

SUR LES FAMILLES DE FONCTIONS MULTIFORMES ADMETTANT DES VALEURS EXCEPTIONNELLES DANS UN DOMAINE.

PAR

M. GEORGES RÉMOUNDOS

à ATHÈNES.

Introduction.

1. On sait que en 1904 M. LANDAU a découvert un théorème qui apporte au premier des célèbres théorèmes de M. PICARD une précision nouvelle, qui consiste à donner une propriété commune à toute une famille de fonctions holomorphes admettant des valeurs exceptionnelles dans un domaine.

Les valeurs exceptionnelles jouent un rôle important au point de vue de la convergence uniforme des séries de fonctions holomorphes, d'après les résultats de recherches récentes de MM. VITALI, SEVERINI, LANDAU, CARATHÉODORY et MONTEL.

Comme tous ces auteurs ne se sont occupés que de fonctions holomorphes ou méromorphes dans un domaine, je me suis proposé d'étudier les mêmes problèmes pour les familles de fonctions multiformes dans un domaine et cette étude fait le sujet de ce travail.

J'établis des théorèmes analogues à celui de M. LANDAU et concernant des familles de fonctions algébroides finies dans un domaine qui admettent deux valeurs exceptionnelles ou un domaine exceptionnel ou une ligne exceptionnelle. Pour étudier le rôle des valeurs exceptionnelles au point de vue de la convergence uniforme des séries de fonctions algébroides, je donne les définitions suivantes:

Étant donnée une série :

$$f_1(z), f_2(z), \dots, f_n(z), \dots \quad (s)$$

de fonctions algébroides à ν branches finies dans un domaine D , je dis qu'un nombre a est une limite de convergence d'ordre de multiplicité K de la série (s) en un point z_0 de D , lorsque, étant donné un nombre arbitrairement petit ε , l'inégalité :

$$|f_n(z_0) - a| < \varepsilon$$

est satisfaite à partir d'une valeur de n pour K branches de $f_n(z)$.

Si $K = 1$ le nombre a est une limite simple, si $K > 1$ le nombre a est une limite multiple de convergence.

Nous dirons que la série :

$$f_1(z_0), f_2(z_0), \dots, f_n(z_0) \dots$$

converge, lorsque la somme des ordres (de multiplicité) de toutes ses limites de convergence est égal à ν . On peut, alors, dire que la série admet ν limites de convergence distinctes ou non.

Supposons que la série (s) converge en tous les points du domaine D et soient $\lambda_1(z), \lambda_2(z), \lambda_3(z), \dots, \lambda_m(z)$ les limites de convergence d'ordre respectivement égal à $K_1, K_2, K_3, \dots, K_m$.

Nous dirons que la convergence est uniforme lorsque, à chaque nombre positif ε , arbitrairement petit, nous pouvons faire correspondre un entier n_1 tel que pour $n > n_1$ et pour tous les points du domaine D les inégalités :

$$|\lambda_1(z) - f_n(z)| < \varepsilon, \quad |\lambda_2(z) - f_n(z)| < \varepsilon, \quad |\lambda_3(z) - f_n(z)| < \varepsilon, \dots, \quad |\lambda_m(z) - f_n(z)| < \varepsilon$$

soient satisfaites la première pour les K_1 branches, la seconde pour les K_2 branches, et ainsi de suite, la dernière pour les K_m branches de $f_n(z)$.

Les limites $\lambda_1(z), \lambda_2(z), \dots, \lambda_m(z)$ peuvent être constantes pour tous les points du domaine D .

Nous dirons aussi que la constante infinie est une limite de convergence uniforme de la série (s) , si à chaque nombre positif ε correspond un entier n_1 tel que l'inégalité :

$$\frac{1}{|f_n(z)|} < \varepsilon$$

soit satisfaite pour $n > n_1$ pour tout point z intérieur à D et pour une au moins

des branches de $f_n(z)$. S'il en est ainsi pour K branches de $f_n(z)$, la constante infinie sera une limite de convergence uniforme d'ordre K .

Je démontre que les fonctions algébroides à ν branches finies dans un domaine D , qui y admettent un domaine exceptionnel ou une ligne exceptionnelle, forment une famille *normale*; j'entends par là que: de toute suite infinie de fonctions de la famille nous pouvons extraire une nouvelle suite infinie convergeant uniformément vers des fonctions algébroides et finies dans le domaine D ou vers la constante infinie, dont le nombre total des branches est égal à ν .

Une limite constante est considérée comme ayant un nombre de branches égal à son ordre. Nous établissons ensuite l'extension aux séries de fonctions algébroides dans un domaine des théorèmes bien connus de STIELTJES et de MM. OSGOOD, ARZELÁ, VITALI et MONTEL sur la convergence des séries de fonctions holomorphes.

Nous faisons des applications des résultats ci-dessus indiqués aux fonctions ayant une infinité de branches en complétant ainsi d'autres obtenus par M. BOUTROUX. Nous obtenons aussi d'autres théorèmes se rattachant intimement au but de ce travail.

Les principaux résultats de ce travail ont été énoncés dans deux Notes insérées dans les *Comptes rendus des séances de l'Académie des sciences de Paris*: Tome CLVI (1^{er} semestre 1913), 1) Sur les familles de fonctions algébroides (862—865), 2) Sur les séries et les familles de fonctions algébroides dans un domaine (1141—1144).

CHAPITRE I.

Un théorème sur les valeurs exceptionnelles de quelques familles de fonctions algébroides.

2. Dans un travail publié récemment dans les *Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo* (Le théorème de M. PICARD et les fonctions algébroides, tomo XXXV, Anno 1913, Adunanza del 22 Dicembre 1912) nous avons établi le théorème suivant:

Théorème I. Soit $u = a(z)$ une fonction algébroïde finie à distance finie et déterminée par l'équation:

$$F(z, u) = u^n + A_1(z)u^{n-1} + \dots + A_{n-1}(z)u + A_n(z) = 0 \quad (1)$$

$$\begin{aligned}
 A_1(z) &= a_1 + b_1 z + \dots \\
 A_2(z) &= a_2 + b_2 z + \dots \\
 &\dots \\
 A_n(z) &= a_n + b_n z + \dots
 \end{aligned}
 \tag{2}$$

et u_1 un nombre différent des racines des équations:

$$P(u) = u^{n-1} + a_1 u^{n-2} + \dots + a_{n-2} u + a_{n-1} = 0$$

$$Q(u) = b_n u^{n-1} + \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_n & b_n \end{vmatrix} u^{n-2} + \dots + \begin{vmatrix} a_{n-2} & b_{n-2} \\ a_n & b_n \end{vmatrix} u + \begin{vmatrix} a_{n-1} & b_{n-1} \\ a_n & b_n \end{vmatrix} = 0. \tag{2'}$$

Si nous envisageons aussi la fonction algébroïde $u = a_1(z)$ définie par l'équation:

$$f(z, u) = u^{n-1} + A_1(z)u^{n-2} + A_2(z)u^{n-3} + \dots + A_{n-1}(z) = 0$$

il existe un cercle

$$|z| < R = R(n, u_1, a_1, b_1, a_2, b_2, \dots, a_n, b_n)$$

dont le rayon dépend seulement des nombres $n, u_1, a_1, b_1, a_2, b_2, \dots, a_n, b_n$ [et nullement des autres coefficients des séries (2)], à l'intérieur duquel l'une au moins des équations:

$$a(z) = 0, \quad a(z) = u_1, \quad a_1(z) = u_1$$

admet des racines. Le rayon R est plus grand que la fonction $\varphi(\gamma_0, \gamma_1)$ indiquée par M. LANDAU dans ses travaux¹ et déterminée complètement par M. CARATHÉODORY², les γ_0 et γ_1 ayant les valeurs

$$\gamma_0 = -\frac{a_n}{u_1 P(u_1)}, \quad \gamma_1 = \frac{Q(u_1)}{u_1 [P(u_1)]^2}. \tag{3}$$

Nous retrouverons ici ce théorème comme cas particulier d'un autre (théorème IV de ce travail). La fonction $a_1(u)$, qui figure dans l'énoncé du théorème précédent, sera appelée *adjointe* par rapport à l'algébroïde donnée $a(z)$.

¹ a) Über eine Verallgemeinerung des PICARD'schen Satzes [Sitzungsberichte der Kgl. Preussischen Akademie der Wissenschaften, Jahrgang 1904, s. 1118—1133]; b) Über den PICARD'schen Satz [Vierteljahrsschrift der Naturforschenden Gesellschaft in Zürich, Bd. LI (1906), s. 252—318].

² Sur quelques généralisations du théorème de M. PICARD (Comptes rendus de l'Académie des sciences de Paris, t. CXXI (2^e semestre 1905), pp. 1213—1215].

Nous utiliserons ce théorème pour établir un autre concernant les familles de fonctions analytiques algébroïdes définies par une équation de la forme :

$$F(z, u) = u^n + A_1(z) u^{n-1} + A_2(z) u^{n-2} + \dots + A_{n-1}(z) u + g(z) = 0. \quad (4)$$

$$\begin{aligned} A_1(z) &= a_1 + b_1 z + c_1 z^2 + \dots \\ A_2(z) &= a_2 + b_2 z + c_2 z^2 + \dots \\ &\dots \\ A_{n-1}(z) &= a_{n-1} + b_{n-1} z + c_{n-1} z^2 + \dots \\ g(z) &= a + \mu_1 z + \mu_2 z^2 + \mu_3 z^3 + \dots \end{aligned} \quad (5)$$

où les coefficients $a_1, b_1, c_1, \dots, a_2, b_2, c_2, \dots, a_{n-1}, b_{n-1}, c_{n-1}, \dots$, des fonctions entières $A_1(z), A_2(z), \dots, A_{n-1}(z)$ sont donnés et *fixes* ainsi que le premier coefficient a de la fonction entière $g(z)$, tandis que les coefficients $\mu_1, \mu_2, \mu_3, \dots$ sont des *paramètres variables*. Désignons par (f) cette famille de fonctions algébroïdes dépendant d'une infinité de paramètres variables et définie par l'équation (4).

Si nous considérons un nombre u_1 différent des racines de l'équation :

$$P(u) = u^{n-1} + a_1 u^{n-2} + a_2 u^{n-3} + \dots + a_{n-1} = 0$$

l'algébroïde adjointe, qui est évidemment *fixe* comme ne dépendant pas de paramètres variables, ne prend pas en $z=0$ la valeur u_1 . Par conséquent, si nous désignons par $a_1(z)$ l'algébroïde adjointe et par ϱ le plus petit des modules de zéros de l'équation

$$a_1(z) = u_1$$

nous aurons $\varrho \neq 0$. Remarquons que les nombres ϱ et γ_0 sont fixes, tandis que le nombre γ_1 dépend du paramètre variable μ_1 .

D'après le théorème de M. CARATHÉODORY, nous avons :

$$\varphi(\gamma_0, \gamma_1) = \frac{2 I[\nu(\gamma_0)]}{|\gamma_1| |\nu'(\gamma_0)|} = \frac{1}{|\gamma_1|} K_1(\gamma_0) \quad (6)$$

$\nu(y)$ désignant l'inverse de la fonction modulaire et $I[\nu(y)]$ sa partie imaginaire; la quantité $K_1 = K_1(\gamma_0)$ est évidemment fixe.

Cherchons les valeurs du paramètre μ_1 qui satisfont à l'inégalité :

$$\frac{K_1}{|\gamma_1|} < \varrho \quad \text{ou} \quad |\gamma_1| > \frac{K_1}{\varrho}$$

ou bien:

$$\frac{|Q(u_1)|}{|u_1[P(u_1)]^2|} > \frac{K_1}{\varrho};$$

elle s'écrit:

$$|Q(u_1)| > \frac{K_1}{\varrho} |u_1| |P(u_1)|^2 \quad \text{ou bien} \quad |Q(u_1)| > K_2 \quad (7)$$

en posant:

$$K_2 = \frac{K_1}{\varrho} |u_1| |P(u_1)|^2. \quad (8)$$

Pour notre famille (*f*) de fonctions algébroides la quantité $Q(u)$ est donnée par la formule:

$$Q(u) = \mu_1 u^{n-1} + \left| \frac{a_1 b_1}{a \mu_1} \right| u^{n-2} + \left| \frac{a_2 b_2}{a \mu_1} \right| u^{n-3} + \dots + \left| \frac{a_{n-1} b_{n-1}}{a \mu_1} \right|$$

ou bien:

$$Q(u) = \mu_1 (u^{n-1} + a_1 u^{n-2} + a_2 u^{n-3} + \dots + a_{n-1}) - a (b_1 u^{n-2} + b_2 u^{n-3} + \dots + b_{n-1});$$

on peut écrire:

$$Q(u) = \mu_1 P(u) - a N(u) \quad (9)$$

en posant:

$$N(u) = b_1 u^{n-2} + b_2 u^{n-3} + \dots + b_{n-1}. \quad (10)$$

Nous avons, donc:

$$|Q(u_1)| = |\mu_1 P(u_1) - a N(u_1)| \geq |\mu_1| |P(u_1)| - |a| |N(u_1)|$$

et, alors, l'inégalité (7) sera satisfaite si l'on a:

$$|u_1| |P(u_1)| - |a| |N(u_1)| > K_2$$

ou bien:

$$|u_1| > \frac{K_2 + |a| |N(u_1)|}{|P(u_1)|}. \quad (11)$$

Rappelons-nous que $P(u_1) \neq 0$.

Le second membre de cette inégalité (11) étant fixe, si nous posons:

$$\frac{K_2 + |a| |N(u_1)|}{|P(u_1)|} = K \quad (12)$$

l'inégalité:

$$\varphi(\gamma_0, \gamma_1) < \varrho \text{ sera bien satisfaite si l'on a: } |\mu_1| > K. \quad (13)$$

Les formules (6), (8), (10) et (12) déterminent complètement la valeur de K qui est:

$$K = \frac{K_1 |u_1| |P(u_1)|^2 + \varrho |a| |N(u_1)|}{\varrho |P(u_1)|} \quad \text{où } K_1 = \frac{2I[\nu(\gamma_0)]}{|\nu'(\gamma_0)|}. \quad (13')$$

Remarque. Nous remarquons que nous pouvons supposer: $\gamma_0 \neq 0$ et $\gamma_0 \neq 1$, parce que, si $\gamma_0 = 0$ toutes les fonctions de la famille (f) prennent la valeur zéro pour $z = 0$; de même, si $\gamma_0 = 1$ nous avons:

$$\frac{-a}{u_1 P(u_1)} = 1 \text{ ou bien } u_1 P(u_1) + a = F(0, u_1) = 0$$

et, par conséquent, toutes les fonctions de la famille prennent, pour $z = 0$, la valeur u_1 . L'inégalité $|\gamma_1| > \frac{K_1}{\varrho}$, qui est satisfaite avec (13), montre que, si l'on a: $|\mu_1| > K$ le nombre γ_1 sera différent de zéro.

Appliquons maintenant le théorème I aux fonctions de la famille (f) en choisissant le rayon R de façon à satisfaire aux inégalités:

$$\varphi(\gamma_0, \gamma_1) < R < \varrho.$$

Cela est toujours possible pour toutes les fonctions (f) qui satisfont à l'inégalité (13) et qui constituent une nouvelle famille (f_1) faisant partie de la famille donnée (f). Par ce choix du rayon R , l'algébroïde adjointé de toute fonction de la famille (f_1) ne prend pas la valeur u_1 dans le cercle (c):

$$|z| < R$$

et, par conséquent, à l'intérieur du même cercle, d'après le théorème I, toute fonction de la famille (f_1) prend l'une au moins des valeurs zéro et u_1 . Il en est, donc, de même à l'intérieur de tout cercle, dont le rayon est plus grand que $\varphi(\gamma_0, \gamma_1) = \frac{K_1}{|\gamma_1|}$; ce nombre $\varphi(\gamma_0, \gamma_1)$ n'est pas fixe, puisqu'il dépend du paramètre variable μ_1 , mais il ne dépend nullement des paramètres variables $\mu_2, \mu_3, \mu_4, \dots$: il dépend seulement des nombres $n, u_1, a_1, b_1, a_2, b_2, \dots, a_{n-1}, b_{n-1}, a, \mu_1$.

Si nous donnons au paramètre μ_1 une valeur fixe $\mu_1 = b > K$, nous obtenons une troisième famille (f_2) de fonctions, dépendant des paramètres variables $\mu_2, \mu_3, \mu_4, \dots$ pour laquelle la quantité $\varphi(\gamma_0, \gamma_1)$ sera fixe.

Nous avons ainsi établi le théorème suivant:

Théorème II. *Considérons une famille (f) de fonctions algébroides définie par l'équation:*

$$F(z, u) = u^n + A_1(z)u^{n-1} + A_2(z)u^{n-2} + \dots + A_{n-1}(z)u + g(z) = 0 \quad (14)$$

où les fonctions entières $A_1(z), A_2(z), \dots, A_{n-1}(z)$ ont tous leurs coefficients donnés et fixes:

$$\begin{aligned} A_1(z) &= a_1 + b_1 z + c_1 z^2 + \dots \\ A_2(z) &= a_2 + b_2 z + c_2 z^2 + \dots \\ &\dots \\ A_{n-1}(z) &= a_{n-1} + b_{n-1} z + c_{n-1} z^2 + \dots \end{aligned} \quad (15)$$

et $g(z)$ désigne une fonction entière:

$$g(z) = a + \mu_1 z + \mu_2 z^2 + \mu_3 z^3 + \dots$$

dont le premier coefficient seulement est fixe tandis que tous les autres $\mu_1, \mu_2, \mu_3, \dots$ sont des paramètres variables; considérons aussi un nombre u_1 différent des racines de l'équation:

$$P(u) = u^{n-1} + a_1 u^{n-2} + a_2 u^{n-3} + \dots + a_{n-1} = 0.$$

Il existe un nombre positif et fixe K tel que toute fonction de la famille (f) satisfaisant à la condition:

$$|\mu_1| > K$$

prenne une fois au moins l'une des valeurs 0 et u_1 à l'intérieur d'un cercle:

$$|z| < R$$

dont le rayon dépend seulement des nombres $n, u_1, a_1, b_1, a_2, b_2, \dots, a_{n-1}, b_{n-1}, a, \mu_1$ [et nullement des autres coefficients des séries (15)]. Le rayon R doit satisfaire à l'inégalité:

$$R > \varphi(\gamma_0, \gamma_1)$$

où

$$\gamma_0 = \frac{-a}{u_1 P(u_1)}, \quad \gamma_1 = -\frac{Q(u_1)}{u_1 [P(u_1)]^2}.$$

Les valeurs de $Q(u_1)$ et de la constante K se donnent par les formules: (9), (10) et (13'). Nous complétons le théorème précédent par le suivant:

»Si nous donnons à μ_1 une valeur fixe $\mu_1 = b > K$ nous obtenons une nouvelle famille (f_2) de fonctions algébroides pour laquelle la quantité $\varphi(\gamma_0, \gamma_1)$ est fixe; il existe, donc, un cercle

$$|z| < R = R(n, u_1, a_1, b_1, a_2, b_2, \dots, a_{n-1}, b_{n-1}, a, b)$$

dont le rayon est fixe (constant), à l'intérieur duquel chacune des fonctions de la famille (f_2) prend une fois au moins l'une des valeurs zéro et u_1 .

CHAPITRE II.

Le module des algébroides admettant des valeurs exceptionnelles dans un cercle.

3. Considérons de nouveau l'algébroïde $u = a(z)$ définie par l'équation (1) et désignons ses diverses branches par $u_1, u_2, u_3, \dots, u_n$. Si, à l'intérieur d'un cercle:

$$|z| < R \tag{16}$$

la fonction $a(z)$ ne prend ni la valeur zéro ni la valeur u' , les fonctions:

$$A_n(z) \text{ et } F(z, u') = u' f(z, u') + A_n(z) \tag{17}$$

ne s'annulent pas à l'intérieur du même cercle; il en est de même de $f(z, u')$ si l'adjointe $a_1(z)$ ne prend pas la valeur u' dans le cercle (16).

Avec ces hypothèses, l'égalité (17) nous montre que la fonction:

$$\Sigma(z) = \frac{F(z, u')}{A_n(z)} = \delta_0 + \delta_1 z + \delta_2 z^2 + \dots \tag{18}$$

qui est régulière en $z = 0$, ne prend pas, dans le cercle (16) les valeurs zéro et u' et, par conséquent, nous avons:

$$|\Sigma(z)| < \Omega(\delta_0) \tag{19}$$

cette inégalité étant satisfaite pour $|z| \leq \vartheta R$, où ϑ désigne un nombre positif quelconque plus petit que l'unité et $\Omega(\delta_0)$ désigne une quantité dépendant seulement de δ_0 [et nullement des autres coefficients $\delta_1, \delta_2, \dots$]; nous appliquons ici un théorème bien connu de M. SCHOTTKY [Über den PICARD'schen Satz und

die BOREL'schen Ungleichungen. Sitzungsberichte der Königlich Preussischen Akademie der Wissenschaften, Berlin, 1904, s. 1244—1262].

Or, nous avons:

$$F(z, u') = (u' - u_1)(u' - u_2)(u' - u_3) \dots (u' - u_n), \quad A_n(z) = (-1)^n u_1 u_2 u_3 \dots u_n$$

il s'en suit:

$$|\Sigma(z)| = \left| \frac{u' - u_1}{u_1} \right| \left| \frac{u' - u_2}{u_2} \right| \left| \frac{u' - u_3}{u_3} \right| \dots \left| \frac{u' - u_n}{u_n} \right|. \quad (20)$$

Cette formule (20) montre que l'on aura, pour une au moins des branches, l'inégalité suivante:

$$\left| \frac{u' - u}{u} \right| \leq |\Sigma(z)|^{\frac{1}{n}} \quad (21)$$

car si, pour un point situé dans le cercle $|z| < \theta R$, on avait:

$$\left| \frac{u' - u_1}{u_1} \right| > |\Sigma(z)|^{\frac{1}{n}}, \quad \left| \frac{u' - u_2}{u_2} \right| > |\Sigma(z)|^{\frac{1}{n}}, \dots, \quad \left| \frac{u' - u_n}{u_n} \right| > |\Sigma(z)|^{\frac{1}{n}}$$

il en résulterait:

$$\left| \frac{u' - u_1}{u_1} \right| \left| \frac{u' - u_2}{u_2} \right| \dots \left| \frac{u' - u_n}{u_n} \right| > |\Sigma(z)|.$$

L'inégalité (21) entraîne:

$$|u'| - |u| \leq |u| |\Sigma(z)|^{\frac{1}{n}} < |u| |\Omega(\delta_0)|^{\frac{1}{n}}$$

$$|u| > \frac{|u'|}{1 + [|\Omega(\delta_0)|]^{\frac{1}{n}}}, \quad (22)$$

pour une au moins des branches de la fonction u .

D'après l'égalité (18), nous avons:

$$\delta_0 = [(u')^n + a_1 (u')^{n-1} + a_2 (u')^{n-2} + \dots + a_{n-1} u' + a_n] \frac{1}{a_n} \quad (23)$$

et, par conséquent, la quantité $\Omega(\delta_0)$ ne dépend que de $u', a_1, a_2, \dots, a_{n-1}, a_n$. Pour abrégé le langage, adoptons la définition suivante: Une valeur $u_1 \neq 0$ sera dite *hyperexceptionnelle* d'une fonction algébroïde $a(z)$ dans un cercle (c) si

cette fonction $a(z)$ et son adjointe $a_1(z)$ ne prennent pas la valeur u_1 dans le cercle (c) .

Nous avons ainsi obtenu le théorème suivant:

Théorème III. *Soit une famille (G) de fonctions algébroides $u = a(z)$ ayant les propriétés suivantes: 1°. Toute fonction de la famille prend, en $z = 0$, les n valeurs qui sont des racines de l'équation:*

$$u^n + a_1 u^{n-1} + a_2 u^{n-2} + \dots + a_{n-1} u + a_n = 0. \quad (24)$$

2°. Toutes les fonctions de la famille ont le même nombre n de branches. 3°. La valeur 0 est exceptionnelle et la valeur $u_1 \neq 0$ est hyperexceptionnelle pour toute fonction de la famille dans un cercle

$$|z| < R. \quad (25)$$

Il existe, alors, un nombre positif fixe $K(u_1, a_1, a_2, \dots, a_n) > 0$ tel que nous ayons l'inégalité:

$$|u| > K$$

satisfaite pour une au moins des branches dans le cercle $|z| < \frac{R}{2}$. Le nombre K est donné par la formule:¹

$$K = \frac{|u_1|}{1 + \left| \Omega(\delta_0)^{\frac{1}{n}} \right|} \quad (26)$$

où l'on a:

$$\Omega(\delta_0) = \frac{2^{28}}{\sqrt{\lambda}}$$

en désignant par λ le plus petit des nombres

$$\left| \log \delta_0 \right|, \left| \log (1 - \delta_0) \right|, \left| \log \left(1 - \frac{1}{\delta_0} \right) \right|$$

les logarithmes étant pris en valeur réduite, c'est-à-dire de façon que leur partie imaginaire soit comprise entre $-\pi$ (excl.) et π (incl.).

L'égalité (23) montre que le nombre δ_0 est fini et différent de zéro, parce que, par hypothèse, les nombres 0 et u_1 diffèrent des racines de l'équation (24); d'autre part, nous avons:

¹ Il dépend aussi du degré n .

$$\delta_0 \neq 1$$

parce que, dans le cas contraire, nous aurions l'égalité:

$$u_1^n + a_1 u_1^{n-1} + a_2 u_1^{n-2} + \dots + a_n = a_n \text{ ou bien } u_1^{n-1} + a_1 u_1^{n-2} + \dots + a_{n-1} = 0$$

ce qui est en contradiction avec l'hypothèse que l'adjointe de toute fonction de la famille (G) ne prend pas, dans le cercle (25), la valeur u_1 .

Nous avons, donc, $\delta_0 \neq 0$ et 1 et fini et, par conséquent, le nombre λ est fini et plus grand que zéro.

Nous remarquons que, d'après le théorème ci-dessus énoncé, si nous désignons par (E) le cercle décrit dans le plan de la variable $u = a(z)$ du point $u = 0$ comme centre et avec un rayon égal à K , les n points $u = a(z)$ [correspondants aux diverses branches des fonctions $a(z)$] ne pénètrent jamais simultanément dans le cercle (E) , lorsque le point z se déplace d'une façon quelconque dans le cercle $|z| < \frac{R}{2}$. L'intérieur du cercle (E) est, dans ce sens, un domaine exceptionnel dans le cercle $|z| < \frac{R}{2}$ par rapport à l'ensemble des branches de toutes les fonctions de la famille donnée (G) .

Pour nous rendre compte de l'intérêt de cette propriété, rappelons-nous que, dans le cas d'une famille de fonctions *holomorphes*, cette propriété suffit pour que la famille soit *normale*. [Voir: P. MONTEL. Sur les familles de fonctions analytiques qui admettent des valeurs exceptionnelles dans un domaine. Annales scientifiques de l'École normale supérieure. 1912, tome 29 (3^e série), p. 493 et 494.]

CHAPITRE III.

Généralisations du théorème II.

4. Considérons de nouveau la famille (f) du théorème II, définie par l'équation (14) et deux valeurs quelconques u_1 et u_2 . La substitution: $u = u_1 + w$ fait correspondre à la famille (f) des fonctions $u(z)$ une nouvelle famille (f') de fonctions $w(z)$ et aux nombres u_1 et u_2 les nombres 0 et $u_2 - u_1$; la nouvelle famille sera déterminée par l'équation:

$$F_1(z, w) = F(z, u_1) + w F'_u(z, u_1) + \frac{w^2}{1 \cdot 2} F''_{u^2}(z, u_1) + \dots$$

$$+ \frac{w^{n-1}}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots (n-1)} F^{(n-1)}_{u^{n-1}}(z, u_1) + w^n = 0$$

dans laquelle les $F'_u(z, u_1), F''_{u^2}(z, u_1), \dots, F^{(n-1)}_{u^{n-1}}(z, u_1)$ ne dépendent que des $A_1(z), A_2(z), \dots, A_{n-1}(z)$ et, par conséquent, sont fixes (sans paramètres variables), tandis que le premier terme $F(z, u_1)$ dépend aussi de $g(z)$ et, par conséquent, contient les paramètres variables $\mu_1, \mu_2, \mu_3, \dots$. Si nous posons:

$$F(z, u_1) = a' + m_1 z + m_2 z^2 + m_3 z^3 + \dots$$

nous avons évidemment:

$$a' = u_1^n + a_1 u_1^{n-1} + a_2 u_1^{n-2} + \dots + a_{n-1} u_1 + a$$

$$m_1 = b_1 u_1^{n-1} + b_2 u_1^{n-2} + \dots + b_{n-1} u_1 + \mu_1 \tag{27}$$

grâce à l'égalité:

$$F(z, u_1) = u_1^n + A_1(z) u_1^{n-1} + A_2(z) u_1^{n-2} + \dots + A_{n-1}(z) u_1 + g(z).$$

Si nous posons aussi:

$$F'_u(z, u_1) = a'_1 + b'_1 z + \dots$$

$$F''_{u^2}(z, u_1) = a'_2 + b'_2 z + \dots$$

$$\dots$$

$$F^{(n-1)}_{u^{n-1}}(z, u_1) = a'_{n-1} + b'_{n-1} z + \dots$$

les coefficients $a'_1, b'_1, a'_2, b'_2, \dots, a'_{n-1}, b'_{n-1}$ ne dépendent que des coefficients $a_1, b_1, a_2, b_2, \dots, a_{n-1}, b_{n-1}$ et des u_1 et n .

D'après le théorème II, il existe un nombre positif et fixe K tel que toute fonction de la famille (f') satisfaisant à la condition

$$|m_1| > K \tag{28}$$

prenne une fois au moins l'une des valeurs 0 et $u_2 - u_1$ à l'intérieur d'un cercle

$$|z| < R \tag{28'}$$

dont le rayon R dépend seulement des nombres $n, u_2 - u_1, a'_1, b'_1, a'_2, b'_2, \dots,$

$a'_{n-1}, b'_{n-1}, a', m_1$; ce rayon, donc, ne dépend que des coefficients $a_1, a_2, \dots, a_{n-1}, a, b_1, b_2, \dots, b_{n-1}, \mu_1$ et des nombres n, u_1 et u_2 . Si nous donnons à m_1 aussi une valeur fixe, le rayon R sera fixe.

D'autre part, en vertu de l'égalité (27), nous avons:

$$|m_1| \geq |\mu_1| - |b_1 u_1^{n-1} + b_2 u_1^{n-2} + \dots + b_{n-1} u_1|,$$

il en résulte que l'inégalité (28) sera satisfaite si l'on a:

$$|\mu_1| - |b_1 u_1^{n-1} + b_2 u_1^{n-2} + \dots + b_{n-1} u_1| > K,$$

ou bien:

$$|\mu_1| > K + |b_1 u_1^{n-1} + b_2 u_1^{n-2} + \dots + b_{n-1} u_1|.$$

Nous pouvons écrire:

$$|\mu_1| > K + |u_1| |N(u_1)|, \quad (29)$$

en tenant compte de la notation donnée par la formule (10).

Donc, si le paramètre μ_1 satisfait à l'inégalité (29), toute fonction de la famille (f') prend, à l'intérieur du cercle (28'), une fois au moins l'une des valeurs 0 et $u_2 - u_1$ et, par conséquent, toute fonction de la famille donnée (f) prend, à l'intérieur du même cercle, l'une des valeurs u_1 et u_2 . Le second membre de l'inégalité (29) est évidemment fixe. Nous avons ainsi démontré que le théorème II est valable pour deux nombres quelconques u_1 et u_2 : c'est-à-dire, dans l'énoncé de ce théorème, on peut remplacer la valeur 0 par une valeur quelconque u_2 .

5. Envisageons maintenant la famille (F) de fonctions algébroides définie par l'équation:

$$\begin{aligned} \psi(z, u) = u^n + A_1(z) u^{n-1} + \dots + A_{v-1}(z) u^{n-v+1} + \\ + g(z) u^{n-v} + \dots + A_{n-1}(z) u + A_n(z) = 0 \end{aligned} \quad (30)$$

où l'on a:

$$\begin{aligned} g(z) &= a + \mu_1 z + \mu_2 z^2 + \mu_3 z^3 + \dots \\ A_1(z) &= a_1 + b_1 z + c_1 z^2 + \dots \\ &\dots \\ A_{v-1}(z) &= a_{v-1} + b_{v-1} z + c_{v-1} z^2 + \dots \\ A_{v+1}(z) &= a_{v+1} + b_{v+1} z + c_{v+1} z^2 + \dots \\ &\dots \\ A_n(z) &= a_n + b_n z + c_n z^2 + \dots \end{aligned} \quad (31)$$

les fonctions entières $A_1(z), A_2(z), \dots, A_{\nu-1}(z), A_{\nu+1}(z), \dots, A_n(z)$ étant fixes, tandis que la fonction entière $g(z)$ contient les paramètres variables $\mu_1, \mu_2, \mu_3, \dots$

Posons:

$$\frac{\psi(z, u)}{u^{n-\nu}} = Q(z, u), \tag{32}$$

et considérons la fonction

$$\sigma(z) = \frac{Q(z, u_1) - Q(z, u_2)}{Q(z, u_1)} = \gamma_0 + \gamma_1 z + \dots \tag{33}$$

u_1 et u_2 étant deux nombres quelconques différents de zéro.

D'après le théorème de M. LANDAU,¹ il existe un cercle

$$|z| < R(\gamma_0, \gamma_1), \tag{34}$$

dont le rayon R dépend seulement des coefficients γ_0 et γ_1 , à l'intérieur duquel la fonction $\sigma(z)$ ou bien admet au moins un point singulier ou bien prend au moins une fois l'une des valeurs 0 et 1; donc, à l'intérieur du cercle (34), une, au moins, des équations:

$$Q(z, u_1) = 0, \quad Q(z, u_2) = 0, \tag{35}$$

$$Q(z, u_1) - Q(z, u_2) = 0, \tag{36}$$

admet des racines. Or, nous avons:

$$\begin{aligned} Q(z, u_1) &= u_1^\nu + A_1(z) u_1^{\nu-1} + \dots + A_{\nu-1}(z) u_1 + \\ &\quad + g(z) + \dots + A_{n-1}(z) \frac{1}{u_1^{n-\nu-1}} + \frac{A_n(z)}{u_1^{n-\nu}}, \\ Q(z, u_2) &= u_2^\nu + A_1(z) u_2^{\nu-1} + \dots + A_{\nu-1}(z) u_2 + \\ &\quad + g(z) + \dots + A_{\nu-1}(z) \frac{1}{u_2^{n-\nu+1}} + \frac{A_n(z)}{u_2^{n-\nu}}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Q(z, u_1) - Q(z, u_2) &= u_1^\nu - u_2^\nu + (u_1^{\nu-1} - u_2^{\nu-1}) A_1 + \dots + \\ &\quad + (u_1 - u_2) A_{\nu-1} + \dots + A_n \left(\frac{1}{u_1^{n-\nu}} - \frac{1}{u_2^{n-\nu}} \right), \end{aligned}$$

et nous voyons que la fonction $Q(z, u_1) - Q(z, u_2)$ ne contient pas le coefficient variable $g(z)$; par conséquent, les racines de l'équation (36) sont *fixes* (ne dépendant pas des paramètres variables μ_1, μ_2, \dots). Si, donc, nous désignons par μ celle qui a le module minimum, nous choisirons le paramètre μ_1 de façon que l'on ait:

¹ Travaux cités dans le N° 2.

$$\varphi(\gamma_0, \gamma_1) < |\varrho|, \quad (37)$$

$\varphi(\gamma_0, \gamma_1)$ étant la fonction bien connue de M. LANDAU.

Si nous posons:

$$\begin{aligned} Q(z, u_1) &= q_0 + q_1 z + q_2 z^2 + \dots \\ Q(z, u_1) - Q(z, u_2) &= K_0 + K_1 z + K_2 z^2 + \dots \end{aligned}$$

nous avons:

$$q_0 = \frac{u_1^n + a_1 u_1^{n-1} + \dots + a u_1^{n-\nu} + \dots + a_n}{u_1^{n-\nu}}, \quad q_1 = \frac{b_1 u_1^{n-1} + \dots + \mu_1 u_1^{n-\nu} + \dots + b_n}{u_1^{n-\nu}},$$

$$K_0 = (u_1^\nu - u_2^\nu) + a_1 (u_1^{\nu-1} - u_2^{\nu-1}) + \dots + a_n \left(\frac{1}{u_1^{n-\nu}} - \frac{1}{u_2^{n-\nu}} \right), \quad (37')$$

$$K_1 = b_1 (u_1^{\nu-1} - u_2^{\nu-1}) + \dots + b_n \left(\frac{1}{u_1^{n-\nu}} - \frac{1}{u_2^{n-\nu}} \right),$$

$$\gamma_0 = \frac{K_0}{q_0}, \quad \gamma_1 = \frac{q_0 K_1 - K_0 q_1}{q_0^2}. \quad (37'')$$

Nous savons que:¹

$$\varphi(\gamma_0, \gamma_1) = \frac{1}{|\gamma_1|} \varphi(\gamma_0),$$

et, par conséquent, l'inégalité (37) est équivalente à

$$|\gamma_1| > \frac{\varphi(\gamma_0)}{|\varrho|}. \quad (38)$$

Les nombres $\varrho, \gamma_0, q_0, K_0, K_1$ étant fixes, il est facile de démontrer, comme nous l'avons fait dans la démonstration du théorème II, que l'inégalité (38) sera satisfaite si l'on a:

$$|q_1| > C_1, \quad (39)$$

C_1 étant un nombre positif fixe. D'autre part, nous avons:

$$|q_1| \geq |\mu_1| - \left| b_1 u_1^{\nu-1} + b_2 u_1^{\nu-2} + \dots + \frac{b_n}{u_1^{n-\nu}} \right|$$

et, par conséquent, l'inégalité (39) sera satisfaite si l'on a:

¹ Voir le travail de M. LANDAU: Über den PICARD'schen Satz (Vierteljahrsschrift der Naturforschenden Gesellschaft: in Zürich, Bd. LI, 1906, S. 252—318).

$$|\mu_1| > C_1 + \left| b_1 u_1^{v-1} + b_2 u_1^{v-2} + \dots + \frac{b_n}{u_1^{n-v}} \right|. \quad (40)$$

Pour les valeurs, donc, du paramètre μ_1 satisfaisant à cette inégalité on aura :

$$\varphi(\gamma_0, \gamma_1) < |\varrho|,$$

et comme le théorème de M. LANDAU est vrai pour tout rayon plus grand que $\varphi(\gamma_0, \gamma_1)$, nous prendrons le rayon R de façon que l'on ait :

$$\varphi(\gamma_0, \gamma_1) < R < |\varrho|.$$

Alors, à l'intérieur de ce cercle $|z| < R$ l'équation (36) n'admet pas des racines et, par conséquent, l'une au moins des équations (35) a des racines. Nous en concluons que, à l'intérieur de tout cercle $|z| < R$ dont le rayon est plus grand que $\varphi(\gamma_0, \gamma_1)$, l'une au moins des équations :

$$\psi(z, u_1) = 0 \quad \text{et} \quad \psi(z, u_2) = 0,$$

a des racines, puisque l'on a :

$$\frac{\psi(z, u_1)}{u_1^{n-v}} = Q(z, u_1), \quad \frac{\psi(z, u_2)}{u_2^{n-v}} = Q(z, u_2).$$

Remarques. Notre procédé exige que $|\varrho| > 0$; pour cela il faut supposer :

$$K_0 = (u_1^v - u_2^v) + a_1(u_1^{v-1} - u_2^{v-1}) + \dots + a_{v-1}(u_1 - u_2) + \\ + a_{v+1} \left(\frac{1}{u_1} - \frac{1}{u_2} \right) + \dots + a_n \left(\frac{1}{u_1^{n-v}} - \frac{1}{u_2^{n-v}} \right) \neq 0,$$

ce qui entraîne $\gamma_0 \neq 0$. Nous pouvons aussi supposer $\gamma_0 \neq 1$, parce que, dans le cas contraire, toutes les fonctions $Q(z, u_2)$ s'annuleraient en $z = 0$ et, par conséquent, toutes les fonctions de la famille (F) prendraient en $z = 0$ la valeur u_2 .

Les formules (37') montrent que la quantité $\varphi(\gamma_0, \gamma_1)$ ne dépend que des nombres n, v, u_1, u_2 , et des coefficients

$$a_1, b_1, a_2, b_2, \dots, a_{v-1}, b_{v-1}, a, \mu_1, \dots, a_n, b_n.$$

Nous avons ainsi établi le théorème suivant qui est aussi une généralisation du théorème II.

Théorème IV. *Soit une famille (F) de fonctions algébroides définie par l'équation :*

$$\psi(z, u) = u^n + A_1(z) u^{n-1} + \dots + A_{\nu-1}(z) u^{n-\nu+1} + \\ + g(z) u^{n-\nu} + A_{\nu+1}(z) u^{n-\nu-1} + \dots + A_n(z) = 0,$$

où l'on a :

$$\begin{aligned} A_1(z) &= a_1 + b_1 z + \dots \\ A_2(z) &= a_2 + b_2 z + \dots \\ &\dots \\ A_{\nu-1}(z) &= a_{\nu-1} + b_{\nu-1} z + \dots \\ g(z) &= a + \mu_1 z + \mu_2 z^2 + \dots \\ A_{\nu+1}(z) &= a_{\nu+1} + b_{\nu+1} z + \dots \\ &\dots \\ A_n(z) &= a_n + b_n z + \dots \end{aligned} \tag{41}$$

les fonctions entières $A_1(z), A_2(z), \dots, A_{\nu-1}(z), A_{\nu+1}(z), \dots, A_n(z)$ étant fixes, tandis que la fonction entière $g(z)$ a une infinité de paramètres variables (le premier coefficient a seulement étant fixe) $\mu_1, \mu_2, \mu_3, \dots$. Si nous considérons aussi deux nombres quelconques u_1 et u_2 différents de zéro et ne satisfaisant pas à l'égalité :

$$(u_1^\nu - u_2^\nu) + a_1(u_1^{\nu-1} - u_2^{\nu-1}) + \dots + a_{\nu-1}(u_1 - u_2) + \\ + a_{\nu+1} \left(\frac{1}{u_1} - \frac{1}{u_2} \right) + \dots + a_n \left(\frac{1}{u_1^{n-\nu}} - \frac{1}{u_2^{n-\nu}} \right) = 0, \tag{42}$$

il existe un nombre positif fixe C tel que toute fonction de la famille (F) assujettie à la condition

$$|\mu_1| > C, \tag{43}$$

prenne une fois au moins l'une des valeurs u_1 et u_2 à l'intérieur d'un cercle : $|z| < R$, dont le rayon dépend seulement des nombres $n, \nu, u_1, u_2, a_1, b_1, a_2, b_2, \dots, a_{\nu-1}, b_{\nu-1}, a, \mu_1, \dots, a_n, b_n$ [et nullement des autres coefficients des séries (41)].

Le rayon R doit être plus grand que $\varphi(\gamma_0, \gamma_1)$, où les nombres γ_0 et γ_1 sont bien déterminés par les formules (37') et (37''). La constante C est déterminée par les formules (37'), (37''), (38), (39) et (40).

Si nous donnons au paramètre μ_1 une valeur fixe $\mu_1 = b$ telle que $|b| > C$, nous obtenons une nouvelle famille (F_1) , dont chaque fonction prend au moins une fois l'une des valeurs u_1 et u_2 dans le cercle $|z| < R$ ci-dessus indiqué. La

famille (F_1) , qui dépend d'une infinité de paramètres variables $\mu_2, \mu_3, \mu_4, \dots$, fait évidemment partie de la famille donnée (F) .

6. Remarquons¹ encore que les théorèmes II et IV peuvent visiblement s'étendre au cas où les fonctions algébroides des familles considérées possèdent des infinis à distance finie. C'est ainsi, par exemple, que l'équation (14) peut être remplacée par une équation:

$$F(z, u) = g(z) + A_1(z)u + A_2(z)u^2 + \dots + A_{n-1}(z)u^{n-1} + A_n(z)u^n = 0,$$

les $g(z), A_1(z), A_2(z), \dots, A_n(z)$ désignant des fonctions entières, il suffit de modifier légèrement le sens des valeurs exceptionnelles: *une valeur $u = u_1$ sera dite exceptionnelle dans un domaine (D) , si aucune fonction $F(z, u_1)$ n'y prend la valeur zéro.* Cette définition est analogue à celle de l'équation exceptionnelle utilisée par M. BOREL pour généraliser le théorème de M. PICARD dans le cas des fonctions méromorphes: [É. BOREL. Leçons sur les fonctions méromorphes professées au collège de France. Paris, Gauthier-Villars, 1903, pages 55—66]. Je ne veux pas insister davantage sur ce point facile, parce qu'il ne s'agit pas de changer les méthodes suivies pour les théorèmes en question.

CHAPITRE IV.

Les familles bornées en module.

Envisageons une famille (F) de fonctions $f(z)$ algébroides et ayant le même nombre ν (fixe) de branches² dans un domaine (D) et supposons que cette famille soit composée de fonctions *bornées dans leur ensemble dans l'intérieur du domaine D* : Nous entendons par là qu'il existe un nombre fixe M tel que nous ayons l'inégalité:

$$|f(z)| < M, \quad (44')$$

satisfaite pour *toutes les branches* de toute fonction $f(z)$ de la famille et pour tout point intérieur à un domaine D_1 , en désignant par D_1 un domaine quelconque intérieur à D . Soit:

$$f_1(z), f_2(z), f_3(z), \dots, f_n(z), \dots \quad (44)$$

une suite infinie de fonctions appartenant à la famille (F) ; nous démontrerons

¹ Il faut aussi remarquer que le théorème II se déduit comme cas particulier du théorème IV: c'est le cas où $\nu = n$ et, par conséquent, l'une des valeurs u_1 et u_2 peut être égale à zéro.

² Nous supposons aussi que les fonctions de la famille soient finies dans le domaine D .

que l'on peut en extraire une suite nouvelle convergeant uniformément à l'intérieur du domaine D vers une fonction limite.

La fonction $u = f_n(z)$, étant algébroïde à ν branches dans le domaine D , satisfera à une équation:

$$u^\nu + A_n(z) u^{\nu-1} + B_n(z) u^{\nu-2} + C_n(z) u^{\nu-3} + \dots = 0. \quad (45)$$

où les $A_n(z)$, $B_n(z)$, $C_n(z)$, ... sont des fonctions holomorphes dans le domaine D .

Ainsi la suite (44) de fonctions algébroïdes dans D correspond à ν autres suites:

$$\begin{aligned} &A_1(z), A_2(z), A_3(z), \dots, A_n(z), \dots \\ &B_1(z), B_2(z), B_3(z), \dots, B_n(z), \dots \\ &C_1(z), C_2(z), C_3(z), \dots, C_n(z), \dots \\ &\dots \dots \dots \end{aligned} \quad (46)$$

de fonctions holomorphes dans le même domaine.

Nous avons:

$$\begin{aligned} - A_n(z) &= f_{n1} + f_{n2} + f_{n3} + \dots + f_{n\nu}, \\ B_n(z) &= \sum_i f_{n1} f_{n2}, \\ - C_n(z) &= \sum_i f_{n1} f_{n2} f_{n3}, \\ &\dots \dots \dots \end{aligned} \quad (47)$$

en désignant par $f_{n1}, f_{n2}, f_{n3}, \dots, f_{n\nu}$ les branches de la fonction $f_n(z)$, par $\sum f_{n1} f_{n2}$ la somme de tous les produits des branches prises deux-à-deux, par $\sum f_{n1} f_{n2} f_{n3}$ la somme de tous les produits des branches prises trois-à-trois et ainsi de suite.

Les formules (44') et (47) nous donnent les inégalités:

$$|A_n(z)| < \nu M, \quad |B_n(z)| < \frac{\nu(\nu-1)}{1.2} M^2, \quad |C_n(z)| < \frac{\nu(\nu-1)(\nu-2)}{1.2.3} M^3, \dots$$

qui montrent que les fonctions $A_n(z)$, $B_n(z)$, $C_n(z)$, ... sont bornées en module dans leur ensemble dans le domaine (D), parce que les nombres ν et M sont fixes.

Or, on sait que de toute suite de fonctions holomorphes bornées on peut extraire une nouvelle suite convergeant uniformément vers une fonction [Voir:

P. MONTEL. Sur les suites infinies de fonctions. Paris, 1907, Gauthier-Villars, pages 67—70, thèse de doctorat. P. MONTEL. Leçons sur les séries de polynomes à une variable complexe, p. 22—27. Paris, Gauthier-Villars; 1910].

On peut, donc, extraire de la suite:

une nouvelle suite: $A_1(z), A_2(z), A_3(z), \dots, A_n(z), \dots$ (48)

$$A_{\alpha_1}(z), A_{\alpha_2}(z), A_{\alpha_3}(z), \dots, A_{\alpha_n}(z), \dots \quad (49)$$

convergeant uniformément vers une fonction $a(z)$ holomorphe dans tout domaine D_1 intérieur à D . Ensuite, si la suite:

$$B_{\alpha_1}(z), B_{\alpha_2}(z), B_{\alpha_3}(z), \dots, B_{\alpha_n}(z), \dots \quad (50)$$

ne converge pas uniformément vers une fonction limite, nous pouvons en extraire une nouvelle serie:

$$B_{\beta_1}(z), B_{\beta_2}(z), B_{\beta_3}(z), \dots, B_{\beta_n}(z), \dots \quad (51)$$

convergeant uniformément vers une fonction holomorphe $b(z)$ dans le domaine D_1 ; la suite: $\beta_1, \beta_2, \beta_3, \dots, \beta_n, \dots$ est évidemment extraite de la suite $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_n, \dots$ et, par conséquent, de la suite $1, 2, 3, \dots, n, \dots$

Nous considérons maintenant la suite:

$$C_{\beta_1}(z), C_{\beta_2}(z), C_{\beta_3}(z), \dots, C_{\beta_n}(z), \dots$$

de laquelle nous pouvons extraire une nouvelle suite:

$$C_{\gamma_1}(z), C_{\gamma_2}(z), C_{\gamma_3}(z), \dots, C_{\gamma_n}(z), \dots \quad (52)$$

convergeant uniformément vers une fonction limite $c(z)$ holomorphe dans le domaine D_1 . En continuant ainsi nous arriverons enfin à une suite infinie de nombres entiers:

$$m_1, m_2, m_3, \dots, m_n, \dots$$

extraite des toutes les suites précédentes:

$$1, 2, 3, \dots, n, \dots$$

$$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_n, \dots$$

$$\beta_1, \beta_2, \beta_3, \dots, \beta_n, \dots$$

$$\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \dots, \gamma_n, \dots$$

$$\dots \dots \dots$$

telle que chacune des suites:

$$\begin{aligned} & A_{m_1}(z), A_{m_2}(z), A_{m_3}(z), \dots, A_{m_n}(z), \dots \\ & B_{m_1}(z), B_{m_2}(z), B_{m_3}(z), \dots, B_{m_n}(z), \dots \\ & C_{m_1}(z), C_{m_2}(z), C_{m_3}(z), \dots, C_{m_n}(z), \dots \\ & \dots \dots \dots \end{aligned} \tag{53}$$

converge uniformément vers une fonction holomorphe dans le domaine D_1 ; la première vers $a(z)$, la seconde vers $b(z)$, la troisième vers $c(z)$ et ainsi de suite. En effet, la première des suites (53) peut être extraite de la suite (49) qui converge vers la fonction $a(z)$, la seconde de la suite (51) qui converge vers la fonction $b(z)$, la troisième de la suite (52) qui converge vers la fonction $c(z)$, et ainsi de suite.

Or, la fonction algébroïde $u = f_{m_n}(z)$ satisfait à l'équation:

$$u^\nu + A_{m_n}(z) u^{\nu-1} + B_{m_n}(z) u^{\nu-2} + C_{m_n}(z) u^{\nu-3} + \dots = 0, \tag{54}$$

il en résulte que les ν suites (53) de fonctions holomorphes correspondent à la suite:

$$f_{m_1}(z), f_{m_2}(z), f_{m_3}(z), \dots, f_{m_n}(z), \dots \tag{55}$$

qui converge, par conséquent, vers les fonctions $w = f(z)$ satisfaisant à l'équation:

$$w^\nu + a(z) w^{\nu-1} + b(z) w^{\nu-2} + c(z) w^{\nu-3} + \dots = 0, \tag{56}$$

parce que les suites $A_{m_n}(z), B_{m_n}(z), C_{m_n}(z), \dots$ convergent uniformément dans le domaine D_1 respectivement vers les fonctions $a(z), b(z), c(z), \dots$ qui sont aussi holomorphes dans D_1 , d'après un théorème classique de WEIERSTRASS; la suite (55) est évidemment extraite de la suite initiale (44). Si l'équation (56) est irréductible, la suite (55) n'admet qu'une fonction-limite qui est algébroïde à ν branches et finie dans le domaine D ; si l'équation (56) est réductible, les fonctions-limites sont au plus ν et le nombre total de leurs branches est égal à ν .

7. Donnons maintenant la définition suivante: Soit:

$$\varphi_1(z), \varphi_2(z), \dots, \varphi_n(z), \dots \tag{57}$$

une suite infinie de fonctions algébroïdes à un nombre fixe ν de branches et finies dans un domaine D , et désignons par $\varphi_{n1}, \varphi_{n2}, \varphi_{n3}, \dots, \varphi_{n\nu}$ les valeurs de $\varphi_n(z)$. Soit aussi $\varphi(z)$ un ensemble fini de fonctions, dont le nombre total des

qui, pour chaque point intérieur à D , admet comme racines les différences du tableau (58), il y a ν au moins racines de cette équation qui tendent vers zéro avec $\frac{1}{n}$; il en résulte que les coefficients $H_\mu(z), H_{\mu-1}(z), H_{\mu-2}(z), \dots, H_{\mu-\nu+1}(z)$ tendent vers zéro dans le domaine D . D'autre part, il est facile de voir que toutes les fonctions $H_1(z), H_2(z), \dots, H_\mu(z)$ sont holomorphes dans D et, par conséquent, d'après un théorème de M. M. OSGOOD¹ et MONTEL² les ν séries $H_\mu(z), H_{\mu-1}(z), H_{\mu-2}(z), \dots, H_{\mu-\nu+1}(z)$ convergent uniformément, à l'intérieur de D , vers zéro.³

Si nous désignons par r_1, r_2, \dots, r_μ les racines de l'équation (59), nous avons:

$$H_\mu(z) = (-1)^\mu r_1 r_2 r_3 \dots r_\mu,$$

et à chaque nombre positif θ correspond un entier p tel que, pour $n > p$ et pour tout point intérieur à D , l'on ait

$$|r_1 r_2 r_3 \dots r_\mu| < \theta, |H_{\mu-1}(z)| < \theta, |H_{\mu-2}(z)| < \theta, \dots$$

et, par conséquent, le module d'une au moins racine sera inférieur à $\left|\theta^{\frac{1}{\mu}}\right|$: soit:

$$|r_1| < \left|\theta^{\frac{1}{\mu}}\right|.$$

Or, nous avons:

$$H_{\mu-1}(z) = (-1)^{\mu-1} \sum r_1 r_2 r_3 \dots r_{\mu-1},$$

en désignant ainsi la somme des produits des racines r_1, r_2, \dots, r_μ prises $\mu-1$ à $\mu-1$. Si nous posons:

$$H_{\mu-1}(z) = (-1)^{\mu-1} r_2 r_3 \dots r_\mu + g_{\mu-1}, \quad (60)$$

et si nous désignons par M le module maximum dans tout le domaine D_1 de toutes les fonctions de la série (55) et des fonctions-limites $w = f(z)$, le module de chaque terme de $g_{\mu-1}$ sera inférieur à

$$2^{\mu-2} M^{\mu-2} \left|\theta^{\frac{1}{\mu}}\right|,$$

¹ Annals of Mathematics, 2^e série, t. III, n^o 1, 1901.

² *Sur les suites infinies de fonctions* (Annales de l'École normale, 3^e série, t. XXIV, 1907, p. 307). Voir aussi: P. MONTEL, *Sur les familles de fonctions analytiques qui admettent des valeurs exceptionnelles dans un domaine*. Annales de l'École normale, tome 29, 3^e série, 1912, p. 529—535. C. ARZELÀ. *Sulle serie di funzioni analitiche*. Rendiconti dell. R. Accad. delle Scienze di Bologna, 1902—1903.

³ Il est facile de voir que les modules des fonctions $H_1(z), H_2(z), \dots, H_\mu(z)$ sont bornés dans le domaine D .

et, par conséquent, l'inégalité $|H_{\mu-1}(z)| < \theta$ et la formule (60) nous donnent :

$$|r_2 r_3 \dots r_\mu| < \theta + (\mu - 1) 2^{\mu-2} M^{\mu-2} \left| \theta^{\frac{1}{\mu}} \right|,$$

il en résulte que le module d'une au moins des racines r_2, r_3, \dots, r_μ sera inférieur à $|\delta_2(\theta)|$, où

$$\delta_2(\theta) = \left[\theta + (\mu - 1) 2^{\mu-2} M^{\mu-2} \left| \theta^{\frac{1}{\mu}} \right| \right]^{\frac{1}{\mu-1}}.$$

Soit : $|r_2| < |\delta_2(\theta)|$. En continuant ainsi de proche en proche, à l'aide des inégalités :

$$|H_{\mu-2}(z)| < \theta, |H_{\mu-3}(z)| < \theta, \dots, |H_{\mu-\nu+1}(z)| < \theta,$$

successivement utilisées, nous pouvons évidemment démontrer qu'il y a au moins ν racines $r_1, r_2, r_3, \dots, r_\nu$ satisfaisant aux inégalités :

$$|r_1| < \left| \theta^{\frac{1}{\mu}} \right|, |r_2| < |\delta_2(\theta)|, |r_3| < |\delta_3(\theta)|, \dots, |r_\nu| < |\delta_\nu(\theta)|,$$

où $\delta_2(\theta), \delta_3(\theta), \dots, \delta_\nu(\theta)$ désignent des quantités dépendant seulement des θ, μ, ν , et M et tendant vers zéro avec θ ; dès lors, étant donné un nombre positif ε quelconque nous pouvons choisir θ assez petit pour que l'on ait :

$$\left| \theta^{\frac{1}{\mu}} \right| < \varepsilon, |\delta_2(\theta)| < \varepsilon, |\delta_3(\theta)| < \varepsilon, \dots, |\delta_\nu(\theta)| < \varepsilon,$$

ou bien :

$$|r_1| < \varepsilon, |r_2| < \varepsilon, |r_3| < \varepsilon, \dots, |r_\nu| < \varepsilon,$$

pour $n > p$ et pour tous les points z intérieurs au domaine D .

Nous avons, donc, démontré la convergence *uniforme* de la série (55) vers les fonctions $w = f(z)$ et établi le théorème suivant :

Théorème V. *Si nous considérons une famille (F) de fonctions algébroides à un nombre fixe ν de branches dans un domaine D , dont les modules sont bornés dans leur ensemble dans le même domaine, une telle famille a la propriété suivante : De toute suite infinie de fonctions appartenant à la famille (F) on peut extraire une nouvelle suite convergeant uniformément, à l'intérieur de D , vers des fonctions algébroides ou holomorphes dans D , dont le nombre total de branches est égal à ν .*

Adoptons la définition suivante : Une famille (F) de fonctions algébroides à un nombre fixe ν de branches dans un domaine D sera dite *normale* dans D si

de toute suite infinie formée de fonctions de la famille (F) on peut extraire une suite nouvelle *convergeant uniformément, dans l'intérieur de D , vers des fonctions algébroides dans D , dont le nombre total de branches est égal à ν* . Le nombre des fonctions-limites, qui peuvent être aussi des constantes finies ou infinies, sera, par conséquent, au plus égal à ν ; si $\nu = 1$ nous retombons immédiatement à la notion des familles normales de fonctions holomorphes dans un domaine, utilisée par M. P. MONTEL dans ses importants travaux ci-dessus indiqués.

À l'aide de la définition que nous venons d'adopter, le théorème V peut s'énoncer aussi de la façon suivante:

Toute famille de fonctions algébroides à un nombre fixe ν de branches dans un domaine D , bornées dans leur ensemble dans le même domaine, est une famille normale dans D .

C'est une extension aux fonctions algébroides dans un domaine d'un théorème établi par M. P. MONTEL [*Sur les suites infinies de fonctions*, Annales de l'École normale, 3^e série, tome XXIV, 1907, p. 67—70].

8. Soit:

$$f_1(z), f_2(z), \dots, f_n(z), \dots \quad (61)$$

une suite infinie de fonctions algébroides à ν branches et bornées dans un domaine D ; si nous supposons que cette suite converge vers les fonctions $w = f(z)$ satisfaisant à l'équation:

$$F(z, w) = w^\nu + B_1(z) w^{\nu-1} + B_2(z) w^{\nu-2} + \dots + B_{\nu-1}(z) w + B_\nu(z) = 0, \quad (62)$$

la convergence, d'après le N^o précédent, est uniforme et les fonctions $B_1(z)$, $B_2(z)$, ..., $B_{\nu-1}(z)$, $B_\nu(z)$ sont aussi holomorphes dans le domaine D . Si la fonction $u = f_n(z)$ est définie par l'équation:

$$F_n(z, u) = u^\nu + A_{n1}(z) u^{\nu-1} + A_{n2}(z) u^{\nu-2} + \dots + A_{n, \nu-1}(z) u + A_{n\nu}(z) = 0, \quad (63)$$

les fonctions $A_{n1}(z)$, $A_{n2}(z)$, ..., $A_{n\nu}(z)$ convergent uniformément vers les fonctions-limites respectives $B_1(z)$, $B_2(z)$, ..., $B_\nu(z)$.

Supposons maintenant que, étant donné un nombre a , aucune des fonctions limites $w = f(z)$ ne soit égale à la constante a ; alors la fonction holomorphe $F(z, a)$ n'est pas constamment égale à zéro. Il est clair que, pour qu'une au moins branche de $f_n(z)$ prenne la valeur a dans D , il faut et il suffit que la fonction holomorphe $F_n(z, a)$ s'y annule; de même, pour qu'une au moins des fonctions $f(z)$ prenne dans D la valeur a , il faut et il suffit que la fonction holomorphe $F(z, a)$ s'y annule. Or, d'après un théorème établi par M. MONTEL

dans son travail déjà cité [*Sur les familles de fonctions analytiques qui admettent des valeurs exceptionnelles dans un domaine*, Annales de l'École normale, tome 29 de la 3^{me} série, 1912, page 490], si nous considérons un point z_0 situé à l'intérieur de D , pour que l'on ait: $F(z_0, a) = 0$ il faut et il suffit que, à partir d'un certain rang, les fonctions holomorphes $F_n(z, a)$ s'annulent toutes dans le voisinage du point $z = z_0$: en effet, la suite des fonctions holomorphes $F_n(z, a)$ converge uniformément vers la fonction $F(z, a)$. Nous obtenons, donc, le théorème suivant:

Théorème VI. *Soit:*

$$f_1(z), f_2(z), \dots, f_n(z), \dots$$

une suite infinie de fonctions algébroides à ν branches bornées dans un domaine D et convergeant uniformément vers des fonctions $w = f(z)$, dont le nombre total des branches est égal à ν .

Si aucune des fonctions-limites $f(z)$ n'est égale à une constante a , pour que l'une au moins de ces fonctions prenne en $z = z_0$ la valeur a , il faut et il suffit que, à partir d'un certain rang, les fonctions $f_n(z)$ prennent toutes la valeur a dans le voisinage de z_0 .

C'est une extension aux suites de fonctions algébroides du théorème ci-dessus indiqué et utilisé de M. MONTEL.

CHAPITRE V.

La convergence des séries de fonctions algébroides.

9. Soit:

$$f_1(z), f_2(z), f_3(z), \dots, f_n(z), \dots \quad (64)$$

une série de fonctions algébroides à un nombre fixe ν de branches dans un domaine D ; nous supposons aussi qu'elles soient bornées dans le même domaine. Nous commencerons par donner la définition suivante:

Nous dirons que la suite (64) converge en un point z_0 du domaine D , lorsque la série:

$$f_1(z_0), f_2(z_0), f_3(z_0), \dots, f_n(z_0), \dots \quad (65)$$

peut donner naissance à ν séries convergentes:

à l'intérieur de D et désignons par (E) l'ensemble de ces points; alors, comme nous venons de voir, les séries de fonctions holomorphes

$$\begin{aligned} &A_{11}(z), A_{12}(z), \dots, A_{1n}(z), \dots \\ &A_{21}(z), A_{22}(z), \dots, A_{2n}(z), \dots \\ &\dots \\ &A_{\nu 1}(z), A_{\nu 2}(z), \dots, A_{\nu n}(z), \dots \end{aligned} \tag{69}$$

convergent aussi en tous les points de l'ensemble (E) ; nous en concluons, d'après un théorème de M. VITALI¹, qu'elles convergent uniformément dans l'intérieur de D vers des fonctions holomorphes $B_1(z), B_2(z), B_3(z), \dots, B_\nu(z)$. Donc, la série (64) converge vers les fonctions $w = f(z)$ satisfaisant à l'équation:

$$w^\nu + B_1(z)w^{\nu-1} + B_2(z)w^{\nu-2} + \dots + B_{\nu-1}(z)w + B_\nu(z) = 0,$$

qui sont algébroides dans le domaine D : En d'autres termes, si nous considérons un point quelconque z_1 situé à l'intérieur du domaine D , on peut avec les valeurs en ce point des termes de la suite (64) construire ν séries convergentes:

$$\begin{aligned} &u_{11}, u_{12}, u_{13}, \dots, u_{1n}, \dots \\ &u_{21}, u_{22}, u_{23}, \dots, u_{2n}, \dots \\ &\dots \\ &u_{\nu 1}, u_{\nu 2}, u_{\nu 3}, \dots, u_{\nu n}, \dots \end{aligned} \tag{70}$$

où les $u_{11}, u_{21}, \dots, u_{\nu 1}$ sont les valeurs de $f_1(z_1)$, les $u_{12}, u_{22}, \dots, u_{\nu 2}$ sont les valeurs de $f_2(z_1)$, les $u_{13}, u_{23}, \dots, u_{\nu 3}$ sont les valeurs de $f_3(z_1)$ et, en général, les $u_{1n}, u_{2n}, \dots, u_{\nu n}$ sont les valeurs de $f_n(z_1)$; les séries (70) convergent respectivement vers les ν racines de l'équation:

$$w^\nu + B_1(z_1)w^{\nu-1} + B_2(z_1)w^{\nu-2} + \dots + B_{\nu-1}(z_1)w + B_\nu(z_1) = 0,$$

qui sont toujours toutes finies.

¹ G. VITALI *Sopra le serie di funzioni analitiche* [Rendiconti del R. Inst. Lombardo, 2^e série, t. XXXVI, 1903, p. 772; Annali di Matematica pura ed applicata, 3^e série, t. X, 1904, p. 73]. Voir aussi: H. PORTER *Concerning series of Analytic Functions* [Annals of Mathematics, 2^e série, t. VI, 1904—1905, p. 190].

10. Nous remarquons que le théorème VII, ci-dessus énoncé, peut s'étendre au cas plus général où les fonctions de la série considérée ne sont soumis qu'à la condition d'appartenir à une famille normale: c'est-à-dire l'hypothèse que les fonctions de la série soient bornées peut être remplacée par la condition plus générale qu'elles appartiennent à une famille normale de fonctions algébroides.

La démonstration étant identique à celle du théorème VII, je crois inutile de l'exposer en détail. Remarquons d'abord que si les fonctions de la série (72) appartiennent à une famille normale, il en est de même des séries (69) de fonctions holomorphes dans D ; dès lors, nous n'avons qu'à employer un théorème général de M. MONTEL établi récemment dans son travail déjà cité [P. MONTEL. *Sur les familles de fonctions analytiques qui admettent des valeurs exceptionnelles dans un domaine*, Annales de l'École normale supérieure, tome 29, 3^e série, année 1912, pages 531 et 532] et répéter les autres raisonnements faits pour la démonstration du théorème VII pour obtenir le théorème suivant:

Théorème VIII. *Soit une suite infinie de fonctions*

$$f_1(z), f_1(z), \dots, f_n(z), \dots$$

algébroides à un nombre fixe ν de branches finies dans un domaine D et appartenant à une famille normale dans ce domaine.

Si la suite converge en une infinité de points du domaine D ayant au moins un point-limite intérieur à D , elle converge dans tout le domaine D et la convergence est uniforme à l'intérieur de D . Les fonctions-limites sont algébroides ou holomorphes dans le domaine D et le nombre total de leurs branches ν est égal à ν .

C'est visiblement l'extension aux séries de fonctions algébroides du théorème de M. MONTEL ci-dessus mentionné, qui joue pour la démonstration du théorème VIII le même rôle que le théorème de M. VITALI pour la démonstration de notre théorème VII.

CHAPITRE VI.

Les familles de fonctions algébroides qui admettent dans un domaine un cercle exceptionnel fixe.

11. M. MONTEL a démontré qu'une famille de fonctions holomorphes dans un domaine D admettant dans D un cercle exceptionnel fixe est une famille normale dans D [P. MONTEL: *Sur les familles de fonctions analytiques...*, Annales

de l'École normale, t. 29, 3^e série, 1912, pag. 493 et 494]. Ces familles comprennent comme cas particulier les familles de fonctions bornées dans leur ensemble, pour lesquelles il n'y a qu'un cercle non exceptionnel ayant comme centre l'origine des coordonnées. Nous allons étendre aux familles de fonctions algébroïdes dans un domaine D le théorème ci-dessus indiqué de M. MONTEL en suivant sa méthode elle-même pour les ramener aux familles de fonctions algébroïdes bornées en module.

Soit (F) une famille de fonctions algébroïdes¹ à ν branches dans un domaine D admettant dans D un cercle exceptionnel fixe et $u = f(z)$ une fonction quelconque de cette famille; si le centre du cercle exceptionnel est le point a du plan u et son rayon est égal à K nous aurons l'inégalité:

$$|f(z) - a| > K \quad (73)$$

satisfaite pour toutes les branches de toutes les fonctions $f(z)$ et pour tout point z du domaine D ; en d'autres termes, les points $u = f(z)$ ne pénètrent jamais dans le cercle:

$$|u - a| < K.$$

Posons:

$$f(z) - a = \frac{1}{\varphi(z)},$$

et considérons la famille (F') composée des fonctions

$$\varphi(z) = \frac{1}{f(z) - a}, \quad (74)$$

qui sont bornées dans D , puisque nous avons:

$$|\varphi(z)| < \frac{1}{K},$$

pour toutes les branches de toutes les fonctions $\varphi(z)$ et pour tout point z du domaine D ; la famille (F') est donc normale d'après notre théorème V.

Considérons maintenant une suite infinie de fonctions de la famille (F)

$$f_1(z), f_2(z), f_3(z), \dots, f_n(z), \dots \quad (75)$$

¹ Supposées finies dans le domaine D ; nous supposons, c'est à dire, qu'elles ne prennent pas dans D la valeur ∞ .

à laquelle correspond, moyennant l'égalité (74), une suite infinie:

$$\varphi_1(z), \varphi_2(z), \varphi_3(z), \dots, \varphi_n(z), \dots \quad (76)$$

de fonctions de la famille (F'). De cette suite (76) nous pouvons extraire une nouvelle suite:

$$\varphi_{m_1}(z), \varphi_{m_2}(z), \dots, \varphi_{m_n}(z), \dots \quad (77)$$

convergeant uniformément vers des fonctions algébroides ou holomorphes dans D , dont le nombre total de branches est égal à ν ; à cette suite correspond une suite:

$$f_{m_1}(z), f_{m_2}(z), \dots, f_{m_n}(z), \dots, \quad (78)$$

de fonctions de la famille donnée (F). Soit $\Phi(z)$ une fonction limite de la suite (77); si cette fonction est identiquement nulle, il lui correspond *l'infini* comme fonction-limite de la suite (78); si $\Phi(z)$ n'est pas identiquement nulle, elle ne prend pas dans le domaine D la valeur 0, puisque il en est de même des fonctions $\varphi_{m_1}(z), \varphi_{m_2}(z), \dots, \varphi_{m_n}(z), \dots$, (d'après le théorème VI): en effet, par hypothèse, les fonctions $f(z)$ restent finies dans le domaine D ; donc, à la fonction algébroïde $\Phi(z)$ correspond une fonction $a + \frac{1}{\Phi(z)}$ algébroïde et finie dans le domaine D , qui est une fonction-limite¹ de la suite (78). Or, la suite (78) est extraite de la suite (75); nous en concluons que l'on peut extraire de la suite (75) une suite nouvelle convergeant uniformément vers des fonctions algébroides et finies dans le domaine D ou vers l'infini, le nombre total des branches des fonctions limites (l'infini compris) étant égal à ν . Nous avons, donc, établi le théorème suivant:

Théorème IX. *Soit une famille (F) de fonctions $u = f(z)$ algébroides à ν branches et finies dans un domaine D . Si cette famille admet dans le plan u un cercle quelconque exceptionnel fixe, elle est normale dans le domaine D .*

12. Envisageons la famille (F) composée de toutes les fonctions algébroides $u = a(z)$ définies par l'équation:

$$\sigma(z, u) = u^\nu + A_1(z)u^{\nu-1} + A_2(z)u^{\nu-2} + \dots + A_{\nu-1}(z)u + A_\nu(z) = 0, \quad (79)$$

où les $A_1(z), A_2(z), \dots, A_\nu(z)$ désignent des fonctions holomorphes dans un cercle $|z| < R$

¹ La convergence de la suite (78) est uniforme, parce que le module des fonctions (77) est borné inférieurement et, par conséquent, celui des fonctions (78) est borné supérieurement.

$$\begin{aligned}
A_1(z) &= a_1 + b_1 z + \dots \\
A_2(z) &= a_2 + b_2 z + \dots \\
&\dots \dots \dots \dots \dots \dots \\
A_{v-1}(z) &= a_{v-1} + b_{v-1} z + \dots \\
A_v(z) &= a_v + b_v z + \dots
\end{aligned}
\tag{80}$$

les coefficients $a_1, b_1, a_2, b_2, \dots, a_{v-1}, b_{v-1}, a_v, b_v$ étant fixes, tandis que les coefficients non écrits sont *quelconques* (des paramètres variables). Ainsi les fonctions de la famille (F) sont *algébroides* et *finies* dans le cercle (C):

$$|z| < R. \tag{81}$$

Supposons que, lorsque le point z se déplace dans le cercle (C) les points $u = a(z)$ ne pénètrent jamais (pour aucune fonction de la famille) dans un cercle (K) du plan u ; en d'autres termes, nous supposons qu'il existe un nombre γ fixe tel que l'inégalité:

$$|u - \gamma| > q, \tag{82}$$

soit satisfaite pour toutes les branches de chaque fonction de la famille et pour tous les points situés dans le cercle (C), q désignant un nombre positif fixe.

Le cercle (K) défini par l'inégalité:

$$|u - \gamma| < q,$$

s'appelle alors *exceptionnel* dans le cercle (C), parce que tous ses points sont exceptionnels dans (C) par rapport à l'ensemble des fonctions de la famille: cette dénomination est déjà utilisée dans le N° précédent.

Si nous désignons par $u_1, u_2, u_3, \dots, u_v$ les branches de $u = a(z)$, nous aurons:

$$|u_1 - \gamma| > q, \quad |u_2 - \gamma| > q, \quad |u_3 - \gamma| > q, \dots, \quad |u_v - \gamma| > q,$$

et, par conséquent:

$$|(u_1 - \gamma)(u_2 - \gamma)(u_3 - \gamma) \dots (u_v - \gamma)| > q^v.$$

Or, nous avons:

$$|(u_1 - \gamma)(u_2 - \gamma)(u_3 - \gamma) \dots (u_v - \gamma)| = |\sigma(z, \gamma)|.$$

On en déduit;

$$|\sigma(z, \gamma)| > q^\nu \quad \text{ou} \quad \left| \frac{1}{\sigma(z, \gamma)} \right| < \frac{1}{q^\nu}.$$

La fonction $\frac{1}{\sigma(z, \gamma)}$ est holomorphe dans le cercle (C), puisque $\sigma(z, \gamma)$ est holomorphe dans le même cercle et ne s'y annule pas; si nous posons:

$$\frac{1}{\sigma(z, \gamma)} = \delta_0 + \delta_1 z + \delta_2 z^2 + \dots,$$

nous avons;

$$\delta_0 = \frac{1}{\gamma^\nu + a_1 \gamma^{\nu-1} + a_2 \gamma^{\nu-2} + \dots + a_{\nu-1} \gamma + a_\nu},$$

$$\delta_1 = - \frac{b_1 \gamma^{\nu-1} + b_2 \gamma^{\nu-2} + \dots + b_{\nu-1} \gamma + b_\nu}{(\gamma^\nu + a_1 \gamma^{\nu-1} + \dots + a_{\nu-1} \gamma + a_\nu)^2}.$$

D'après un théorème classique de CAUCHY, nous avons:

$$\frac{|b_1 \gamma^{\nu-1} + b_2 \gamma^{\nu-2} + \dots + b_{\nu-1} \gamma + b_\nu|}{|\gamma^\nu + a_1 \gamma^{\nu-1} + \dots + a_{\nu-1} \gamma + a_\nu|^2} \leq \frac{\text{Max de } \left| \frac{1}{\sigma(z, \gamma)} \right| \text{ pour } |z| = \frac{R}{2}}{\frac{R}{2}} < \frac{1}{\frac{R}{2}},$$

ou bien:

$$R \cdot |b_1 \gamma^{\nu-1} + b_2 \gamma^{\nu-2} + \dots + b_{\nu-1} \gamma + b_\nu| < \frac{2}{q^\nu} |\gamma^\nu + a_1 \gamma^{\nu-1} + a_2 \gamma^{\nu-2} + \dots + a_{\nu-1} \gamma + a_\nu|^2.$$

On en déduit:

$$R < \frac{2}{q^\nu} \frac{|\gamma^\nu + a_1 \gamma^{\nu-1} + a_2 \gamma^{\nu-2} + \dots + a_{\nu-1} \gamma + a_\nu|^2}{|b_1 \gamma^{\nu-1} + b_2 \gamma^{\nu-2} + \dots + b_{\nu-1} \gamma + b_\nu|}, \quad (83)$$

en supposant que le nombre γ ne soit pas une racine de l'équation:

$$b_1 x^{\nu-1} + b_2 x^{\nu-2} + \dots + b_{\nu-1} x + b_\nu = 0. \quad (84)$$

Nous voyons que le second membre de l'inégalité (83) dépend seulement des nombres donnés fixes $\nu, q, \gamma, a_1, a_2, \dots, a_\nu, b_1, b_2, \dots, b_\nu$ [et nullement des paramètres variables qui figurent dans les séries (80)]. Nous remarquons que l'équation (84) ne doit pas être une identité, si nous voulons tirer un parti utile de

Étant donnés ν couples de nombres $(a_1, b_1), (a_2, b_2), (a_3, b_3), \dots, (a_\nu, b_\nu)$ tels que les $b_1, b_2, b_3, \dots, b_\nu$, ne soient pas tous nuls, si nous désignons par (E) l'ensemble de toutes les valeurs u qui satisfont à l'inégalité:

$$|u - \gamma| < q,$$

le nombre γ n'étant pas une racine de l'équation

$$b_1 x^{\nu-1} + b_2 x^{\nu-2} + \dots + b_{\nu-1} x + b_\nu = 0,$$

il existe un nombre positif $\Phi(\nu, \gamma, q, a_1, a_2, \dots, a_\nu, b_1, b_2, \dots, b_\nu)$, dépendant seulement des nombres donnés $\nu, \gamma, q, a_1, a_2, \dots, a_\nu, b_1, b_2, \dots, b_\nu$, jouissant des propriétés suivantes: $\alpha!$ δ étant un nombre positif arbitrairement petit, toute fonction de la famille (F) , définie par l'équation (85) et les formules (86), algébroïde dans le cercle:

$$|z| < \Phi + \delta,$$

prend, dans ce cercle, au moins une fois l'une des valeurs de l'ensemble (E) ou l'infini. $\beta!$ Si $\Phi > 0$ et $0 < \delta < \Phi$, il existe au moins une fonction de la famille (F) algébroïde et ne prenant dans le cercle:

$$|z| < \Phi - \delta,$$

aucune des valeurs de l'ensemble (E) ni la valeur ∞ .

Remarquons que l'ensemble (E) est représenté sur un plan u par l'ensemble des points situés dans le cercle ayant comme centre le point γ et son rayon égal à q ; ce cercle peut avoir un rayon q arbitrairement petit.

Le théorème X peut s'énoncer d'une façon abrégée comme il suit;

Aucune fonction $u = f(z)$ de la famille (F) algébroïde et finie dans le cercle de centre origine et de rayon

$$R > \frac{2}{q^\nu} \frac{|\gamma^\nu + a_1 \gamma^{\nu-1} + a_2 \gamma^{\nu-2} + \dots + a_{\nu-1} \gamma + a_\nu|^2}{|b_1 \gamma^{\nu-1} + b_2 \gamma^{\nu-2} + \dots + b_{\nu-1} \gamma + b_\nu|},$$

ne saurait admettre, dans ce cercle, un domaine exceptionnel du plan u renfermant complètement dans son intérieur le cercle

$$|u - \gamma| < q.$$

CHAPITRE VII.

Remarques sur les séries composées.

13. Soit:

$$f_1(z), f_2(z), f_3(z), \dots, f_n(z), \dots, \quad (1)$$

une série de fonctions algébroides à un nombre fixe ν de branches finies dans un domaine D et désignons par $\alpha_{n1}, \alpha_{n2}, \alpha_{n3}, \dots, \alpha_{n\nu}$ les ν valeurs de $f_n(z_0)$, où z_0 est un point quelconque du domaine D .

Toute série de la forme:

$$\alpha_{1K_1}, \alpha_{2K_2}, \alpha_{3K_3}, \dots, \alpha_{nK_n}, \dots, \quad (2)$$

contenant une détermination et une seule de chaque terme de la série:

$$f_1(z_0), f_2(z_0), f_3(z_0), \dots, f_n(z_0), \dots, \quad (3)$$

s'appelle *branche* de cette série (3).

D'après la définition du N° 9, la série (3) est dite *convergente*, s'il existe des branches convergentes de cette série, dont le nombre est au moins égal à ν .¹ Nous dirons qu'un tel ensemble de ν branches convergentes de la série (3) forme un *système fondamental* de branches. Soit (S) un tel système de branches convergeant vers les limites $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \dots, \lambda_\nu$ qui ne sont pas nécessairement distinctes; je dis que toute série (quelconque) formée par des déterminations des termes de la série (3) [c'est-à-dire: toute série, dont chaque terme a une valeur unique qui est une détermination d'un terme de la série (3)] ne saurait avoir d'autres limites que les nombres $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \dots, \lambda_\nu$.

Supposons, en effet, qu'une telle série (S_1) ait une limite b différente des nombres $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \dots, \lambda_\nu$; on pourrait, alors, en extraire une nouvelle série (S_2) convergeant vers le nombre b . La suite (S_2) étant infinie, il est clair qu'elle contient une infinité de termes d'une au moins des branches du système fondamental (S); on pourra, donc, extraire de la série (S_2) une nouvelle série (S_3) qui peut être aussi extraite d'une branche (B) du système fondamental (S). Nous voyons que la série (S_3) converge d'une part vers le nombre b [comme extraite de la série (S_2)] et d'autre part vers un des nombres $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \dots, \lambda_\nu$ [comme extraite de la série (B)]; donc, la limite b n'est égale qu'à un des nombres $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \dots, \lambda_\nu$.

¹ et dont l'ensemble contient toutes les déterminations de chaque terme de la série (3).

La série (3) sera appelée *composée*, puisque chaque terme a ν valeurs, que nous ne voulons pas séparer comme étant les ν valeurs en z_0 d'une fonction multiforme.

Toute série, dont chaque terme n'a qu'une valeur *unique*, qui est une valeur d'un terme de la série (3), sera appelée *série simple extraite de la série composée* (3). Nous avons ci-dessus établi le théorème suivant:

Théorème XI. *Soit:*

$$f_1(z), f_2(z), f_3(z), \dots, f_n(z), \dots \quad (4)$$

une série de fonctions algébroides à un nombre fixe ν de branches finies dans un domaine D et z_0 un point de ce domaine.

Si cette série converge en z_0 , toute série simple extraite de la série composée

$$f_1(z_0), f_2(z_0), f_3(z_0), \dots, f_n(z_0), \dots \quad (5)$$

ne saurait admettre d'autres limites que celles des branches formant un système fondamental. Parmi les séries simples extraites de (5) les plus intéressantes sont les branches de (5), dont ν au moins sont des séries convergentes.

14. Considérons une série composée

$$f_{m_1}(z_0), f_{m_2}(z_0), f_{m_3}(z_0), \dots, f_{m_n}(z_0), \dots \quad (6)$$

extraite de la série (5) supposée convergente; il est clair que l'ensemble de toutes les séries simples extraites de (6) admet toutes les limites $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \dots, \lambda_\nu$ d'un système fondamental de branches de la série (5).

Inversement, supposons que de toute série (6) extraite de (5) nous pouvons extraire au moins une série simple convergeant vers un nombre fixe λ_1 ; je dis que, alors, une au moins des branches de la série multiforme (5) converge vers le même nombre λ_1 .

En effet, désignons par (E) l'ensemble des points du plan u , qui représentent les déterminations de tous les termes de la série (5) et décrivons un cercle (C) de centre λ_1 et de rayon quelconque r ; désignons aussi par (A) l'ensemble des points de (E) qui sont situés dans le cercle (C) et par (A_1) l'ensemble des points qui représentent toutes les déterminations de tous les termes d'une suite infinie:

$$f_{K_1}(z_0), f_{K_2}(z_0), f_{K_3}(z_0), \dots \quad (7)$$

extraite de la série (5). Si tous les points de l'ensemble (A_1) étaient en dehors du cercle (C) , il serait impossible d'extraire de la suite (7) une série *simple* con-

vergeant vers le nombre λ_1 , ce qui est en contradiction avec notre hypothèse ci-dessus indiquée; nous en concluons que les ν points $f_n(z_0)$ ne sauraient être tous en dehors du cercle (C) sauf, peut-être, pour un nombre fini de termes de la série (5) et, par conséquent, il existe au moins une branche:

$$a_{1\mu_1}, a_{2\mu_2}, a_{3\mu_3}, \dots \quad (8)$$

de la série (5) telle que tous les points $a_{1\mu_1}, a_{2\mu_2}, a_{3\mu_3}, \dots$ de cette branche (8), sauf, peut-être, un nombre fini d'entre eux, soient intérieurs au cercle (C) , aussi petit que soit le rayon r . Si, donc, l'ensemble dérivé (E') de (E) est fini, nous pouvons prendre le rayon r assez petit pour que le centre du cercle (C) soit le seul élément de l'ensemble (E') qui se trouve à l'intérieur du cercle (C) ; alors, l'ensemble (A) n'a d'autre point limite et la branche (8), dont les termes appartiennent à l'ensemble (A) [sauf, peut-être, un nombre fini de termes], converge, par conséquent, vers le nombre λ_1 .

Supposons maintenant qu'il existe ν nombres $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \dots, \lambda_\nu$ tels que l'ensemble des valeurs des termes de toute suite infinie:

$$f_{K_1}(z_0), f_{K_2}(z_0), f_{K_3}(z_0), \dots \quad (9)$$

extraite de la suite (5) possède les limites $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \dots, \lambda_\nu$; alors, comme nous venons de démontrer, il existera ν branches convergentes de la suite (5) ayant comme limites respectives les nombres $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \dots, \lambda_\nu$ et, par conséquent, la série (5) sera convergente.

Ces considérations nous amènent à adopter la définition suivante: *Nous dirons qu'un nombre λ est une limite simple de convergence de la série (5), si tout cercle de centre λ et de rayon suffisamment petit renferme, dans son intérieur, une valeur (et une seule) de chaque terme de cette série [sauf, peut-être, un nombre fini de termes].*

En général, nous dirons qu'un nombre λ est une limite de convergence multiple d'ordre P de la série (5), si tout cercle de centre λ et de rayon suffisamment petit renferme, dans son intérieur, P valeurs (exactement) de chaque terme de cette série [sauf, peut-être, un nombre fini de termes]. Une limite d'ordre de multiplicité égal à p comptera pour p limites distinctes (simples).

À l'aide de ces notions nous pouvons donner sous une forme très simple la définition de la convergence d'une série composée.

Une série:

$$A_1, A_2, A_3, \dots, A_n, \dots$$

dont chaque terme a ν valeurs, s'appelle série composée d'ordre ν .

Une série composée d'ordre ν sera dite convergente, si elle possède exactement ν limites de convergence [c'est-à-dire si la somme des ordres de multiplicité de toutes les limites est égal à ν].

Il est évident que cette définition est équivalente à celle que nous avons donnée dans le paragraphe 9; nous remarquons que, d'après le théorème XI, les limites de la série composée:

$$f_1(z_0), f_2(z_0), f_3(z_0), \dots, f_n(z_0), \dots$$

sont les seules limites de l'ensemble des valeurs de tous ces termes. Dans certaines questions, l'étude des limites d'un ensemble dénombrable de nombres se ramène d'une façon naturelle à l'étude des limites de convergence d'une série composée: c'est surtout dans les cas où les nombres de l'ensemble peuvent former des groupes tels que les nombres de chaque groupe se trouvent en liaison intime: soient, par exemple, les ν valeurs en un point z_0 d'une fonction algébroïde dans un domaine D contenant ce point et ayant ν branches dans le même domaine.

CHAPITRE VIII.

Application aux fonctions ayant un nombre infini de branches dans un domaine.

15. M. PIERRE BOUTROUX a publié des travaux intéressants sur les fonctions analytiques d'une variable complexe ayant un nombre infini de branches et sur leurs branches-limites ou fonctions limites.¹ Soit $y(z)$ une fonction multiforme possédant une infinité de branches bornées en module dans un domaine D et soit $z = \bar{z}$ un point qui n'est pas point-limite de points singuliers d'un ensemble de branches $y_1(z), y_2(z), \dots$, alors, on peut extraire de cet ensemble un autre ensemble $y_{K_1}(z), y_{K_2}(z), \dots$, convergeant uniformément vers une fonction-limite holomorphe dans le voisinage de $z = \bar{z}$: cela résulte du théorème de M. MONTEL déjà utilisé pour établir le théorème V, qui est son extension aux séries de fonctions algébroides dans un domaine. Nous considérons comme point critique distinct (avec M. BOUTROUX) tout point autour duquel se permutent deux déterminations de $y(z)$: ainsi, un point autour duquel se permutent ν déterminations comptera pour $\nu - 1$ points critiques distincts; si, donc, le point \bar{z} n'est pas point-limite de

¹ Fonctions multiformes à une infinité de branches [Annales scientifiques de l'École Normale supérieure, 3^e série, t. XXII (1905), p. 441—469].

points-critiques, les termes de la série: $y_1(z), y_2(z), \dots, y_n(z), \dots$ seront, à partir d'un certain rang, holomorphes en $z = \bar{z}$.

M. BOUTROUX a démontré que, si le point \bar{z} n'est pas un point-limite d'intersections des branches $y_i(z)$ ¹ et si la série $y_1(z), y_2(z), \dots, y_n(z), \dots$ converge pour $z = \bar{z}$, les branches y_i sont nécessairement bornées en module au voisinage de \bar{z} et, par conséquent, la limite Y de cette série (branche-limite ou fonction-limite) est une fonction holomorphe au voisinage de \bar{z} . De plus, la convergence de la série est uniforme, au voisinage de \bar{z} .

Supposons que le point \bar{z} soit un point-limite d'intersections des branches y_i supposées holomorphes ou méromorphes dans un certain cercle entourant le point \bar{z} et qu'il existe un entier m tel que deux branches y_i quelconques se coupent moins de m fois à l'intérieur de γ , aussi grands que soient les indices i . Dans ce cas, M. BOUTROUX démontre que, si la série $y_1(z), y_2(z), \dots$ sur un chemin aboutissant au point \bar{z} converge vers une fonction-limite $Y(z)$, cette fonction sera méromorphe au voisinage de $z = \bar{z}$ [Voir son travail² 1, pag. 3—6].

Notre théorie de séries et familles de fonctions algébroides dans un domaine D nous permettra d'obtenir un nouveau résultat sur le sujet étudié par M. BOUTROUX et concernant le cas des points qui sont des limites de points critiques de notre fonction multiforme $y(z)$.

16. Considérons un ensemble infini (E) de branches de $y(z)$ algébroides dans le voisinage d'un point $z = z_0$ et bornées en module, dans leur ensemble, dans un domaine D auquel appartient le point z_0 . Si une branche y_i ne se permute qu'avec $\nu - 1$ autres branches, dans le voisinage du point z_0 , nous dirons que la branche y_i est d'ordre ν en $z = z_0$. Si l'ordre des branches de l'ensemble (E) est borné, il y a évidemment une infinité de branches de (E) d'ordre fixe égal à un nombre ν . On peut alors former une suite infinie

$$f_1(z), f_2(z), f_3(z), \dots, f_n(z), \dots \quad (10)$$

de fonctions algébroides à ν branches dans le voisinage du point z_0 , toutes les branches des termes appartenant à l'ensemble (E) ; soit:

$$u^\nu + A_{1n}(z) u^{\nu-1} + A_{2n}(z) u^{\nu-2} + \dots + A_{\nu-1,n}(z) u + A_{\nu n}(z) = 0, \quad (11)$$

l'équation qui définit la fonction $u = f_n(z)$, les coefficients $A_{1n}(z), A_{2n}(z), \dots, A_{\nu n}(z)$ étant holomorphes dans le voisinage du point z_0 . D'après le théorème V, on peut extraire de la série (10) une autre série

¹ Supposées holomorphes en $z = \bar{z}$.

² Sur les fonctions-limites des fonctions multiformes [Rendiconti del Circolo matematico di Palermo, tomo XXIV, anno 1907].

$$\varphi_1(z), \varphi_2(z), \varphi_3(z), \dots, \varphi_n(z), \dots \quad (12)$$

convergeant uniformément vers des fonctions algébroides dans le voisinage de z_0 , dont le nombre total de branches est égal à ν ; soit:

$$u^\nu + B_{1n}(z) u^{\nu-1} + B_{2n}(z) u^{\nu-2} + \dots + B_{\nu-1,n}(z) u + B_{\nu n}(z) = 0, \quad (13)$$

l'équation qui définit la fonction $u = \varphi_n(z)$ dans le voisinage du point $z = z_0$.

Si les fonctions $A_{1n}(z), A_{2n}(z), \dots, A_{\nu n}(z)$ sont holomorphes dans le voisinage d'un point $z = z_1$ du domaine D , quel que soit l'indice n , ce point sera appelé normal pour la suite (10). Le même point ne sera pas normal pour la suite (10), si la condition d'holomorphie ci-dessus indiquée est en défaut pour une infinité de termes de la suite.

Si nous désignons par $w = f(z)$ une fonction-limite de la série (12), il est clair que cette fonction est algébroïde dans le voisinage de tout point normal de la suite (12); nous remarquons qu'un point normal de cette suite peut bien être un point limite de points critiques de notre fonction multiforme $y(z)$.

Il existe, donc, une branche-limite qui sera algébroïde en tout point normal de la suite (12).

Une série composée telle que (10), dont chaque terme satisfait à une équation de la forme (11) où le degré ν est fixe et les coefficients $A_i(z)$ sont holomorphes dans le voisinage d'un point $z = z_0$, sera appelée série *canonique* dans le voisinage de $z = z_0$, formée par des branches de nôtre fonction multiforme; elle admet comme point normal tout point dans le voisinage duquel elle ne cesse pas d'être *canonique*.

Nous avons ainsi établi le théorème suivant:

Théorème XII. *Soit $y(z)$ une fonction multiforme à une infinité de branches et supposons qu'il existe une série composée ou simple (S) canonique dans le voisinage d'un point $z = z_0$ formée par des branches de $y(z)$ bornées en module, dans leur ensemble, dans un domaine D . Il existe, alors, des fonctions-limites (branches-limites) algébroides en tout point normal de la série (S) intérieur au domaine D . Si, donc, la série (S) est canonique en tous les points du domaine D , les branches-limites sont algébroides dans tout le domaine D .*

Nous dirons que la série canonique (S) est de degré ν , si l'entier ν est égal au degré fixe de l'équation à laquelle satisfont les branches de chaque terme de la série: alors, chaque terme possède ν valeurs distinctes ou non, et la série (S) admet, d'après le théorème V, des fonctions-limites dont le nombre total de branches est égal à ν .

Si la série (S) converge en une infinité de points tendant vers un point z_0 comme point-limite, il en est de même, d'après le théorème VII, dans tout le voisinage de ce point: c'est-à-dire: la série (S) convergera dans un cercle (C) de centre z_0 vers des branches-limites algébroides dans le même cercle, dont le nombre total de branches est égal à ν . Par conséquent, d'après le théorème XI, l'ensemble (E) ne saurait avoir plus de ν valeurs limites pour tout point z intérieur au cercle (C) .

Nous obtenons, donc, le théorème suivant qui complète le précédent:

Théorème XIII. *Soit un ensemble (E) de branches de $y(z)$ bornées en module et formant une série (S) canonique de degré ν dans le voisinage d'un point z_0 . Si la série (S) converge en une infinité de points z tendant vers le point z_0 comme point limite, l'ensemble dérivé de (E) aura au plus ν valeurs pour tout point du voisinage de z_0 : c'est-à-dire: pour tout point intérieur à un certain cercle de centre z_0 .*

Ces deux théorèmes XII et XIII fournissent visiblement des relations entre la distribution des points critiques de la fonction multiforme $y(z)$ et la distribution de ses déterminations pour une valeur de z . Ils complètent, d'une façon naturelle, les résultats de M. BOUTROUX plus haut mentionnés.

Lorsque le point z_0 n'appartient pas à l'ensemble dérivé de l'ensemble (ζ) des points critiques de la fonction multiforme nous sommes dans le cas de M. BOUTROUX. Notre cas est celui où le point z_0 appartient à l'ensemble dérivé de (ζ) de façon qu'il soit point limite de points critiques algébriques pour chaque branche de l'ensemble (E) .

CHAPITRE IX.

Familles et séries de fonctions ayant une infinité de branches.

17. Envisageons une famille (F) de fonctions $u = \varphi(z)$ ayant une infinité de branches, bornées en module dans un domaine D , et déterminées par une équation:

$$g(z, u) = 0, \quad (14)$$

$g(z, u)$ désignant une fonction des deux variables z et u holomorphe dans le domaine D pour z et dans un certain cercle (C) de rayon ρ pour la variable u . D'après notre hypothèse, il existe un nombre positif fixe K tel que, pour toute fonction de la famille et pour tout point z_0 du domaine D , le module des zéros de la fonction $q(u) = g(z_0, u)$ est inférieur à K ; si nous considérons le cercle fixe:

$$|u| < K,$$

ce cercle contient (dans son intérieur) toujours tous les zéros de la fonction $q(u)$. Nous en concluons que, si cette fonction $q(u)$ possède une infinité de zéros, nous aurons l'inégalité:

$$\rho < K, \quad (15)$$

puisque la fonction $q(u)$ n'est pas holomorphe dans le cercle (C'):

$$|u| < K, \quad (16)$$

à l'intérieur duquel elle admet une infinité de zéros.

Si, donc, nous faisons l'hypothèse que chaque fonction $u = f(z)$ de la famille admette une infinité de valeurs pour chaque point z du domaine D , l'inégalité (15) sera satisfaite pour toute fonction de la famille et pour tout point z du domaine D .

D'autre part, si nous posons:

$$g(z, u) = A_0(z) + A_1(z)u + A_2(z)u^2 + \dots + A_n(z)u^n + \dots$$

nous savons que le rayon de convergence de cette série est égal à $\frac{1}{L}$, L désignant la plus grande limite (ou limite supérieure d'indétermination d'après du BOIS-REYMOND) de la suite des nombres:

$$\{|A_1(z)|, |\sqrt{A_2(z)}|, |\sqrt[3]{A_3(z)}|, \dots, |\sqrt[n]{A_n(z)}|, \dots\} \quad (17)$$

Nous avons donc:

$$\frac{1}{L} < K \quad \text{ou bien} \quad L > \frac{1}{K}. \quad (18)$$

Avant d'aller plus loin nous donnerons quelques notions, qui nous sont utiles ici.

Si nous considérons une suite infinie de nombres positifs:

$$\theta_1, \theta_2, \theta_3, \dots, \theta_n, \dots \quad (19)$$

il existe un nombre θ ayant la propriété suivante: Tout nombre positif plus petit que θ est inférieur à θ_n à partir d'une valeur de n et tout nombre plus grand que θ est supérieur à θ pour une infinité de valeurs de n . Ce nombre θ sera

appelé *limite inférieure d'indétermination* et le maximum de la quantité $|\theta_n - \theta|$ sera appelé *écart maximum* de la suite (19).

Il est clair que la limite inférieure d'indétermination de la série :

$$\frac{1}{|A_1(z)|}, \frac{1}{|VA_2(z)|}, \frac{1}{|VA_3(z)|}, \dots, \frac{1}{|VA_n(z)|}, \dots \quad (20)$$

est égale à $\frac{1}{L}$. Supposons que l'écart maximum de cette suite soit *borné* dans le domaine D pour la famille F ; alors, il existera un nombre positif fixe μ tel que l'inégalité :

$$\frac{1}{|VA_n(z)|} - \frac{1}{L} < \mu, \quad (21)$$

soit satisfaite pour tout point z du domaine D pour toute valeur de n et pour toute fonction $u = \varphi(z)$ de la famille donnée F . On aura donc :

$$\frac{1}{|VA_n(z)|} < \frac{1}{L} + \mu < K + \mu \quad \text{ou bien:} \quad |VA_n(z)| > \frac{1}{K + \mu}. \quad (22)$$

On en déduit :

$$|A_n(z)| > \frac{1}{(K + \mu)^n}, \quad (23)$$

pour tout point intérieur au domaine D pour toute valeur de n et pour toute fonction de la famille donnée F .

Si nous désignons par f_n la famille des fonctions holomorphes $A_n(z)$, qui correspond à la famille donnée F , nous voyons que, grâce à cette inégalité (23) et à un théorème déjà mentionné de M. MONTEL, la famille f_n est *normale* pour toute valeur finie de l'indice n : les fonctions de chacune de ces familles sont bornées (dans leur ensemble) en module inférieurement. Nous avons ainsi établi le théorème suivant.

Théorème XIV: *Considérons une famille (F) de fonctions ayant une infinité de valeurs pour chaque point d'un domaine D , déterminées par une équation de la forme :*

$$g(z, u) = A_0(z) + A_1(z)u + A_2(z)u^2 + A_3(z)u^3 + \dots + A_n(z)u^n + \dots = 0,$$

où $g(z, u)$ désigne une fonction holomorphe dans le domaine D du plan z et dans un cercle $|u| < \rho$ du plan u ; supposons en outre que l'écart maximum des séries:

$$\frac{1}{|A_1(z)|}, \frac{1}{|\sqrt{A_2(z)}|}, \frac{1}{|\sqrt[3]{A_3(z)}|}, \dots, \frac{1}{|\sqrt[n]{A_n(z)}|}, \dots,$$

soit borné pour la famille F dans le domaine D et désignons par f_n la famille des fonctions holomorphes $A_n(z)$ correspondante à la famille F .

Si la famille donnée F est composée de fonctions bornées dans leur ensemble dans l'intérieur de D , la famille f_n est normale dans le même domaine D pour toute valeur finie de l'indice n .

CHAPITRE X.

Familles de fonctions algébroides admettant une courbe exceptionnelle.

18. Soit une famille F de fonctions $u = \varphi(z)$ algébroides à ν branches dans un domaine D du plan z et ne prenant, dans ce domaine, aucune des valeurs représentées par les points d'une courbe Γ du plan des u . Nous démontrerons qu'une telle famille est normale dans le domaine D ; pour faire la démonstration, nous distinguons deux cas:

A! cas. Si la courbe Γ est fermée, elle partage le plan u en deux régions \mathcal{A}_1 et \mathcal{A}_2 et, par conséquent, nous pouvons utiliser les raisonnements de M. MONTEL dans son Mémoire [Sur les familles de fonctions analytiques qui admettent . . . Annales de l'École normale, XXIX—Novembre 1912, page 494]; Lorsque z parcourt le domaine connexe D , le point $u = \varphi(z)$ décrit un domaine connexe \mathcal{A} situé tout entier dans \mathcal{A}_1 ou tout entier dans \mathcal{A}_2 ; par conséquent, si nous considérons une suite infinie de fonctions de la famille, on peut en extraire une nouvelle suite (S) de fonctions pour lesquelles le domaine \mathcal{A} est contenu tout entier ou dans \mathcal{A}_1 (pour toutes) ou dans \mathcal{A}_2 (pour toutes); alors pour les fonctions de cette suite (S) l'un des domaines \mathcal{A}_1 et \mathcal{A}_2 sera exceptionnel et, par conséquent, d'après le théorème IX, nous pouvons extraire de la suite S une nouvelle suite S_1 convergeant uniformément vers des fonctions algébroides dans D ou vers l'infini, dont le nombre total de branches est égal à ν .

La famille donnée F est donc normale.

B! cas. Supposons maintenant que la courbe Γ soit ouverte joignant le point a au point b . Je suivrai, dans ce cas aussi la voie indiquée par M.

MONTEL dans son Mémoire ci-dessus cité (pages 495 et 496) et utilisée pour les familles de fonctions holomorphes.

Il est d'abord clair que le domaine \mathcal{A} n'est traversé par la courbe Γ pour aucune des fonctions $u = \varphi(z)$. Posons :

$$\frac{u-a}{u-b} = \omega, \quad w = \sigma(z) = \log \omega, \quad (24)$$

et remarquons que les fonctions ω ne prennent, dans le domaine D , aucune des valeurs représentées par les points d'une courbe (Γ_1) continue joignant l'origine avec l'infini; par conséquent, lorsque le point z parcourt le domaine connexe D , les point ω ne traversent pas cette courbe Γ_1 et, par suite, ne peuvent tourner autour de l'origine.

Pour déterminer complètement la fonction $\sigma(z)$ convenons qu'en un point de départ z_0 du domaine D la partie imaginaire de $\log \omega$ sera comprise entre $-\pi$ et $+\pi$, la limite inférieure exclue. La fonction ω étant algébroïde à ν branches dans le domaine D , soient :

$$\omega_1 = \rho_1 e^{i\theta_1}, \quad \omega_2 = \rho_2 e^{i\theta_2}, \quad \omega_3 = \rho_3 e^{i\theta_3}, \dots, \quad \omega_\nu = \rho_\nu e^{i\theta_\nu},$$

les ν valeurs de ω en $z = z_0$, où les $\rho_1, \rho_2, \rho_3, \dots, \rho_\nu$ désignent leurs modules. Les valeurs de $\sigma(z)$ en z_0 seront :

$$\log \rho_1 + i\theta_1, \quad \log \rho_2 + i\theta_2, \dots, \quad \log \rho_\nu + i\theta_\nu, \quad (25)$$

avec :

$$-\pi < \theta_1 \leq \pi, \quad -\pi < \theta_2 \leq \pi, \dots, \quad -\pi < \theta_\nu \leq \pi.$$

Si maintenant nous passons à un autre point quelconque z_1 du domaine D par les divers chemins qui joignent les points z_0 et z_1 et sont situés dans le domaine D , nous obtiendrons des valeurs de $\sigma(z_1)$, dont les parties imaginaires sont comprises entre -3π et $+3\pi$. D'autre part, si nous désignons par

$$R_1 e^{i\gamma_1}, \quad R_2 e^{i\gamma_2}, \quad R_3 e^{i\gamma_3}, \dots, \quad R_\nu e^{i\gamma_\nu}, \quad (26)$$

les valeurs en $z = z_1$ de la fonction ω , celles de la fonction $\sigma(z)$ au même point z_1 seront de la forme :

$$\log R_1 + i(\gamma_1 + 2K_1\pi), \quad \log R_2 + i(\gamma_2 + 2K_2\pi), \dots, \quad \log R_\nu + i(\gamma_\nu + 2K_\nu\pi), \quad (27)$$

les K_1, K_2, \dots, K_ν étant des entiers positifs ou négatifs. Mais à chacune de ces ν formes ne correspond qu'une seule valeur de $\sigma(z_1)$, parce que chacune des

formes (27) ne contient que des nombrées qui diffèrent d'un multiple de $2\pi i$: pour passer, par exemple, d'une valeur $\log R_1 + i(\gamma_1 + 2K_1\pi)$ à une autre valeur de la forme, il faudrait que, le point z parcourant le domaine connexe D , le point $R_1 e^{i\nu}$ puisse tourner autour de l'origine, ce qui est impossible.

Nous en concluons que les fonctions $w = \sigma(z)$ sont aussi *algébroides à ν branches* dans le domaine D et les points $w = \sigma(z)$ ne sortiront pas d'une bande (B) du plan des w limitées par deux droites parallèles à l'axe des parties réelles menées à la distance 3π de cet axe: en d'autres termes toute la région du plan des w située en dehors de la bande B est exceptionnelle pour les fonctions $w = \sigma(z)$ dans le domaine D et ces fonctions sont aussi finies dans le même domaine, puisque les fonctions $w = \frac{u-a}{u-b}$ n'y prennent ni la valeur *zéro* ni la valeur *infini*. Donc, d'après le théorème IX, les fonctions $w = \sigma(z)$ forment une famille *normale* et, par conséquent, de toute suite infinie de fonctions $\sigma(z)$ nous pouvons extraire une nouvelle suite infinie convergeant uniformément vers des fonctions algébroides finies dans le domaine D ou vers la constante infinie, dont le nombre total de branches est égal à ν .

En disant que le nombre total des fonctions-limites est égal à ν , nous entendons que toutes les fonctions-limites W satisfont à une équation algébrique du degré ν par rapport à W .

Si nous prenons maintenant une suite infinie de fonctions de la famille donnée, les formules (24) lui font correspondre une suite infinie de fonctions $\sigma(z)$, de laquelle nous pouvons, puisqu'elles forment une famille normale, extraire une nouvelle suite:

$$\sigma_1(z), \sigma_2(z), \sigma_3(z), \dots, \sigma_n(z), \dots, \quad (28)$$

convergeant uniformément vers des fonctions-limites algébroides finies dans D ou vers la constante infinie, dont le nombre total de branches est égal à ν .

À cette suite correspond une suite de fonctions:

$$\varphi_1(z), \varphi_2(z), \varphi_3(z), \dots, \varphi_n(z), \dots, \quad (29)$$

de la famille donnée, la correspondance étant déterminée par la relation:

$$\varphi_n(z) = \frac{\alpha - b e^{\sigma_n(z)}}{1 - e^{\sigma_n(z)}}. \quad (30)$$

20. Distinguons ici quatre cas:

α! cas. Supposons qu'aucune des fonctions-limites $\sum_1(z), \sum_2(z), \dots, \sum_q(z)$ de la suite (28) ne soit la constante infinie ou la constante $2K\pi i$, où K désigne un nombre entier ou zéro; alors ces fonctions ne prennent pas à l'intérieur de D , ni la valeur $2K\pi i$ ni la valeur infinie, puisqu'il en est ainsi des fonctions $\sigma_n(z)$; en effet les fonctions $\omega = \frac{u-a}{u-b}$ ne prennent pas la valeur 1. Nous appliquons ici le théorème VI. La suite (29) converge vers les fonctions:

$$\Phi_1(z) = \frac{a-b e^{\Sigma_1(z)}}{1-e^{\Sigma_1(z)}}, \quad \Phi_2(z) = \frac{a-b e^{\Sigma_2(z)}}{1-e^{\Sigma_2(z)}}, \dots, \quad \Phi_q(z) = \frac{a-b e^{\Sigma_q(z)}}{1-e^{\Sigma_q(z)}}, \quad (31)$$

qui sont algébroides et finies dans D et dont le nombre total de branches est égal à ν .

β! cas. Supposons que l'une des fonctions-limites $\sum_1(z), \sum_2(z), \dots, \sum_q(z)$ soit une constante $2K\pi i$: soit:

$$\sum_q(z) = 2K\pi i.$$

Les fonctions $e^{\sigma_n(z)}$ convergent uniformément vers les fonctions $e^{\Sigma_1(z)}, e^{\Sigma_2(z)}, \dots, e^{\Sigma_{q-1}(z)}$ et la constante 1 et la suite (29) converge uniformément vers les fonctions $\Phi_1(z), \Phi_2(z), \dots, \Phi_{q-1}(z)$ et la constante infinie: Nous entendons par là que, étant donné un nombre ε arbitrairement petit, les inégalités:

$$|\Phi_1(z) - \varphi_n(z)| < \varepsilon, \quad |\Phi_2(z) - \varphi_n(z)| < \varepsilon, \dots, \quad |\Phi_{q-1}(z) - \varphi_n(z)| < \varepsilon, \quad |\varphi_n(z)| > \frac{1}{\varepsilon},$$

sont satisfaites pour une branche au moins de $\varphi_n(z)$, à partir d'une valeur de n , et pour tous les points z intérieurs au domaine D .

γ! cas. Supposons enfin que l'une des fonctions-limites $\sum_1(z), \sum_2(z), \dots, \sum_q(z)$ soit la constante infinie; soit, par exemple: $\sum_q(z) = \infty$; alors, à chaque nombre positif ε arbitrairement petit on peut faire correspondre un entier μ tel que pour $n > \mu$ et pour tous les points intérieurs au domaine D l'on ait les inégalités:

$$\left| \sum_1(z) - \sigma_n(z) \right| < \varepsilon, \quad \left| \sum_2(z) - \sigma_n(z) \right| < \varepsilon, \dots, \quad \left| \sum_{q-1}(z) - \sigma_n(z) \right| < \varepsilon, \quad \left| \sigma_n(z) \right| > \frac{1}{\varepsilon},$$

chacune de ces inégalités étant satisfaite pour une au moins branche de toutes les fonctions $\sigma_n(z)$. Puisque la partie imaginaire des $\sigma_n(z)$ est comprise entre -3π et $+3\pi$, nous aurons les inégalités:

$$|\sum_1(z) - \sigma_n(z)| < \varepsilon, \quad |\sum_2(z) - \sigma_n(z)| < \varepsilon, \dots, \quad |\sum_{q-1}(z) - \sigma_n(z)| < \varepsilon, \quad |R_n(z)| > \frac{1}{\varepsilon}, \quad (32)$$

satisfaites à partir d'une valeur μ_1 de n pour tous les points intérieurs à D et chacune pour une branche au moins de $\sigma_n(z)$, en désignant par $R_n(z)$ la partie réelle des fonctions $\sigma_n(z)$. La dernière des inégalités (32) peut être remplacée par l'une des inégalités:

$$|e^{\sigma_n(z)}| < e^{-\frac{1}{\varepsilon}} \quad \text{ou} \quad |e^{-\sigma_n(z)}| < e^{-\frac{1}{\varepsilon}},$$

satisfaite pour une au moins des branches.

Nous pouvons, donc, faire correspondre au nombre positif ε un entier \bar{n} tel que pour $n > \bar{n}$, pour tous les points intérieurs au domaine D et pour toutes fonctions $e^{\sigma_n(z)}$ l'on ait les inégalités:

$$|e^{\sum_1(z)} - e^{\sigma_n(z)}| < \varepsilon, \quad |e^{\sum_2(z)} - e^{\sigma_n(z)}| < \varepsilon, \dots, \quad |e^{\sum_{q-1}(z)} - e^{\sigma_n(z)}| < \varepsilon, \quad (33)$$

et l'une des inégalités:

$$|e^{\sigma_n(z)}| < \varepsilon, \quad |e^{-\sigma_n(z)}| < \varepsilon, \quad (34)$$

chacune des (33) étant satisfaite pour une au moins des branches des $\sigma_n(z)$ et l'une des inégalités (34) pour une branche au moins des $\sigma_n(z)$ de façon que chaque branche des $\sigma_n(z)$ satisfasse à l'une des inégalités (33) et (34).

Les inégalités (33) nous donnent:

$$|e^{\sigma_n(z)}| < \varepsilon + e^{\sum_1(z)}, \quad |e^{\sigma_n(z)}| < \varepsilon + e^{\sum_2(z)}, \dots, \quad |e^{\sigma_n(z)}| < \varepsilon + e^{\sum_{q-1}(z)}.$$

D'autre par, nous avons:

$$e^{\sigma_n(z)} = \frac{\varphi_n(z) - a}{\varphi_n(z) - b}.$$

Nous obtenons donc la conclusion que, étant donné un nombre positif ε arbitrairement petit, on peut lui faire correspondre un entier \bar{n} tel que pour $n > \bar{n}$ et pour tous les points du domaine D chaque branche de toute fonction $\varphi_n(z)$ de la série (29) satisfait à l'une au moins des inégalités suivantes:

$$|\mathcal{O}_1(z) - \varphi_n(z)| < \varepsilon, \quad |\mathcal{O}_2(z) - \varphi_n(z)| < \varepsilon, \dots, \quad |\mathcal{O}_{q-1}(z) - \varphi_n(z)| < \varepsilon, \quad (35)$$

$$\left| \frac{\varphi_n(z) - a}{\varphi_n(z) - b} \right| < \varepsilon, \quad \left| \frac{\varphi_n(z) - b}{\varphi_n(z) - a} \right| < \varepsilon. \quad (36)$$

Les fonctions $\Phi_1(z), \Phi_2(z), \dots, \Phi_{q-1}(z)$ étant finies dans le domaine D et le nombre ε arbitrairement petit, il en résulte que le module des fonctions $\varphi_n(z)$ est borné. En effet, il existe un nombre M assez grand pour être supérieur au module de tous les $\Phi_1(z), \Phi_2(z), \dots, \Phi_{q-1}(z)$ et de tous les $\varphi_n(z)$ correspondant à $n > \bar{n}$; il existe aussi un nombre fixe m plus grand que le module des $\varphi_1(z), \varphi_2(z), \dots, \varphi_{\bar{n}}(z)$.

Donc, les fonctions $\varphi_n(z)$ de la suite (29) forment une famille normale et, par conséquent, nous pouvons extraire de la suite (29) une nouvelle suite:

$$\varphi_{c_1}(z), \varphi_{c_2}(z), \dots, \varphi_{c_n}(z), \dots, \quad (37)$$

convergeant uniformément vers des fonctions-limites algébroides et finies dans le domaine D , dont le nombre total de branches est égal à ν . Les branches de $\varphi_{c_n}(z)$ qui ne satisfont à aucune des inégalités (35) convergent ou vers la constante a ou vers la constante b et vers toutes les deux, tandis que les branches qui satisfont aux inégalités (35) convergent vers les fonctions $\Phi_1(z), \Phi_2(z), \dots, \Phi_{q-1}(z)$.

δ/ cas. Supposons que l'une des fonctions-limites $\sum_1(z), \sum_2(z), \dots, \sum_q(z)$ soit la constante infinie et d'autres soient égales à des constantes de la forme $2K\pi i$, où K désigne un nombre entier positif ou négatif. Ce cas se ramène immédiatement aux deux cas précédents et, en faisant les mêmes raisonnements, nous obtenons une suite de fonctions de la famille donnée, extraite de la suite donnée, et convergeant vers des fonctions-limites, dont l'une est la constante infinie, une au moins des autres est égale à la constante a ou b et toutes les autres sont algébroides et finies dans le domaine D ; le nombre total des branches des fonctions-limites est égal à ν . Mais il est nécessaire de remarquer qu'une constante finie ou infinie, considérée comme fonction-limite, peut être *multiple* ou à *plusieurs branches*, la multiplicité étant telle que le nombre total des branches soit égal à ν . Par exemple, la constante a sera une fonction-limite multiple d'ordre (de multiplicité) égal à P de la série (37), lorsque cette constante est la limite de convergence de P branches des fonctions $\varphi_{c_n}(z)$. On s'en rend bien compte par les considérations développées dans le N° 14 sur la convergence des séries composées.

Nous voyons que, dans tous les cas, de toute suite de fonctions de la famille donnée nous pouvons extraire une nouvelle suite convergeant uniformément vers des fonctions algébroides et finies dans le domaine D ou vers la constante infinie, dont le nombre total des branches est égal à ν . Nous obtenons, donc, le théorème suivant:

Théorème XV. *Soit une famille (F) de fonctions $u = \varphi(z)$ algébroides à ν branches finies dans un domaine D. Si les fonctions de cette famille ne prennent, dans ce domaine, aucune des valeurs représentées par les points d'une courbe Γ du plan u (cette courbe est, alors, exceptionnelle pour l'ensemble des fonctions de la famille dans le domaine D), la famille est normale dans le domaine D; c'est-à-dire: de toute suite infinie de fonctions de la famille nous pouvons extraire une nouvelle suite infinie convergant uniformément vers des fonctions-limites algébroides et finies dans D ou la constante infinie, dont le nombre total de branches est égal à ν .*

20. Revenons aux considérations des deux numéros précédents et rappelons-nous que les fonctions $w = \sigma(z)$ sont algébroides et finies dans le domaine D et satisfont, par conséquent, à une équation de la forme:

$$W^\nu + B_1(z) W^{\nu-1} + B_2(z) W^{\nu-2} + \dots + B_{\nu-1}(z) W + B_\nu(z) = 0, \quad (38)$$

où les $B_1(z), B_2(z), \dots, B_\nu(z)$ désignent des fonctions holomorphes dans le domaine D.

Les branches W_K se lient avec les branches u_K des fonctions $u = \varphi(z)$ par la relation:

$$W_K = \log \frac{u_K - a}{u_K - b}. \quad (39)$$

Comme on a les égalités:

$$\begin{aligned} -B_1(z) &= W_1 + W_2 + \dots + W_\nu, \quad B_2(z) = \sum W_1 W_2, \dots, \quad (-1)^\nu B_\nu(z) = \\ &= W_1 W_2 W_3 \dots W_\nu, \end{aligned}$$

les nombres $B_1(0), B_2(0), \dots, B_\nu(0), B'_1(0), B'_2(0), \dots, B'_\nu(0)$ ne dépendent que des valeurs en $z = 0$ de la fonction $u = \varphi(z)$ et de sa dérivée $u' = \varphi'(z)$.

Soit, donc:

$$u^\nu + A_1(z) u^{\nu-1} + A_2(z) u^{\nu-2} + \dots + A_{\nu-1}(z) u + A_\nu(z) = f(z, u) = 0, \quad (40)$$

l'équation qui détermine la fonction $u = \varphi(z)$, et posons:

$$\begin{aligned} A_1(z) &= a_1 + b_1 z + \dots, \quad A_2(z) = a_2 + b_2 z + \dots, \quad A_{\nu-1}(z) = a_{\nu-1} + b_{\nu-1} z + \dots, \\ A_\nu(z) &= a_\nu + b_\nu z + \dots. \end{aligned} \quad (41)$$

Les valeurs de $\varphi(0)$ sont les racines de l'équation algébrique:

$$u^\nu + a_1 u^{\nu-1} + a_2 u^{\nu-2} + \dots + a_{\nu-1} u + a_\nu = 0, \quad (42)$$

et les valeurs de $\varphi'(0)$ sont égales à :

$$-\frac{f'_s(0, r_1)}{f'_u(0, r_1)}, -\frac{f'_s(0, r_2)}{f'_u(0, r_2)}, \dots, -\frac{f'_s(0, r_{v-1})}{f'_u(0, r_{v-1})}, -\frac{f'_s(0, r_v)}{f'_u(0, r_v)}, \quad (43)$$

où $r_1, r_2, \dots, r_{v-1}, r_v$ désignent les racines de l'équation (42).

Si le point $z=0$ n'est pas un point de rencontre de branches de la fonction $u = \varphi(z)$ les valeurs (43) ne dépendent que des coefficients $a_1, a_2, \dots, a_{v-1}, a_v, b_1, b_2, \dots, b_{v-1}, b_v$ des séries (41) et nullement des autres coefficients et il en sera, par conséquent, de même des nombres :

$$B_1(0), B_2(0), \dots, B_v(0), B'_1(0), B'_2(0), \dots, B'_v(0).$$

Nous savons que tous les points qui n'appartiennent pas à la bande B sont exceptionnels pour les fonctions $w = \sigma(z)$. Si, donc, nous prenons un point γ extérieur à la bande B et si nous désignons par δ sa plus petite distance des droites parallèles qui limitent la bande, l'intérieur du cercle

$$|w - \gamma| < \delta, \quad (44)$$

est exceptionnel pour les fonctions $w = \sigma(z)$.

On a :

$$\begin{aligned} -B_1(z) &= \log \frac{a-u_1}{b-u_1} + \log \frac{a-u_2}{b-u_2} + \dots + \log \frac{a-u_v}{b-u_v} = \\ &= \log \frac{(a-u_1)(a-u_2)\dots(a-u_v)}{(b-u_1)(b-u_2)\dots(b-u_v)}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (a-u_1)(a-u_2)\dots(a-u_v) &= f(a, z) = a^v + A_1(z)a^{v-1} + \\ &+ A_2(z)a^{v-2} + \dots + A_{v-1}(z)a + A_v(z), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (b-u_1)(b-u_2)\dots(b-u_v) &= f(b, z) = b^v + A_1(z)b^{v-1} + \\ &+ A_2(z)b^{v-2} + \dots + A_{v-1}(z)b + A_v(z), \end{aligned}$$

et

$$-B_1(z) = \log \frac{f(a, z)}{f(b, z)} = \log \frac{P(z)}{Q(z)},$$

en posant :

$$f(a, z) = P(z), \quad f(b, z) = Q(z).$$

On en déduit :

$$-B'_1(z) = \frac{Q(z)P'(z) - P(z)Q'(z)}{P(z)Q(z)},$$

d'où :

$$-B'_1(0) = \frac{(b^\nu + a_1 b^{\nu-1} + a_2 b^{\nu-2} + \dots + a_\nu)(b_1 a^{\nu-1} + b_2 a^{\nu-2} + \dots + b_\nu) - (a^\nu + a_1 a^{\nu-1} + a_2 a^{\nu-2} + \dots + a_\nu)(b_1 b^{\nu-1} + b_2 b^{\nu-2} + \dots + b_\nu)}{[P(z)]_{z=0}}.$$

Si, donc, les nombres a et b ne satisfont pas à la relation :

$$\frac{a^\nu + a_1 a^{\nu-1} + a_2 a^{\nu-2} + \dots + a_\nu}{b^\nu + a_1 b^{\nu-1} + a_2 b^{\nu-2} + \dots + a_\nu} = \frac{b_1 a^{\nu-1} + b_2 a^{\nu-2} + \dots + b_\nu}{b_1 b^{\nu-1} + b_2 b^{\nu-2} + \dots + b_\nu}, \quad (45)$$

le nombre $B'_1(0)$ est différent de zéro et, par conséquent, l'équation :

$$B'_1(0) x^{\nu-1} + B'_2(0) x^{\nu-2} + \dots + B'_{\nu-1}(0) x + B'_\nu(0) = 0, \quad (46)$$

ne sera pas une identité. En choisissant alors le nombre γ de façon qu'il ne soit pas une racine de cette équation algébrique, nous pouvons appliquer le théorème X à la famille des fonctions $w = \sigma(z)$ qui admettent le cercle exceptionnel (44). Si, donc, le domaine D est un cercle de centre l'origine et de rayon R , ce rayon satisfera à l'inégalité :

$$R < \frac{2}{\delta^\nu} \frac{|\gamma^\nu + \gamma^{\nu-1} B_1(0) + \gamma^{\nu-2} B_2(0) + \dots + \gamma B_{\nu-1}(0) + B_\nu(0)|^2}{|\gamma^{\nu-1} B'_1(0) + \gamma^{\nu-2} B'_2(0) + \dots + \gamma B'_{\nu-1}(0) + B'_\nu(0)|}, \quad (47)$$

dont le second membre ne dépend que des nombres $\nu, a_1, a_2, a_3, \dots, a_\nu, b_1, b_2, b_3, \dots, b_\nu$ et nullement des autres coefficients des séries (41); en effet, le nombre γ est arbitraire étant seulement soumis à des inégalités qui ne dépendent que des nombres ci-dessus indiqués, et le nombre δ dépend seulement de γ .

Il en résulte que, dans un cercle de centre l'origine et de rayon supérieur au second membre de l'inégalité (47), toute fonction $u = \varphi(z)$ de la famille donnée prend au moins une fois l'une au moins des valeurs représentées par les points de toute ligne du plan u joignant les points a et b . Nous avons ainsi établi le théorème suivant :

Théorème XVI. Soit (F) la famille composée de toutes les fonctions $u = \varphi(z)$ définies par l'équation :

$$f(z, u) = u^\nu + A_1(z) u^{\nu-1} + A_2(z) u^{\nu-2} + \dots + A_{\nu-1}(z) u + A_\nu(z) = 0, \quad (48)$$

où les $A_1(z), A_2(z), \dots, A_\nu(z)$ désignent des fonctions holomorphes dans le voisinage de $z = 0$:

$$\begin{aligned}
 A_1(z) &= a_1 + b_1 z + \dots \\
 A_2(z) &= a_2 + b_2 z + \dots \\
 &\dots \dots \dots \dots \dots \dots \\
 A_\nu(z) &= a_\nu + b_\nu z + \dots
 \end{aligned}
 \tag{49}$$

les coefficients $a_1, b_1, a_2, b_2, \dots, a_\nu, b_\nu$ et le degré ν étant fixes, tandis que les coefficients non écrits sont des paramètres variables; soient aussi deux nombres quelconques a et b assujettis seulement à la condition:

$$\frac{a^\nu + a_1 a^{\nu-1} + a_2 a^{\nu-2} + \dots + a_{\nu-1} a + a_\nu}{b^\nu + a_1 b^{\nu-1} + a_2 b^{\nu-2} + \dots + a_{\nu-1} b + a_\nu} \neq \frac{b_1 a^{\nu-1} + b_2 a^{\nu-2} + \dots + b_\nu}{b_1 b^{\nu-1} + b_2 b^{\nu-2} + \dots + b_\nu}$$

Si le point $z = 0$ n'est pas un point d'intersection des branches¹, il existe un cercle:

$$|z| < R = R(\nu, a, b, a_1, b_1, a_2, b_2, \dots, a_\nu, b_\nu),$$

dont le rayon est fixe, ne dépendant que des nombres $\nu, a_1, b_1, a_2, b_2, \dots, a_\nu, b_\nu, a$ et b [et nullement des paramètres variables des séries (49)], à l'intérieur duquel toute fonction finie de la famille (F) ou bien admet un point singulier transcendant ou bien prend au moins une fois l'une au moins des valeurs représentées par les points de toute courbe (ligne) joignant le point a au point b .

Le second membre de l'inégalité (47) est une quantité variable avec le nombre arbitraire γ et le rayon du cercle du théorème ci-dessus énoncé peut-être pris plus grand que toute valeur de l'expression (47), mais il est, bien entendu, avantageux d'employer sa valeur minimum qui sera nécessairement différente de zéro.

21. Le théorème XVI est visiblement la plus précise des extensions aux fonctions multiformes dans un domaine du théorème de M. LANDAU, que nous avons établies dans ce travail: ces extensions remplacent le cercle d'holomorphic de M. LANDAU par un cercle pouvant contenir des points critiques algébriques quelconques de la fonction, mais elles ne conservent pas, au point de vue des

¹ Cette condition ne concerne aussi que les nombres fixes $a_1, a_2, a_3, \dots, a_\nu$, puisqu'elle se ramène à supposer que l'équation algébrique:

$$x^\nu + a_1 x^{\nu-1} + a_2 x^{\nu-2} + \dots + a_{\nu-1} x + a_\nu = 0,$$

n'ait pas des racines multiples.

valeurs exceptionnelles, la précision du théorème de M. LANDAU, parce que ou bien l'ensemble des valeurs exceptionnelles est continu ou bien la considération de deux valeurs exceptionnelles est accompagnée de quelques restrictions. Dans deux Notes publiées récemment dans le Bulletin de la Société mathématique de France nous avons donné une autre extension qui conserve toute la précision au point de vue des valeurs exceptionnelles et qui est applicable dans un cercle, dont le centre est un point critique algébrique de la fonction.

J'espère de pouvoir établir prochainement l'extension la plus parfaite aux fonctions algébroides à ν branches dans un cercle par la considération de 2ν valeurs exceptionnelles (l'infini non compris).

CHAPITRE XI.

Fonctions-limites d'une suite convergeant uniformément.

22. Soit:

$$f_1(z), f_2(z), \dots, f_n(z), \dots \quad (50)$$

une suite de fonctions algébroides à ν branches finies dans un domaine D convergeant uniformément et soit:

$$F_n(z, u) = u^\nu + A_{n1}(z)u^{\nu-1} + A_{n2}(z)u^{\nu-2} + \dots + A_{n\nu}(z) = 0,$$

l'équation qui détermine la fonction $u = f_n(z)$, où les $A_{n1}(z), A_{n2}(z), \dots, A_{n\nu}(z)$ sont des fonctions holomorphes dans le domaine D .

Si nous désignons par $\lambda_1(z), \lambda_2(z), \dots, \lambda_\nu(z)$ les limites de convergence de la série (50), les fonctions $A_{n1}(z)$ convergent uniformément vers la fonction-limite:

$$-[\lambda_1(z) + \lambda_2(z) + \dots + \lambda_\nu(z)] = \mathcal{A}_1(z),$$

qui est aussi holomorphe dans le domaine D , d'après un théorème classique de WEIERSTRASS publié en 1880. De même, les fonctions $A_{n2}(z)$ convergent uniformément vers la fonction holomorphe:

$$\mathcal{A}_2(z) = \sum \lambda_1(z) \lambda_2(z), \quad [\text{somme des combinaisons deux-à-deux}]$$

et ainsi de suite... les fonctions $A_{n\nu}(z)$ convergent uniformément vers la fonction holomorphe dans D :

$$\mathcal{A}_\nu(z) = (-1)^\nu \lambda_1(z) \lambda_2(z) \dots \lambda_\nu(z),$$

et, par conséquent, les fonctions-limites de la suite (50) satisfont à l'équation :

$$F(z, w) = w^\nu + \mathcal{A}_1(z) w^{\nu-1} + \mathcal{A}_2(z) w^{\nu-2} + \dots + \mathcal{A}_\nu(z) = 0. \quad (51)$$

Nous avons, donc, établi le théorème suivant :

Théorème XVII. *Si une suite infinie de fonctions algébroides à ν branches finies dans un domaine D converge uniformément, les fonctions-limites sont aussi algébroides et finies dans le domaine D et leur nombre total de branches est égal à ν .*

C'est une extension aux fonctions algébroides dans un domaine D du théorème classique de WEIERSTRASS ci-dessus utilisé.

Nous pouvons aussi dire que ce théorème est une conséquence immédiate du théorème VIII, parce que les fonctions de la suite considérée forment une famille normale: cela résulte d'un raisonnement facile indiqué par M. MONTEL dans son Mémoire: *Sur les suites infinies de fonctions* (thèse de doctorat, 1907, p. 74) et utilisé déjà par nous dans le N° 20 de ce travail.

Si dans l'expression :

$$\frac{\partial F_n(z, u)}{\partial u} = \nu u^{\nu-1} + (\nu - 1) A_{n1}(z) u^{\nu-2} + \dots + A_{n, \nu-1}(z),$$

nous remplaçons u par $f_n(z)$ nous obtenons une fonction $\sigma_n(z)$ algébroïde à ν branches finies dans D telle que la série :

$$\sigma_1(z), \sigma_2(z), \dots, \sigma_n(z), \dots$$

converge uniformément vers les fonctions $\frac{\partial F(z, w)}{\partial w}$, où w désigne les fonctions-limites de la suite (50) qui satisfont à l'équation (51).

Si les fonctions $f_n(z)$ sont, à partir d'une valeur de n , multiformes dans le domaine D , les fonctions $\sigma_n(z)$ admettent des zéros à partir d'une valeur de n et il en est de même d'une au moins des fonctions-limites: $\frac{\partial F(z, w)}{\partial w} = \sigma(z)$ dans le cas où aucune de ces fonctions n'est la constante zéro [d'après le théorème VI]. Nous en concluons que l'une au moins des fonctions-limites $w = f(z)$ de la suite (50) admet des *points doubles*, c'est-à-dire il y a des points de rencontre de branches d'une au moins des fonctions-limites de la suite (50).

Nous pouvons, donc, compléter le théorème XVII de la façon suivante:

Si les fonctions algébroides de la suite sont multiformes à partir d'une valeur de n et si aucune des fonctions-limites ne satisfait aussi à l'équation $F_w(z, w) = 0$, il y a toujours dans le domaine D des points d'intersection de branches des fonctions-limites $w = f(z)$.

Athènes, le 11 septembre 1913.

TABLE DES MATIÈRES.

Introduction.

Chapitre I.

Un théorème sur les valeurs exceptionnelles de quelques familles de fonctions algébroides.

Chapitre II.

Le module des algébroides admettant des valeurs exceptionnelles dans un cercle.

Chapitre III.

Généralisations du théorème II.

Chapitre IV.

Les familles bornées en module.

Chapitre V.

La convergence des séries de fonctions algébroides.

Chapitre VI.

Les familles de fonctions algébroides qui admettent dans un domaine un cercle exceptionnel fixe.

Chapitre VII.

Remarques sur les séries composées.

Chapitre VIII.

Applications aux fonctions ayant un nombre infini de branches dans un domaine.

Chapitre IX.

Familles et séries de fonctions ayant une infinité de branches.

Chapitre X.

Familles de fonctions algébroides admettant une courbe exceptionnelle.

Chapitre XI.

Fonctions-limites d'une suite convergeant uniformément.
