SUR QUELQUES FONCTIONS ARITHMÉTIQUES.

PAR

S. WIGERT

à Stockholm.

Introduction.

Le présent travail contient les résultats d'une étude sur certaines fonctions ayant un rapport intime avec la *somme des diviseurs d'un entier*. Je commence par établir pour cette fonction arithmétique un théorème sur le vrai ordre de grandeur de ses valeurs maximales, théorème analogue à celui que j'ai démontré autrefois sur le *nombre* des diviseurs.[1] Dans la seconde partie je m'occupe de la fonction sommatoire $f(x) = \sum_{n \leq x} \sigma(n)$, en désignant par $n\sigma(n)$ la somme des diviseurs de n. Dans les deux paragraphes suivants j'ai examiné les fonctions

$$\sum_{n \leq x} \sigma(n) \log \frac{x}{n} = \int_1^x \frac{f(x)\,dx}{x} \quad \text{et} \quad \frac{1}{\underline{|k}} \sum_{n \leq x} \sigma(n)\,(x-n)^k$$

dont la seconde s'obtient de $f(x)$ par intégration itérée entre les limites 1 et x. J'ai trouvé pour la dernière fonction une représentation analytique assez remarquable, dont l'exposé sera fait dans le quatrième paragraphe. Enfin l'étude de certaines séries figurant dans la dite formule de représentation m'ont conduit à une généralisation du théorème de Stieltjes sur la *multiplication Dirichletienne* de deux séries infinies.[2] La cinquième et dernière partie de ce mémoire est consacrée à la démonstration de ce théorème généralisé et à ses applications aux recherches précédentes.

---

[1] Arkiv för matematik, astronomi och fysik, Tome 3. Voir aussi le grand traité de M. E. Landau: Handbuch der Lehre von der Verteilung der Primzahlen, I § 60, où l'on retrouve cette démonstration un peu simplifiée.

[2] Landau: Handbuch, II §§ 184, 185.

§ I. La fonction $\sigma(n)$ et ses valeurs maximales.

Soit n un entier positif et désignons par $\sigma(n)$ la somme de ses diviseurs, divisée par le nombre n lui-même. D'après ce que nous allons montrer dans le second paragraphe, la valeur moyenne de $\sigma(n)$ est égale à $\frac{\pi^2}{6}$. Cependant les valeurs maximales de la fonction $\sigma(n)$ sont d'un ordre de grandeur plus élevé, et je commencerai par démontrer le théorème suivant:

En désignant par γ la constante d'EULER (*ou de* MASCHERONI) *on a:*

$$\overline{\lim_{n=\infty}} \frac{\sigma(n)}{\log\log n} = e^{\gamma}. \tag{1}$$

Écrivons en effet

$$n = p_{a_1}^{\lambda_1} \cdots p_{a_r}^{\lambda_r}$$

d'où il suit

$$\sigma(n) = \frac{1}{n} \prod_{\nu=1}^{r} \frac{p_{a_\nu}^{\lambda_\nu+1} - 1}{p_{a_\nu} - 1} = \prod_{\nu=1}^{r} \frac{1 - \frac{1}{p_{a_\nu}^{\lambda_\nu+1}}}{1 - \frac{1}{p_{a_\nu}}}$$

et par conséquent

$$\frac{1}{\sigma(n)} > \prod_{\nu=1}^{r} \left(1 - \frac{1}{p_{a_\nu}}\right).$$

Or, après avoir fixé un nombre $\varepsilon' > 0$ arbitrairement petit, on peut trouver un n' tel que

$$\prod_{\nu=1}^{r} \left(1 - \frac{1}{p_{a_\nu}}\right) > (1 - \varepsilon') \frac{e^{-\gamma}}{\log\log n}$$

pour tout $n > n'$.[1] Ayant choisi un $\varepsilon > 0$ tel petit que ce soit, il suffit donc de faire $\varepsilon' < \frac{\varepsilon}{1 + \varepsilon}$, et nous aurons pour toutes les valeurs de $n > n'$

$$\sigma(n) < (1 + \varepsilon) e^{\gamma} \log\log n.$$

---

[1] Cf. LANDAU: Handbuch, I § 59.

Maintenant il faut montrer aussi que l'inégalité

$$\sigma(n) > (1-\varepsilon)\, e^{\gamma} \log\log n$$

a lieu pour certaines valeurs de n au delà de toute limite finie. Soit donc x un nombre positif quelconque, k un entier positif, et posons

$$n = \prod_{p \leqq x} p^k$$

où l'indice p doit parcourir tous les nombres premiers $\leqq x$.

Nous avons ainsi

$$\frac{1}{k} \log n = \sum_{p \leqq x} \log p$$

et, comme il est bien connu

$$\lim_{x=\infty} \frac{1}{x} \sum_{p \leqq x} \log p = 1$$

de sorte que nous aurons certainement pour x assez grand

$$\frac{x}{2} < \frac{1}{k} \log n < 2x$$

ou bien

$$\log x + \log \frac{k}{2} < \log\log n < \log x + \log 2k.$$

Or, on a ici

$$\sigma(n) = \prod_{p \leqq x} \frac{1 - \frac{1}{p^{k+1}}}{1 - \frac{1}{p}}$$

et de plus[1]

$$\begin{cases} \lim\limits_{x=\infty} \log x \,.\, \prod\limits_{p \leqq x} \left(1 - \frac{1}{p}\right) = e^{-\gamma} \\ \lim\limits_{x=\infty} \prod\limits_{p \leqq x} \left(1 - \frac{1}{p^{k+1}}\right) = \frac{1}{\zeta(k+1)}. \end{cases}$$

[1] LANDAU: Handbuch, I, § 36.

En partant d'un $\varepsilon > 0$ arbitrairement petit, on choisit d'abord $\varepsilon' < \varepsilon$, d'où $\frac{1-\varepsilon'}{1-\varepsilon} > 1$, puis on prendra k assez grand pour que: $1 < \zeta(k+1) < \frac{1-\varepsilon'}{1-\varepsilon}$, et par suite: $1 - \frac{1-\varepsilon}{1-\varepsilon'}\zeta(k+1) > 0$. Ayant fixé le nombre k de cette manière, on peut ensuite faire x tellement grand que

$$\left\{\begin{aligned} &\frac{1}{2} < \frac{1}{x}\sum_{p\leq x}\log p < 2; \quad \frac{1}{\log x}\prod_{p\leq x}\frac{1}{1-\frac{1}{p}} > \left(1-\frac{\varepsilon'}{2}\right)e^{\gamma} \\ &\frac{\log 2k}{\log\log n} < \frac{\log 2k}{\log x + \log\frac{k}{2}} < 1 - \frac{1-\varepsilon}{1-\varepsilon'}\zeta(k+1); \quad \prod_{p\leq x}\left(1-\frac{1}{p^{k+1}}\right) > \left(1-\frac{\varepsilon'}{2}\right)\frac{1}{\zeta(k+1)}. \end{aligned}\right.$$

Il en résulte

$$\sigma(n) > \left(1-\frac{\varepsilon'}{2}\right)^2 \frac{e^{\gamma}}{\zeta(k+1)}\log x > (1-\varepsilon')\frac{e^{\gamma}}{\zeta(k+1)}(\log\log n - \log 2k)$$

et enfin

$$\sigma(n) > (1-\varepsilon)e^{\gamma}\log\log n.$$

C. q. f. d.

§ 2. Sur la fonction sommatoire $\sum_{n\leq x}\sigma(n)$.

En partant de l'égalité connue

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sigma(n)}{n^s} = \zeta(s)\zeta(s+1) = \sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m^s}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{s+1}}$$

valable pour $R(s) > 1$, on arrivera de la manière suivante à une nouvelle expression pour la fonction $\sum_{n\leq x}\sigma(n)$. Dans chaque membre de l'équation on ne retient que les termes où l'exposant s appartient à un nombre $\leq x$. Pour une valeur arbitraire de s on aura ainsi une équation identique entre deux séries finies où l'on peut faire $s = 0$. On en tirera

$$\sum_{n\leq x}\sigma(n) = \sum_{n\leq x}\frac{1}{n}\left[\frac{x}{n}\right] = \sum_{n\leq x}\frac{1}{n}\left\{\frac{x}{n} - \varrho\left(\frac{x}{n}\right)\right\}$$

en désignant par $[x]$ le plus grand entier contenu dans x et par $\varrho(x)$ la différence $x-[x]$. Puisque $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}$, il s'ensuit

$$\sum_{n\leq x}\sigma(n)=\frac{\pi^2}{6}x-x\sum_{n>x}\frac{1}{n^2}-\sum_{n\leq x}\frac{1}{n}\varrho\left(\frac{x}{n}\right)$$

et, en mettant

$$\sum_{n\leq x}\sigma(n)=\frac{\pi^2}{6}x-\psi(x) \tag{2}$$

nous aurons

$$\psi(x)=x\sum_{n>x}\frac{1}{n^2}+\sum_{n\leq x}\frac{1}{n}\varrho\left(\frac{x}{n}\right) \tag{3}$$

fonction qui sera positive pour toutes les valeurs de x. Cherchons-en une première approximation. A cet effet nous allons rappeler quelques relations connues, valables pour $x\geqq 1$, à savoir

$$\left\{\begin{aligned}
&\frac{1}{x+1}\leqq\frac{1}{[x]+1}=\int_{[x]+1}^{\infty}\frac{dt}{t^2}<\sum_{n>x}\frac{1}{n^2}<\int_{[x]}^{\infty}\frac{dt}{t^2}=\frac{1}{[x]}<\frac{1}{x-1}\\
&0\leqq\varrho\left(\frac{x}{n}\right)\leqq 1-\frac{1}{n}\\
&\sum_{n\leq x}\frac{1}{n}<\log[x]+\gamma+\frac{1}{2[x]}<\log x+\gamma+\frac{1}{2(x-1)}-\frac{\varrho(x)}{x}\leqq\log x+\gamma+\frac{1}{2(x-1)}.
\end{aligned}\right.$$

Il en résulte

$$\frac{x}{x+1}<\psi(x)<\log x+1+\gamma-\frac{\pi^2}{6}+\frac{5}{2(x-1)}=\log x-0{,}00677+\frac{5}{2(x-1)}. \tag{4}$$

Par ces inégalités, valables pour $x\geqq 1$, nous ne savons pourtant pas encore si la fonction $\psi(x)$ atteint réellement des valeurs d'ordre $\log x$.

Pour arriver à des formules plus précises nous allons nous servir de l'identité suivante[1]

[1] Cf. GRAM: Undersøgelser angaaende mængden av primtal under en given grænse. Kjøbenhavn 1884. Pag. 217. La dite identité n'y est démontrée que pour les valeurs entières de x, mais elle subsiste généralement. On a en effet: $\left[\frac{x}{n}\right]=\left[\frac{[x]}{n}\right]$ et aussi: $0\leqq[x]-[\sqrt{x}]^2\leqq 2[\sqrt{x}]$, d'où l'on tire: $[\sqrt{x}]=[\sqrt{[x]}]$.

$$\left\{\begin{aligned}&\sum_{n\leq x} f(n)\left[\frac{x}{n}\right]=\sum_{n\leq\sqrt{x}} f(n)\left[\frac{x}{n}\right]+\sum_{n\leq\sqrt{x}} F\left(\frac{x}{n}\right)-[\sqrt{x}]\,F(\sqrt{x})\\ &\qquad F(x)=\sum_{n\leq x} f(n).\end{aligned}\right.\tag{5}$$

En prenant $f(n)=\frac{1}{n}$ nous pourrons écrire avec la notation commode de M. Landau,[1]

$$F(x)=\log x+\gamma+O\left(\frac{1}{x}\right)$$

et l'équation (5) prendra la forme

$$\sum_{n\leq x}\frac{1}{n}\left[\frac{x}{n}\right]=\sum_{n\leq\sqrt{x}}\frac{1}{n}\left[\frac{x}{n}\right]+\sum_{n\leq\sqrt{x}}\left\{\log\frac{x}{n}+\gamma+O\left(\frac{n}{x}\right)\right\}-[\sqrt{x}]\left\{\frac{1}{2}\log x+\gamma+O\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)\right\}$$

d'où, en posant pour abréger: $[\sqrt{x}]=q$

$$\frac{\pi^2}{6}x-\psi(x)=\frac{\pi^2}{6}x-x\sum_{n>\sqrt{x}}\frac{1}{n^2}-\sum_{n\leq\sqrt{x}}\frac{1}{n}\varrho\left(\frac{x}{n}\right)+\frac{1}{2}q\log x-\log\underline{|q}+O(1).$$

Or, on sait que

$$\log\underline{|q}=\frac{1}{2}\log q+q\log q-q+O(1)=\frac{1}{4}\log x+\frac{1}{2}q\log x-\sqrt{x}+O(1)$$

ce qui nous donne

$$\psi(x)=x\sum_{n>\sqrt{x}}\frac{1}{n^2}-\sqrt{x}+\frac{1}{4}\log x+\sum_{n\leq\sqrt{x}}\frac{1}{n}\varrho\left(\frac{x}{n}\right)+O(1).$$

Puisque

$$\frac{x}{\sqrt{x}+1}<x\sum_{n>\sqrt{x}}\frac{1}{n^2}<\frac{x}{\sqrt{x}-1}$$

on a aussi

$$x\sum_{n>\sqrt{x}}\frac{1}{n^2}-\sqrt{x}=O(1)$$

---

[1] Voir Handbuch, I § 5.

d'où finalement

$$\psi(x) = \sum_{n \leq \sqrt{x}} \frac{1}{n} \varrho\left(\frac{x}{n}\right) + \frac{1}{4} \log x + O(1). \tag{6}$$

Quant à la somme figurant dans le membre droit de l'équation (6), nous avons

$$0 < \sum_{n \leq \sqrt{x}} \frac{1}{n} \varrho\left(\frac{x}{n}\right) < \sum_{n \leq \sqrt{x}} \frac{1}{n} = \frac{1}{2} \log x + O(1)$$

ce qui nous permet d'énoncer le théorème suivant: *Ayant choisi un* $\varepsilon > 0$ *tel petit que ce soit, on peut trouver un* x' *assez grand pour que l'on ait*

$$\left(\frac{1}{4} - \varepsilon\right) \log x < \psi(x) < \left(\frac{3}{4} + \varepsilon\right) \log x \tag{7}$$

dès que $x > x'$.

Si maintenant on calcule l'intégrale $\int\limits_1^x \frac{1}{t}\left[\frac{x}{t}\right] dt$, on en trouve sans difficulté la valeur $[x]\log x - \log\lfloor [x] \rfloor$ et par suite

$$\int\limits_1^x \frac{1}{t} \varrho\left(\frac{x}{t}\right) dt = x - 1 - \int\limits_1^x \frac{1}{t}\left[\frac{x}{t}\right] dt = \frac{1}{2} \log x + \frac{1}{2} \log 2\pi - 1 + O\left(\frac{1}{x}\right).$$

Il est donc à présumer que l'allure de la fonction $\psi(x)$ présentera en général des oscillations autour de la valeur moyenne $\frac{1}{2}\log x$, et il serait très important, si l'on savait déterminer la grandeur réelle de ces oscillations. On peut montrer, en effet, qu'il existe des valeurs de x au delà de toute limite, pour lesquelles $\psi(x) > \frac{1}{2} \log x$, mais il m'a été impossible de décider, si la fonction $\psi(x)$ peut s'éloigner de sa valeur moyenne autant que veut la double inégalité (7). Cependant, pour l'ordre de grandeur de la différence $\psi(x) - \frac{1}{2}\log x$ nous pouvons assigner une limite inférieure à l'aide du résultat trouvé dans le premier paragraphe. Faisons d'abord usage du théorème suivant, dû à M. PHRAGMÉN:[1]

[1] Sur le logarithme intégral et la fonction $f(x)$ de RIEMANN. Öfversikt af K. Vetenskaps-akademiens förhandlingar, Stockholm 1891.

»Soit $\varphi(x)$ une fonction réelle de la variable réelle x et a une constante positive $\geqq 1$, et supposons que l'intégrale $\int\limits_a^\infty \frac{\varphi(x)\,dx}{x^{s+1}}$ soit convergente pour $R(s) > 1$ et qu'elle soit égale, dans le voisinage de $s = 1$, à une série procédant suivant les puissances positives de $s - 1$ et convergente dans un cercle dont le rayon est > 1; si x_0 et δ sont deux quantités positives choisies à volonté, aucune des deux inégalités

$$\varphi(x) > \delta, \ \varphi(x) < -\delta$$

ne pourra subsister pour toutes les valeurs de $x > x_0$. Si l'on sait de plus que $\varphi(x)$ a une suite infinie de points de discontinuité x_ν, tels que, m_ν désignant une valeur positive plus petite que toutes les valeurs de l'expression $\varphi(x_\nu + h) - \varphi(x_\nu - 0)$ pour $0 < h < h_\nu$, ces quantités m_ν et h_ν peuvent être choisies de sorte que

$$x_\nu + h_\nu \leqq x_{\nu+1}$$

et que la série $\sum \frac{m_\nu h_\nu}{x_\nu + h_\nu}$ ait une valeur infinie; on pourra préciser encore et dire que $\varphi(x)$ changera de signe une infinité de fois au-dessus de toute limite finie.»

Aux hypothèses faites dans l'énoncé du théorème précédent nous pouvons satisfaire en posant

$$\varphi(x) = \sum_{n \leqq x} \sigma(n) - \frac{\pi^2}{6} x + \frac{1}{2} \log x + a = \frac{1}{2} \log x - \psi(x) + a$$

où $a = \frac{1}{2}(\gamma + \log 2\pi) > \frac{1}{2}$. Nous avons en effet

$$\int\limits_1^\infty \left(\sum_{n \leqq x} \sigma(n)\right) \frac{dx}{x^{s+1}} = \frac{\zeta(s)\zeta(s+1)}{s} \qquad (R(s) > 1)$$

et puisque

$$\begin{cases} \zeta(s+1) = \frac{1}{s} + \gamma + s\mathfrak{P}(s) \\ \zeta(0) = -\frac{1}{2};\ \zeta'(0) = -\frac{1}{2} \log 2\pi \end{cases}$$

il vient

$$\int_1^{\infty} \frac{\varphi(x)\,dx}{x^{s+1}} = \frac{\zeta(s)\zeta(s+1)}{s} - \frac{\pi^2}{6}\frac{1}{s-1} + \frac{1}{2}\frac{1}{s^2} + \frac{a}{s}$$

c'est-à-dire une fonction *entière* de s. De plus, les points de discontinuité de $\varphi(x)$ sont les entiers positifs, n, et l'on trouve

$$\varphi(n+h) - \varphi(n-0) = \sigma(n) - \frac{\pi^2}{6}h + \frac{1}{2}\log\left(1+\frac{h}{n}\right) > 1 - \frac{\pi^2}{6}h$$

ce qui fait voir que, en prenant

$$x_n = n,\ h_n = \frac{1}{2},\ m_n = 1 - \frac{\pi^2}{12} > 0$$

la série

$$\sum \frac{m_n h_n}{x_n + h_n} = \left(1 - \frac{\pi^2}{12}\right) \sum \frac{1}{2n+1}$$

devient en effet divergente. Nous avons ainsi le droit de conclure que la fonction $\frac{1}{2}\log x - \psi(x) + a$ sera négative pour certaines valeurs de x au delà de toute limite, ou bien: *La fonction $\psi(x)$ surpassera une infinité de fois la valeur $\frac{1}{2}\log x + a$.*

Quant à l'ordre de grandeur de la différence $\psi(x) - \frac{1}{2}\log x$, nous pouvons du moins affirmer qu'il ne peut être inférieur à $\log\log x$. Supposons en effet que le module de la dite différence reste inférieur à $\frac{1}{2}e^{\gamma}(1-\varepsilon)\log\log x$, dès que $x > x'$, et considérons la fonction $\sum_{n \leq x} n\sigma(n)$. Par la méthode employée plus haut on trouvera sans peine

$$\sum_{n \leq x} n\sigma(n) = \frac{1}{2}\sum_{n \leq x}\left\{\left[\frac{x}{n}\right]^2 + \left[\frac{x}{n}\right]\right\}$$

d'où, en observant que

$$\left[\frac{x}{n}\right]^2 = \frac{x^2}{n^2} - 2\frac{x}{n}\varrho\left(\frac{x}{n}\right) + \varrho^2\left(\frac{x}{n}\right)$$

et en utilisant la relation connue[1]

$$\sum_{n\leq x}\left[\frac{x}{n}\right]=x(\log x+2\gamma-1)+o(x)$$

on déduit

$$\sum_{n\leq x} n\sigma(n)=\frac{\pi^2}{12}x^2+x\left\{\frac{1}{2}\log x-\psi(x)\right\}+O(x). \tag{8}$$

Avec la notation $\Delta f=f(n)-f(n-1)$ nous aurons ainsi

$$n\sigma(n)=\Delta\left\{\frac{1}{2}n\log n-n\psi(n)\right\}+O(n)$$

et par suite

$$n\sigma(n)<e^{\gamma}(1-\varepsilon')n\log\log n \qquad (\varepsilon'<\varepsilon)$$

pour $n>x'+1$, ce qui est en contradiction avec le résultat du premier paragraphe.

L'inégalité

$$\left|\psi(x)-\frac{1}{2}\log x\right|>\frac{1}{2}e^{\gamma}(1-\varepsilon)\log\log x \tag{9}$$

a donc lieu pour des valeurs de x au delà de toute limite finie, ε étant choisi tel petit que l'on veut.[2]

En combinant les équations (2) et (8) on obtient

$$\sum_{n\leq x}\sigma(n)(x-n)=\frac{\pi^2}{12}x^2-\frac{1}{2}x\log x+O(x) \tag{10}$$

où la fonction figurant dans le membre gauche n'est autre chose que

$$\int_1^x\left(\sum_{n\leq x}\sigma(n)\right)dx.$$

---

[1] Voir p. ex. LANDAU: Über die Anzahl der Gitterpunkte in gewissen Bereichen, Göttingen 1912.

[2] Il y a lieu de remarquer que le seul résultat connu jusqu'ici sur $\psi(x)$ était: $\psi(x)=O(\log x)$.

On en conclut

$$\lim_{x=\infty} \frac{\frac{\pi^2}{12}x^2 - \sum\limits_{n\leq x} \sigma(n)(x-n)}{x \log x} = \frac{1}{2}. \tag{10 bis}$$

Dans le paragraphe 4 nous arriverons à une meilleure approximation de la fonction (10).

§ 3. Étude de la fonction $\sum\limits_{n\leq x} \sigma(n) \log \frac{x}{n}$.

Avant d'approfondir l'examen de la fonction $\sum\limits_{n\leq x} \sigma(n)(x-n)$, nous allons nous occuper un peu d'une autre fonction importante, à savoir

$$\int_1^x \left(\sum_{n\leq x} \sigma(n)\right) \frac{dx}{x} = \sum_{n\leq x} \sigma(n) \log \frac{x}{n}.$$

On sait qu'elle peut être représentée par l'intégrale

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{x^s \zeta(s) \zeta(s+1)\, ds}{s^2}$$

pourvu que c soit > 1. Étudions maintenant la même intégrale pour un chemin fermé d'intégration, R, composé de la manière suivante

$$\int_R = \int_{c-ih}^{c+ih} + \int_{c+ih}^{ih} + \int_{ih}^{i\varrho} + \int_{\substack{\arg s = \frac{\pi}{2} \\ |s| = \varrho}}^{\arg s = \frac{3\pi}{2}} + \int_{-i\varrho}^{-ih} + \int_{-ih}^{c-ih}.$$

Les points singuliers de la fonction $\frac{x^s \zeta(s) \zeta(s+1)}{s^2}$, situés à l'intérieur de R, sont les pôles $s = 1$ et $s = 0$ dont le dernier est triple. Le résidu relatif à $s = 1$ est égal à $\frac{\pi^2}{6}x$; quant au coefficient de s dans le développement en série de puissances du numérateur, on en trouve à l'aide des formules

$$\begin{cases} \zeta(s) = \zeta(0) + \zeta'(0)s + \frac{1}{2}\zeta''(0)s^2 + \cdots \\ \zeta(s+1) = \frac{1}{s} + \gamma + As + \cdots \\ x^s = 1 + s\log x + \frac{s^2}{2}\log^2 x + \cdots \end{cases}$$

la valeur suivante

$$b - a\log x - \frac{1}{4}\log^2 x$$

où a est la constante introduite pag. 120, à savoir $\frac{1}{2}(\gamma + \log 2\pi)$, et

$$b = -\frac{\gamma\log 2\pi}{2} - \frac{A}{2} + \frac{\zeta''(0)}{2}.[1]$$

Nous avons ainsi l'égalité

$$\int_R = 2\pi i\left(\frac{\pi^2}{6}x - \frac{1}{4}\log^2 x - a\log x + b\right)$$

qu'il faut examiner pour $h = \infty$. Montrons d'abord que:

$$\lim_{h=\infty}\int_{\pm ih}^{c\pm ih} = 0.$$

En effet

$$\int_{\pm ih}^{c\pm ih}\frac{x^s\zeta(s)\zeta(s+1)\,ds}{s^2} = x^{\pm ih}\int_0^c\frac{x^\sigma\zeta(\sigma\pm ih)\zeta(1+\sigma\pm ih)\,d\sigma}{(\sigma\pm ih)^2}$$

---

[1] On peut montrer que: $\zeta''(0) = -\frac{1}{2}\left(\log^2 2\pi + \frac{\pi^2}{12} + 2A - \gamma^2\right)$, de sorte que l'on aura: $b = -\frac{1}{4}\left\{\log 2\pi(\log 2\pi + 2\gamma) + \frac{\pi^2}{12} + 4A - \gamma^2\right\}$. On a en outre: $A = 0{,}073\ldots$ (TORELLI: Sulla totalità dei numeri primi etc. Pag. 31.)

d'où

$$\left|\int\limits_{\pm ih}^{c\pm ih}\right| < \int\limits_0^c \frac{x^\sigma |\zeta(\sigma+ih)||\zeta(1+\sigma+ih)|\,d\sigma}{\sigma^2+h^2}.$$

Rappelons maintenant les inégalités suivantes[1] valables pour $h > 1$

$$\begin{cases} \left.\begin{array}{l} |\zeta(\sigma+ih)| < K\log h \\ |\zeta(1+\sigma+ih)| \leqq \zeta(1+\sigma) < 1 + \dfrac{1}{\sigma} \end{array}\right\} (\sigma \geqq 1) \\ |\zeta(\sigma+ih)| < K h^{\frac{1}{2}+\varepsilon}; \quad (0 \leqq \sigma \leqq 1) \end{cases}$$

où K est une constante absolue. Il en résulte

$$\begin{cases} \displaystyle\int\limits_1^c \frac{x^\sigma|\zeta(\sigma+ih)\zeta(1+\sigma+ih)|\,d\sigma}{\sigma^2+h^2} < K\log h \int\limits_1^c \frac{(1+\sigma)\,x^\sigma d\sigma}{\sigma(\sigma^2+h^2)} < \frac{2K\log h}{1+h^2}\cdot\frac{x^c-x}{\log x} \\ \displaystyle\int\limits_0^1 \frac{x^\sigma|\zeta(\sigma+ih)\zeta(1+\sigma+ih)|\,d\sigma}{\sigma^2+h^2} < K^2 h^{\frac{1}{2}+\varepsilon}\log h \int\limits_0^1 \frac{x^\sigma d\sigma}{\sigma^2+h^2} < \frac{K^2\log h}{h^{\frac{3}{2}-\varepsilon}}\cdot\frac{x-1}{\log x} \end{cases}$$

et par là

$$\lim_{h=\infty} \int\limits_{\pm ih}^{c\pm ih} = 0.$$

On a donc le droit d'écrire

$$\left.\begin{array}{r} \displaystyle\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{x^s\zeta(s)\zeta(s+1)\,ds}{s^2} = \sum_{n\leqq x}\sigma(n)\log\frac{x}{n} = \frac{\pi^2}{6}x - \frac{1}{4}\log^2 x - a\log x + b + \\ \displaystyle + \frac{1}{2\pi i}\left(\int\limits_{i\varrho}^{i\infty} + \int\limits_{-i\infty}^{-i\varrho}\right) - \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\substack{\arg s = \frac{\pi}{2} \\ |s| = \varrho}}^{\frac{3\pi}{2}} = \end{array}\right\} \quad (11)$$

---

[1] LANDAU: Handbuch II § 228.

$$= \frac{\pi^2}{6}x - \frac{1}{4}\log^2 x - a\log x + b - \frac{1}{2\pi}\int_{\varrho}^{\infty}\frac{x^{it}\zeta(it)\zeta(1+it) + x^{-it}\zeta(-it)\zeta(1-it)}{t^2}dt -$$

$$- \frac{1}{2\pi\varrho}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} x^{\varrho e^{iv}}\zeta(\varrho e^{iv})\zeta(1+\varrho e^{iv})e^{-iv}dv.$$

Cherchons d'abord à évaluer la première intégrale. Elle est évidemment inférieure, en sens absolu, à

$$\frac{1}{\pi}\int_{\varrho}^{\infty}\left|\frac{\zeta(it)}{\zeta(1+it)}\right||\zeta^2(1+it)|\frac{dt}{t^2}.$$

D'autre part, on aura à cause de l'équation fonctionelle de $\zeta(s)$

$$\frac{\zeta(it)}{\zeta(1+it)} = \frac{\pi^{it}}{\sqrt{\pi}}\frac{\Gamma\left(\frac{1-it}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{it}{2}\right)}\frac{\zeta(1-it)}{\zeta(1+it)}$$

et par la théorie de la fonction $\Gamma(s)$

$$\Gamma\left(\frac{1-it}{2}\right)\Gamma\left(-\frac{it}{2}\right) = 2\sqrt{\pi}\,.\,2^{it}\Gamma(-it); \quad |\Gamma(it)|^2 = \frac{2\pi}{t(e^{\pi t} - e^{-\pi t})}$$

d'où, $\left|\frac{\zeta(1-it)}{\zeta(1+it)}\right|$ étant $= 1$

$$\left|\frac{\zeta(it)}{\zeta(1+it)}\right| = 2\frac{|\Gamma(it)|}{\left|\Gamma\left(\frac{it}{2}\right)\right|^2} = \sqrt{\frac{t}{2\pi}\cdot\frac{e^{\frac{\pi t}{2}} - e^{-\frac{\pi t}{2}}}{e^{\frac{\pi t}{2}} + e^{-\frac{\pi t}{2}}}} < \sqrt{\frac{t}{2\pi}}.$$

Puisque en outre $|\zeta(1+it)| < K\log t$, on aura donc

$$\frac{1}{\pi}\int_{\varrho}^{\infty}\frac{|\zeta(it)\zeta(1+it)|dt}{t^2} < \frac{K^2}{\sqrt{2\pi^3}}\int_{\varrho}^{\infty}\frac{\log^2 t\,dt}{t^{\frac{3}{2}}} < \frac{6^3K^2}{e^2\sqrt{2\pi^3}}\cdot\frac{1}{\varrho^{\frac{1}{6}}}.$$ [1]

---

[1] On a généralement: $\int_a^{\infty} u^2 e^{-\lambda u}du = \int_a^{\infty} u^2 e^{-\lambda' u}\,.\,e^{-(\lambda-\lambda')u}du < \frac{4}{(e\lambda')^2}\int_a^{\infty} e^{-(\lambda-\lambda')u}du =$

Il nous reste à examiner la seconde intégrale figurant dans (11). En désignant par $M(\varrho)$ le maximum de $|\zeta(s)\zeta(s+1)|$ sur le demicercle à rayon ϱ, on aura pour l'intégrale en question la limite supérieure

$$\frac{M(\varrho)}{\pi\varrho}\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^{-\varrho\cos\vartheta}\,d\vartheta = \frac{M(\varrho)}{\pi\varrho}\int_0^1 \frac{e^{-\varrho\log x\, t}\,dt}{\sqrt{1-t^2}} =$$

$$= \frac{M(\varrho)}{\pi\varrho}\left\{\int_0^{\frac{1}{2}} + \int_{\frac{1}{2}}^1\right\} < \frac{M(\varrho)}{\pi\varrho}\left\{\frac{2}{\sqrt{3}}\int_0^{\frac{1}{2}} e^{-\varrho\log x . t}\,dt + \frac{1}{x^{\frac{\varrho}{2}}}\int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}\right\} =$$

$$= \frac{M(\varrho)}{\pi\varrho}\left\{\frac{2}{\sqrt{3}}\,\frac{1}{\varrho\log x}\left(1-\frac{1}{x^{\frac{\varrho}{2}}}\right) + \frac{\pi}{3x^{\frac{\varrho}{2}}}\right\}$$

laquelle s'annule pour $x=\infty$, ϱ étant fixé. Nous sommes ainsi parvenus à ce résultat que la somme des deux intégrales dans le membre droit de (11) est inférieure, en sens absolu, à une expression de la forme: $\frac{K'}{\varrho^{\frac{1}{6}}} + \delta(x,\varrho)$, K' étant une constante absolue et $\lim\limits_{x=\infty}\delta(x,\varrho)=0$. On en conclut immédiatement que la fonction de x, représentée par ces intégrales, a pour limite zéro quand x croît indéfiniment. En effet, ayant choisi un ε arbitrairement petit, on prendra ϱ assez grand, pour que $\frac{K'}{\varrho^{\frac{1}{6}}}$ soit $<\frac{\varepsilon}{2}$. Le nombre ϱ étant fixé, on peut toujours trouver un x' tel que $\delta(x,\varrho)$ sera $<\frac{\varepsilon}{2}$ pour $x>x'$. Le module de la fonction sera donc $<\varepsilon$ pour chaque $x>x'$.

C. q. f. d.

$= \frac{4}{(e\lambda')^2}\cdot\frac{e^{-a(\lambda-\lambda')}}{\lambda-\lambda'}$ et, en déterminant λ' de manière à donner à $\lambda'^2(\lambda-\lambda')$ sa valeur maximale, on obtient: $\int\limits_a^\infty u^2 e^{-\lambda u}\,du < \frac{27}{e^2}\frac{e^{-\frac{1}{3}a\lambda}}{\lambda^3}$. De plus: $\int\limits_\varrho^\infty \frac{\log^2 t\,dt}{t^{\frac{3}{2}}} = \int\limits_{\log\varrho}^\infty u^2 e^{-\frac{1}{2}u}\,du$ etc.

Le résultat trouvé dans ce paragraphe s'exprime donc par l'équation

$$\sum_{n\leq x}\sigma(n)\log\frac{x}{n}=\frac{\pi^2}{6}x-\frac{1}{4}\log^2 x-a\log x+b+o(1). \tag{12}$$

On pourrait bien aller un peu plus loin et obtenir pour les termes $=o(1)$ une limite supérieure en fonction de x. Il suffirait pour cela de calculer une fonction de ϱ pouvant remplacer $M(\varrho)$, en utilisant p. ex. la formule connue[1]

$$\zeta(s)=\frac{4\pi}{s-1}\int_0^\infty\left(\frac{1}{4}+t^2\right)^{\frac{1-s}{2}}\frac{\cos[(s-1)\operatorname{arc\,tg}2t]}{(e^{\pi t}+e^{-\pi t})^2}dt$$

valable dans tout le plan de la variable s, et de donner ensuite à ϱ une valeur convenable dépendant de x. Mais on n'obtient par cette voie qu'une fonction de x d'un ordre assez élevé, laquelle ne nous renseigne rien de nouveau sur la fonction $\sum_{n\leq x}\sigma(n)$. C'est pourquoi je me contente d'avoir démontré l'égalité (12).

§ 4. Représentation analytique de la fonction $\frac{1}{\lfloor k}\sum_{n\leq x}\sigma(n)(x-n)^k$.

En désignant par z une variable complexe dont la partie réelle $R(z)>0$, on déduit sans peine les deux formules

$$\left\{\begin{aligned}
&f(z)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{e^{nz}-1}=\sum_{n=1}^{\infty}n\,\sigma(n)\,e^{-nz}\\
&f_1(z)=\log\frac{1}{P(e^{-z})}=\sum_{n=1}^{\infty}\sigma(n)\,e^{-nz};\quad P(x)=\prod_{n=1}^{\infty}(1-x^n),\ \ (|x|<1)
\end{aligned}\right. \tag{13}$$

dont la seconde s'obtient de la première par intégration. La théorie des fonc-

[1] LINDELÖF: Le calcul des résidus etc. Paris chez Gauthier-Villars 1905. Pag. 103.

tions elliptiques nous apprend que les fonctions $f(z)$ et $f_1(z)$ satisfont aux équations fonctionelles suivantes[1]

$$\left\{\begin{aligned} f(z) &= \frac{\pi^2}{6z^2} - \frac{1}{2z} + \frac{1}{24} - \frac{4\pi^2}{z^2} f\left(\frac{4\pi^2}{z}\right) \\ f_1(z) &= \frac{\pi^2}{6z} - \frac{1}{2}\log 2\pi + \frac{1}{2}\log z - \frac{1}{24}z + f_1\left(\frac{4\pi^2}{z}\right). \end{aligned}\right. \tag{14}$$

Rappelons de plus les formules intégrales connues

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{a-i\infty}^{a+i\infty} \frac{e^{xz}\,dz}{z^{\mu+1}} = \begin{cases} \dfrac{x^\mu}{\Gamma(\mu+1)}, & x \geqq 0 \\ 0, & x \leqq 0 \end{cases};$$

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{a-i\infty}^{a+i\infty} \frac{e^{xz}\log z\,dz}{z^{\mu+1}} = \begin{cases} \dfrac{x^\mu}{\Gamma(\mu+1)}\left[\dfrac{\Gamma'(\mu+1)}{\Gamma(\mu+1)} - \log x\right], & x \geqq 0 \\ 0, & x \leqq 0 \end{cases}$$

$$(a,\ \mu > 0).$$

En supposant μ égal à un entier $k \geqq 1$, on tire de la seconde équation (14)

$$\left.\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i}\int_{a-i\infty}^{a+i\infty} \frac{e^{xz} f_1(z)\,dz}{z^{k+1}} &= \frac{1}{\underline{|k}} \sum_{n \leqq x} \sigma(n)(x-n)^k = \frac{\pi^2}{6}\cdot\frac{x^{k+1}}{\underline{|k+1}} - \frac{1}{2\underline{|k}} x^k \log x + \\ &+ \frac{1}{2\underline{|k}}\left\{\frac{\Gamma'(k+1)}{\underline{|k}} - \log 2\pi\right\} x^k - \frac{1}{24}\frac{x^{k-1}}{\underline{|k-1}} + \frac{1}{2\pi i}\int_{a-i\infty}^{a+i\infty} \frac{e^{xz} f_1\left(\frac{4\pi^2}{z}\right) dz}{z^{k+1}} \end{aligned}\right\} \tag{15}$$

où il faut examiner de plus près l'intégrale figurant dans le membre droit.

Écrivons d'abord

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{a-i\infty}^{a+i\infty} \frac{e^{xz} f_1\left(\frac{4\pi^2}{z}\right) dz}{z^{k+1}} = \frac{1}{2\pi i}\int_{a-i\infty}^{a+i\infty} \frac{e^{xz}}{z^{k+1}}\left(\sum_{n=1}^{p-1} \sigma(n) e^{-\frac{4\pi^2 n}{z}}\right) dz + R_p$$

---

[1] Voir p. ex. Hurwitz: Grundlagen einer independenten Theorie der elliptischen Modulfunktionen etc. Pag. 29—30. (Thèse pour le doctorat, Leipzig 1881). Pour les valeurs réelles et positives de z la première des deux équations a été démontrée d'une manière différente aussi par Schlömilch (Compendium der höheren Analysis, Tome II, pag. 154 et suiv.)

où

$$R_p = \frac{1}{2\pi i}\int_{a-i\infty}^{a+i\infty} \frac{e^{xz}}{z^{k+1}} \left(\sum_{n=p}^{\infty} \sigma(n) e^{-\frac{4\pi^2 n}{z}} \right) dz.$$

La première intégrale est égale à

$$\sum_{n=1}^{p-1} \sigma(n) \frac{1}{2\pi i} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} \frac{e^{xz}}{z^{k+1}} e^{-\frac{4\pi^2 n}{z}} dz$$

et il est facile de voir qu'on a le droit de remplacer $e^{-\frac{4\pi^2 n}{z}}$ par son développement en série et d'en intégrer les termes. Nous obtiendrons ainsi l'expression suivante

$$\sum_{n=1}^{p-1} \sigma(n) \left(\sum_{\nu=0}^{\infty} (-1)^\nu \frac{(4\pi^2 n)^\nu}{\underline{|\nu}} \cdot \frac{1}{2\pi i} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} \frac{e^{xz}\, dz}{z^{k+\nu+1}} \right)$$

c'est-à-dire

$$\sum_{n=1}^{p-1} \sigma(n) \left(\sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(-1)^\nu (4\pi^2 n)^\nu x^{\nu+k}}{\underline{|\nu}\,\underline{|\nu+k}} \right)$$

et enfin, en introduisant les fonctions connues de Bessel

$$I_k(v) = \sum_{\nu=0}^{\infty} (-1)^\nu \frac{\left(\frac{v}{2}\right)^{2\nu+k}}{\underline{|\nu}\,\underline{|\nu+k}} \tag{16}$$

l'égalité suivante

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{a-i\infty}^{a+i\infty} \frac{e^{xz} f_1\left(\frac{4\pi^2}{z}\right) dz}{z^{k+1}} = \frac{x^{\frac{k}{2}}}{(2\pi)^k} \sum_{n=1}^{p-1} \frac{\sigma(n)}{n^{\frac{k}{2}}} I_k(4\pi\sqrt{nx}) + R_p$$

où il nous reste à prouver que $\lim\limits_{p=\infty} R_p = 0$. A cet effet nous démontrerons les deux lemmes suivants.

1. En désignant par ϱ un nombre positif quelconque < 1, on aura pour $0 < \xi < 1$

$$\sum_{n=p}^{\infty} \sigma(n)\,\xi^n < \frac{p^\varrho \xi^p}{(1-\xi)^2}.$$

En effet, on peut toujours prendre p assez grand pour que $\sigma(n)$ soit $< n^\varrho$, dès que $n \geqq p$, et par suite

$$\sum_{n=p}^{\infty} \sigma(n)\,\xi^n < p^\varrho \xi^p \left\{1 + \left(1+\frac{1}{p}\right)^\varrho \xi + \left(1+\frac{2}{p}\right)^\varrho \xi^2 + \cdots\right\} <$$

$$< p^\varrho \xi^p \left\{1 + \left(1+\frac{\varrho}{p}\right)\xi + \left(1+\frac{2\varrho}{p}\right)\xi^2 + \cdots\right\} =$$

$$= p^\varrho \xi^p \left\{\frac{1}{1-\xi} + \frac{\varrho\xi}{p(1-\xi)^2}\right\} = p^\varrho \xi^p\,\frac{1-\left(1-\frac{\varrho}{p}\right)\xi}{(1-\xi)^2}.$$

2. Pour $0 < u < \log k$ on a: $\dfrac{1}{1-e^{-u}} < \dfrac{k}{u}$. Car la fonction $1 - e^{-u} - \dfrac{u}{k}$ s'annule pour $u = 0$ et sa dérivée: $e^{-u} - \dfrac{1}{k}$ est positive pour $0 \leqq u < \log k$.

Posons maintenant $z = a + it$; il s'ensuit

$$\frac{4\pi^2}{z} = \frac{4\pi^2(a-it)}{a^2+t^2}; \quad \left|e^{-\frac{4\pi^2}{z}}\right| = e^{-\frac{4\pi^2 a}{a^2+t^2}}; \quad \frac{4\pi^2 a}{a^2+t^2} \leqq \frac{4\pi^2}{a}$$

donc, par le second lemme

$$\frac{1}{1-e^{-\frac{4\pi^2 a}{a^2+t^2}}} < \frac{e^{\frac{4\pi^2}{a}}}{4\pi^2 a}(a^2+t^2)$$

et, d'après le premier

$$\left|\sum_{n=p}^{\infty} \sigma(n) e^{-\frac{4\pi^2 n}{z}}\right| < p^\varrho e^{-\frac{4\pi^2 ap}{a^2+t^2}} \cdot \frac{1}{\left(1-e^{-\frac{4\pi^2 a}{a^2+t^2}}\right)^2} < \frac{e^{\frac{8\pi^2}{a}}}{16\pi^4 a^2}\, p^\varrho\, e^{-\frac{4\pi^2 ap}{a^2+t^2}}(a^2+t^2)^2$$

de sorte que

$$|R_p| < \frac{e^{\frac{8\pi^2}{a}+ax}}{16\pi^5 a^2}\, p^\varrho \int_0^\infty \frac{e^{-\frac{4\pi^2 ap}{a^2+t^2}}\,dt}{(a^2+t^2)^{\frac{k-3}{2}}}.$$

Nous voyons par là qu'il suffit de prendre $k \geqq 5$, pour que l'intégrale précédente soit convergente et qu'elle soit inférieure ou égale à

$$\int_0^\infty \frac{e^{-\frac{4\pi^2 a p}{a^2+t^2}} dt}{a^2+t^2} = \frac{1}{a}\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-\frac{4\pi^2 p}{a}\cos^2\varphi}\, d\varphi = \frac{1}{2a}\int_0^1 \frac{e^{-\frac{4\pi^2 p}{a}t}\, dt}{\sqrt{t(1-t)}}. \tag{17}$$

Or, on a généralement pour $\lambda > 0$

$$\int_0^1 \frac{e^{-\lambda t}\, dt}{\sqrt{t(1-t)}} = \int_0^{\frac{1}{2}} + \int_{\frac{1}{2}}^1 < \sqrt{2}\int_0^\infty \frac{e^{-\lambda t}\, dt}{\sqrt{t}} + e^{-\frac{1}{2}\lambda}\int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{dt}{\sqrt{t(1-t)}} = \sqrt{\frac{2\pi}{\lambda}} + \frac{\pi}{2}e^{-\frac{1}{2}\lambda}$$

ce qui fait voir que les intégrales (17) sont d'un ordre de grandeur ne surpassant pas $\frac{1}{\sqrt{p}}$. Pour $\varrho < \frac{1}{2}$ il en résulte: $\lim_{p=\infty} R_p = 0$.

C. q. f. d.

Nous sommes ainsi parvenus à la formule

$$\frac{1}{\lfloor k}\sum_{n \leq x}\sigma(n)(x-n)^k = \frac{\pi^2}{6}\cdot\frac{x^{k+1}}{\lfloor k+1} - \frac{1}{2\lfloor k}x^k\log x + \frac{1}{2\lfloor k}\left\{\frac{\Gamma'(k+1)}{\lfloor k} - \log 2\pi\right\}x^k -$$
$$- \frac{1}{24}\frac{x^{k-1}}{\lfloor k-1} + \frac{x^{\frac{k}{2}}}{(2\pi)^k}\sum_{n=1}^\infty \frac{\sigma(n)}{n^{\frac{k}{2}}} I_k(4\pi\sqrt{nx}) \tag{18}$$

établie pour le moment sous l'hypothèse $k \geqq 5$. Montrons d'abord qu'elle subsiste encore pour $k \geqq 2$.

Pour cela il faut rappeler une propriété des fonctions de Bessel. On sait qu'elles sont, pour des valeurs grandes de la variable réelle et positive v, d'un ordre égal à $\frac{1}{\sqrt{v}}$.[1] De plus, on tire du développement asymptotique de la fonction $I_k(v)$

$$I_k(v) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{\cos\left[v-(2k+1)\frac{\pi}{4}\right]}{\sqrt{v}} + O\left(v^{-\frac{3}{2}}\right). \tag{19}$$

[1] Cf. p. ex. Forsyth: Lehrbuch der Diff.-Gleichungen (Deutsch von H. Maser). Braunschweig 1889. § 105.

Rappelons aussi la relation suivante

$$I'_k(v) = I_{k-1}(v) - \frac{k}{v} I_k(v)$$

laquelle nous fait voir que, en différentiant par rapport à x l'équation (18), on n'y produit d'autre changement que de remplacer k par $k-1$. Or, à cause de (19) la série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sigma(n)}{n^{\frac{k}{2}}} I_k(4\pi\sqrt{nx})$ sera absolument et uniformément convergente pour toute valeur de $x \geqq 1$, tant que $k \geqq 2$. La formule (18) sera donc aussi valable sous la même hypothèse. Pour $k=1$, au contraire, la convergence de la série n'est plus absolue, et il faut étudier à fond, pour embrasser aussi ce cas, les séries de la forme

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sigma(n) \frac{\sin \sqrt{nx}}{n^{\alpha}}; \quad \sum_{n=1}^{\infty} \sigma(n) \frac{\cos \sqrt{nx}}{n^{\alpha}}$$

où $1 > \alpha > \frac{1}{2}$. Mais avant d'aborder cette recherche, écrivons la formule (18) pour $k=2$ et tirons-en les conséquences. On trouvera

$$\left.\begin{aligned} F(x) = \frac{1}{2}\sum_{n\leqq x}\sigma(n)(x-n)^2 = \frac{\pi^2}{36}x^2 - \frac{1}{4}x^2\log x + \left(\frac{3}{8} - \frac{\gamma+\log 2\pi}{4}\right)x^2 - \frac{x}{24} + \varphi(x); \\ \varphi(x) = \frac{x}{4\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sigma(n)}{n} I_2(4\pi\sqrt{nx}) = O\left(x^{\frac{3}{4}}\right). \end{aligned}\right\} \quad (20)$$

D'autre part, un calcul simple nous donne

$$\left.\begin{aligned} \varDelta F(x) = F(x+1) - F(x) = \sum_{n\leqq x}\sigma(n)(x-n) + \frac{1}{2}\sum_{n\leqq x}\sigma(n) + \frac{1}{2}\sigma([x]+1)\varrho^2(x) \\ \varDelta^2 F(x) = \sum_{n\leqq x}\sigma(n) + \left\{\frac{1}{2} + \varrho(x)\right\}\sigma([x]+1) + \frac{1}{2}\varDelta\sigma([x]+1)\varrho^2(x). \end{aligned}\right\} \quad (21)$$

Les fonctions $\varDelta F(x)$ et $\varDelta^2 F(x)$ étant connues, on peut donc, sans laisser le domaine des séries absolument et uniformément convergentes, former des expressions analytiques pour les fonctions $\sum_{n\leqq x}\sigma(n)(x-n)$ et $\sum_{n\leqq x}\sigma(n)$, abstraction faite de certaines termes complémentaires d'un ordre ne surpassant pas $\log\log x$. De la première équation (21) on tire en outre

$$\sum_{n \leq x} \sigma(n)(x-n) = \frac{\pi^2}{12} x^2 - \frac{1}{2} x \log x - \left(a - \frac{1}{2}\right) x + O\left(x^{\frac{3}{4}}\right) \tag{22}$$

où a est la même constante que nous avons rencontrée pag. 120. Nous sommes arrivés par là à un résultat plus précis que celui de la formule (10 bis), à savoir

$$\lim_{x=\infty} \frac{\frac{\pi^2}{12} x^2 - \sum_{n \leq x} \sigma(n)(x-n) - \frac{1}{2} x \log x}{x} = a - \frac{1}{2}. \tag{22 bis}$$

Passons à l'examen du cas où $k = 1$. Pour cela nous aurons besoin d'un théorème général sur les séries infinies d'une certaine forme, dont la démonstration sera donnée dans le paragraphe suivant.

---

§ 5. Un théorème sur les séries.

Soient $a_1, a_2, \ldots, b_1, b_2, \ldots$ deux suites infinies de nombres et $f(x)$ une fonction continue pour toute valeur finie de $x \geqq \alpha > 0$. Nous allons supposer en outre:

1. *La série $\sum_{m=1}^{\infty} |a_m|$ est convergente.*

2. *Pour chaque nombre positif, A, la série $\sum_{n=1}^{\infty} b_n f(nx)$ converge uniformément dans l'intervalle $A \geqq x \geqq \alpha$. La fonction*

$$\varphi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n f(nx) \tag{23}$$

est donc continue pour chaque x fini $\geqq \alpha$.

3. *En mettant*

$$\varphi(x, y) = \sum_{n \leq y} b_n f(nx); \quad \Omega(x) = \overline{\lim_{y \geq 1}} |\varphi(x, y)|$$

la série $\sum_{m=1}^{\infty} |a_m| \Omega(mx)$ est uniformément convergente pour $A \geqq x \geqq \alpha$. Sous ces hypothèses on aura pour toute valeur finie de $x \geqq \alpha$

$$\left.\begin{aligned}\sum_{m=1}^{\infty} a_m \varphi(mx) &= \sum_{m=1}^{\infty} c_m f(mx)\\ c_m &= \sum_{\nu\mu=m} a_\mu b_\nu.\end{aligned}\right\} \qquad (24)$$

Dans le cas spécial: $f(x) = 1$, on retrouve le théorème de STIELTJES sur la *multiplication* DIRICHLET'ienne de deux séries, dont l'une est absolument convergente.[1]

Faisons quelques observations sur l'énoncé du théorème et les hypothèses sur lesquelles il est basé. Si pour $x \geqq \alpha$ la fonction $\Omega(x)$ est bornée, l'hypothèse 3 est contenue dans 1; si au contraire $\frac{1}{\Omega(x)}$ ne dépasse pas une limite fixe, l'hypothèse 1 devient une conséquence de 3. Dans le cas général il faut les retenir toutes les deux. A cause de l'hypothèse 3 la série $\sum_{m=1}^{\infty} |a_m \varphi(mx)|$ sera convergente, mais cela ne suffit pas, $\Omega(x)$ pouvant être d'un ordre de grandeur plus élevé que $|\varphi(x)|$.[2] Quant à la série double $\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} a_m b_n f(mnx)$, elle ne sera pas en général absolument convergente.

---

[1] LANDAU: Handbuch, II §§ 184, 185.

[2] L'hypothèse 3 est essentielle, ce qu'on peut voir de l'exemple suivant, où le théorème est en défaut, bien que les deux autres hypothèses soient satisfaites.

Posons

$$a_m = \frac{1}{m^2}; \quad b_n = \frac{\mu(n)}{n^2}; \quad f(x) = x$$

en désignant par $\mu(n)$ les facteurs de MÖBIUS. Il en résulte: $\varphi(x) = x \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu(n)}{n} = 0$ pour toute valeur finie de x. Or, la fonction $\Omega(x)$ est ici égale à x, de sorte que la série $\sum_{m=1}^{\infty} |a_m| \, \Omega(mx)$ est divergente. On trouvera de plus

$$c_k = \sum_{mn=k} \frac{\mu(n)}{k^2} = \begin{cases} 1 & \text{pour } k = 1 \\ 0 & \text{»} \quad k > 1 \end{cases}$$

et l'équation (24) devient: $0 = x$, ce qui est absurde, la valeur de x étant supposée différente de zéro.

Considérons d'abord le cas où la convergence des deux series $\sum_{n=1}^{\infty} b_n f(nx)$ et $\sum_{m=1}^{\infty} |a_m| \Omega(mx)$ est uniforme même pour un intervalle illimité $x \geqq \alpha$. Alors la démonstration peut se faire à peu près comme celle dont se sert M. Landau pour établir le théorème de Stieltjes. Nous avons en effet

$$c_m f(mx) = \sum_{\mu\nu=m} a_\mu b_\nu f(\mu\nu x)$$

d'où

$$\sum_{m=1}^{k} c_m f(mx) = \sum_{\mu\nu \leqq k} a_\mu b_\nu f(\mu\nu x) = \sum_{\mu=1}^{k} a_\mu \sum_{\nu \leqq \frac{k}{\mu}} b_\nu f(\mu\nu x) = \sum_{\mu=1}^{k} a_\mu \varphi\left(\mu x, \frac{k}{\mu}\right)$$

et par suite

$$\sum_{m=1}^{k} c_m f(mx) - \sum_{m=1}^{k} a_m \varphi(mx) = \sum_{m=1}^{k} a_m \left\{\varphi\left(mx, \frac{k}{m}\right) - \varphi(mx)\right\}. \tag{25}$$

Maintenant il existe certainement un nombre fixe, g, tel que l'on a pour toutes les valeurs de k: $\sum_{m=1}^{k} |a_m| < g$. Ayant choisi un δ arbitrairement petit, on peut donc assigner un nombre p assez grand, pour que

$$\left.\begin{aligned} |\varphi(x, y) - \varphi(x)| &< \frac{\delta}{2g} \\ \sum_{m=p}^{\infty} |a_m| \Omega(mx) &< \frac{\delta}{4} \end{aligned}\right\} \tag{26}$$

dès que $y \geqq p$, et quel que soit x. En prenant $k \geqq p^2$ on aura par conséquent

$$\left\{\begin{aligned} \left|\sum_{m \leqq \sqrt{k}} a_m \left\{\varphi\left(mx, \frac{k}{m}\right) - \varphi(mx)\right\}\right| &< \frac{\delta}{2g} \cdot g = \frac{\delta}{2} \\ \left|\sum_{m > \sqrt{k}} a_m \left\{\varphi\left(mx, \frac{k}{m}\right) - \varphi(mx)\right\}\right| &< 2\,\frac{\delta}{4} = \frac{\delta}{2} \end{aligned}\right.$$

et enfin

$$\left|\sum_{m=1}^{k} c_m f(mx) - \sum_{m=1}^{k} a_m \varphi(mx)\right| < \delta$$

ce qui achève la démonstration.

Passons au cas plus général, où la convergence uniforme des séries ne subsiste plus pour $x = \infty$. Le nombre p ne sera donc pas indépendant de x, mais puisque les séries convergent uniformément dans chaque intervalle d'étendue finie, on peut certainement construire une fonction positive de x à croissance monotone, soit $\frac{\omega(x)}{x}$, telle que les inégalités (26) sont valables pour

$$y \geqq \frac{\omega(x)}{x}; \quad m \geqq \frac{\omega(x)}{x}$$

la valeur de x ayant été fixée. Divisons ensuite la série (25) en deux parties

$$\sum_{\frac{k}{m} \geqq \frac{\omega(mx)}{mx}} + \sum_{\frac{k}{m} < \frac{\omega(mx)}{mx}}$$

c'est-à-dire

$$\sum_{m \leqq \frac{\omega^{-1}(kx)}{x}} + \sum_{m > \frac{\omega^{-1}(kx)}{x}}$$

en désignant par $\omega^{-1}(x)$ la fonction *inverse* de $\omega(x)$. La première série est donc en valeur absolue $< \frac{\delta}{2}$; la seconde le sera aussi, pourvu que

$$\omega^{-1}(kx) \geqq \omega(x)$$

ce qui revient à dire qu'il suffit de prendre: $k \geqq \frac{\omega(\omega(x))}{x}$. Le théorème est donc complètement démontré.

Nous allons appliquer ce théorème au cas suivant

$$a_m = \frac{1}{m^{\alpha+1}}; \quad b_n = \frac{1}{n^{\alpha}}; \quad f(x) = \begin{cases} \sin \\ \cos \end{cases} (\sqrt{x})$$

où

$$1 \geqq \alpha > \frac{1}{2}.$$

D'après la formule d'EULER-MACLAURIN[1] on aura alors

$$\varphi(x, p) = \sum_{n=1}^{p} \frac{\sin \sqrt{nx}}{n^\alpha} = \frac{2}{x^{1-\alpha}} \int_{\sqrt{x}}^{\sqrt{px}} \frac{\sin t\,dt}{t^{2\alpha-1}} + \frac{1}{2} \frac{\sin \sqrt{px}}{p^\alpha} + \frac{1}{2} \sin \sqrt{x} +$$

$$+ \sqrt{x} \int_1^p \frac{\frac{1}{2} - \varrho(z)}{z^{\alpha+\frac{1}{2}}} \left\{ \alpha \frac{\sin \sqrt{xz}}{\sqrt{xz}} - \frac{1}{2} \cos \sqrt{xz} \right\} dz$$

ce qui nous montre que la série

$$\varphi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin \sqrt{nx}}{n^\alpha} = \lim_{p=\infty} \varphi(x, p)$$

est convergente. Pour $f(x) = \cos \sqrt{x}$ on trouvera de même

$$\sum_{n=1}^{p} \frac{\cos \sqrt{nx}}{n^\alpha} = \frac{2}{x^{1-\alpha}} \int_{\sqrt{x}}^{\sqrt{px}} \frac{\cos t\,dt}{t^{2\alpha-1}} + \frac{1}{2} \frac{\cos \sqrt{px}}{p^\alpha} + \frac{1}{2} \cos \sqrt{x} +$$

$$+ \sqrt{x} \int_1^p \frac{\frac{1}{2} - \varrho(z)}{z^{\alpha+\frac{1}{2}}} \left\{ \alpha \frac{\cos \sqrt{xz}}{\sqrt{xz}} + \frac{1}{2} \sin \sqrt{xz} \right\} dz$$

et ce cas n'est pas essentiellement différent du précédent. En ayant recours aux formules

$$\begin{cases} \displaystyle\int_\xi^\infty \frac{\sin t\,dt}{t^{2\alpha-1}} = \frac{\cos \xi}{\xi^{2\alpha-1}} - (2\alpha - 1) \int_\xi^\infty \frac{\cos t\,dt}{t^{2\alpha}}, \text{ d'où: } \left| \int_\xi^\infty \frac{\sin t\,dt}{t^{2\alpha-1}} \right| < \frac{2}{\xi^{2\alpha-1}} \\ \displaystyle\int_\xi^\infty \frac{\cos t\,dt}{t^{2\alpha-1}} = -\frac{\sin \xi}{\xi^{2\alpha-1}} + (2\alpha - 1) \int_\xi^\infty \frac{\sin t\,dt}{t^{2\alpha}}, \text{ d'où: } \left| \int_\xi^\infty \frac{\cos t\,dt}{t^{2\alpha-1}} \right| < \frac{2}{\xi^{2\alpha-1}} \end{cases}$$

---

[1] Cf. p. ex. WIRTINGER: Acta Mathematica, Tome 26.

et en observant que

$$\sum_{n=p+1}^{\infty} \frac{\sin \sqrt{nx}}{n^\alpha} = \varphi(x) - \varphi(x, p) = \frac{2}{x^{1-\alpha}} \int_{\sqrt{px}}^{\infty} \frac{\sin t\,dt}{t^{2\alpha-1}} - \frac{1}{2} \frac{\sin \sqrt{px}}{p^\alpha} +$$

$$+ \sqrt{x} \int_p^\infty \frac{\frac{1}{2} - \varrho(z)}{z^{\alpha+\frac{1}{2}}} \left\{ \alpha \frac{\sin \sqrt{xz}}{\sqrt{xz}} - \frac{1}{2} \cos \sqrt{xz} \right\} dz$$

nous voyons aussi sans difficulté que: $\Omega(x) = O(\sqrt{x})$, et que la convergence des séries figurant dans nos hypothèses est uniforme dans chaque intervalle fini. Pour $x = \infty$ cela n'a plus lieu, mais on peut prendre ici

$$\omega(x) = K x^{\frac{2\alpha}{2\alpha - 1}}.$$

Nous avons ainsi démontré que: *Les séries*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sigma(n)}{n^\alpha} \sin \sqrt{nx}; \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sigma(n)}{n^\alpha} \cos \sqrt{nx} \qquad (x > 0)$$

sont convergentes pour $\alpha > \frac{1}{2}$.[1] — Dans le cas où $k = 1$, on aura maintenant

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{I_1(4\pi\sqrt{nx})}{n^{\frac{1}{2}}} = \frac{x^{-\frac{1}{4}}}{2\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin 4\pi\sqrt{nx} - \cos 4\pi\sqrt{nx}}{n^{\frac{3}{4}}} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\frac{1}{2}}} O\left(\frac{1}{(nx)^{\frac{3}{4}}}\right) =$$

$$= \frac{x^{-\frac{1}{4}}}{2\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin 4\pi\sqrt{nx} - \cos 4\pi\sqrt{nx}}{n^{\frac{3}{4}}} + O\left(x^{-\frac{3}{4}}\right)$$

puisque la série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\frac{5}{4}}}$ est convergente. Quant au premier terme du membre droit, il est $= O\left(x^{\frac{1}{4}}\right)$, ce qui fait voir que la série

[1] Pour $\alpha \leqq \frac{1}{2}$ les séries $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\begin{smallmatrix}\sin\\ \cos\end{smallmatrix}(\sqrt{nx})}{n^\alpha}$ ne convergent plus.

$$\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m^{\frac{3}{2}}}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{I_1(4\pi\sqrt{mnx})}{(nx)^{\frac{1}{2}}}=\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m^{\frac{3}{2}}}O\left(\frac{m^{\frac{1}{4}}}{x^{\frac{1}{4}}}\right)$$

est absolument et uniformément convergente. Or, on a formellement

$$\frac{d}{dx}\left\{\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sigma(n)}{n^{\frac{k}{2}}}I_k(4\pi\sqrt{nx})\right\}=\frac{2\pi}{\sqrt{x}}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sigma(n)}{n^{\frac{k-1}{2}}}I_{k-1}(4\pi\sqrt{nx})-\frac{k}{2x}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sigma(n)}{n^{\frac{k}{2}}}I_k(4\pi\sqrt{nx})$$

et, d'après ce que nous venons de voir, cette identité subsistera certainement pour $k=2$ sous la forme

$$\frac{d}{dx}\left\{\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{I_2(4\pi\sqrt{mnx})}{n}\right\}=2\pi\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m^{\frac{3}{2}}}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{I_1(4\pi\sqrt{mnx})}{(nx)^{\frac{1}{2}}}-\frac{1}{x}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sigma(n)}{n}I_2(4\pi\sqrt{nx}).$$

L'équation (18) *correspondant à $k=1$ est donc rigoureusement démontrée, à savoir*

$$\sum_{n\leq x}\sigma(n)(x-n)=\frac{\pi^2}{12}x^2-\frac{1}{2}x\log x-\left(a-\frac{1}{2}\right)x-\frac{1}{24}+\frac{\sqrt{x}}{2\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sigma(n)}{n^{\frac{1}{2}}}I_1(4\pi\sqrt{nx}).\text{[1]}\quad(27)$$

Stockholm, mars 1913.

---

[1] En formant la première différence on en tire

$$\sum_{n\leq x}\sigma(n)+\sigma([x]+1)\rho(x)=\frac{\pi^2}{6}x-\frac{1}{2}\log x+\frac{\pi^2}{12}-a+O\left(\frac{1}{x}\right)+\Delta\left[\frac{\sqrt{x}}{2\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sigma(n)}{n^{\frac{1}{2}}}I_1(4\pi\sqrt{nx})\right]$$

et ensuite (cf. (2))

$$\psi(x)=\frac{1}{2}\log x+a-\frac{\pi^2}{12}+\sigma([x]+1)\rho(x)-\frac{\sqrt{x}}{2\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sigma(n)}{n^{\frac{1}{2}}}\{I_1(4\pi\sqrt{nx+n})-I_1(4\pi\sqrt{nx})\}+O\left(x^{-\frac{1}{4}}\right).$$