convergence de l'intégrale peut être inférieure, égale ou supérieure à l'abscisse de convergence λ de la série. Dans le § 8 nous indiquons l'exemple d'une fonction où λ est égal à $-\infty$ pendant que l'intégrale est seulement convergente pour $\sigma > 0$. Dans le § 14 on trouve l'exemple d'une fonction, où λ est plus grand que l'abscisse de convergence de l'intégrale (22).

§ 8. Reprenons maintenant l'étude de l'égalité (10). Soit β un nombre *quelconque* et écrivons

---

[1] Bromwich l. c., p. 453.

[2] Comparez avec les travaux cités de M. Nielsen Handbuch etc., p. 239—245 et de M. Pincherle: Sur les fonctions déterminantes, p. 52.

$$\Omega(x)=\int_0^1 t^{x+\beta-1}t^{-\beta}\varphi(t)\,dt;$$

la série (26) nous donne le développement

$$t^{-\beta}\varphi(t)=\sum_{s=0}^{s=\infty}\left[a_{s+1}+\binom{\beta}{1}a_s+\binom{\beta+1}{2}a_{s-1}+\cdots+\binom{\beta+s-1}{s}a_1\right](1-t)^s.$$

Si la partie réelle de x est suffisamment grande on peut aisément justifier l'intégration terme par terme et on retrouve la formule

$$\Omega(x)=\sum_{s=0}^{s=\infty}\frac{\left[a_{s+1}+\binom{\beta}{1}a_s+\binom{\beta+1}{2}a_{s-1}+\cdots+\binom{\beta+s-1}{s}a_1\right]s!}{(x+\beta)(x+\beta+1)\ldots(x+\beta+s)};\tag{27}$$

soit k l'ordre de $t^{-1}\varphi(t)$ sur le cercle $|t-1|=1$ et k' l'ordre de $t^{-\beta-1}\varphi(t)$ sur ce cercle. Des lemmes **B**, **C** et **D** dans le § 1 sur l'ordre d'un produit de deux fonctions il résulte les inégalités suivantes

Si $k\geqq 0$ et $\Re(\beta)\geqq 0$ on a $k'\leqq k+\Re(\beta)$,
» $k\geqq 0$ » $\Re(\beta)<0$ » » $k'\leqq k$,
» $k<0$ » $\Re(\beta)\geqq 0$ » » $k'\leqq\Re(\beta)$,
» $k<0$ » $\Re(\beta)<0$ » » $k'\leqq$ le plus grand des nombres k et $\Re(\beta)$.

Le théorème III nous permet donc de conclure:

Théorème IV. *La fonction $\Omega(x)$, définie par la série* (1), *ayant l'abscisse de convergence λ, admet toujours un développement de la forme* (27). *Si $\Re(\beta)\geqq 0$ cette série converge, si $\Re(x)>\lambda$, $\Re(x)>0$; si $\Re(\beta)<0$ la série converge, si $\Re(x+\beta)>\lambda$, $\Re(x+\beta)>0$.*

Les conditions données dans ce théorème sont nécessaires pour assurer la convergence de la série transformée. Considérons par exemple la série suivante:

$$\int_0^1\frac{t^{x-1}}{1+t}dt=\sum_{s=0}^{s=\infty}\frac{2^{-s-1}\,.\,s!}{x(x+1)\ldots(x+s)},\tag{28}$$

cette série est convergente dans tout le plan, en exceptant les points $0,-1,-2,\ldots$ qui sont des pôles de la fonction. En posant $\beta=1$ dans la formule (27), on trouve cet autre développement

$$\int_0^1 \frac{t^{x-1}}{1+t}\,dt = \sum_{s=0}^{s=\infty} \frac{s!}{(x+1)(x+2)\ldots(x+s+1)}\,\frac{2^{s+1}-1}{2^{s+1}},$$

ayant l'abscisse de convergence $\lambda = 0$. On aurait d'ailleurs pu prévoir que cette série ne pouvait être convergente pour aucune valeur de x telle que $\sigma < 0$, car elle représenterait alors une fonction holomorphe dans le point $x = 0$. Un raisonnement analogue montre la nécessité des autres conditions.

Mais il peut arriver que le domaine de convergence de la série (27) soit beaucoup plus étendu que ne le dit le théorème IV.

En effet soit, pour fixer les idées, β un nombre réel[1] $\geqq 0$, soit λ_β l'abscisse de convergence[2] de la série au second membre de (27) et soit $\lambda_0 = \lambda > 0$; je veux démontrer que λ_β est une fonction continue de β qui décroît, ou du moins qui ne va jamais en croissant quand β croît. En effet l'ordre de $t^{-\beta-1}\varphi(t)$ sur le cercle $|t-1| = 1$ est égal à k', et l'ordre de t^β est négatif; l'ordre du produit est d'après C § 1 inférieur ou égal à k', mais $t^{-1}\varphi(t)$ est d'ordre $\lambda + 1$ parce que $\lambda > 0$; on a donc $k' \geqq \lambda + 1$, et il en résulte l'inégalité $\lambda_\beta \geqq \lambda - \beta$. D'autre part λ_β est inférieur ou égal à λ en vertu du théorème IV; λ_β satisfait donc à l'inégalité

$$\lambda \geqq \lambda_\beta \geqq \lambda - \beta. \tag{29}$$

En désignant par ε un nombre positif on voit de même que

$$\lambda_\beta \geqq \lambda_{\beta+\varepsilon} \geqq \lambda_\beta - \varepsilon.$$

Il en résulte que λ_β *est une fonction continue de* β *qui ne va jamais en croissant quand* β *croît de* 0 *à* ∞ *pourvu que l'on ait* $\lambda_\beta > 0$. Si $\lambda_\beta \leqq 0$ le théorème n'est plus vrai comme le montre l'exemple ci-dessus.

Il va sans dire que, s'il se trouve un point singulier sur la droite de convergence de la série (1), on a $\lambda = \lambda_\beta$ quelque grand que soit β. On voit aisément que λ_β peut également atteindre sa borne inférieure. En effet soit k_0 l'ordre de $t^{-1}\varphi(t)$ dans le point $t = 0$ et pris sur le cercle $|t-1| = 1$, et soit $1 < k_0 < k$, on a $\lambda_\beta = \lambda - \beta$, pourvu que $0 \leqq \beta \leqq k - k_0$, car la multiplication par $t^{-\beta}$ augmente

[1] Dans une étude, que je viens de publier (Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, t. 35, 1913, p. 177—216), concernant les solutions des équations linéaires aux différences finies la transformation (27) joue un rôle important; on donne ici à β des valeurs complexes quelconques à savoir les racines d'une certaine équation algébrique. Mais s'il s'agit de réaliser un prolongement analytique de $\Omega(x)$ on pourrait généralement se borner à considérer des valeurs positives de β.

[2] C'est à dire un nombre tel que la série converge pour $\sigma > \lambda_\beta$ mais non pour $\sigma < \lambda_\beta$.

seulement l'ordre dans le point $t = 0$, mais non dans les autres points singuliers de $\varphi(t)$; ceux-ci vont être sans influence sur le domaine de convergence quand β devient plus grand que $k - k_0$.

Le cas où l'on fait parcourir β la suite des nombres positifs a fait l'objet d'une étude intéressante de MM. M. Riesz et H. Bohr.[1]

M. H. Bohr a montré le rôle important que joue la méthode de sommation de Cesàro (méthode des moyennes arithmétiques) pour les séries de Dirichlet et pour les séries de facultés; il a démontré l'existence d'une suite de nombres $\lambda \geqq \lambda_1 \geqq \lambda_2 \geqq \lambda_3 \geqq \cdots$ tels que pour $\sigma > \lambda_r$ la série (1) est sommable d'ordre[2] r mais non pour $\sigma < \lambda_r$; λ_r s'appelle l'abscisse de sommabilité d'ordre r et elle se détermine de la manière suivante. Posons

$$S_n^{(r)}(a) = a_n + \binom{r+1}{1} a_{n-1} + \binom{r+2}{2} a_{n-2} + \cdots + \binom{r+n-1}{n-1} a_1$$

et

$$r + c_r = \limsup_{n=\infty} \frac{\log |S_n^{(r)}(a)|}{\log n}; \tag{30}$$

l'on a $\lambda_r = c_r$, si $\lambda_r \geqq 0$, et en tous cas $\lambda_r \leqq c_r$. λ_r est donc, s'il est positif, l'abscisse de convergence de la série (27) quand on y pose $\beta = r$, et l'on a le théorème suivant:

Théorème V. *La fonction $\Omega(x)$ définie par la série de facultés* (1), *ayant λ_r pour abscisse de sommabilité d'ordre r, admet un développement de la forme* (27) *convergent au moins dans le domaine $\sigma > \lambda_r$, $\sigma > 0$, si $\Re(\beta) \geqq r$ et absolument convergent dans ce domaine, si $\Re(\beta) > r + 1$.*

MM. H. Bohr et Hardy ont démontré un théorème général qui permet de transformer une série r fois indéterminée en une série convergente. En appliquant cette transformation à la série (1) on trouve la relation (27), et l'on obtient ainsi une nouvelle démonstration de cette relation dans le cas où β est un entier positif.

Dans les autres applications qu'on a fait de la méthode de sommation de Cesàro la forme du développement sera entièrement modifiée par le procédé de sommation, ici, au contraire, la somme généralisée se représente par un développement de la même forme et aussi simple que celle dont ont partait.

---

[1] Comptes rendus de l'Académie des Sciences de Paris. 11 janvier 1909.

Über die Summabilität Dirichlet'scher Reihen. Nachrichten der K. Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen. Mathematisch-physikalische Klasse. 1909.

Bidrag til de Dirichlet'ske Rækkers Theori. Thèse. Copenhague 1910.

[2] C'est à dire sommable par des moyennes arithmétiques d'ordre r.

En généralisant un théorème de M. LANDAU, mentionné plus haut, M. BOHR a démontré que la série de facultés (1) et la série de DIRICHLET (9) avec les mêmes coefficients sont sommables d'ordre r pour les mêmes valeurs de x. M. H. BOHR s'occupe d'ailleurs exclusivement des séries de DIRICHLET, et, après avoir fait une étude approfondie de la distribution des abscisses de sommabilité, il démontre qu'il y a une relation étroite entre les λ_r et l'ordre d'infinitude de la fonction $\psi(x)$, définie par la série de DIRICHLET, quand la variable $x = \sigma + i\tau$ tend vers l'infini en restant dans une des bandes de sommabilité $\lambda_r < \sigma < \lambda_{r-1}$. Rappelons en particulier que dans le domaine $\sigma > \bar{\lambda} + \varepsilon$ (ε étant un nombre positif, $\bar{\lambda}$ étant l'abscisse de convergence absolue) $\psi(x)$ reste plus petit qu'une constante fixe K, et que l'on a

$$\psi(x) = O(|\tau|^{r+1})$$

dans le domaine $\bar{\lambda} + \varepsilon \geq \sigma > \lambda_r + \varepsilon$.

Vu l'analogie entre les deux types de séries on pouvait être tenté de croire que la fonction $\Omega(x)$, définie par la série de facultés (1), ne prît également des valeurs infiniment grandes quand la variable x s'éloigne infiniment de l'axe des abscisses dans le domaine de sommabilité.

Mais ce n'est pas ainsi; la fonction $\Omega(x)$ reste plus petite qu'une constante fixe, non seulement dans le domaine de convergence, mais aussi dans le domaine de sommabilité et plus encore, *le théorème II reste vrai, si l'on remplace x par un nombre positif quelconque supérieur à λ_r* et cela quelque grand que soit r.

On le voit immédiatement en appliquant le raisonnement du § 6 à la série (27) β étant égal à r.

Pourtant, quand la série cesse de converger dans le domaine $\lambda_r < \sigma < \lambda$ c'est nécessairement à cause de la singularité à l'infini, et il semble probable qu'on puisse, si l'on cherche en dehors du domaine de sommabilité, trouver quelque relation entre les λ_r et l'ordre de grandeur de la fonction $\Omega(x)$ quand x tend vers l'infini. Nous démontrerons en effet dans le dernier chapitre le théorème suivant: Si $\Omega(x)$ admet un développement de la forme (1) ayant λ_r pour abscisse de sommabilité d'ordre r, la fonction $x^{-r}\Omega(x)$ admet un développement de la même forme, convergent pour $\sigma > \lambda_r$.

CHAPITRE III.

§ 9. La méthode de sommation que nous venons d'étudier s'applique seulement aux séries de facultés qui sont convergentes pour des valeurs suffisamment grandes de la variable. Nous allons maintenant étudier une autre transformation de la série de facultés qui permet également d'étendre le domaine de convergence, et qui s'applique aux séries toujours divergentes. Par exemple dans ma Thèse j'ai rencontré une certaine classe de séries de facultés partout divergentes mais sommables à l'aide de cette transformation; le calcul effectif des développements convergents se fait le plus commodément par l'intermédiaire des séries divergentes dont on peut ainsi faire un usage légitime. D'ailleurs cette transformation permet de prolonger la fonction $\Omega(x)$ plus loin que ne le permet la transformation (27), et, ce qui est particulièrement remarquable, elle permet de trouver le prolongement analytique de $\Omega(x)$ jusqu'a ce qu'on rencontre une droite $\sigma = l$ qui peut se déterminer à l'aide de propriétés analytiques simples de la fonction $\Omega(x)$.

Soit $\sigma > 0$, on a

$$\frac{1}{x} = \int_0^1 z^{x-1}\, dz.$$

En formant la différence finie d'ordre s par rapport à x des deux membres de cette équation on trouve

$$\frac{s!}{x(x+1)\dots(x+s)} = \int_0^1 z^{x-1}(1-z)^s\, dz; \qquad s = 0, 1, 2, \dots$$

soit ω un nombre positif plus grand que 1 et changeons la variable d'intégration en posant $z = t^{\frac{1}{\omega}}$, où $t^{\frac{1}{\omega}}$ est supposé positif le long de la ligne d'intégration. On trouve

$$\frac{s!}{x(x+1)\dots(x+s)} = \frac{1}{\omega}\int_0^1 t^{\frac{x}{\omega}-1}\left(1 - t^{\frac{1}{\omega}}\right)^s dt. \tag{31}$$

Il est facile de développer cette intégrale en séries de facultés en prenant comme variable $\frac{x}{\omega}$. On a, en effet, en vertu de la formule du binôme

$$1 - t^{\frac{1}{\omega}} = \frac{1-t}{\omega} + \frac{\omega-1}{2!}\left(\frac{1-t}{\omega}\right)^2 + \dots + \frac{(\omega-1)(2\omega-1)\dots[(n-1)\omega-1]}{n!}\left(\frac{1-t}{\omega}\right)^n + \dots,$$

où le coefficient du facteur $(1-t)^n$ est un nombre positif parce que $\omega > 1$. En multipliant cette série par elle-même s fois de suite, on trouve un développement de la forme

$$\left(1 - t^{\frac{1}{\omega}}\right)^s = \sum_{n=s}^{n=\infty} \psi_n^{(s)}(\omega)(1-t)^n, \tag{32}$$

où les $\psi_n^{(s)}(\omega)$ sont des nombres *positifs*. Il est d'ailleurs facile d'exprimer explicitement les ψ comme une somme de produits de coefficients binomiaux; on a

$$\psi_n^{(s)}\left(\frac{1}{\omega}\right) = (-1)^{n+1}\binom{s}{1}\binom{\omega}{n} + (-1)^{n+2}\binom{s}{2}\binom{2\omega}{n} + \cdots + (-1)^{n+s}\binom{s}{s}\binom{s\omega}{n} \qquad n \geqq s;$$

$$\psi_n^{(s)}(\omega) = 0 \qquad n < s; \qquad\qquad \psi_s^{(0)}(\omega) = 0 \qquad s > 0,$$

mais nous ne nous arrêterons pas à la démonstration de cette égalité, qui ne va être d'aucune utilité[1] pour nous; il nous suffit d'avoir constaté que les polynômes $\psi_n^{(s)}(\omega)\,(n \geqq s)$ restent positifs quand ω reste plus grand que 1. En substituant la série (32) dans l'intégrale (31) et en intégrant terme par terme on trouve

$$\frac{s!}{x(x+1)\ldots(x+s)} = \sum_{n=s}^{n=\infty} \frac{\psi_n^{(s)}(\omega)\,\omega^n\, n!}{x(x+\omega)\ldots(x+n\omega)}. \tag{33}$$

Le théorème III § 7 nous permet seulement de conclure que l'abscisse de convergence de cette série est $\leqq 0$. En réalité la série est absolument convergente dans le demi-plan $\sigma > -1$. On le voit immédiatement à l'aide des lemmes dans le § 1 qui donnent pour les $\psi_n^{(s)}(\omega)$, définis par l'équation (32), l'inégalité suivante

$$|\psi_n^{(s)}(\omega)| < \frac{K}{n^{1+\frac{1}{\omega}-\varepsilon}}, \qquad n = 1, 2, 3, \ldots$$

K étant un nombre positif indépendant de n, et ε étant un nombre positif qu'on peut choisir aussi petit qu'on veut.

Cela posé, il est facile de transformer la série (1) en une autre série de facultés avec la variable $\frac{x}{\omega}$ au lieu de x. Posons

$$u_{p,q} = \frac{a_{q+1}\,.\,p!\,\psi_p^{(q)}(\omega)\,\omega^p}{x(x+\omega)\ldots(x+p\omega)},$$

[1] On pourrait pourtant remarquer que les $\psi_n^{(s)}(\omega)$ sont d'une forme trop compliquée pour qu'on puisse facilement arriver à une détermination directe de l'abscisse de convergence de la série (34).

et considérons la série double

$$\sum_{p,q} u_{p,q},$$

où la sommation est étendue à toutes les valeurs non-négatives de p et de q.

Soit $\bar{\lambda}$ l'abscisse de convergence absolue de la série (1), soit $x = \sigma + i\tau$ un nombre quelconque tel que $\sigma > \bar{\lambda}$, $\sigma > -1$ et que $\sigma \gtrless 0$; je dis que la série double est absolument convergente. On a en effet

$$|u_{p,q}| \leqq \frac{|a_{q+1}|\, p!\, \psi_p^{(q)}(\omega)\, \omega^p}{|\sigma|\,|\sigma+\omega| \ldots |\sigma+p\omega|},$$

donc en vertu de (33)

$$\sum_{p=0}^{p=\infty} |u_{p,q}| \leqq \frac{|a_{q+1}|\, q!}{|\sigma|(\sigma+1)\ldots(\sigma+q)};$$

or σ étant $> \bar{\lambda}$, il en résulte que la série double est absolument convergente. L'identité

$$\sum_{q=0}^{q=\infty} \sum_{p=0}^{p=\infty} u_{p,q} = \sum_{p=0}^{p=\infty} \sum_{q=0}^{q=\infty} u_{p,q},$$

nous donne donc la relation suivante

$$\Omega(x) = \sum_{q=0}^{q=\infty} \frac{a_{q+1}\, q!}{x(x+1)\ldots(x+q)} = \sum_{p=0}^{p=\infty} \frac{c_{p+1}\,\omega^p\, p!}{x(x+\omega)\ldots(x+p\omega)}, \tag{34}$$

valable si $\sigma > \bar{\lambda}$, $\sigma > -1$, et où l'on a posé

$$c_{p+1} = \psi_p^{(1)}(\omega)\, a_2 + \psi_p^{(2)}(\omega)\, a_3 + \cdots + \psi_p^{(p)}(\omega)\, a_{p+1} \qquad p > 0,$$
$$c_1 = a_1.$$

On remarque que les coefficients c_p ne dépendent que d'un nombre fini des coefficients a_p.

Théorème VI. *La fonction $\Omega(x)$, définie par la série* (1), *admet toujours*[1] *un développement de la forme du second membre de* (34), *ω étant > 1; cette nouvelle série de facultés est absolument convergente, si $\sigma > \bar{\lambda}$, $\sigma > -1$.*

---

[1] M. Nielsen (Handbuch etc., p. 265—271) a essayé de démontrer que cette transformation n'est pas possible en général mais sa démonstration n'est point rigoureuse.

La dernière de ces conditions de convergence, introduite pour assurer la convergence de la série (33) est, comme on le voit aisément, nécessaire; car si la série au deuxième membre de (34) convergeait pour une valeur de x telle que $\sigma < -1$, elle représenterait une fonction holomorphe aux environs de $x = -1$, pendant que la série au premier membre représente une fonction qui admet en général $x = -1$ comme pôle simple, s'il est situé à l'intérieur du domaine de convergence. Quant à la condition $\sigma > \bar{\lambda}$ nous verrons dans le § 10 qu'elle peut se remplacer par une autre qui est moins restrictive.

La démonstration de ce théorème repose essentiellement sur le fait que $\omega > 1$; nous allons maintenant étudier la même transformation en passant par l'intermédiaire d'une intégrale définie et nous verrons que la série transformée cesse généralement de converger quand ω prend des valeurs inférieures à 1 ou des valeurs complexes.

§ 10. Soit ϱ un nombre positif plus grand que 1, et soit η un nombre positif. Soit $\varphi(z)$ une fonction analytique de z holomorphe à l'intérieur du secteur $A \mathrm{o} B$

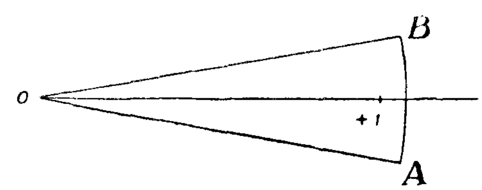

Fig. 1.

comprenant la ligne de o à 1, ayant l'angle au sommet $A \mathrm{o} B$ égal à $\pi\eta$ et avec le rayon $\mathrm{o}B = \varrho$. Supposons en plus qu'il existe un nombre non-négatif k tel qu'on ait *uniformément*

$$\lim_{z=0} z^k \varphi(z) = 0, \tag{35}$$

z tendant vers zéro en restant à l'intérieur du secteur $A \mathrm{o} B$.

Considérons l'intégrale

$$\Omega(x) = \int_0^1 z^{x-1} \varphi(z)\, dz, \tag{36}$$

où l'on a choisi l'argument de z égal à zéro le long de la ligne d'intégration. Elle est certainement convergente, si $\sigma > k$, et elle définit dans ce domaine une branche d'une fonction analytique $\Omega(x)$. Nous allons démontrer que cette fonction est développable en série de facultés. Pour le voir faisons un changement de variable dans l'intégrale (36). Soit, comme plus haut, ω un nombre réel et plus grand que 1, et posons $z = t^{\frac{1}{\omega}}$ en prenant la détermination réelle de $t^{\frac{1}{\omega}}$; on trouve

$$\Omega(x) = \frac{1}{\omega}\int_0^1 t^{\frac{x}{\omega}-1}\varphi\left(t^{\frac{1}{\omega}}\right)dt. \tag{37}$$

Prenons l'axe des nombres réels et négatifs comme coupure. La transformation[1] effectue une représentation conforme du plan des t sur un secteur d'angle $\frac{2\pi}{\omega}$ du plan des z. Posons

$$t = re^{iv}, \qquad z = Re^{i\Phi}.$$

Le cercle $|t-1| = 1$ a pour équation $r = 2\cos v$ et son image dans le plan des z sera

$$R^{\omega} = 2\cos\omega\Phi; \tag{38}$$

c'est une courbe fermée, symmétrique par rapport à l'axe des nombres réels, coupant celui-ci dans $z = 2^{\frac{1}{\omega}}$ et dans $z = 0$, et formant dans ce dernier point avec l'axe des abscisses un angle égal à $\frac{\pi}{2\omega}$. Quand ω tend vers l'infini, la courbe s'approche indéfiniment de la droite de 1 à 0. Mais $\varphi(z)$ étant holomorphe à l'intérieur du secteur $A\,o\,B$ on peut, quelque petit que soit l'angle au sommet $\pi\eta$, choisir ω suffisamment grand pour que $\varphi\left(t^{\frac{1}{\omega}}\right)$ soit holomorphe à l'intérieur et sur le contour du cercle $|t-1| = 1$, en exceptant seulement le point $t = 0$; il suffit en effet que les inégalités $\omega > \frac{1}{\eta}$, $\varrho^{\omega} > 2$ soient satisfaites. Il est facile de trouver une limite supérieure de l'ordre de $t^{-1}\varphi\left(t^{\frac{1}{\omega}}\right)$ sur ce cercle. Par hypothèse on a:

$$\lim_{t=0} t^{\frac{k}{\omega}}\varphi\left(t^{\frac{1}{\omega}}\right) = 0,$$

t tendant vers zéro par des valeurs intérieures au cercle $|t-1| = 1$ ou le long de ce cercle. Comme $t = 0$ est l'unique point singulier sur le cercle, il résulte du théorème H § 1 que l'ordre de $t^{-1}\varphi\left(t^{\frac{1}{\omega}}\right)$ sur le cercle est $\leqq \frac{k}{\omega} + 1$, k étant $\geqq 0$. Cela posé, formons le développement

$$\varphi\left(t^{\frac{1}{\omega}}\right) = c_1 + c_2(1-t) + c_3(1-t)^2 + c_4(1-t)^3 + \cdots; \tag{39}$$

[1] Cette transformation a été appliquée par M. Mittag-Leffler dans ses recherches profondes sur la représentation analytique d'une branche uniforme d'une fonction monogène et sur l'intégrale de Laplace-Abel. Acta mathematica t. 29, p. 116 et p. 154, 1904. Note 5. Voir aussi M. Riesz, ibid. t. 35 p. 257, 1911. M. Mittag-Leffler a bien voulu nous communiquer que cette même transformation joue également un rôle important dans ses recherches plus récentes (Note 6).

il est convergent pour $|t-1|<1$, ω étant choisi comme il a été dit plus haut. Substituons cette série dans (37) et intégrons terme par terme, on trouve

$$\Omega(x)=\sum_{s=0}^{s=\infty}\frac{c_{s+1}\,\omega^s\,s!}{x(x+\omega)\ldots(x+s\omega)}. \tag{40}$$

D'après le théorème III cette série est convergente, si $\sigma>k$. Pour justifier l'intégration terme par terme il suffit de remarquer que la série

$$\sum_{s=0}^{s=\infty}|c_{s+1}|\int_0^1\left|t^{\frac{x}{\omega}-1}(1-t)^s\right|dt, \tag{41}$$

est convergente, si $\sigma>k+\omega$; en effet l'ordre de $\varphi\left(t^{\frac{1}{\omega}}\right)$ sur le cercle de convergence est $\leqq\frac{k}{\omega}+1$; le terme général de la série (41) est donc plus petit que $C\,.\,s^{\frac{k-\sigma}{\omega}+\varepsilon}$, quel que soit $\varepsilon>0$, C étant un nombre positif indépendant de s.

On a donc le théorème suivant:

Théorème VII. *A toute intégrale de la forme* (36), $\varphi(z)$ *satisfaisant à la condition* (35) *et étant holomorphe à l'intérieur du secteur* $A\,o\,B$, *ayant l'angle au sommet aussi petit que ce soit, il appartient un nombre non-négatif* Θ *tel que* $\Omega(x)$ *admet un développement en série de facultés de la forme* (40), *convergent pour* $\sigma>k$ *pourvu que l'on ait* $\omega>\Theta$, *pendant qu'un tel développement n'existe plus si* $\omega<\Theta$.

En effet, nous prenons pour Θ le plus petit nombre tel que $\varphi(z)$ soit holomorphe à l'intérieur du domaine limité par la courbe $R^\Theta=2\cos\Theta\Phi$ et que la condition (35) soit satisfaite pour une valeur finie de k. Si $\omega>\Theta$, $t=0$ sera le seul point singulier sur le cercle $|t-1|=1$, et $\Omega(x)$ admet le développement (40). Si $\omega=\Theta$ le développement peut exister ou non, mais s'il existe, son domaine de convergence est généralement plus petit que dans le cas $\omega>\Theta$, car dans le cas $\omega=\Theta$ il se trouve sur le cercle de convergence $|t-1|=1$ de la série (39) un nombre fini ou infini de points singuliers. Si l'un au moins de ces points singuliers est d'ordre $+\infty$ le développement n'existe plus; mais si $\varphi\left(t^{\frac{1}{\Theta}}\right)$ est d'ordre fini sur le cercle $|t-1|=1$, cet ordre sera généralement plus élevé que dans le cas $\omega>\Theta$, et l'abscisse de convergence dépend non de l'ordre dans $t=0$, mais de l'ordre total sur le cercle de convergence.

Ce résultat nous permet de préciser le théorème VI. Supposons que la fonction $\Omega(x)$ admette un développement de la forme (1) ayant λ pour abscisse de convergence et $\lambda_r\,(\lambda_r \leqq \lambda)$ pour abscisse de sommabilité d'ordre r. Nous allons démontrer que la série au second membre de (34) est convergente, si $\sigma > \lambda_r$, $\sigma > 0$.

En effet, $\Omega(x)$ admet une représentation de la forme

$$\Omega(x) = \int_0^1 z^{x-1}\varphi(z)\,dz,$$

$\varphi(z)$ étant holomorphe à l'intérieur du cercle $|z-1| = 1$. L'ordre de $z^{-r-1}\varphi(z)$ sur ce cercle est d'après le § 8 égal à $\lambda_r + r + 1$, si $\lambda_r \geqq 0$; mais si $\lambda_r < 0$, cet ordre est $\leqq r+1$. Soit λ'_r le plus grand des nombres λ_r et 0, le lemme **E** du § 1 nous permet donc de conclure qu'on a uniformément

$$\lim_{z=0} z^{\lambda'_r+\varepsilon}\varphi(z) = 0,$$

z tendant vers zéro par des valeurs intérieures au cercle de convergence et telles que $\frac{\pi}{2} - \eta \geqq \operatorname{Arg} z \geqq -\frac{\pi}{2} + \eta$, où η désigne un nombre positif qu'on peut choisir aussi petit qu'on le veut. Cela posé, soit ω un nombre positif quelconque > 1, et posons $z = t^{\frac{1}{\omega}}$; la fonction $t^{-1}\varphi\left(t^{\frac{1}{\omega}}\right)$ est holomorphe à l'intérieur du cercle $|t-1| = 1$, et elle admet sur ce cercle l'unique point singulier $t = 0$, qui, d'après le théorème **H** § 1, est d'ordre au plus égal à $\frac{\lambda'_r+\varepsilon}{\omega} + 1$. Il en résulte que l'abscisse de convergence de la série au second membre de (34) est $\leqq \lambda'_r + \varepsilon$, et cela est vrai quelque petit que soit ε; r est ici un nombre entier (l'ordre de sommabilité) qu'on peut choisir aussi grand qu'on le veut. Quand r tend vers l'infini, λ_r tend vers une limite $\varDelta$. *Nous pouvons donc conclure que la série est convergente, si* $\sigma > \varDelta$, $\sigma > 0$. On voit par là que la transformation (34) permet de prolonger analytiquement la fonction $\Omega(x)$ au moins aussi loin que la transformation (10), pourvu que $\varDelta$ ne soit pas < 0. D'autre part l'étude de la série double $\sum u_{p,q}$ nous a montré que la série au second membre de (34) est absolument convergente pour $\sigma > -1$, si $\bar{\lambda} \leqq -1$.

§ 11. Nous allons maintenant étudier un cas particulier qu'on rencontre dans la théorie des équations linéaires aux différences finies.[1] Soit $v(z)$ une branche d'une fonction analytique, holomorphe sur l'axe des nombres positifs entre *zéro* et *un* et admettant au voisinage de $z = 0$ une représentation de la forme

[1] Comparez ma Thèse l. c. p. 22 et p. 40.

$$v(z) = \sum_{i=1}^{i=p} z^{\alpha_i} \{\psi_{i,0}(z) + \psi_{i,1}(z) \log z + \cdots + \psi_{i,r}(z) \log^r z\},$$

les $\psi_{i,s}(z)$ étant des fonctions holomorphes au voisinage de $z = 0$ et telles que l'un au moins des nombres $\psi_{i,s}(0)$ $(s = 0, 1, \ldots, r)$ soit différent de zéro. Au voisinage de $z = 1$ on suppose que $v(z)$ soit de la forme

$$v(z) = (1 - z)^\beta \varphi(z),$$

$\varphi(z)$ étant holomorphe dans $z = 1$ et différent de zéro. Les α_i et les β sont des nombres complexes quelconques; soit pour fixer les idées

$$\Re(\alpha_1) \leqq \Re(\alpha_2) \leqq \Re(\alpha_3) \leqq \cdots.$$

Soit C un contour composé de l'axe des nombres positifs entre zéro et $1 - \varepsilon$, un petit cercle autour de $+1$ avec le rayon ε et laissant tous les autres points singuliers à l'extérieur et enfin la droite de $1 - \varepsilon$ à zéro; le petit cercle doit être parcouru dans le sens positif. Considérons l'intégrale

$$u(x) = \int_C z^{x-1} v(z)\, dz.$$

Soit ω un nombre positif et posons $z = t^{\frac{1}{\omega}}$; choisissons pour $t^{\frac{1}{\omega}}$ la détermination qui est réelle le long de la première partie de la ligne d'intégration. L'image du contour C dans le plan des t sera un lacet autour de $t = 1$ qu'on peut ramener au contour C par une déformation continue sans franchir aucun point singulier. On trouve donc

$$u(x) = \frac{1}{\omega} \int_C t^{\frac{x}{\omega} - 1} v\left(t^{\frac{1}{\omega}}\right) dt. \tag{42}$$

Choisissons ω suffisamment grand pour que $v\left(t^{\frac{1}{\omega}}\right)$ soit holomorphe à l'intérieur du cercle $|t - 1| = 1$ et sur ce cercle en exceptant les points $t = 0$ et $t = 1$. À l'intérieur du cercle $v\left(t^{\frac{1}{\omega}}\right)$ se représente par un développement de la forme

$$v\left(t^{\frac{1}{\omega}}\right) = \omega (1 - t)^\beta \varphi_1(t) = \omega (1 - t)^\beta \{A_0 + A_1 (1 - t) + A_2 (1 - t)^2 + \cdots\}, \tag{43}$$

A_0 étant par hypothèse différent de zéro. Nous avons vu dans le § 2 que l'ordre de $v\left(t^{\frac{1}{\omega}}\right)$, dans le point $t = 0$, est égal à $k = -\Re\left(\frac{\alpha_1}{\omega}\right)$. Il en est donc de même de $\varphi_1(t)$; on a, par conséquent, l'inégalité

$$|A_n| < K n^{k+\varepsilon-1}, \tag{44}$$

K étant une constante indépendante de n. Substituons le développement (43) dans l'expression (42) et intégrons; on trouve

$$\begin{aligned} u(x) = (1 - e^{2\pi i\beta}) \frac{\Gamma\left(\frac{x}{\omega}\right)\Gamma(\beta+1)}{\Gamma\left(\frac{x}{\omega}+\beta+1\right)} \Big\{ A_0 + A_1 \frac{(\beta+1)\,\omega}{x+\omega\beta+\omega} + \\ + A_2 \frac{(\beta+1)(\beta+2)\,\omega^2}{(x+\omega\beta+\omega)(x+\omega\beta+2\omega)} + \cdots \Big\}, \end{aligned} \tag{45}$$

où la série de facultés, en vertu de l'inégalité (44), converge absolument si $\Re(x+\alpha_1) > 0$. L'intégration terme par terme se justifie tout à fait de la même manière que dans le § 10.

Considérons de même l'intégrale

$$u^{(1)}(x) = \int_C z^{x-1} v^{(1)}(z)\, dz,$$

où

$$v^{(1)}(z) = \frac{\partial}{\partial\beta}\left[(1-z)^\beta \varphi(z)\right] = (1-z)^\beta \left[\varphi^{(1)}(z) + \varphi(z)\log(1-z)\right],$$

$\varphi(z)$ et $\varphi^{(1)}(z)$ étant holomorphes au voisinage de $z = 1$, et où l'on suppose que $v^{(1)}(z)$ soit de la même forme que $v(z)$ au voisinage de $z = 0$. En désignant par $\varphi_2(t)$ une fonction holomorphe au voisinage de $t = 1$, on voit que $v^{(1)}\left(t^{\frac{1}{\omega}}\right)$ est de la forme

$$v^{(1)}\left(t^{\frac{1}{\omega}}\right) = (1-t)^\beta \{\varphi_2(t) + \varphi_1(t)\log(1-t)\}.$$

L'ordre de $v^{(1)}\left(t^{\frac{1}{\omega}}\right)$ et de $\varphi_1(t)$ dans le point $t = 0$ est égal à $-\Re\left(\frac{\alpha_1}{\omega}\right)$; on en conclut sans difficultés qu'il en est de même de $\varphi_2(t)$. L'intégrale

$$\frac{1}{\omega}\int_C t^{\frac{x}{\omega}-1}(1-t)^\beta \varphi_2(t)\, dt,$$

se représente donc par un développement de la même forme que (45), ayant le même domaine de convergence. Il nous reste à étudier l'intégrale:

$$\int\limits_C t^{\frac{x}{\omega}-1}(1-t)^\beta \log(1-t)\,\varphi_1(t)\,dt;$$

en substituant au lieu de $\varphi_1(t)$ la série de puissances (43), on voit que cette intégrale peut se décomposer en trois parties dont la première est de la forme (45) pendant que la deuxième est

$$(1-e^{2\pi i\beta})\,\Gamma(\beta+1)\frac{\partial}{\partial\beta}\left[\frac{\Gamma\left(\frac{x}{\omega}\right)}{\Gamma\left(\frac{x}{\omega}+\beta+1\right)}\right]\sum_{s=0}^{s=\infty}A_s\frac{(\beta+1)(\beta+2)\ldots(\beta+s)\,\omega^s}{(x+\omega\beta+\omega)\ldots(x+\omega\beta+s\omega)};$$

la troisième partie se représente par un développement de la forme

$$(e^{2\pi i\beta}-1)\frac{\Gamma\left(\frac{x}{\omega}\right)\Gamma(\beta+1)}{\Gamma\left(\frac{x}{\omega}+\beta+1\right)}\sum_{s=0}^{s=\infty}A_s\frac{(\beta+1)(\beta+2)\ldots(\beta+s)\,\omega^s}{(x+\omega\beta+\omega)\ldots(x+\omega\beta+s\omega)}\left(\frac{\omega}{x+\omega\beta+\omega}+\cdots+\right.$$
$$\left.+\frac{\omega}{x+\omega\beta+\omega s}\right);$$

les séries qui entrent dans ces trois expressions convergent absolument, si $\Re(x+\alpha_1)>0$, mais la dernière série n'est pas une série de facultés. Nous allons démontrer dans le § 17 que cette série peut se représenter par un développement de la forme (45), convergent pourvu que $\Re(x+\alpha_1)>0$, $\Re(x+\omega\beta+\omega)>0$. Notre intégrale $u^{(1)}(x)$ se représente donc par un développement de la forme

$$u^{(1)}(x)=(1-e^{2\pi i\beta})\,\Gamma(\beta+1)\frac{\partial}{\partial\beta}\left[\frac{\Gamma\left(\frac{x}{\omega}\right)}{\Gamma\left(\frac{x}{\omega}+\beta+1\right)}\right]\sum_{s=0}^{s=\infty}A_s\frac{(\beta+1)(\beta+2)\ldots(\beta+s)\,\omega^s}{(x+\omega\beta+\omega)\ldots(x+\omega\beta+s\omega)}+$$
$$+\frac{\Gamma\left(\frac{x}{\omega}\right)}{\Gamma\left(\frac{x}{\omega}+\beta+1\right)}\sum_{s=0}^{s=\infty}A_s^{(1)}\frac{(\beta+1)(\beta+2)\ldots(\beta+s)\,\omega^s}{(x+\omega\beta+\omega)\ldots(x+\omega\beta+s\omega)}.$$

En appliquant parfaitement le même raisonnement à l'intégrale plus générale

$$u^{(r)}(x)=\int\limits_C z^{x-1}\,v^{(r)}(z)\,dz,$$

où l'on a posé

$$v^{(r)}(z) = \frac{\partial^r}{\partial \beta^r}[(1-z)^\beta \varphi(z)] = (1-z)^\beta [\varphi^{(r)}(z) + \varphi^{(r-1)}(z)\log(1-z) + \cdots + \varphi(z)\log^r(1-z)],$$

on voit que cette intégrale se représente par un développement de la forme

$$u^{(r)}(x) = \sum_{i=0}^{i=r} \Omega_i(x) \frac{\partial^i}{\partial \beta^i}\left[\frac{\Gamma\left(\frac{x}{\omega}\right)}{\Gamma\left(\frac{x}{\omega}+\beta+1\right)}\right],$$

les $\Omega_i(x)$ étant des séries de facultés de la forme

$$\Omega_i(x) = A_0^{(i)} + \sum_{s=1}^{s=\infty} A_s^{(i)} \frac{\beta(\beta+1)\ldots(\beta+s)}{(x+\omega\beta+\omega)\ldots(x+\omega\beta+s\omega)},$$

absolument convergentes pourvu que $\Re(x+\alpha_1) > 0$, $\Re(x+\omega\beta+\omega) > 0$. Si l'on a $\varphi(1) \neq 0$, le terme constant $A_0^{(r)}$ de la série de facultés $\Omega_r(x)$ est différent de zéro.

§ 12. C'est là l'expression générale d'une solution d'une équation linéaire aux différences finies à coefficients rationnels. La forme que nous venons de donner à cette expression est celle qui se présente immédiatement à l'esprit et le calcul effectif des coefficients $A_s^{(i)}$ se fait le plus aisément, si l'on conserve cette forme. Mais si l'on veut mettre plus en évidence l'analogie entre les solutions des équations aux différences et les solutions des équations différentielles linéaires, il convient de donner à ces expressions une forme un peu différente.

Considérons d'abord le rapport entre deux fonctions gamma et démontrons qu'il se développe en série de facultés. Soit $\sigma > 0$, on a:

$$\frac{\Gamma(\beta+1)}{x^{\beta+1}} = \int_0^1 t^{x-1}\left(\log\frac{1}{t}\right)^\beta dt,$$

on le vérifie aisément en posant $t = e^{-\frac{z}{x}}$; l'intégrale se ramène par là sans difficultés à l'intégrale d'Euler de la fonction $\Gamma(\beta+1)$. Désignons par $\psi_s(\beta)$ les polynômes de Stirling,[1] définis par l'équation

$$\left(\log\frac{1}{t}\right)^\beta = (1-t)^\beta + \beta\sum_{s=0}^{s=\infty}\psi_s(\beta+s)(1-t)^{\beta+s+1}.$$

[1] Ces polynômes ont été étudiés par M. Nielsen, l. c. Handbuch etc., p. 71—77.

L'ordre de $\left(\log \frac{1}{t}\right)^\beta$ dans le point $t = 0$ est égal à zéro; les polynômes de STIRLING satisfont donc à l'inégalité

$$|\psi_s(\beta + s)| < \frac{K}{s^{1-\varepsilon}}, \tag{46}$$

ε étant > 0, et K étant un nombre positif indépendant de s. Substituons le développement de $\left(\log \frac{1}{t}\right)^\beta$ dans l'intégrale susdite et intégrons terme par terme; on trouve la série de facultés[1]

$$\frac{\Gamma(x+\beta+1)}{\Gamma(x)\, x^{\beta+1}} = 1 + \sum_{s=0}^{s=\infty} \psi_s(\beta+s) \frac{\beta(\beta+1)\ldots(\beta+s+1)}{(x+\beta+1)(x+\beta+2)\ldots(x+\beta+s+1)}, \text{[2]} \tag{47}$$

---

[1] Dans ma Thèse (l. c. p. 15) j'ai démontré que le rapport entre deux fonctions gamma se représente asymptotiquement par la série de puissances

$$\frac{\Gamma(x)\, x^\beta}{\Gamma(x+\beta)} \sim 1 - \sum_{s=0}^{s=\infty} \psi_s(-\beta) \frac{(s+\beta)(s+\beta-1)\ldots(\beta-1)}{x^{s+1}},$$

où les coefficients ψ_s sont également les polynômes de STIRLING. Mais cette série de puissances est divergente, elle représente la fonction au premier membre asymptotiquement dans l'angle $\pi - \varepsilon > \operatorname{Arg} x > -\pi + \varepsilon$.

[2] Remarquons en passant qu'on peut déduire de cette série une expression remarquable de la fonction $\zeta(s)$ de RIEMANN. Multiplions les deux membres par $\frac{\Gamma(x)}{\Gamma(x+\beta+1)}$ et rappelons qu'on a

$$\sum_{\nu=0}^{\nu=\infty} \frac{\Gamma(x+\nu)}{\Gamma(x+\beta+\nu+1)} = \frac{\Gamma(x)}{\beta\Gamma(x+\beta)},$$

pourvu que $\Re(\beta) > 0$. On trouve en sommant par rapport à x

$$\zeta(\beta+1, x) = \sum_{\nu=0}^{\nu=\infty} \frac{1}{(x+\nu)^{\beta+1}} = \frac{\Gamma(x)}{\Gamma(x+\beta)} \left\{ \frac{1}{\beta} + \frac{\beta\psi_0(\beta)}{x+\beta} + \frac{\beta(\beta+1)\psi_1(\beta+1)}{(x+\beta)(x+\beta+1)} + \frac{\beta(\beta+1)(\beta+2)\psi_2(\beta+2)}{(x+\beta)(x+\beta+1)(x+\beta+2)} + \cdots \right\}.$$

En vertu de l'inégalité (46) la série de facultés converge absolument pourvu que $\Re(x) > 0$, quel que soit β. En posant $x = 1$ et en écrivant s au lieu de β on trouve

$$\Gamma(s)\zeta(s+1) = \Gamma(s) \sum_{\nu=1}^{\nu=\infty} \frac{1}{\nu^s} = \frac{1}{s^2} + \frac{\psi_0(s)}{s+1} + \frac{\psi_1(s+1)}{s+2} + \frac{\psi_2(s+2)}{s+3} + \frac{\psi_3(s+3)}{s+4} + \cdots$$

Cette égalité se trouve démontrée pourvu que $\Re(s) > 0$; mais la série au second membre est, en vertu de l'inégalité (46), absolument et uniformément convergente dans tout domaine fini ne qui est absolument convergente si $\Re(x) > 0$. On en conclut aisément qu'il existe un développement de la forme

$$\frac{\Gamma(x)\,x^{\beta+1}}{\Gamma(x+\beta+1)} = 1 + \sum_{s=0}^{s=\infty} \frac{a_s}{x(x+1)\ldots(x+s)},$$

la série étant convergente pourvu que $\Re(x+\beta+1) > 0$ et $\Re(x) > 0$. La série est d'ailleurs uniformément convergente par rapport à β; on peut donc dériver un nombre quelconque de fois par rapport à β et l'on trouve un développement de la forme

$$x^{\beta+1}\frac{\partial^n}{\partial\beta^n}\left[\frac{\Gamma(x)}{\Gamma(x+\beta+1)}\right] =$$

$$= F_0(x) + \log x\,.\,F_1(x) + \log^2 x\,.\,F_2(x) + \cdots + (-1)^n \log^n(x)\,[1 + F_n(x)],$$

où les $F_i(x)$ se représentent par des séries de facultés de la forme (1), convergentes pourvu que $\Re(x+\beta+1) > 0$, $\Re(x) > 0$. Substituons ces développements dans l'expression de $u^{(r)}(x)$ donnée plus haut et effectuons les multiplications;[1] dans le § 16 nous allons démontrer que le produit de deux séries de facultés, convergentes pour $\sigma > \lambda$, se représente par une série de facultés, convergente pour $\sigma > \lambda$, $\sigma > 0$. On voit donc que $u^{(r)}(x)$ se représente par un développement de la forme

$$u^{(r)}(x) = x^{-\beta-1}\sum_{i=0}^{i=r} \bar{\Omega}_i(x)\log^i x,$$

les $\bar{\Omega}_i(x)$ étant des séries de facultés de la forme

---

contenant aucun des points $s = 0, -1, -2, -3, \ldots$. Elle représente, par conséquent, la fonction $\Gamma(s)\,\zeta(s+1)$ pour toute valeur de s différente de $0, -1, -2, -3, \ldots$.

De la série (47) on peut déduire un développement analogue pour la fonction $\Gamma(s)$. Posons en effet $x = 1$ et $\beta = s$, on trouve la série

$$\Gamma(s) = \frac{1}{s(s+1)} + \frac{\psi_0(s)}{s+2} + \frac{\psi_1(s+1)}{s+3} + \frac{\psi_2(s+2)}{s+4} + \cdots,$$

qui est absolument convergente pour toute valeur de s différente de $0, -1, -2, \ldots$.

[1] Il faut transformer d'abord les $\Omega_i(x)$ en séries de facultés de la forme (1); ces séries convergent également, si $\Re(x+\alpha_1) > 0$, $\Re\left(\frac{x}{\omega} + \beta + 1\right) > 0$; on le voit immédiatement quand on se rappelle l'hypothèse faite relativement à la manière dont se comporte $v^{(r)}(z)$ au voisinage de $z = 0$.

$$\overline{\Omega}_i(x) = A_0^{(i)} + \sum_{s=0}^{s=\infty} \frac{A_s^{(i)}}{x(x+\omega)\ldots(x+s\omega)},$$

convergentes pourvu qu'on a $\Re(x+\alpha_1) > 0$, $\Re\left(\frac{x}{\omega}+\beta+1\right) > 0$, $\Re\left(\frac{x}{\omega}\right) > 0$.

La démonstration de ce résultat repose essentiellement sur le fait que $v^{(r)}(z)$ est holomorphe sur l'axe des nombres positifs entre *zéro* et *un*. Mais s'il se trouve un ou plusieurs points singuliers de $v^{(r)}(z)$ entre *zéro* et *un* et si l'on déforme le contour C de manière a éviter ces points singuliers, l'intégrale $u^{(r)}(x)$ existe toujours mais les développements susdits cessent de converger. Ce cas d'exception ne présente pourtant aucune difficulté. Il suffit de donner à ω une valeur complexe avec un argument très petit positif ou négatif. Quand on se rappelle la manière dont se comporte $v^{(r)}(z)$ au voisinage de $z=0$ on voit[1] que l'intégrale $u^{(r)}(x)$ se ramène à une intégrale de la type précedente pourvu qu'on a choisi le module de ω suffisamment grand. Dans le § 2 nous avons démontré que l'ordre de $v^{(r)}\left(t^{\frac{1}{\omega}}\right)$ dans le point $t=0$ est égal au plus grand des nombres

$$-\Re\left(\frac{\alpha_i}{\omega}\right) \qquad (i=1,2,\ldots,p).$$

$u^{(r)}(x)$ se représente donc par un développement de la même forme que dans le cas où ω était positif, seulement il faut remplacer la condition de convergence $\Re(x+\alpha_1) > 0$ par les conditions $\Re\left(\frac{x+\alpha_i}{\omega}\right) > 0$ $(i=1,2,\ldots,p)$.

CHAPITRE IV.

§ 13. Retournons maintenant au cas général. Soit $\Omega(x)$ une fonction admettant une représentation de la forme

$$\Omega(x) = \sum_{s=0}^{s=\infty} \frac{a_{s+1}\,\omega^s\, s!}{x(x+\omega)\ldots(x+s\omega)}, \tag{48}$$

[1] Pour plus de détails voir J. Horn: Fakultätenreihen in der Theorie der linearen Differentialgleichungen, Mathematische Annalen t. 71 p. 510—532, 1912. Dans ce Mémoire M. J. Horn démontre par des considérations du même ordre que celles que nous venons d'exposer que les solutions irrégulières des équations différentielles linéaires se représentent par des séries de facultés convergentes.

ω étant un nombre positif, la série ayant la droite de convergence $\sigma = \lambda$. Soit k un nombre positif plus grand que λ. Posons

$$\varphi(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_{k-i\infty}^{k+i\infty} t^{-z}\,\Omega(z)\,dz = F(\xi) = \frac{1}{2\pi i}\int_{k-i\infty}^{k+i\infty} e^{\xi z}\,\Omega(z)\,dz. \tag{49}$$

Nous avons vu que $\varphi\left(t^{\frac{1}{\omega}}\right)$ est une fonction analytique de t, holomorphe pour $|t-1|<1$, et que l'ordre de $t^{-1}\varphi\left(t^{\frac{1}{\omega}}\right)$ sur le cercle $|t-1|=1$ est égal à $\frac{\lambda}{\omega}+1$, si $\lambda>0$. $\varphi(t)$ est donc holomorphe dans un secteur tel que $A\,o\,B$ (fig. 1) et d'après E § 1 on a uniformément

$$\lim_{t=0} t^{k}\varphi(t) = 0, \tag{50}$$

t tendant vers zéro en restant dans l'angle $A\,o\,B$. Soit

$$\Omega(x) = \frac{a_1}{x} + \frac{\mu(x)}{x(x+1)}, \tag{51}$$

nous avons également vu que $\mu(x)$ est une fonction holomorphe pour $\sigma \geqq k$ et dont le module admet une borne supérieure fixe dans ce domaine. D'autre part, ces deux conditions remplies, on peut conclure à l'existence du développement (48). En effet, de (51) résulte que l'on a:

$$\Omega(x) = \int_0^1 t^{x-1}\varphi(t)\,dt,$$

$\varphi(t)$ ayant la signification indiquée par l'équation (49). Mais cette intégrale admet d'après le théorème VII un développement de la forme (48), convergent pour $\sigma>k$. Si l'on considère la fonction $F(\xi)$ au lieu de $\varphi(t)$ il faut remplacer le secteur $A\,o\,B$ par une bande $CDEF$

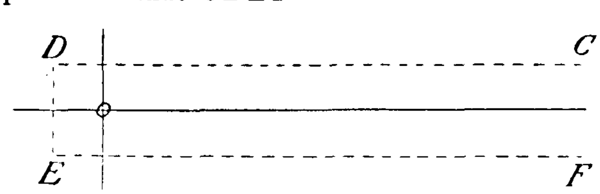

Fig. 2.

limitée par deux demi-droites DC et EF parallèles à l'axe des nombres positifs et comprenant cet axe (y compris le point $\xi=0$) dans son intérieur. La largeur

DE de la bande peut d'ailleurs être aussi petite que ce soit. On a donc le théorème suivant:

Théorème VIII. *Les conditions nécessaires et suffisantes pour qu'une fonction analytique $\Omega(x)$ admette une représentation par une série de facultés de la forme* (48) *sont:*

1°. *Que la fonction $\Omega(x)$ admette une représentation de la forme* (51), *$\mu(x)$ étant une fonction holomorphe et bornée dans le demi-plan $\sigma \geq k$, k étant un nombre positif.*

2°. *Que la fonction $F(\xi)$, définie pour les valeurs positives de ξ par l'équation* (49), *soit une fonction analytique de ξ, holomorphe dans une bande telle que $CDEF$ et satisfaisante à la condition*

$$\lim_{\xi=\infty} e^{-k\xi} F(\xi) = 0, \tag{52}$$

qui doit avoir lieu uniformément dans la bande.

En choisissant ω suffisamment grand, la série sera convergente, si $\sigma > k$. Les conditions 1° et 2° ne sont d'ailleurs pas tout à fait indépendantes l'une de l'autre.

§ 14. L'existence du développement (48) étant donnée, nous avons déjà vu que l'abscisse de convergence peut se déterminer à l'aide des coefficients de la série ou bien à l'aide de l'ordre de la fonction $t^{-1}\varphi(t)$. Mais il se pose le problème suivant, encore plus important: Peut on déterminer l'abscisse de convergence à l'aide de propriétés analytiques simples de la fonction $\Omega(x)$? Nous allons voir que cette question peut se résoudre par l'affirmative, si l'on veut se borner à une détermination approximative, mais où l'on peut rendre l'approximation aussi grande qu'on le veut en choisissant ω suffisamment grand.

Supposons que l'on sait relativement à la fonction $\Omega(x)$:

1°. Qu'elle admet une représentation de la forme $\Omega(x) = \frac{a_1}{x} + \frac{\mu(x)}{x(x+1)}$, $\mu(x)$ étant une fonction holomorphe et bornée dans le domaine $\sigma \geq l > 0$.

2°. Qu'elle admet un développement de la forme (1) convergent pour $\sigma > L > l$.

Étudions la fonction $\varphi(t)$. D'après le § 7 elle se représente par l'expression

$$\varphi(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_{l-i\infty}^{l+i\infty} t^{-z}\,\Omega(z)\,dz = a_1 + \frac{1}{2\pi i}\int_{l-i\infty}^{l+i\infty} t^{-z}\frac{\mu(z)}{z(z+1)}\,dz, \tag{53}$$

où $|\mu(z)|$ par hypothèse reste plus petit qu'une constante fixe le long de la ligne d'intégration. Posons $z = l + i\zeta$ on trouve:

$$t^l \varphi(t) = a_1 t^l + \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} t^{-i\zeta} \frac{\mu(l + i\zeta)\, d\zeta}{(l + i\zeta)(l + i\zeta + 1)};$$

cette intégrale étant absolument convergente, on voit qu'on a pour $\varepsilon > 0$

$$\lim_{t=0} t^{l+\varepsilon} \varphi(t) = 0, \tag{54}$$

t tendant vers zéro le long de l'axe des nombres positifs.

De la seconde hypothèse relativement à la fonction $\Omega(x)$ il résulte d'autre part que $t^{-1}\varphi(t)$ est holomorphe à l'intérieur du cercle $|t - 1| = 1$ et d'ordre $L + 1$ sur ce cercle. On en conclut qu'on a uniformément:

$$\lim_{t=0} t^{L+\varepsilon} \varphi(t) = 0, \tag{55}$$

t tendant vers zéro en restant dans l'angle $\frac{\pi - \eta}{2} \geqq \operatorname{Arg} t \geqq -\frac{\pi - \eta}{2}$, η étant un nombre positif et très petit.

Des égalités (54) et (55) on conclut, en vertu d'un théorème général de la théorie des fonctions dû à MM. E. Phragmén[1] et Ernst Lindelöf,[1] qu'on a uniformément

$$\lim_{r=0} r^{l+\varepsilon+\frac{L-l}{\frac{\pi}{2}-\eta}|v|} \varphi(re^{iv}) = 0,$$

dans l'angle $\frac{\pi}{2} - \eta > v > -\frac{\pi}{2} + \eta$. Il en résulte, en désignant par ω un nombre positif supérieur à 1, qu'on a uniformément dans l'angle $\frac{\pi}{2} \geqq \operatorname{Arg} t \geqq -\frac{\pi}{2}$

$$\lim_{t=0} t^{\frac{l+\varepsilon'+(L-l):\omega}{\omega}} \varphi\left(t^{\frac{1}{\omega}}\right) = 0, \tag{56}$$

pour tout $\varepsilon' > 0$. L'exposant de t est ici positif, car on a par hypothèse $L > l > 0$; $\varphi\left(t^{\frac{1}{\omega}}\right)$ est holomorphe sur le cercle $|t - 1| = 1$, en exceptant le point $t = 0$. Le

[1] Sur une extension d'un principe classique de l'Analyse et sur quelques propriétés des fonctions monogènes dans le voisinage d'un point singulier. Acta mathematica t. 31, p. 381—406, 1908.

théorème H § 1 nous permet donc de conclure que l'ordre de $t^{-1}\varphi\left(t^{\frac{1}{\omega}}\right)$ sur ce cercle est $\leqq 1 + \frac{l+\varepsilon'+(L-l):\omega}{\omega}$. La fonction $\Omega(x)$ admet, par conséquent, un développement de la forme (48) qui est convergent pour $\sigma > l + \frac{L-l}{\omega}$. Quelque petit que soit le nombre positif ε_1 on peut donc toujours choisir ω assez grand pour que la série converge dans le domaine $\sigma > l + \varepsilon_1$. C'est le résultat que nous avions en vue; mais il n'est pas sans intérêt de remarquer encore que la première des hypothèses faites relativement à la fonction $\Omega(x)$ peut se remplacer par une autre qui est moins restrictive. Supposons en effet que la fonction $\mu(x)$ cesse d'être bornée dans la bande $l-\varepsilon \leqq \sigma \leqq l$ quelque petit que soit $\varepsilon > 0$ et qu'il existe un nombre positif l_1, inférieur à l et tel que $\mu(x)$ soit holomorphe et d'ordre fini par rapport à l'ordinat τ dans la bande $l_1 < \sigma < l$ c'est à dire qu'il existe une constante positive c telle que

$$\lim_{|\tau|=\infty} x^{-c}\mu(x) = 0,$$

où x tend vers l'infini en restant dans la bande $l_1 \leqq \sigma \leqq l$. Je veux démontrer que cette hypothèse amène à une contradiction. En effet des propriétés asymptotiques connues[1] des fonctions analytiques il résulte qu'il existe un nombre l_2 $(l_1 < l_2 < l)$ tel qu'on a uniformément

$$\lim_{|\tau|=\infty} x^{-\vartheta}\mu(x) = 0,$$

dans la bande $l_2 \leqq \sigma \leqq l$, ϑ désignant un nombre positif inférieur à 1 $(0 < \vartheta < 1)$. On peut maintenant dans le second membre de (53) remplacer l par l_2 sans changer la valeur de l'intégrale. Le raisonnement que nous venons de faire permet donc de conclure que le développement (48) est convergent pour $\sigma > l_2 + \varepsilon$ en choisissant ω convenablement; mais il en résulte que $\mu(x)$ est bornée dans le domaine $\sigma > l_2 + \varepsilon$, ce qui est contraire à l'hypothèse faite. Si la fonction $\mu(x)$ n'est pas bornée dans la bande $l_1 < \sigma \leqq l$, elle ne peut donc ni non plus être d'ordre fini par rapport à l'ordinat.

Résumons ces résultats en le théorème suivant:

Théorème IX. *Soit $\Omega(x)$ une fonction analytique possédant les propriétés suivantes:*

---

[1] Landau l. c. Handbuch etc., p. 849—853.

1°. *Elle est holomorphe et bornée dans le demi-plan* $\sigma \geqq l + \varepsilon > 0$ *pendant que l'une au moins de ces conditions cesse d'être remplie dans la bande* $l + \varepsilon > \sigma > l - \varepsilon$ *quelque petit que soit* ε.

2°. *Elle admet un développement en série de facultés de la forme* (1), *convergente pour* $\sigma > L > l$.

La fonction $\Omega(x)$ *se représente alors par une série de facultés de la forme* (48), ω *étant* > 1, *et l'abscisse de convergence* $\lambda(\omega)$ *de la série satisfait à l'inégalité suivante:*

$$l + \frac{L-l}{\omega} \geqq \lambda(\omega) \geqq l. \tag{57}$$

Elle est égale à l *ou supérieure à* l *d'une quantité qui tend vers zéro quand* ω *tend vers l'infini. Il en résulte en particulier que les égalités* (18) *sont uniformément satisfaites dans le domaine* $\sigma > l + \varepsilon$.

On peut y ajouter la remarque que si la fonction $\Omega(x)$ est holomorphe dans la bande $l_1 \leqq \sigma \leqq l$ elle n'est pas d'ordre fini par rapport à l'ordinat dans cette bande.

Pour compléter ce théorème démontrons encore que l'inégalité (57) est aussi précise que possible. Pour le voir il suffit de donner l'exemple d'une fonction pour laquelle la limite supérieure de λ est réellement atteinte.

Considérons la fonction:

$$\Omega(x) = \int_0^1 t^{x-l-1} e^{i\gamma \log^2 t} dt, \tag{58}$$

l et γ étant des nombres positifs.

L'intégrale est absolument convergente, si $\sigma > l$, elle représente par conséquent une fonction holomorphe et bornée dans le domaine $\sigma > l + \varepsilon$, ε étant un nombre positif. Démontrons d'abord que $\Omega(x)$ est *une fonction entière de* x. Considérons l'intégrale complexe:

$$u(x) = \int_C t^{x-l-1} e^{i\gamma \log^2 t} dt,$$

où le chemin d'intégration C est un lacet issu du point $t = 1$, entourant le point $t = 0$ et parcouru dans le sens positif. Soit $\sigma > l + 4\pi\gamma$; le lacet C peut, par une déformation continue, se remplacer par l'axe des nombres positifs entre *zéro* et *un* parcouru deux fois. On trouve donc

$$u(x) = \int\limits_C t^{x-l-1} e^{i\gamma \log^2 t} dt = -\Omega(x) + e^{2\pi i(x-l-2\pi\gamma)} \Omega(x - 4\pi\gamma).$$

Cette relation, qui peut s'écrire:

$$\Omega(x) = e^{-2\pi i(x-l-2\pi\gamma)} [u(x + 4\pi\gamma) + \Omega(x + 4\pi\gamma)], \tag{59}$$

est démontrée d'être vraie, si $\sigma > l + 4\pi\gamma$, mais elle doit subsister dans tout le plan. En effet $u(x)$ est une fonction entière de x, et $\Omega(x)$ est holomorphe pour $\sigma > l$; le second membre de (59) est par conséquent une fonction holomorphe pour $\sigma > l - 4\pi\gamma$. On démontre ainsi de proche en proche que $\Omega(x)$[1] est holomorphe dans tout le plan. $\Omega(x)$ est donc une fonction entière de x, qui est bornée dans le domaine $\sigma > l + \varepsilon$; elle admet, en vertu du théorème III, un développement de la forme (1); déterminons l'abscisse de convergence. En posant $t = re^{iv}$ on trouve

$$|t^{-1}\varphi(t)| = r^{-(l+1+2v\gamma)};$$

l'ordre de $t^{-1}\varphi(t)$ sur le cercle $|t-1| = 1$ est donc $l + 1 + \pi\gamma$, et l'abscisse de convergence de la série (1) est par conséquent $\lambda = l + \pi\gamma$.

On voit de même que l'ordre de $t^{-n-1}\varphi(t)$ sur le cercle de convergence, n étant positif, est égal à $l + n + 1 + \pi\gamma$; il en résulte que les abscisses de sommabilités sont toutes égales à $l + \pi\gamma$:

$$\lambda = \lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \varLambda.$$

La série (1) n'est pas sommable par des moyennes arithmétiques pour aucune valeur de x telle que $\sigma < l + \pi\gamma$ et pourtant la fonction et toutes ses dérivées par rapport à $\frac{1}{x}$ tendent uniformément vers une limite dans le domaine $\sigma > l + \varepsilon$. Appliquons maintenant la transformation (34).

On a

$$\left|t^{-1}\varphi\left(t^{\frac{1}{\omega}}\right)\right| = r^{-\left(1+\frac{l}{\omega}+\frac{2\gamma v}{\omega^2}\right)}.$$

---

[1] On peut d'ailleurs exprimer $\Omega(x)$ par une transcendente qui a été étudiée par *Laplace:*

$$L(x) = \int\limits_x^\infty e^{-t^2} dt.$$

On trouve en effet

$$\Omega(x + l) = \sqrt{\frac{i}{\gamma}}\, e^{z^2} L(z), \text{ où } z = \frac{x}{2}\sqrt{\frac{i}{\gamma}}.$$

L'ordre de $t^{-1}\varphi\left(t^{\frac{1}{\omega}}\right)$ sur le cercle $|t-1|=1$ est donc égal à $1+\frac{l}{\omega}+\frac{\gamma\pi}{\omega^2}$; il en résulte que l'abscisse de convergence $\lambda(\omega)$ de la série

$$\int_0^1 t^{x-l-1}e^{i\gamma\log^2 t}dt=\sum_{s=0}^{s=\infty}\frac{b_{s+1}\,\omega^s\,s!}{x(x+\omega)\ldots(x+s\omega)},$$

est égale à $l+\frac{\gamma\pi}{\omega}$, ω étant un nombre positif. Quand ω tend vers zéro, l'abscisse de convergence tend vers l'infini; quand ω tend vers l'infini, l'abscisse de convergence tend vers l, mais cette valeur n'est atteinte pour aucune valeur finie de ω. La série cesse de converger pour $\sigma=l$ parce que la quantité $\Omega(l-\varepsilon+i\tau)$ tend vers l'infini quand τ tend vers l'infini, et cela d'ordre exponentiel.

Cet exemple paraît assez remarquable quand on se rappelle les résultats obtenus par MM. Landau, Schnee et H. Bohr relativement au problème de convergence d'une série de Dirichlet $\psi(x)$ de la forme (9), c'est à dire au problème qui a pour objet, de déterminer l'abscisse de convergence de la série à l'aide de propriétés analytiques simples de la fonction qu'elle représente.

Tandis qu'on ne peut pas, à ce qu'il semble, déterminer la valeur précise ni de l'abscisse de convergence λ, ni des abscisses de sommabilités $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \ldots$ d'une série de Dirichlet $\psi(x)$ en connaissant seulement des propriétés analytiques simples de la fonction $\psi(x)$, M. H. Bohr[1] a démontré que la limite $\varDelta$ vers laquelle tend les λ_r quand r tend vers l'infini, est un nombre caractéristique de la fonction $\psi(x)$ qui peut se déterminer de la connaissance des propriétés analytiques les plus simples de la fonction $\psi(x)$; il se trouve sur la droite $\sigma=\varDelta$ ou bien une singularité à distance finie ou bien cette droite joue un rôle essentiel pour la singularité à l'infini. Dans l'exemple ci-dessus on a $\lambda=\varDelta=l+\pi\gamma$, mais la fonction $\Omega(x)$, représentée par la série, est une fonction entière et les égalités (18) (qui sont en nombre infini) sont uniformément satisfaites quand x tend vers l'infini en restant dans le domaine $\sigma>l+\varepsilon$, ε étant un nombre positif. Rien ne distingue, en apparence, la bande $l<\sigma<l+\pi\gamma$ du domaine de convergence $\sigma>l+\pi\gamma$, qui est ici identique au domaine de sommabilité par des moyennes arithmétiques. Il semble donc que la droite $\sigma=\varDelta$, limitant le domaine de sommabilité, joue un rôle bien moins essentiel pour les fonctions représentées par les séries de facultés que pour les fonctions représentées par les séries de Dirichlet, mais il serait intéressant d'approfondir cette question.

---

[1] l. c. Thèse p. 114—131 et Über die Summabilitätsgrenzgerade der Dirichlet'schen Reihen. Sitzungsberichte der kaiserl. Akademie der Wissenschaften in Wien, Mathem.-naturw. Klasse; Bd. CXIX. Abt. II a. Oktober 1910.

Tout récemment M. H. BOHR[1] a fait voir que la droite $\sigma = \bar{\lambda}$, limitant le domaine de convergence absolue, joue également un rôle essentiel pour une certaine classe de séries de DIRICHLET de la forme $\sum a_s e^{-\lambda_s x}$. M. H. BOHR démontre en effet que la condition nécessaire et suffisante pour qu'une telle série soit absolument convergente dans le domaine $\sigma \geqq \bar{\lambda}$, c'est que la fonction qu'elle représente soit holomorphe et bornée dans ce domaine.

Ce théorème remarquable n'est pas sans analogie avec le théorème IX.

§ 15. La fonction $\Omega(x)$ définie par la série (48) admet en général le point $x = \infty$ comme point singulier; le développement taylorien au voisinage de $x = \infty$ est donc généralement divergent, mais il représente la fonction $\Omega(x)$ asymptotiquement dans le demi-plan de convergence de la série. En effet, considérons les dérivées de la fonction $F(\xi)$, définie par l'intégrale (49); substituons dans cette intégrale, au lieu de $\Omega(z)$, l'expression

$$\sum_{s=0}^{s=n-1} \frac{a_{s+1}\, s!\, \omega^s}{z(z+\omega)\ldots(z+s\omega)} + R_n(z)$$

et intégrons terme par terme; on trouve en vertu de (25)

$$F(\xi) = \sum_{s=0}^{s=n-1} a_{s+1}(1 - e^{-\omega\xi})^s + \int_{k-i\infty}^{k+i\infty} e^{\xi z} R_n(z)\, dz; \tag{60}$$

soit r un entier plus petit que n, et dérivons r fois par rapport à ξ; on trouve:

$$F^{(r)}(\xi) = D_\xi^r \sum_{s=0}^{s=n-1} a_{s+1}(1 - e^{-\omega\xi})^s + \int_{k-i\infty}^{k+i\infty} e^{\xi z} z^r R_n(z)\, dz,$$

où l'intégrale est absolument convergente, car nous avons vu dans le § 6 que $|z^{n+1} R_n(z)|$ reste plus petit qu'une constante fixe le long de la ligne d'intégration.

Le premier terme au second membre tend vers zéro quand ξ tend vers $+\infty$, et le module de l'intégrale reste plus petit que $Ce^{k\xi}$, C étant une constante. On a donc

$$\lim_{\xi=\infty} e^{-(k+\varepsilon)\xi} F^{(r)}(\xi) = 0,$$

ξ tendant vers l'infini le long de l'axe des nombres positifs, et r désignant un indice de dérivation quelconque.

[1] Lösung des absoluten Konvergenzproblems einer allgemeinen Klasse DIRICHLET'scher Reihen. Acta mathematica t. 36, p. 1—44; 1912.

Cela posé, considérons l'intégrale

$$\Omega(x) = \int_0^\infty e^{-x\xi} F(\xi)\, d\xi .$$

Supposons que la partie réelle de x soit $> k$; on trouve, en intégrant par partie

$$\Omega(x) = \frac{F(0)}{x} + \frac{F'(0)}{x^2} + \frac{F''(0)}{x^3} + \cdots + \frac{F^{(n-1)}(0)}{x^n} + \frac{1}{x^n}\int_0^\infty e^{-x\xi} F^{(n)}(\xi)\, d\xi . \tag{61}$$

Comme $F(\xi)$ admet en général des points singuliers à distance finie cette série est généralement divergente, mais on sait trouver une constante positive C telle que

$$|F^{(n)}(\xi)| < C e^{(k+\varepsilon)\xi},$$

le long de la ligne d'intégration; on a donc

$$\left| \int_0^\infty e^{-x\xi} F^{(n)}(\xi)\, d\xi \right| < \frac{C}{\sigma - k - \varepsilon},$$

et on en conclut que la série (61) représente $\Omega(x)$ asymptotiquement, quand x tend vers l'infini en restant dans le domaine $\sigma > k + \varepsilon$.

La fonction $\Omega(x)$ donne donc naissance à une série de puissances divergente et l'on voit qu'on peut en faire un usage légitime en la transformant en une série de facultés. Cette transformation, très facile à effectuer, a déjà été indiquée par Stirling;[1] c'est là peut-être la meilleure méthode de sommation surtout quand il s'agit d'un calcul numérique de $\Omega(x)$ pour des grandes valeurs de x parce que la série de facultés converge rapidement pour de telles valeurs de x quand on a choisi ω convenablement.

L'expression (61) montre qu'il y a une relation étroite entre la représentation d'une fonction par une série de facultés et l'importante méthode de sommation exponentielle de M. É. Borel. D'après la définition de M. É. Borel[2] la série divergente:

---

[1] Methodus differentialis sive tractatus de summatione et interpolatione serierum infinitarum. London 1730. Comparez aussi J. L. W. V. Jensen: Nyt Tidsskrift for Mathematik, Bd. 2 B, p. 70 ff., 1891; Pincherle l. c. Sur les fonctions déterminantes, p. 54—57; et Nielsen l. c. Handbuch etc., p. 272—282.

[2] Mémoire sur les séries divergentes. Annales scientifiques de l'École Normale Supérieure. Sér. 3, t. 16, p. 10—136. 1899. Leçons sur les séries divergentes. Paris 1901.

$$\Omega(x) \sim \frac{A_0}{x} + \frac{A_1}{x^2} + \frac{A_2}{x^3} + \cdots \tag{62}$$

est absolument et uniformément sommable, si la fonction associée

$$F(x) = A_0 + \frac{A_1}{1!}x + \frac{A_2}{2!}x^2 + \frac{A_3}{3!}x^3 + \cdots$$

est holomorphe dans un angle comprenant l'axe des nombres positifs, et si l'on a uniformément

$$\lim_{x=\infty} e^{-kx} F^{(r)}(x) = 0, \tag{63}$$

dans cet angle, r désignant un indice de dérivation quelconque. La somme de la série est par définition

$$\Omega(x) = \frac{1}{x}\int_0^\infty e^{-\xi} F\left(\frac{\xi}{x}\right) d\xi = \int_0^\infty e^{-x\xi} F(\xi)\, d\xi. \tag{64}$$

Si l'on change légèrement la definition de M. É. Borel et substitue à l'angle comprenant l'axe des nombres positifs la bande susdite $DEFG$, ce qui n'a aucun inconvénient,[1] on voit *que les fonctions qui admettent un développement en série de facultés de la forme* (48) *sont les mêmes que celles qui donnent naissances à des séries de puissances de la forme* (61), *généralement divergentes, mais absolument et uniformément sommables.* Ou plus exactement, c'est la fonction que M. É. Borel attribue à la série divergente comme somme qui admet le développement en séries de facultés, mais il va sans dire qu'il y a une infinité de fonctions qui se représentent asymptotiquement par la série divergente.

CHAPITRE V.

§ 16. Pour établir une théorie passablement complète de la série de facultés il reste encore d'étudier comment elle se prête aux opérations fondamentales de

[1] Comme le montre M. É. Borel on peut même, du moins dans le cas où $F(x)$ est une fonction entière, se borner à supposer que les conditions susdites sont satisfaites le long de l'axe des nombres positifs. La fonction $\Omega(x)$ correspondante n'admet pas nécessairement un développement en série de facultés convergente. On connait l'application importante que M. É. Borel a fait de sa méthode de sommation exponentielle à la théorie des équations différentielles algébriques. Les séries de puissances divergentes qui satisfont formellement à ces équations sont telles que les conditions (63) sont satisfaites dans un angle fini. Les solutions correspondantes se représentent donc par des séries de facultés convergentes.

l'Analyse. L'addition et la soustraction ne présentent aucune difficulté. Le problème de la multiplication a été étudié par M. N. NIELSEN [1] dans plusieurs Mémoires mais sans que la question ait été éclaircie.[2]

Nous allons démontrer que le produit de deux séries de facultés, convergentes pour $\sigma > \lambda$, se représente par une série de facultés, convergente pour $\sigma > \lambda$. Ce résultat paraît assez remarquable quand on se rappelle ceux, obtenus relativement à la multiplication de deux séries de DIRICHLET. Soient deux séries de DIRICHLET

$$\psi_1(x) = \sum_{s=1}^{s=\infty} \frac{a_s}{s^x}, \qquad \psi_2(x) = \sum_{s=1}^{s=\infty} \frac{b_s}{s^x},$$

convergentes pour $\sigma > 0$. Il a été demontré par STIELTJES, MM. E. LANDAU,[3] H. BOHR[4] et M. RIESZ[5] que le produit $\psi_1(x)\,\psi_2(x)$ se représente par une série de DIRICHLET convergente pour $\sigma > \frac{1}{2}$, et sommable par des moyennes arithmétiques dans la bande $\frac{1}{2} \geqq \sigma > 0$; *mais généralement la série cesse de converger dans cette bande.* Plus généralement, si $\psi_1(x)$ et $\psi_2(x)$ sont tous les deux sommables par des moyennes arithmétiques d'ordre r dans le demi-plan $\sigma > \lambda$, M. H. BOHR démontre que le produit $\psi_1(x)\,\psi_2(x)$ se représente par une série de DIRICHLET, sommable par des moyennes arithmétiques d'ordre n dans le même demi-plan $\sigma > \lambda$, mais n est généralement supérieur à r.

Nous allons également etudier les séries de facultés non seulement dans leur demi-plan de convergence, mais aussi dans leurs demi-plans de sommabilité, ce qui ne complique pas sensiblement les démonstrations. Considérons deux séries de la forme[6]

$$\Omega_1(x) = a_0 + \sum_{s=0}^{s=\infty} \frac{a_{s+1}\, s!}{x(x+1)\ldots(x+s)}, \tag{65}$$

$$\Omega_2(x) = b_0 + \sum_{s=0}^{s=\infty} \frac{b_{s+1}\, s!}{x(x+1)\ldots(x+s)}, \tag{65 bis}$$

[1] Rendiconti della Reale Accademia dei Lincei 17 jan. 1904 et l. c. Handbuch etc., p. 254.

[2] Comparez la critique de M. E. LANDAU dans les Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo t. 24 (1907) p. 126—127 et p. 139—140.

[3] l. c. Rendiconti etc., p. 112.

[4] l. c. Bidrag etc., p. 37—39 et p. 131—132.

[5] Comptes rendus de l'Académie des Sciences de Paris, 5 juillet 1909.

[6] Jusqu'ici nous avons, pour abréger l'écriture, supprimé le terme constant de la série; mais dans ce chapitre nous supposerons que ce terme peut être différent de zéro, quand n'est pas dit le contraire.

sommables d'ordre r dans le demi-plan $\sigma > \lambda_r$; si r est égal à zéro les séries sont convergentes dans le demi-plan $\sigma > \lambda_0$. Appliquons à ces séries la transformation (10) et posons $\beta = r + 1$; en introduisant la notation abrégée

$$S_n^{(r)}(a) = \sum_{\nu=0}^{\nu=n-1} \binom{r+\nu}{\nu} a_{n-\nu} \tag{66}$$

on trouve

$$\Omega_1(x) = a_0 + \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{S_{n+1}^{(r)}(a)\, n!}{(x+r+1)(x+r+2)\ldots(x+r+n+1)}, \tag{67}$$

$$\Omega_2(x) = b_0 + \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{S_{n+1}^{(r)}(b)\, n!}{(x+r+1)(x+r+2)\ldots(x+r+n+1)}. \tag{67 bis}$$

Soit λ' le plus grand des nombres λ_r et 0; ces séries sont absolument convergentes pour $\sigma > \lambda'$.

Posons maintenant

$$u_{0,0} = S_0^{(r)}(a)\, S_0^{(r)}(b) = a_0 b_0,$$

$$u_{p,q} = \frac{S_p^{(q+r)}(a)\, S_q^{(r)}(b)\,(p-1)!\,(q-1)!}{(x+r+1)(x+r+2)\ldots(x+r+p+q)};$$

et considérons la série double:

$$\sum_{p,q} u_{p,q},$$

où la sommation doit être étendue à toutes les valeurs entières et non-négatives[1] de p et de q. Cette série nous donne immédiatement le développement cherché pour un produit de deux séries de facultés. En effet, nous allons démontrer que la série double est absolument convergente, si $\sigma > \lambda'$. Il en résulte la relation:

$$\sum_{q=0}^{q=\infty} \sum_{p=0}^{p=\infty} u_{p,q} = \sum_{n=0}^{n=\infty} (u_{0,n} + u_{1,n-1} + \cdots + u_{n,0}). \tag{68}$$

Il est facile d'évaluer le premier membre; on trouve

$$\sum_{p=0}^{p=\infty} u_{p,q} = \frac{(q-1)!\, S_q^{(r)}(b)}{(x+r+1)(x+r+2)\ldots(x+r+q)} \left\{ a_0 + \sum_{p=0}^{p=\infty} \frac{S_{p+1}^{(q+r)}(a)\, p!}{(x+r+q+1)\ldots(x+r+q+p+1)} \right\} =$$

$$= \frac{S_q^{(r)}(b)\,(q-1)!}{(x+r+1)(x+r+2)\ldots(x+r+q)}\, \Omega_1(x);$$

[1] Dans le cas où p ou q soit égal à zéro il faut remplacer $(-1)!$ par 1.

en sommant par rapport à q on trouve

$$\sum_{q=0}^{q=\infty}\sum_{p=0}^{p=\infty} u_{p,q} = \Omega_1(x)\,\Omega_2(x).$$

La relation (68) peut donc s'écrire:

$$\Omega_1(x)\,\Omega_2(x) = a_0 b_0 + \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{\alpha_{n+1}\, n!}{(x+r+1)(x+r+2)\ldots(x+r+n+1)}, \tag{69}$$

où

$$\alpha_n = \sum_{p=0}^{p=n} \frac{(p-1)!\,(n-p-1)!}{(n-1)!} S_{n-p}^{(r+p)}(a)\, S_p^{(r)}(b). \tag{70}$$

Pour déterminer le domaine de convergence de cette série et pour démontrer la convergence absolue de la série double nous allons étudier les nombres α_n de plus près.

En vertu de l'hypothèse faite relativement à $\Omega_1(x)$ et $\Omega_2(x)$ on sait trouver une constante fixe K, indépendante de n, telle qu'on ait

$$\left.\begin{matrix} |S_n^{(r)}(a)| \\ |S_n^{(r)}(b)| \end{matrix}\right\} < K\, n^{r+\lambda'+\varepsilon},$$

pour $n = 1, 2, 3, \ldots$, ε étant > 0. Il en résulte l'existence d'une constante K_1, indépendante de n, telle qu'on ait

$$\left.\begin{matrix} |S_n^{(r)}(a)| \\ |S_n^{(r)}(b)| \end{matrix}\right\} < K_1 \frac{\Gamma(\lambda'+\varepsilon+r+n)}{\Gamma(n)\,\Gamma(\lambda'+\varepsilon+r+1)}, \tag{71}$$

pour $n = 1, 2, 3, \ldots$; r est ici un nombre entier fixe (l'ordre de sommabilité des séries), mais il nous importe de savoir comment se comportent les $S_n^{(r)}$ pour des valeurs très grandes de r; pour le voir démontrons d'abord un lemme concernant les coefficients binomiaux. Considérons le polynôme du dégré ν en a

$$f(a) = \binom{a+\nu}{\nu} = \frac{(a+1)(a+2)\ldots(a+\nu)}{\nu!}.$$

Formons les différences finies par rapport à a; en posant

$$\Delta f(a) = f(a-1) - f(a),$$

$$\Delta^{s+1} f(a) = \Delta\Delta^s f(a),$$

on trouve

$$\varDelta^s f(a) = (-1)^s \binom{a+\nu-s}{\nu-s}, \qquad (s=0,1,\ldots,\nu),$$

et les différences d'ordre supérieur à ν sont égales à zéro.

Substituons ces expressions dans la formule d'interpolation de NEWTON

$$f(a+p+1) = \sum_{s=0}^{s=\infty} \binom{p+s}{s} (-1)^s \varDelta^s f(a);$$

on trouve l'identité

$$\binom{a+p+\nu+1}{\nu} = \sum_{s=0}^{s=\nu} \binom{p+s}{s} \binom{a+\nu-s}{\nu-s}, \tag{72}$$

a et p étant des nombres quelconques. Cela posé, soit p un entier positif et considérons l'expression

$$S_n^{(p)}[S_n^{(r)}(a)] = \sum_{s=0}^{s=n-1} \binom{p+s}{s} \sum_{\nu=0}^{\nu=n-s-1} \binom{r+\nu}{\nu} a_{n-\nu-s};$$

en rangeant autrement les termes on trouve

$$S_n^{(p)}[S_n^{(r)}(a)] = \sum_{\nu=0}^{\nu=n-1} a_{n-\nu} \sum_{s=0}^{s=\nu} \binom{r+\nu-s}{\nu-s} \binom{p+s}{s} = \sum_{\nu=0}^{\nu=n-1} \binom{r+p+\nu+1}{\nu} a_{n-\nu} = S_n^{(r+p+1)}(a);$$

à l'aide de cette identité, qui peut s'écrire:

$$S_n^{(r+p+1)}(a) = \sum_{s=0}^{s=n-1} \binom{p+s}{s} S_{n-s}^{(r)}(a),$$

il est facile de voir comment se comporte $S_n^{(r+p+1)}(a)$ pour des valeurs très grandes de p, r étant un nombre fixe. De l'inégalité (71) il résulte en effet que l'on a

$$|S_n^{(r+p+1)}(a)| < K_1 \sum_{s=0}^{s=n-1} \binom{p+s}{s} \binom{\lambda'+\varepsilon+r+n-s-1}{n-s-1} = K_1 \binom{\lambda'+\varepsilon+r+p+n}{n-1}; \tag{73}$$

cette inégalité est valable pour $\begin{pmatrix} n=1,2,3,\ldots \\ p=0,1,2,\ldots \end{pmatrix}$; K_1 représente une constante fixe, indépendante de n et de p. Ce résultat établi, il est facile d'évaluer les a_n; en ayant soin de choisir K_1 telle que $|a_0| < K_1$, $|b_0| < K_1$ on trouve l'inégalité suivante:

$$|\alpha_n| < K_1^2 \sum_{p=0}^{p=n} \frac{(p-1)!\,(n-p-1)!}{(n-1)!} \binom{\lambda' + \varepsilon + r + n - 1}{n-p-1} \binom{\lambda' + \varepsilon + r + p - 1}{p-1} =$$

$$= K_1^2 \frac{\Gamma(\lambda' + \varepsilon + r + n)}{\Gamma(n)\,\Gamma(\lambda' + \varepsilon + r + 1)} \sum_{p=0}^{p=n} \frac{1}{\lambda' + \varepsilon + r + p}.$$

On en conclut qu'il existe une constante positive K_2 telle qu'on ait pour $n = 1, 2, 3, \ldots$

$$|\alpha_n| < K_2\, n^{\lambda' + \varepsilon + r} \log(1 + n) \tag{74}$$

et cela quelque petit que soit le nombre positif ε. La série (69) est donc absolument convergente, pourvu que $\sigma > \lambda'$.

Nous avons obtenu cette inégalité en remplaçant dans l'expression de α_n chaque terme par un autre qui est positif et plus grand en valeur absolue; nous pouvons donc conclure que la série double est aussi absolument convergente dans le demi-plan $\sigma > \lambda'$, et l'égalité (68) est par conséquent vraie.

Mais de l'inégalité (74) on peut tirer un résultat plus précis relativement à la convergence de la série au second membre de (69). Appliquons en effet à cette série la transformation (10) en posant $\beta = -1$; on trouve:

$$\Omega_1(x)\,\Omega_2(x) = a_0 b_0 + \frac{\alpha_1\, 0!}{x+r} + \frac{(\alpha_2 - \alpha_1)\, 1!}{(x+r)(x+r+1)} + \frac{(\alpha_3 - \alpha_2)\, 2!}{(x+r)(x+r+1)(x+r+2)} + \cdots \tag{75}$$

L'inégalité (74) et l'expression (8) de l'abscisse de convergence de la série montrent que cette série est convergente, si $\sigma > \lambda'$.

D'autre part on voit, par un raisonnement déjà souvent appliqué, que la série cesse généralement de converger, si $\sigma > \lambda'$.

C'est le résultat que nous avions en vue.

La formule (75) peut encore s'écrire sous la forme définitive:

$$\Omega_1(x)\,\Omega_2(x) = \beta_0 + \frac{\beta_1\, 0!}{x} + \frac{\beta_2\, 1!}{x(x+1)} + \frac{\beta_3\, 2!}{x(x+1)(x+2)} + \cdots, \tag{76}$$

où l'on a posé

$$\beta_n = \sum_{p=0}^{p=n} \frac{(n-p-1)!\,(p-1)!}{(n-1)!} S_{n-p}^{(p-1)}(a)\, b_p. \tag{77}$$

La série au second membre est ici sommable par des moyennes arithmétiques d'ordre r dans le demi-plan $\sigma > \lambda'$. Nous avons donc démontré le théorème suivant:

Théorème X. *Le produit de deux séries de facultés, sommables d'ordre r dans le demi-plan* $\sigma > \lambda_r$, *se représente par une série de facultés de la même forme, qui est sommable d'ordre r dans le domaine* $\sigma > \lambda_r$, $\sigma > 0$.

En particulier, la puissance $n^{\text{ième}}$ d'une série de facultés, qui est sommable d'ordre r dans le demi-plan $\sigma > \lambda_r$, se représente par une série de facultés, qui est sommable d'ordre r dans le demi-plan $\sigma > \lambda_r$, $\sigma > 0$.

Théorème X'. *Le produit de deux séries de facultés, convergentes pour* $\sigma > \lambda$, *se représente par une série de facultés de la même forme, convergente pour* $\sigma > \lambda$, $\sigma > 0$.

Il va sans dire que le produit de deux séries de facultés, absolument convergentes pour $\sigma > \lambda$, se représente par une série de facultés absolument convergente pour $\sigma > \lambda$, $\sigma > 0$.

Si les séries manquent le premier terme on démontre ce théorème:

Théorème XI. *Le produit de deux séries de facultés de la forme* (1), *dont le terme constant s'annule, et qui sont sommables par des moyennes arithmétiques de premier ordre pour* $\sigma > \lambda_1$, *et convergentes pour* $\sigma > \lambda$, *se représente par une série de facultés de la même forme, qui est convergente pour* $\sigma > \lambda_1$, $\sigma > 0$ *et absolument convergente pour* $\sigma > \lambda$, $\sigma > 0$.

En effet, en appliquant à $\Omega_1(x)$ et à $\Omega_2(x)$ la transformation (10), où l'on pose $\beta = 1$, on voit qu'elles se représentent par des séries de la forme

$$\frac{b_0}{x+1} + \frac{b_1}{(x+1)(x+2)} + \frac{b_2}{(x+1)(x+2)(x+3)} + \cdots$$

convergentes (resp. absolument convergentes) dans les domaines indiqués par le théorème. Le produit $(x+1)^2 \Omega_1(x) \Omega_2(x)$ se représente donc, en vertu du théorème X', par une série de la forme

$$(x+1)^2 \Omega_1(x) \Omega_2(x) = \alpha_0 + \frac{\alpha_1}{x+2} + \frac{\alpha_2}{(x+2)(x+3)} + \cdots$$

En divisant les deux membres par $x(x+1)$ et en multipliant le second membre par la série de facultés de la forme (1) qui représente $\frac{x}{x+1}$ le théorème XI se trouve démontré.

De la série de Stirling

$$\frac{1}{x-\alpha} = \frac{1}{x} + \frac{\alpha}{x(x+1)} + \frac{\alpha(\alpha+1)}{x(x+1)(x+2)} + \cdots,$$

qui est absolument convergente, si $\sigma > \alpha$, et du théorème X′ on conclut que toute fonction rationnelle dans laquelle le degré du nominateur ne surpasse pas celui du dénominateur se représente par une série de facultés de la forme (1), absolument convergente pourvu que σ soit positif et plus grand que la partie réelle de celle des racines dont la partie réelle est la plus grande.

A l'aide de cette remarque on démontre le théorème suivant:

Théorème XII. *Si la fonction $\Omega(x)$ admet un développement en série de facultés de la forme* (65), *qui est sommable par des moyennes arithmétiques d'ordre r dans le demi-plan $\sigma > \lambda_r \geqq 0$, la fonction $\Omega(x)x^{-r}$ se représente par une série de facultés de la même forme, convergente dans le demi-plan $\sigma > \lambda_r$, et la fonction $\Omega(x)x^{-r-1}$ se représente par une série absolument convergente dans ce demi-plan.*

En effet, $\dfrac{\Omega(x)}{x(x+1)\ldots(x+r-1)}$ se représente par une série de la forme (65) convergente pour $\sigma > \lambda_r$; en multipliant cette série par la série de facultés qui représente $\dfrac{x(x+1)\ldots(x+r-1)}{x^r}$ la première partie du théorème se trouve démontré.

La seconde partie se démontre par un raisonnement analogue.

§ 17. Pour ce qui concerne l'intégration d'une série de facultés entre des limites finies nous nous bornerons à renvoyer aux Mémoires cités de M. N. Nielsen. Disons encore quelques mots sur la différentation. En dérivant terme par terme la série (1) par rapport à x on trouve

$$\Omega'(x) = -\sum_{s=0}^{s=\infty} \frac{a_{s+1}\, s!}{x(x+1)\ldots(x+s)}\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x+1} + \cdots + \frac{1}{x+s}\right);$$

d'après un théorème bien connu, dû à Weierstrass, cette série représente $\Omega'(x)$ à l'intérieur du domaine de convergence $\sigma > \lambda$ de la série (1), mais ce n'est pas une série de facultés. Pourtant $\Omega'(x)$ admet un développement en série de facultés. On le voit le plus facilement à l'aide de la transformation (10); on en déduit l'identité:

$$\frac{\Omega(x+\beta)-\Omega(x)}{\beta} = -\sum_{s=1}^{s=\infty} \frac{\left(a_s + \frac{\beta+1}{1.2}a_{s-1} + \cdots + \frac{(\beta+1)\ldots(\beta+s-1)}{s!}a_1\right)s!}{(x+\beta)(x+\beta+1)\ldots(x+\beta+s)}.$$

Soit x un nombre tel que $\sigma > \lambda$, $\sigma > 0$. La série au second membre est convergente du moins si $|\beta|$ est choisi suffisamment petit. Faisons tendre β vers zéro le long d'un rayon vecteur quelconque, on trouve:

$$\Omega'(x) = -\sum_{s=1}^{s=\infty} \frac{\left(\frac{a_s}{1} + \frac{a_{s-1}}{2} + \cdots + \frac{a_1}{s}\right) s!}{x(x+1)\ldots(x+s)}.$$

La dérivée de la fonction $\Omega(x)$, définie par la série (1), *ayant l'abscisse de convergence λ, admet un développement de la même forme, convergente si $\sigma > \lambda$, $\sigma > 0$.*

Le 30 juillet 1912.