ÜBER DEN ZUSAMMENHANG ZWISCHEN DEM MAXIMALBETRAGE EINER ANALYTISCHEN FUNKTION UND DEM GRÖSSTEN GLIEDE DER ZUGEHÖRIGEN TAYLOR'SCHEN REIHE.

VON

A. WIMAN

in UPSALA.

Es bezeichne für $|z| = r$ $M(r)$ den Maximalbetrag einer analytischen Funktion $F(z)$, welche durch die TAYLOR'sche Entwickelung

$$a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \cdots$$

dargestellt wird. Den grössten möglichen Betrag eines Gliedes in dieser Entwickelung bezeichnen wir mit $m(r)$, wenn $|z| = r$ einen gegebenen Wert hat, und $m(r)$ von keinem Betrag eines anderen Gliedes übertroffen wird. Ist $F(z)$ eine ganze transzendente Funktion, so folgt schon aus den Untersuchungen des Herrn BOREL,[1] dass für beliebig grosse r die Ungleichung

$$M(r) < [m(r)]^{1+\varepsilon}$$

gültig ist, wobei ε eine beliebige positive Grösse bedeuten kann.

Dass man für spezielle Funktionen viel genauere Resultate erlangen kann, ersieht man aus dem Beispiele

$$M(r) = e^r = \sum_0^\infty \frac{r^n}{\Gamma(n+1)}.$$

[1] *Leçons sur les fonctions entières*, S. 62 (Paris 1900). Man sehe auch BOREL, *Leçons sur les séries à termes positivs* (Paris 1902), woselbst mehr eingehend spezielle Fälle mit positiven Koeffizienten (auch mit endlichem Konvergenzradius) behandelt werden, sowie auch auf die einschlägigen Arbeiten der Herren APPELL, CESÀRO, HADAMARD und besonders LE ROY Bezug genommen wird.

Setzt man für das grösste Glied $n = r$, so bekommt man nach der STIRLING'schen Formel

$$m(r) = \frac{e^r}{\sqrt{2\pi r}}[1 + \varepsilon(r)].^1$$

Hieraus ergibt sich unmittelbar, dass, wie klein auch die positive Grösse δ genommen wird, es ein $r = r(\delta)$ gibt, dass für $r > r(\delta)$ die Ungleichung

$$M(r) < \sqrt{2\pi}\, m(r)\, [\log m(r)]^{\frac{1}{2}} (1 + \delta)$$

gültig bleibt. Ähnliche Resultate erhält man leicht bei Untersuchung anderer spezieller Funktionen. Auf Grund solcher Verhältnisse habe ich schon seit mehreren Jahren vermutet, dass bei jeder ganzen transzendenten Funktion für unendlich viele unbegrenzt wachsende r

$$(1) \qquad M(r) < m(r)\, [\log m(r)]^{\frac{1}{2} + \varepsilon}$$

ist. Nach vergeblichen Versuchen ist es mir jetzt gelungen, diese Vermutung zu beweisen. Die dabei zu benutzende Metode lässt sich aber sofort auf allgemeinere analytische Funktionen ausdehnen, und es gibt auch Klassen von nicht ganzen Funktionen, für welche man fast ebenso scharfe Relationen wie (1) erhält. Für ganze Funktionen von endlicher Ordnung kann man (1) in analoger Weise präzisieren, wie wir eben bei der Exponentialfunktion gesehen haben. Aber auch für die ganzen Funktionen im Allgemeinen kann man (1) durch genauere Ungleichungen ersetzen, falls man $\log_2 m(r)$, $\log_3 m(r)$ u. s. w. einführt.

§ 1.

Ohne Beschränkung der Allgemeinheit darf man bei diesen Untersuchungen sich auf Funktionen mit positiven Koeffizienten für eine reelle positive Variabele r beschränken. Ist der Konvergenzradius R endlich, so überführt man ihn durch eine leichte Transformation auf den Fall $R = 1$. Betrachtet man dann die Koeffizientenreihe

$$a_0, a_1, a_2, \ldots a_n, \ldots,$$

so kommen für uns eigentlich nur solche Fälle in Betracht, bei denen sich aus

---

[1] $\varepsilon(r)$ bedeutet eine Grösse, welche für $\lim r = \infty$ unendlich klein wird.

dieser Reihe eine monoton zunehmende Teilreihe herausnehmen lässt, so dass der Index n des grössten Gliedes für $\lim r = 1$ unendlich wird. Für ganze transzendente Funktionen und $\lim r = \infty$ liegt dies in der Natur der Sache. Die Rolle als grösstes Glied wird stets bei steigendem r von einem Terme zu einem anderen mit höherem Index übergehen. Dabei können offenbar Sprünge gemacht werden. Doch werden unsere Schlüsse in ihrer Allgemeinheit selbstverständlich nicht beeinträchtigt, falls wir die Terme, die nie grösste Glieder werden, in einer Weise erhöhen, dass nie ein solcher Term einen grösseren Betrag als alle übrigen bekommt; dagegen darf der Betrag, was doch nur für einen einzigen r-Wert möglich ist, eben so gross wie jeder andere werden. Nimmt man also an, dass zwei konsekutive grösste Glieder für $r = \bar{r}$ einander gleich werden, so ist es zulässig, die zwischenliegenden Glieder in solcher Weise zu erhöhen, dass ihnen für $r = \bar{r}$ ein gleicher Betrag wie den beiden äusseren erteilt wird.

Hiernach schreiben wir

$$M(r) = \sum_0^\infty m_n \left(\frac{r}{r_n}\right)^n, \tag{2}$$

wobei angenommen wird, dass für $r = r_n$ das n^{te} Glied als grösstes Glied betrachtet werden kann. Man hat also

$$r_n \leqq r_{n+1}, \quad m_n \leqq m_{n+1}, \quad m(r_n) = m_n. \tag{3}$$

Für ein wirkliches grösstes Glied lässt sich r_n in einem gewissen Intervalle beliebig auswählen, wobei man auch den etwa aus einer besonderen Problemstellung hervorgehenden Anforderungen Rechnung tragen kann. Für $r = r_{n-1}$ hat man

$$m_{n-1} \geqq m_n \left(\frac{r_{n-1}}{r_n}\right)^n$$

und für $r = r_n$

$$m_n \geqq m_{n-1} \left(\frac{r_n}{r_{n-1}}\right)^{n-1}.$$

Hieraus ergibt sich

$$\left(\frac{r_n}{r_{n-1}}\right)^{n-1} \leqq \frac{m_n}{m_{n-1}} \leqq \left(\frac{r_n}{r_{n-1}}\right)^n.$$

Es lässt sich mithin schreiben

$$\frac{m_n}{m_{n-1}} = \left(\frac{r_n}{r_{n-1}}\right)^{n-\varepsilon_n} \qquad (0 \leq \varepsilon_n \leq 1). \tag{4}$$

Ohne Beschränkung der Allgemeingültigkeit unserer Resultate können wir $m_0 > 0$ setzen. Als einen besonderen Fall von (4) haben wir

$$m_1 \geq m_0. \tag{5}$$

Aus (4) erhält man jetzt, wenn man die Fälle $n, n-1, \ldots, 2, 1$ kombiniert

$$\begin{gathered} m_n \geq m_0 \prod_2^n \left(\frac{r_\nu}{r_{\nu-1}}\right)^{\nu-\varepsilon_\nu} \geq \\ m_0 \prod_2^n \left(\frac{r_\nu}{r_{\nu-1}}\right)^{\nu-1} = m_0 \frac{r_n^{n-1}}{r_1 r_2 \ldots r_{n-1}}. \end{gathered} \tag{6}$$

Für eine allgemeine Funktion $F(z)$ mit nicht durchweg positiven Koeffizienten bekommt man hier nach einem bekannten Satze

$$M(r) \geq m_n \left(\frac{r}{r_n}\right)^n \geq m_0 \frac{r^n}{r_1 r_2 \ldots r_n}. \tag{7}$$

Es ist wohl kaum nötig besonders hervorzuheben, wie (7) der äusseren Gestalt nach mit dem bekannten wichtigen Theoreme des Herrn Jensen übereinstimmt, wo aber $r_1, r_2, \ldots, r_n, \ldots$ die Beträge der Nullstellen bezeichnen.[1]

Jetzt zerlegen wir $M(r_n)$ in zwei Faktoren

$$M(r_n) = M_n = m(r_n)\,\mu(r_n) = m_n \mu_n. \tag{8}$$

Wir bekommen alsdann

$$\mu_n = 1 + \sum_{\nu=1}^{n} \frac{m_{n-\nu}}{m_n} \left(\frac{r_n}{r_{n-\nu}}\right)^{n-\nu} + \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{m_{n+\nu}}{m_n} \left(\frac{r_n}{r_{n+\nu}}\right)^{n+\nu}. \tag{9}$$

Nach einer Umformung, bei welcher (4) benutzt wird, ergibt sich

$$\mu_n = 1 + \sum_{\nu=1}^{n} \prod_{k=0}^{\nu-1} \left(\frac{r_{n-\nu+k}}{r_{n-\nu+k+1}}\right)^{k+1-\varepsilon_{n-\nu+k+1}} + \sum_{\nu=1}^{\infty} \prod_{k=0}^{\nu-1} \left(\frac{r_{n+\nu-k-1}}{r_{n+\nu-k}}\right)^{k+\varepsilon_{n-\nu+k}}. \tag{10}$$

---

[1] Diese Übereinstimmung bewährt sich offenbar noch, falls das konstante Glied von $F(z)$ verschwindet.

Da $1-\varepsilon_{n-\nu+k+1}$ bez. $\varepsilon_{n-\nu+k} \geqq 0$, erhalten wir hieraus

$$\mu_n \leqq 3+\sum_{\nu=2}^{n}\prod_{k=1}^{\nu-1}\left(\frac{r_{n-\nu+k}}{r_{n-\nu+k+1}}\right)^k+\sum_{\nu=2}^{\infty}\prod_{k=1}^{\nu-1}\left(\frac{r_{n+\nu-k-1}}{r_{n+\nu-k}}\right)^k. \tag{11}$$

Letztere Relation schreibt sich etwas einfacher

$$\mu_n \leqq 3+\sum_{\nu=2}^{n}\prod_{k=1}^{\nu-1}\frac{r_{n-\nu+k}}{r_n}+\sum_{\nu=2}^{\infty}\prod_{k=1}^{\nu-1}\frac{r_n}{r_{n+\nu-k}}. \tag{12}$$

Für die folgenden Entwicklungen bilden nun besonders (6), (8) und (12) die Grundlagen.

§ 2.

Die ganze Frage reduziert sich demnach auf die Eigenschaften des unendlichen Produktes, dessen allgemeines Glied $u_n = \frac{r_n}{r_{n-1}}$ ist. Der Konvergenzradius wird ersichtlich durch $\lim\limits_{n=\infty} r_n$ definiert. Für nicht ganze Funktionen konvergiert also das fragliche unendliche Produkt, und wir können in diesem Falle nach einer oben gemachten Bemerkung annehmen, dass $\lim\limits_{n=\infty} r_n = 1$.

Zunächst wollen wir aber den Fall der ganzen transzendenten Funktionen in Betracht nehmen, wo also $\lim\limits_{n=\infty} r_n = \infty$ und das Produkt divergiert, und zwar werden wir hier den Beweis erbringen, dass der Satz, welcher durch (1) ausgedrückt wird, sich als Folgerung aus dieser Divergenz herleiten lässt. Es genügt offenbar zu beweisen, dass für eine beliebige ganze Zahl ν man irgendwie ein $r > r_\nu$ bestimmen kann, so dass (1) befriedigt wird.

Es sei die reelle Zahl $\alpha - 1 > 0$, aber sonst beliebig klein. Dann konvergiert bekanntlich das unendliche Produkt

$$P = \prod_{1}^{\infty}(1+n^{-\alpha}).$$

Als Teilprodrukt bezeichnen wir

$$P_\mu = \prod_{1}^{\mu}(1+n^{-\alpha}). \tag{13}$$

Für $\mu = 1, 2, \ldots, \nu$ betrachten wir die Grössen

$$l_\mu = \frac{r_\mu}{P_\mu}. \tag{14}$$

Es gibt dann eine bestimmte Zahl λ_ν, so dass

$$\lambda_\nu \geqq l_\mu \qquad (\mu = 1, 2, \ldots, \nu), \tag{15}$$

wo das untere Zeichen nicht ausgeschlossen ist. Nun ist die Frage, wie sich die Grössen $l_\mu = \frac{r_\mu}{P_\mu}$ für $\mu > \nu$ verhalten. Da $\lim\limits_{\mu=\infty} r_\mu = \infty$ und $\lim\limits_{\mu=\infty} P_\mu = P$, so erschliesst man, dass es ein erstes $\mu = n_1 > \nu$ geben muss, so dass $l_{n_1} \geqq \lambda_\nu$ ist, so wie auch ein letztes $\mu = n_2$, dass $l_{n_2-1} < \lambda_\nu$ ist. Man hat dann $n_2 \geqq n_1$ und für $\mu \geqq n_2$ $l_\mu \geqq \lambda_\nu$.

Wir wollen beweisen, dass es für $n_1 \leqq n \leqq n_2$ eine ganze Zahl n gibt, dass

$$m_n \geqq m_0 \frac{P_n^{n-1}}{P_1 P_2 \ldots P_{n-1}} \tag{16}$$

und

$$\mu_n \leqq 3 + \sum_{\nu=2}^{n} \prod_{k=1}^{\nu-1} \frac{P_{n-\nu+k}}{P_n} + \sum_{\nu=2}^{\infty} \prod_{k=1}^{\nu-1} \frac{P_n}{P_{n+\nu-k}}. \tag{17}$$

Hierbei ist es hinreichend, wenn wir den Nachweis führen können, dass, wie man auch $\nu < n$ nimmt,

$$\prod_{k=1}^{\nu} \frac{r_{n-k}}{r_n} \leqq \prod_{k=1}^{\nu} \frac{P_{n-k}}{P_n}, \tag{18}$$

sowie für jede ganze Zahl $\nu > 0$

$$\prod_{k=1}^{\nu} \frac{r_n}{r_{n+k}} \leqq \prod_{k=1}^{\nu} \frac{P_n}{P_{n+k}}. \tag{19}$$

Wir wollen versuchen, r_n hier in der Gestalt $\lambda_\nu P_n$ zu setzen. Dann hat man nämlich unmittelbar nach den Voraussetzungen

$$\frac{r_{n-k}}{r_n} \leqq \frac{P_{n-k}}{P_n} \qquad (n - k < n_1),$$

sowie auch

$$\frac{r_n}{r_{n+k}} \leqq \frac{P_n}{P_{n+k}} \qquad (n + k \geqq n_2).$$

Für $n = n_1$ liegt $\lambda_\nu P_{n_1}$ in dem zu r_{n_1} gehörigen Intervall. In derselben Weise verhält es sich für $n = n_2$. Hat man $n_1 = n_2$, was in regulären Fällen zu erwarten ist, so lassen sich mithin (18) und (19) unmittelbar für $n = n_1 = n_2$ befriedigen.

Ist dagegen $n_2 > n_1$, so kan man zuerst einen Versuch mit $n = n_1$ und $r_{n_1} = \lambda_\nu P_{n_1}$ machen. Werden hier nicht sämtliche Bedingungen (19) für $0 < \nu < n_2 - n_1$ erfüllt, so muss es eine erste Zahl $N = N_1$ geben, dass, wie man auch $r_{n_1+N_1}$ in dem zugehörigen Intervalle wählt,

$$\prod_{k=1}^{N_1} \frac{r_{n_1}}{r_{n_1+k}} > \prod_{k=1}^{N_1} \frac{P_{n_1}}{P_{n_1+k}}. \tag{20}$$

Die neue Gestalt (20) der Relation für $N = N_1$ verlangt natürlich, dass $r_{n_1+N_1} < \lambda_\nu P_{n_1+N_1}$. Für $n_1 + N_1 < n < n_3$ mag man auch stets $r_n < \lambda_\nu P_n$ haben. Erst für $n = n_3$ sei es möglich $r_{n_3} \geqq \lambda_\nu P_{n_3}$ zu wählen; offenbar ist dann das untere Zeichen nicht ausgeschlossen.

Wir untersuchen jetzt, in wie weit sämtliche Bedingungen (18) und (19) sich für $n = n_3$ und $r_{n_3} = \lambda_\nu P_{n_3}$ befriedigen lassen. Was erstens (18) anbelangt, so ist dies sicher der Fall. Für $n_3 - k > n_1 + N_1$ hat man

$$\frac{r_{n_3-k}}{r_{n_3}} < \frac{P_{n_3-k}}{P_{n_3}}.$$

Infolge des Umstandes, dass eine Relation von der Gestalt (20) nicht schon für $N < N_1$ auftreten darf, hat man

$$\prod_{k=0}^{m} \frac{r_{n_1+N_1-k}}{r_{n_1}} < \prod_{k=0}^{m} \frac{P_{n_1+N_1-k}}{P_{n_1}} \qquad (m = 0, 1, \ldots N_1).$$

Da

$$\frac{r_{n_1}}{r_{n_3}} = \frac{P_{n_1}}{P_{n_3}},$$

folgt hieraus

$$\prod_{k=0}^{m} \frac{r_{n_1+N_1-k}}{r_{n_3}} < \prod_{k=0}^{m} \frac{P_{n_1+N_1-k}}{P_{n_3}} \qquad (m = 0, 1, \ldots N_1).$$

Aus diesen Tatsachen folgt unmittelbar, dass den Ungleichungen (18) für $n = n_3$ Genüge geleistet wird.

Ist dasselbe noch nicht für (19) der Fall, so kann man in gleicher Weise, wie wir soeben von n_1 zu n_3 aufstiegen, jetzt von n_3 ausgehend eine Zahl $n = n_4 > n_3$ konstruieren, wo auch sofort die Relationen (18) befriedigt werden. Zuletzt müssen dann auch (19) gelten. Das Verfahren bei der Aufsuchung der Zahlen $n_3, n_4, \ldots$ ist ja von der Art, dass man zu grösseren Zahlen als n_2 nicht gelangen kann, und, wenn nicht früher, so sind jedenfalls die Bedingungen (19) für $n = n_2$ erfüllt. Dasselbe gilt dann selbstverständlich von (16) und (17).

Nach Benutzung von (13) erhalten wir aus (16)

$$m_n \geqq m_0 \prod_{k=2}^{n} (1 + k^{-a})^{k-1}. \tag{21}$$

Hieraus

$$\log m_n \geqq \log m_0 + \sum_{k=2}^{n} (k-1) \log (1 + k^{-a}). \tag{22}$$

Da

$$\log (1 + k^{-a}) > \frac{k^{-a}}{1 + k^{-a}},$$

so ersieht man, dass (22) durch

$$\log m_n \geqq (1 - \varepsilon_n) \sum_{k=2}^{n} k^{1-a}, \tag{23}$$

sich ersetzen lässt, wo man für ε_n eine beliebig kleine gegebene Grösse > 0 nehmen kann, falls die ganze Zahl ν, von welcher n abhängig ist, hinreichend gross gewählt wird. Hier lässt sich (23) durch die damit äquivalente

$$\log m_n \geqq (1 - \varepsilon_n) \frac{n^{2-a}}{2 - a} \tag{24}$$

ersetzen. Nimmt man $\varepsilon_n \leqq a - 1$, so bekommt man endlich

$$\log m_n \geqq n^{2-a}, \tag{25}$$

wo a eine beliebige reelle Zahl > 1 bezeichnen kann.

Aus (17) erhalten wir durch Ausführung

$$\mu_n \leqq 3 + \sum_{\nu_1=1}^{n-1} \prod_{\varkappa=0}^{\nu_1-1} [1 + (n - \varkappa)^{-a}]^{-(\nu_1-\varkappa)} + \sum_{\nu_1=1}^{\infty} \prod_{\varkappa=0}^{\nu_1-1} [1 + (n + \varkappa + 1)^{-a}]^{-(\nu_1-\varkappa)}. \tag{26}$$

Für die erste Summe hat man

$$(27)\quad \sum_{\nu_1=1}^{n-1}\prod_{\varkappa=0}^{\nu_1-1}[1+(n-\varkappa)^{-\alpha}]^{-(\nu_1-\varkappa)} < \sum_{\nu_1=1}^{n-1}(1+n^{-\alpha})^{-\frac{\nu_1(\nu_1+1)}{2}} < \sum_{\nu_1=1}^{\infty}(1+n^{-\alpha})^{-\frac{\nu_1(\nu_1+1)}{2}}.$$

Die Abschätzung der zweiten in (26) auftretenden Reihe ist etwas schwieriger. Wir wollen dieselbe in zwei Teile zerlegen, je nachdem $\nu_1 < N$ oder $\nu_1 \geqq N$, wobei $N \leqq n$ sein soll. Man hat dann

$$\prod_{\varkappa=0}^{N-1}[1+(n+\varkappa+1)^{-\alpha}]^{-(N-\varkappa)} < \prod_{\varkappa=0}^{N-1}[1+(2n)^{-\alpha}]^{-(N-\varkappa)} =$$

$$(28)\qquad = [1+(2n)^{-\alpha}]^{-\frac{N(N+1)}{2}} = e^{-\frac{N(N+1)}{2(2n)^{\alpha}}}(1+\delta_n),$$

wo δ_n für $\lim n=\infty$ verschwindend klein wird. Die Teilreihe, welche mit diesem Gliede anfängt, konvergiert offenbar rascher als eine geometrische Reihe mit dem Quotienten

$$[1+(2n)^{-\alpha}]^{-N}.$$

Die Summe dieser Teilreihe ist also

$$(29)\qquad \leqq \frac{(1+\delta_n)\, e^{-\frac{N(N+1)}{2(2n)^{\alpha}}}}{1-[1+(2n)^{-\alpha}]^{-N}} = (1+\eta_n)\frac{(2n)^{\alpha}}{N}\, e^{-\frac{N(N+1)}{2(2n)^{\alpha}}},$$

wo $\lim\limits_{n=\infty}\eta_n = 0$. Aber auch der ganze Ausdruck (29) wird für $\lim n=\infty$ verschwindend klein, wenn man nur, für $\alpha < \alpha_1 < 2$, $N > n^{\frac{\alpha_1}{2}}$ wählt.

Suchen wir das Verhältnis zwischen der noch übrigen Teilreihe, für welche $\nu_1 < N$ ist, und der Reihe

$$\sum_{\nu_1=1}^{N-1}\prod_{\varkappa=0}^{\nu_1-1}(1+n^{-\alpha})^{-(\nu_1-\varkappa)} = \sum_{\nu_1=1}^{N-1}(1+n^{-\alpha})^{-\frac{\nu_1(\nu_1+1)}{2}},$$

so ist ohne Schwierigkeit ersichtlich, dass dieses Verhältnis

$$< \left(\frac{1+(n+N)^{-\alpha}}{1+n^{-\alpha}}\right)^{-\frac{N(N-1)}{2}} = \left(1+\frac{n^{-\alpha}-(n+N)^{-\alpha}}{1+(n+N)^{-\alpha}}\right)^{\frac{N(N-1)}{2}} <$$

$$(30)\qquad < e^{\frac{N(N-1)}{2}[n^{-\alpha}-(n+N)^{-\alpha}]} < e^{\frac{\alpha N^2(N-1)}{2n^{\alpha+1}}}.$$

Letzterer Ausdruck wird aber für $\lim n=\infty$ beliebig wenig von 1 verschieden, falls $\frac{\alpha_1}{2} < \frac{\alpha + 1}{3}$ gewählt wird, was mit der früheren Bedingung $\alpha < \alpha_1 < 2$ verträglich ist.

Aus diesen Auseinandersetzungen ersieht man, dass (26) durch

$$(31) \qquad \mu_n \leqq 3 + 2(1 + \varepsilon_n) \sum_{\nu_1=1}^{\infty} (1 + n^{-\alpha})^{-\frac{\nu_1(\nu_1+1)}{2}}$$

sich ersetzen lässt, wo für ε_n bei genügend grossem n eine beliebig kleine Grösse gesetzt werden kann. Da

$$\log(1 + n^{-\alpha}) > \frac{n^{-\alpha}}{1 + n^{-\alpha}} = \frac{1}{n^\alpha + 1},$$

so bekommt man jetzt

$$(32) \qquad \mu_n \leqq 3 + 2(1 + \varepsilon_n) \sum_{\nu_1=1}^{\infty} e^{-\frac{\nu_1(\nu_1+1)}{2(n^\alpha+1)}}.$$

Es ist aber

$$(33) \qquad 2 \sum_{\nu_1=1}^{\infty} e^{-\frac{\nu_1(\nu_1+1)}{2(n^\alpha+1)}} < \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2(n^\alpha+1)}} dx = \sqrt{2\pi(n^\alpha + 1)}.$$

Mithin hätten wir

$$(34) \qquad \mu_n \leqq 3 + 2(1 + \varepsilon_n)\sqrt{2\pi n^\alpha};$$

da aber dies auch, wenn α durch eine Zahl α_2 ersetzt wird, wo $\alpha > \alpha_2 > 1$, gilt, so darf man (34) durch

$$(35) \qquad \mu_n \leqq n^{\frac{\alpha}{2}}$$

ersetzen. Aus (25) und (35) ergibt sich nun

$$(36) \qquad \mu_n \leqq [\log m_n]^{\frac{\alpha}{2(2-\alpha)}}.$$

Da

$$\frac{\alpha}{2(2-\alpha)} = \frac{1}{2} + \frac{\alpha - 1}{2 - \alpha},$$

und $\alpha - 1$ beliebig klein genommen werden kann, so sind (1) und (36) mit einander äquivalent. Die Aufgabe, welche wir uns zunächst gestellt haben, ist demnach gelöst.

§ 3.

Statt des unendlichen Produktes P hätten wir ein beliebiges konvergentes Produkt benutzen können. Je langsamer man das Produkt konvergieren lässt, mit einer um so schärferen Relation wird dann (1) ersetzt. So z. B., um einzusehen, dass es erlaubt ist für (1) die genauere Relation

$$(1') \qquad M(r) < m(r)\,[\log m(r)]^{\frac{1}{2}}\,[\log_2 m(r)]^{1+\varepsilon}$$

einzuführen, brauchen wir nur von dem Produkt

$$P_1 = \prod_2^\infty \left(1 + \frac{1}{n(\log n)^\alpha}\right) \qquad (\alpha > 1)$$

auszugehen.

Beschränkt man sich auf besondere Klassen ganzer Funktionen, kann man sogar als Hilfsprodukt P ein *divergentes* Produkt nehmen. Das wesentliche bei den Auseinandersetzungen im vorigen Paragraphen war ja nur, dass zu jeder gegebenen Zahl ν eine Zahl N sich so bestimmen lässt, dass für $n > N$

$$\frac{r_n}{r_\mu} \geqq \frac{P_n}{P_\mu} \qquad (\mu = 1, 2, \ldots \nu).$$

Für die *ganzen Funktionen endlicher Ordnung* ϱ wird hier das Resultat ganz besonders einfach. Ist $\varrho_1 > \varrho$, so bekommt man nämlich

$$(37) \qquad M(r) < \varrho_1 \sqrt{2\pi}\, m(r)\,[\log m(r)]^{\frac{1}{2}},$$

was eine sehr wesentliche Verschärfung von (1) darstellt. Wie äusserst genau diese Ungleichung (37) ist, ersieht man daraus, dass es in ihr nicht zulässig ist die Zahl $\varrho_1 \leqq \varrho$ zu nehmen, wie schon aus dem in der Einleitung behandelten Beispiel der Exponentialfunktion hervorgehen dürfte.

Wir setzen $\varrho < \varrho_2 < \varrho_3 < \varrho_1$. Es sei

$$f(x) = \sum_0^\infty c_n x^n$$

eine ganze Funktion von der Ordnung ϱ mit reellen positiven Koeffizienten. Nach einem bekannten Satze hat man, falls n genügend gross gewählt wird,

$$c_n < n^{-\frac{n}{\varrho_2}}. \tag{38}$$

Beziehen wir uns jetzt auf die Darstellung (2), so erhalten wir auch

$$\frac{m_n}{r_n^n} < n^{-\frac{n}{\varrho_2}}, \tag{39}$$

da bei der dort etwa stattgefundenen Änderung der ursprünglichen Koeffizienten c_n die Ordnung ϱ selbstverständlich nicht erhöht werden kann. Nun ist m_n eine mit n ins Unendliche wachsende Grösse. Man bekommt also aus (39)

$$r_n > n^{\frac{1}{\varrho_2}}. \tag{40}$$

Für P lässt sich jetzt ein divergentes Produkt wählen, so dass

$$P_n = n^{\frac{1}{\varrho_3}}. \tag{41}$$

Es wird ja dann

$$\frac{r_n}{P_n} > n^{\frac{1}{\varrho_2} - \frac{1}{\varrho_3}},$$

also auch

$$\frac{r_n}{P_n} \geqq \frac{r_\mu}{P_\mu} \qquad (\mu = 1, 2, \ldots \nu),$$

wenn n genügend gross ist. Wir bekommen also nach der im vorigen Paragraphen dargelegten Methode

$$m_n \geqq m_0 \frac{P_n^{n-1}}{P_1 P_2 \ldots P_{n-1}} = m_0 \frac{n^{\frac{n}{\varrho_3}}}{(\lfloor n)^{\frac{1}{\varrho_3}}} = m_0 \frac{e^{\frac{n}{\varrho_3}}}{[\sqrt{2\pi n}\,(1+\varepsilon_n)]^{\frac{1}{\varrho_3}}} > e^{\frac{n}{\varrho_1}}, \tag{42}$$

woraus dann folgt

$$\log m_n > \frac{n}{\varrho_1}. \tag{43}$$

Da

$$\frac{P_n}{P_{n-1}} = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{-\frac{1}{\varrho_3}} > 1 + \frac{1}{\varrho_3 n},$$

so lässt sich in diesem speziellen Falle (26) durch

$$(44)\qquad \mu_n \leqq 3 + \sum_{\nu_1=1}^{n-1} \prod_{\varkappa=0}^{\nu_1-1} \left[1 + \frac{1}{\varrho_3(n-\varkappa)}\right]^{-(\nu_1-\varkappa)} + \sum_{\nu_1=1}^{\infty} \prod_{\varkappa=0}^{\nu_1-1} \left[1 + \frac{1}{\varrho_3(n+\varkappa+1)}\right]^{-(\nu_1-\varkappa)}$$

ersetzen. Es ist unmittelbar einleuchtend, dass (44) sich nach denselben Prinzipien vereinfachen lässt wie (26). Es ergibt sich mithin in Analogie mit (31), (32), (33) und (34)

$$(45)\qquad \begin{aligned} \mu_n &\leqq 3 + 2(1+\varepsilon_n) \sum_{\nu_1=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{\varrho_3 n}\right)^{-\frac{\nu_1(\nu_1+1)}{2}} < 3 + 2(1+\varepsilon_n) \sum_{\nu_1=1}^{\infty} e^{-\frac{\nu_1(\nu_1+1)}{2(\varrho_3 n+1)}} < \\ &< 3 + (1+\varepsilon_n) \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2(\varrho_3 n+1)}} dx = 3 + (1+\varepsilon_n)\sqrt{2\pi(\varrho_3 n+1)}. \end{aligned}$$

Da $\varrho_1 > \varrho_3$, folgt hieraus, wenn n grösser als eine gewisse Zahl N ist,

$$(46)\qquad \mu_n < \sqrt{2\pi\varrho_1 n}.$$

Aus (43) und (46) bekommt man

$$(47)\qquad \mu_n < \varrho_1\sqrt{2\pi}\,[\log m_n]^{\frac{1}{2}}$$

oder den in (37) enthaltenen Satz, welchen wir zu beweisen haben.

Hat man anderseits für eine spezielle Funktion von der Ordnung ϱ

$$\mu(r) < \sqrt{2\pi}\,.\,\sigma\,[\log m(r)]^{\frac{1}{2}} \qquad (\sigma < \varrho),$$

so darf man vielleicht erwarten, besonders wenn $\sigma < 1$ ist, dass die Funktion gewisse Eigenschaften mit einer ganzen Funktion, deren Ordnung nicht grösser als σ ist, gemein haben muss.

Hat man für die Funktion noch genauere Festsetzungen als die Ordnung ϱ, so lassen sich die oben erhaltenen Resultate präzisieren. Weiss man z. B. von vornherein, dass

$$M(r) = e^{\varepsilon(r) r^{\varrho}},$$

wo $\lim\limits_{r=\infty} \varepsilon(r) = 0$, so ist ja dies damit äquivalent, dass für $\lim\limits_{n=\infty} \varepsilon(n) = 0$

$$c_n = \left(\frac{n}{\varepsilon(n)}\right)^{-\frac{n}{\varrho}}$$

gesetzt werden kann. Es wird dann möglich (40) durch eine Relation

$$(40') \qquad r_n > \frac{n^{\frac{1}{\varrho}}}{\alpha(n)}$$

von der Art, dass $\lim_{n=\infty} \alpha(n) = 0$ ist, zu ersetzen. Für die Folge P_n kann man jetzt

$$(41') \qquad P_n = n^{\frac{1}{\varrho}}$$

wählen. Es lässt sich nun, jedenfalls wenn gewisse Bedingungen für die Folge $\alpha(n)$ erfüllt sind, eine schärfere Ungleichung als (37), nämlich

$$(37') \qquad M(r) < \varrho \sqrt{2\pi}\, m(r) [\log m(r)]^{\frac{1}{2}}$$

herleiten. Dies trifft z. B. zu, falls ϱ eine ganze Zahl p ist und die Höhe der Funktion $= p - 1$ ist. Für eine ganze Funktion von der Höhe Null ergibt sich also

$$M(r) < \sqrt{2\pi}\, m(r) [\log m(r)]^{\frac{1}{2}}.$$

Der fragliche Beweis dürfte doch kaum ohne ziemlich umständliche Rechnungen ausgeführt werden können, weshalb wir ihn hier unterlassen.[1]

§ 4.

Wir betrachten jetzt den Fall eines endlichen Konvergenzradius. Aus (4), (5) und (6) ersieht man, dass, falls nicht bloss das Produkt

$$\prod_1^\infty \frac{r_n}{r_{n-1}},$$

sondern auch

$$(48) \qquad \prod_1^\infty \left(\frac{r_n}{r_{n-1}}\right)^n$$

konvergiert, das grösste Glied m_n stets endlich und begrenzt bleibt. In jedem

[1] Man vergleiche doch § 5.

solchen Falle lässt sich eine endliche Grösse C bestimmen, dass falls etwa der Konvergenzradius $= 1$ gesetzt wird,

$$M(r) < \frac{C}{1 - r}$$

wird.

In den Fällen, welche uns hier interessieren, soll also das Produkt (48) divergieren. Schreiben wir

$$\frac{r_n}{r_{n-1}} = 1 + \frac{1}{\varphi(n)}, \tag{49}$$

so divergiert mithin die Reihe

$$\sum_1^\infty \frac{n}{\varphi(n)}. \tag{50}$$

Wenn von einem endlich bleibenden Faktor abgesehen wird, erhält man für m_n

$$e^{\sum\limits_1^n \frac{\nu}{\varphi(\nu)}}, \tag{51}$$

woraus unmittelbar

$$\lim_{n=\infty} \frac{\sum\limits_1^n \frac{\nu}{\varphi(\nu)}}{\log m_n} = 1. \tag{52}$$

Hat man hier insbesondere für $1 < a < 2$

$$\lim_{n=\infty} \frac{\varphi(n)}{n^a} = 0, \tag{53}$$

so kann man wie in § 2 ein Vergleichsprodukt

$$P = \prod_1^\infty \left(1 + \frac{1}{n^a}\right)$$

einführen, welches ja rascher als das Produkt mit dem allgemeinen Gliede (49) konvergiert. In diesem Falle besagt (52), dass

$$\lim_{n=\infty} \frac{\log m_n}{\sum\limits_1^n \nu^{1-a}} = \infty$$

ist, woraus sich sofort

$$(54) \qquad \lim_{n=\infty} \frac{\log m_n}{n^{2-a}} = \infty$$

folgern lässt. Wird nun μ_n mit Benutzung von (17) abgeschätzt, so bekommt man nach Rechnungen, welche sich genau wie in § 2 ausführen lassen,

$$\mu_n < [\log m_n]^{\frac{a}{2(2-a)}}.$$

Dieses Ergebnis ist mit

$$(55) \qquad M(r) < m(r) [\log m(r)]^{\frac{a}{2(2-a)}}$$

äquivalent. *Für gewisse Klassen nicht ganzer Funktionen ist somit die Relation zwischen dem Maximalbetrage und dem grössten Gliede von ganz analoger Art mit derjenigen, welche wir in § 2 für die ganzen Funktionen hergeleitet haben.*

Was für ein Bewandtnis hat es jetzt mit den Grössenverhältnissen der Koeffizienten dieser Funktionen? Bei Bezugnahme auf (53) bekommt man für r_n, wenn zunächst ein unwesentlicher Faktor weggelassen wird,

$$(56) \qquad e^{-\sum\limits_{n+1}^{\infty} \frac{1}{\varphi(n)}} < e^{-\frac{1}{a-1} n^{-(a-1)}}$$

Nach (7) ist der bestimmende Faktor in dem Koeffizienten c_n von r^n

$$(57) \qquad \frac{1}{r_1 r_2 \dots r_n} > e^{\frac{1}{a-1} \sum\limits_1^n n^{-(a-1)}} > e^{\frac{1}{(a-1)(2-a)} (n^{2-a}-1)} > e^{n^{2-a}}.$$

Hiernach ersieht man, dass die Voraussetzung, welche uns zu dem durch (55) ausgedrückten Resultate geführt hat, die Bedingung

$$(58) \qquad c_n > e^{n^{2-a}}$$

involviert.

Anderseits bekommt man aus (54) und (56) ein Ergebnis für die Grössenordnung von $m(r)$. Nach (56) darf man zunächst

$$1 - r_n > n^{-(a-1)}$$

setzen. Es ergibt sich dann aus (54)

$$m(r) > e^{\left(\frac{1}{1-r}\right)^{\frac{2-a}{a-1}}} \tag{59}$$

Bei speziellen Funktionen ist es möglich genauere Resultate zu ermitteln. Betrachten wir z. B. die Funktion

$$\sum_0^\infty e^{n^a} r^n = \sum_0^\infty c_n r^n \qquad (0 < a < 1). \tag{60}$$

Hier lässt sich r_n durch Derivation des n^{ten} Gliedes nach n bestimmen:

$$\log r_n + a\, n^{a-1} = 0; \; r_n = e^{-an^{-(1-a)}}.$$

Durch Einsetzung in $e^{n^a} r_n^n$ bekommt man sofort[1]

$$m_n = e^{(1-a)n^a}. \tag{61}$$

Wir erhalten weiter

$$\frac{r_n}{r_{n-1}} = e^{-a[n^{-(1-a)} - (n-1)^{-(1-a)}]} > 1 + \frac{a(1-a)}{n^{2-a}}. \tag{62}$$

Hier brauchen wir bei Berechnung von μ_n kein Hilfsprodukt P einzuführen. Nach ganz analogen Rechnungen mit denen, welche wir in § 2 ausgeführt haben, ergibt sich für μ_n

$$\sqrt{\frac{2\pi}{a(1-a)}}\, n^{1-\frac{a}{2}}, \tag{63}$$

wobei freilich von einem gegen 1 konvergierenden Faktor abgesehen wird. Drückt man (63) durch $\log m_n$ aus, so bekommt man

$$\frac{\sqrt{2\pi}}{a^{\frac{1}{2}}(1-a)^{\frac{1}{a}}} (\log m_n)^{\frac{2-a}{2\cdot a}}. \tag{64}$$

[1] Borel, *Leçons sur les séries à termes positifs*, S. 70.

Wir haben also

$$M(r) < m(r)\,[\log m(r)]^{\frac{2-a}{2\cdot a}} \cdot \frac{\sqrt{2\pi}}{a^{\frac{1}{2}}(1-a)^{\frac{1}{a}}}(1+\varepsilon), \tag{65}$$

wo ε eine beliebig kleine positive Grösse bedeutet.

Wir betrachten noch die Funktion

$$M(r) = \sum n^k r^n \qquad (k > 0). \tag{66}$$

Nach Untersuchungen von Herrn Appell und Cesàro weiss man, dass

$$\lim_{r=1} \frac{M(r)}{\frac{1}{(1-r)^{k+1}}} = \Gamma(k+1) \tag{67}$$

ist. Anderseits darf man setzen

$$\log r_n + \frac{k}{n} = 0;\ r_n = e^{-\frac{k}{n}};\ \frac{n}{k} = \frac{1}{\log \frac{1}{r_n}} = \frac{1}{\log\left(1 + \frac{1-r_n}{r_n}\right)} > \frac{r_n}{1-r_n}.$$

Mithin

$$m_n = \left(\frac{n}{e}\right)^k > \left(\frac{k}{e}\cdot\frac{r_n}{1-r_n}\right)^k. \tag{68}$$

Nach (67) und (68) erhält man, von einem unwesentlichen Faktor abgesehen, für μ_n

$$\Gamma(k+1)\left(\frac{e}{k\,r_n}\right)^k \cdot \frac{1}{1-r_n}.$$

Man ersieht hieraus, dass es in diesem Falle eine von k abhängige konstante Grösse K gibt, so dass man für $\lim r = 1$

$$\mu(r) < K\,[m(r)]^{\frac{1}{k}} \tag{69}$$

erhält. Hier ist also $\mu(r)$ mit einer Potenz von $m(r)$ vergleichbar, nicht, wie in den früheren Fällen, erst mit einer Potenz von $\log m(r)$.

§ 5.

Zuletzt wollen wir ein allgemeines Prinzip aufstellen, wonach, falls für eine Hilfsfunktion mit bekannten Eigenschaften

(70) $$\sum_0^\infty \gamma_n r^n$$

eine Relation

(71) $$M(r) < m(r)\,\varphi[m(r)]$$

von einem gewissen n an in solcher Weise erfüllt wird, dass jedes Glied der Reihe die Rolle als grösstes Glied der Ordnung nach übernimmt, man für eine andere Funktion

(72) $$\sum_0^\infty c_n r^n,$$

wenn gewisse Bedingungen befriedigt sind, eine mindestens eben so scharfe Relation wie (71) erhalten kann, welche für beliebig grosse Indices n gültig ist. Bei ganzen Funktionen genügt es in der Tat, falls

$$\lim_{n=\infty} \frac{c_n}{\gamma_n} = 0,$$

und bei endlichem Konvergenzradius, falls

(73) $$\overline{\lim_{n=\infty}} \frac{c_n}{\gamma_n} = \infty.$$ [1]

Da der Beweis in den beiden Fällen in ganz analoger Weise ausgeführt werden kann, brauchen wir hier nur den Fall, wo der Konvergenzradius $= 1$ ist, zu behandeln. Für die Hilfsfunktion sei $\varrho_1, \varrho_2, \ldots \varrho_n, \ldots$ eine Folge von r-Werten, für welche bez. $\gamma_1 r, \gamma_2 r^2, \ldots \gamma_n r^n \ldots$ die grössten Glieder darstellen. Für (72) möge die gewöhnliche Bezeichnung $r_1, r_2, \ldots r_n \ldots$ beibehalten werden. Wir behaupten zuerst, dass es beliebig grosse n gibt, für welche man durchweg

[1] Der Satz lässt sich sehr leicht auf solche Fälle erweitern, wo die fragliche obere Unbestimmtheitsgrenze endlich (und nicht Null bez. für ganze Funktionen ∞) ist.

$$\prod_{k=0}^{\nu} r_{n-k} < \prod_{k=0}^{\nu} \varrho_{n-k} \qquad (\nu = 0, 1, \ldots n-1) \tag{74}$$

annehmen kann. Nach § 1 gehört r_n zu einem Intervalle

$$\frac{c_{n-1}}{c_n} \leq r_n \leq \frac{c_n}{c_{n+1}},$$

und in gleicher Weise verhält es sich mit ϱ_n. Von wesentlicher Bedeutung ist es nicht, welche Werte wir in den bezüglichen Intervallen feststellen. Wir dürfen also schreiben

$$r_\nu = \frac{c_{\nu-1}}{c_\nu}; \quad \varrho_\nu = \frac{\gamma_{\nu-1}}{\gamma_\nu}.$$

Hierdurch wird aber (74) durch

$$\frac{c_{n-\nu}}{c_n} < \frac{\gamma_{n-\nu}}{\gamma_n} \qquad (\nu = 1, 2, \ldots n) \tag{75}$$

ersetzt. Dass es für (75) eine Lösung für $n > n_1$ gibt, wo n_1 beliebig genommen wird, ist in der folgenden Weise ersichtlich. Es lässt sich eine Zahl l_{n_1} ermitteln, so dass man

$$\frac{c_m}{\gamma_m} \leq l_{n_1} \qquad (m \leq n_1)$$

bekommt. Nach (73) gibt es offenbar für $n > n_1$ Fälle, wo das betreffende Verhältnis $> l_{n_1}$ wird. Trifft dies das erste Mal für $n = n_2$ zu, so ersieht man ohne weiteres, dass, falls $n = n_2$ gesetzt wird, (74) und (75) befriedigt werden.

Wir wollen weiter nachweisen, dass es beliebig grosse n gibt, für welche sämtliche Relationen

$$\prod_{k=1}^{\nu} \frac{r_n}{r_{n-k}} \geq \prod_{k=1}^{\nu} \frac{\varrho_n}{\varrho_{n-k}} \qquad (\nu = 1, 2, \ldots n-1) \tag{76}$$

gültig sind. Der Beweis ist erbracht, falls unter der Annahme, dass (76) für $n = n_2$ nicht befriedigt wird, eine grössere Zahl $n = n_2 + \varkappa$ mit der gewünschten Eigenschaft sich konstruieren lässt. Da $\lim\limits_{\varkappa=\infty} r_{n_2+\varkappa} = \lim\limits_{\varkappa=\infty} \varrho_{n_2+\varkappa} = 1$ ist, so muss es mit Rücksicht auf (74) eine erste Zahl $\varkappa$ geben, für welche

$$\prod_{k=1}^{\nu} \frac{r_{n_2+\varkappa}}{r_{n_2-k}} \geqq \prod_{k=1}^{\nu} \frac{\varrho_{n_2+\varkappa}}{\varrho_{n_2-k}} \qquad (\nu = 1, 2, \ldots n-1).$$

Für diese Zahl $n = n_2 + \varkappa$ müssen dann auch die Bedingungen (76) erfüllt sein. Denn für $0 \leqq \varkappa_1 < \varkappa$ muss man stets

$$\frac{r_{n_2+\varkappa}}{r_{n_2+\varkappa_1}} > \frac{\varrho_{n_2+\varkappa}}{\varrho_{n_2+\varkappa_1}}$$

haben, weil anderenfalls nicht $n_2 + \varkappa$ die erste Zahl mit der oben angenommenen Eigenschaft wäre. Man sieht auch ein, eben auf Grund von (74), dass man

$$r_{n_2+\varkappa} < \varrho_{n_2+\varkappa}$$

haben muss, da ja diese Grössen als kontinuierlich veränderlich angesehen werden können, nur mit Änderung der Indices bei der gleichzeitigen Überspringung der die Intervalle begrenzenden Punkte.

Wir schreiben $n_2 + \varkappa = n_3$. Man erschliesst jetzt, dass, falls λ hinreichend gross ist,

$$\frac{r_{n_3+\lambda}}{r_{n_3}} > \frac{\varrho_{n_3+\lambda}}{\varrho_{n_3}}$$

ist. Die bezüglichen Grenzwerte für $\lim \lambda = \infty$ sind ja $= \frac{1}{r_{n_3}}$ bez. $\frac{1}{\varrho_{n_3}}$, und wir hatten eben $r_{n_3} < \varrho_{n_3}$. Da weiter den Ungleichungen (74) für $n = n_3$ genügt wird, so kann man in ganz derselben Weise wie in § 2 eine Zahl $n = n_4 \geqq n_3$ bestimmen, für welche nicht bloss (74), sondern auch

$$(77) \qquad \prod_{k=1}^{\nu} \frac{r_n}{r_{n+k}} \leqq \prod_{k=1}^{\nu} \frac{\varrho_n}{\varrho_{n+k}} \qquad (\nu = 1, 2, \ldots \infty)$$

befriedigt wird, wobei statt P_n die Folge ϱ_n tritt.

Solcher Zahlen $n = n_4$ können wir offenbar in unendlicher Menge konstruieren. Betrachtet man nun die in § 1 gegebenen zu den durch die Reihen (72) und (70) definierten Funktionen gehörigen Entwicklungen von $m(r_{n_4})$ und $\mu(r_{n_4})$, so ergibt sich, dass für die frühere Funktion $m(r_n)$ grösser ausfällt, während dagegen betreffend $\mu(r_n)$ das umgekehrte Verhältnis eintritt. Hiermit ist aber die Behauptung, mit welcher wir diesen Paragraphen eröffneten, bewiesen.

Einige Beispiele mögen die Bedeutung des soeben gewonnenen Resultates beleuchten. Dabei handelt es sich selbstverständlich um Relationen, welche nicht durchweg gültig zu sein brauchen, sondern nur für eine unendliche Menge mit dem Grenzwert $r = 1$.

1) $c_n = \chi(n) e^{n^a}$. $(1 > a > 0;\ \lim\limits_{n=\infty} \chi(n) = \infty)$. Als Vergleichsfunktion kann man (60) benutzen und gelangt also zu der Relation (65).

2) $c_n = \chi(n) \cdot n^k$. Vergleicht man mit (66), so resultiert (69).

3) Hat man insbesondere

$$\overline{\lim_{n=\infty}} \frac{\log c_n}{\log n} = \infty, \tag{78}$$

so bekommt man Gültigkeit für (69) bei beliebig grossem k; das heisst mit anderen Worten für

$$M(r) < [m(r)]^{1+\varepsilon}, \tag{79}$$

wie auch die Zahl $\varepsilon > 0$ gewählt wird.

Überhaupt ist es durch die obigen Erörterungen klargelegt, dass die Durchrechnung geeigneter spezieller Beispiele Licht über ganze Klassen von Funktionen zu bringen vermag.