

# ÜBER EINE KLASSE VON GANZEN FUNKTIONEN UND IHRE ANWENDUNG AUF DIE ZAHLENTHEORIE.

VON

J. F. STEFFENSEN

in KOPENHAGEN.

Die folgenden Auseinandersetzungen sind in der Hauptsache ein Auszug aus meiner dänisch geschriebenen Habilitationsschrift »Analytiske Studier med Anvendelser paa Taltheorien».<sup>1</sup> Da ich in der zitierten, ziemlich umfangreichen Arbeit alle Beweise in Detail gegeben habe, darf ich mich hier auf die Wiedergabe der wesentlichsten Resultate nebst einigen Andeutungen des Beweisganges beschränken. Derjenige Leser, der die vollständigen Beweise zu besitzen wünscht, wird sie dann leicht — nötigenfalls unter Zuhilfenahme des dänischen Originals — selbst rekonstruieren können.

Der Zweck meiner Arbeit war ursprünglich, die nicht nur in der elementaren, sondern leider auch in der analytischen Zahlentheorie eingebürgerten diskontinuierlichen Funktionen durch analytische Funktionen zu ersetzen. Wie man in der Theorie der Gammafunktion das nur für ganze, positive Argumente definierte *Fakultät* durch eine analytische Funktion, die *Gammafunktion*, ersetzt, so kann man prinzipiell in der analytischen Zahlentheorie die nur für ganze, äquidistante Argumente definierte zahlentheoretische Funktion durch eine zweckmässige *Interpolation* als analytische Funktion ausgestalten. Dies war schon lange bekannt, aber die Simplifikation, durch welche die Methode erst fruchtbar werden konnte, war bis jetzt ausgeblieben. Zwar hat VON KOCH<sup>2</sup> die Divisorfunktion als ganze Funktion in einer Weise definiert, welche im wesentlichen mit der in dieser Arbeit vorgeschlagenen identisch ist; aber er hat die Konsequenzen nicht

---

<sup>1</sup> Kopenhagen 1912 (VILHELM TRYDE), XIV + 148 S.

<sup>2</sup> C. R. de l'Ac. des Sciences, Paris, vol. 118 (1894) S. 850.

gezogen, indem er die Primzahlfunktion in künstlicher Weise aus der Divisorfunktion ableitet, anstatt zu erkennen, dass diese beiden Funktionen und viele andere aus einem und demselben Prinzip einfach abgeleitet werden können.

Dieses Prinzip ist die sehr naheliegende, vielleicht zuerst von HADAMARD<sup>1</sup> ausdrücklich angegebene, Interpolationsformel

$$g(t) = \frac{\sin \pi t}{\pi} \sum \frac{a_m (-1)^m}{t-m}, \quad (1)$$

wo offenbar  $g(m) = a_m$ .

Nachdem ich die Bedeutung dieser Formel für die analytische Zahlentheorie erkannt hatte, fasste ich übrigens meine Aufgabe etwas weiter, indem es wünschenswert erschien, die Funktionenklasse  $g(t)$  nach verschiedenen Richtungen hin genauer zu untersuchen, um schliesslich die zahlentheoretischen Anwendungen folgen zu lassen.

Für meinen Zweck ist es gewöhnlich bequemer, die folgende Interpolationsformel zu benutzen

$$f(x) = - \frac{\sin 2\pi x}{2\pi} b(x), \quad (2)$$

wo

$$b(x) = \sum_1^{\infty} \left( \frac{1}{n-x} - \frac{1}{n} \right) f(n). \quad (3)$$

Es wird hierbei vorausgesetzt, dass (3) gleichmässig in jedem endlichen Bereich konvergiert, welcher keinen der Punkte  $x = 1, 2, \dots, n, \dots$  enthält (auch nicht auf seiner Begrenzung). Dann stellt (2) eine ganze Funktion dar.

Sehr oft werde ich die speziellere, jedoch für die zahlentheoretischen Anwendungen genügende Voraussetzung machen

$$f(n) = O(n^{1-\delta}) \quad (\delta > 0), \quad (4)$$

wodurch bekanntlich ausgedrückt wird, dass

$$\limsup_{n=\infty} \frac{|f(n)|}{n^{1-\delta}} < \infty.$$

Man kann übrigens leicht die notwendige und hinreichende Bedingung für die Konvergenz einer Partialbruchreihe, deren Pole ganze Zahlen sind, angeben. Sie lautet:

---

<sup>1</sup> La série de TAYLOR et son prolongement analytique, Paris 1901 (Scientia), S. 27.

Es sei  $\sum_{-\infty}^{\infty} \alpha_\nu$  konvergent; dann ist  $\sum_{-\infty}^{\infty} \frac{\nu}{x+\nu} \alpha_\nu$  gleichmässig konvergent in jedem endlichen Bereich, welcher keine ganze Zahl enthält, und umgekehrt.

Der Beweis erfolgt sofort, wenn man bemerkt, dass

$$\frac{\nu}{x+\nu} = 1 - \frac{x}{\nu} + \frac{x^2}{\nu^2} \cdot \frac{\nu}{x+\nu}.$$

Man kann (2) gewissermassen als die *Umkehrung* von (3) betrachten; durch (2) wird dann der Koeffizient der Partialbruchreihe (3) als ganze Funktion des Index gegeben. Über eine Klasse von Partialbruchreihen, welche (3) als Spezialfall enthält, beweise ich das folgende Umkehrtheorem:

Es sei die Partialbruchreihe

$$B(x) = \sum_1^{\infty} \frac{f(\omega_n)}{\omega_n - x}$$

gleichmässig konvergent in jedem endlichen Bereich, welcher kein  $\omega_n$  enthält. Die Zahlen  $\omega_n$  bezeichnen die nach wachsenden absoluten Beträgen geordneten Nullstellen der ganzen Funktion

$$\int e^{\Phi(x)} dx,$$

wo  $\Phi(x)$  eine beliebige ganze Funktion ist. Es sei ferner  $\psi(x)$  eine ganze Funktion mit der Eigenschaft  $\psi(\omega_n) = 1$  für alle  $n$ . Dann kann man setzen

$$f(x) = -\psi(x) e^{-\Phi(x)} \left( \int e^{\Phi(x)} dx \right) B(x),$$

wo  $f(x)$  eine ganze Funktion ist, welche für  $x = \omega_1, \omega_2, \dots, \omega_\nu, \dots$  die Werte  $f(\omega_\nu)$  annimmt.

Ganz ähnliche Umkehrtheoreme erhält man für die DIRICHLET'schen Reihen. Für die Anwendungen auf die analytische Zahlentheorie ist der folgende Satz fundamental:

Es sei eine DIRICHLET'sche Reihe

$$\varphi(x) = \sum_1^{\infty} r^{-x} f(r) \tag{5}$$

gegeben, wo  $\sum r^{-2} f(r)$  konvergent vorausgesetzt wird; man kann dann setzen

$$f(x) = -\frac{\sin 2\pi x}{2\pi} \sum_1^{\infty} x^\nu \varphi(\nu+1), \quad (6)$$

wo  $f(x)$  eine ganze Funktion ist, welche für  $x = 1, 2, \dots, r, \dots$  die Werte  $f(r)$  annimmt. Die Reihe  $\sum x^\nu \varphi(\nu+1)$  ist mindestens für  $|x| < 1$  konvergent.

Der Satz folgt sogleich, wenn man (3) nach Potenzen von  $x$  entwickelt und (5) benutzt, also

$$b(x) = \sum_1^{\infty} x^\nu \varphi(\nu+1) \quad (|x| < 1). \quad (7)$$

Aus (6) erhält man beispielsweise die folgenden Darstellungen von zahlentheoretischen Funktionen, welche als Koeffizienten in DIRICHLET'schen Reihen auftreten (als ganze Funktionen):

$$\tau(x) = -\frac{\sin 2\pi x}{2\pi} \sum_1^{\infty} x^\nu s_{\nu+1}, \quad (8)$$

wo  $\tau(n)$  die Anzahl der Divisoren von  $n$  bezeichnet, während  $s_n$  wie gewöhnlich für  $\zeta(n)$  steht;

$$\tilde{\omega}(x) = -\frac{\sin 2\pi x}{2\pi} \sum_1^{\infty} x^\nu l s_{\nu+1}, \quad (9)$$

wo  $\tilde{\omega}(n)$  die bekannte RIEMANN'sche Funktion ist, welche für  $n = p^r$ , wo  $p$  eine Primzahl und  $r$  eine ganze positive Zahl ist, den Wert  $\frac{1}{r}$  annimmt, aber für alle anderen ganzen Werte verschwindet;

$$\mathcal{A}(x) = \frac{\sin 2\pi x}{2\pi} \sum_1^{\infty} x^\nu \frac{\zeta'(\nu+1)}{\zeta(\nu+1)}, \quad (10)$$

$$\mu(x) = -\frac{\sin 2\pi x}{2\pi} \sum_1^{\infty} x^\nu s_{\nu+1}^{-1}, \quad (11)$$

$$\lambda(x) = -\frac{\sin 2\pi x}{2\pi} \sum_1^{\infty} x^\nu \frac{s_{2\nu+2}}{s_{\nu+1}}, \quad (12)$$

wo  $\mathcal{A}(n)$ ,  $\mu(n)$ ,  $\lambda(n)$  die in LANDAU's Handbuch der Lehre von der Verteilung der Primzahlen<sup>1</sup> benutzte Bedeutung haben;

<sup>1</sup> Leipzig und Berlin 1909, vol. I—II; im folgenden als »LANDAU« zitiert.

$$\frac{\varphi_0(x)}{x} = -\frac{\sin 2\pi x}{2\pi} \sum_1^{\infty} x^{\nu} \frac{\delta_{\nu+1}}{\delta_{\nu+2}}, \quad (13)$$

wo  $\varphi_0(n)$  die gewöhnlich mit  $\varphi(n)$  bezeichnete EULER'sche Funktion ist;

$$\frac{\sigma(x)}{x} = -\frac{\sin 2\pi x}{2\pi} \sum_1^{\infty} x^{\nu} \delta_{\nu+1} \delta_{\nu+2}, \quad (14)$$

wo  $\sigma(n)$  die Summe aller Divisoren von  $n$  bedeutet.

Wie in dem Falle der Partialbruchreihen kann man auch hier ein Umkehrtheorem für eine viel allgemeinere Klasse von Reihen aufstellen. Es lautet:

*Es sei eine DIRICHLET'sche Reihe*

$$\varphi(x) = \sum_1^{\infty} \omega_r^{-x} f(\omega_r)$$

gegeben, wo

$$\frac{f(\omega_r)}{\omega_r} = O(r^{-1-\delta}) \quad (\delta > 0).$$

Die Zahlen  $\omega_n$  ( $\omega_1 \neq 0$ ) bezeichnen die nach wachsenden absoluten Beträgen geordneten Nullstellen der ganzen Funktion

$$\int e^{\Phi(x)} dx,$$

wo  $\Phi(x)$  eine beliebige ganze Funktion ist. Es sei ferner  $\psi(x)$  eine ganze Funktion mit der Eigenschaft  $\psi(\omega_n) = 1$  für alle  $n$ . Dann kann man setzen

$$f(x) = -\psi(x) e^{-\Phi(x)} \left( \int e^{\Phi(x)} dx \right) \sum_0^{\infty} x^{\nu} \varphi(\nu + 1) \quad (|x| < |\omega_1|),$$

wo  $f(x)$  eine ganze Funktion ist, welche für  $x = \omega_1, \omega_2, \dots, \omega_{\nu}, \dots$  die Werte  $f(\omega_{\nu})$  annimmt.

Um die durch (2) und (3) definierte Klasse von ganzen Funktionen näher zu studieren, müssen wir die verschiedenen Darstellungsweisen, welche sie zulässt, untersuchen, im besonderen ihre Produktentwicklung, Potenzreihe, Faktoriellenreihe und Integraldarstellung.

Die Form der WEIERSTRASS'schen Produktentwicklung unserer Funktionenklasse hängt bekanntlich von der Verteilung der Nullstellen ab. Hierüber hat man zuerst den Satz:

*Es sei  $f(n) \geq 0$  für alle  $n$ . Dann hat  $f(x)$  lauter reelle Nullstellen; diejenigen Nullstellen, welche nicht dem Faktor  $\sin 2\pi x$  angehören, sind alle positiv.*

Der Satz wird sogleich bewiesen, indem man in (3)  $x = \xi + i\eta$  setzt und den reellen Teil von dem imaginären trennt.

Unter der genannten Voraussetzung  $f(n) \geq 0$  hat, wie aus (3) erhellt,  $b(x)$  höchstens eine Nullstelle zwischen  $\nu$  und  $\nu + 1$ . Werden die Nullstellen von  $f(x)$  mit  $\alpha_r$  bezeichnet, ist also  $\sum |\alpha_r|^{-2}$  konvergent, so muss  $f(x)$  die Form

$$f(x) = e^{A(x)} \cdot x^2 \prod_{r=3}^{\infty} \left(1 - \frac{x}{\alpha_r}\right) e^{\frac{x}{\alpha_r}} \quad (15)$$

haben, wo  $A(x)$  eine ganze Funktion bezeichnet.

Durch ganz elementaren Betrachtungen über die Variation des Vorzeichens von (3) beweist man übrigens den folgenden Satz über die genaue Anzahl der Nullstellen von  $f(x)$ :

*Es sei  $f(n) \geq 0$  für alle  $n$ , und es sei  $N$  eine solche positive ganze Zahl, dass  $f(N) \neq 0$ , während  $\varepsilon$  eine genügend kleine positive Grösse bezeichnet. Dann hat  $f(x)$  innerhalb eines Kreises mit Zentrum im Nullpunkte und Radius  $N + \varepsilon$  genau  $4N + 1$  Nullstellen.*

Wir werden jetzt die Voraussetzung  $f(n) \geq 0$  fallen lassen. Unter der Annahme (4) erhält man aus (3), indem  $x = \xi + i\eta$ ,

$$\left| \frac{b(x)}{x} \right| < \sum_1^{\infty} \frac{K}{n^2 \sqrt{(\xi - n)^2 + \eta^2}}. \quad (16)$$

Eine nähere Untersuchung dieses Majorantwertes zeigt, dass  $\frac{b(x)}{x}$  gleichmässig verschwindet, wenn sich  $x$  ins Unendliche entfernt, ohne einem Pole von  $b(x)$  unendlich nahe zu kommen. Andererseits ist bekanntlich  $\sin 2\pi x = O(e^{2\pi|x|})$ . Mit Bezug auf die Pole findet man aus (2) und (3) für  $x = \nu + h$  ( $|h| \leq \lambda$ ) den Majorantwert  $f(\nu + h) = O(\nu^2)$ . Zusammen genommen besagt dies, dass man für das Maximum  $M(r)$  des absoluten Betrages von  $f(x)$  für  $|x| = r$  die Ungleichheit

$$M(r) < e^{r^{1+\varepsilon}} \quad (\varepsilon \text{ beliebig klein } > 0) \quad (17)$$

hat, welche von einem gewissen Werte von  $r$  ab stattfindet.

Aus (17) folgt nach dem Satz von HADAMARD, dass  $f(x)$  die folgende Form hat

$$f(x) = k e^{ax} \cdot x^2 \prod_{r=3}^{\infty} \left(1 - \frac{x}{\alpha_r}\right) e^{\frac{x}{\alpha_r}}, \quad (18)$$

wo übrigens

$$k = - \sum_1^{\infty} \frac{f(n)}{n^2}. \quad (19)$$

Man erhält die *Potenzreihe* für  $f(x)$ , indem man die Potenzreihe für  $b(x)$  oder (7) mit der Potenzreihe für  $-\frac{\sin 2\pi x}{2\pi}$  multipliziert, also

$$\left. \begin{aligned} f(x) &= \sum_2^{\infty} a_\nu x^\nu, \\ a_\nu &= -\varphi(\nu) + \frac{(2\pi)^2}{3!} \varphi(\nu-2) - \frac{(2\pi)^4}{5!} \varphi(\nu-4) + \dots \end{aligned} \right\} \quad (20)$$

Da  $f(x)$  eine ganze Funktion ist, konvergiert diese Potenzreihe für jedes endliche  $x$ . Die Entwicklung für  $a_\nu$  enthält nur eine *endliche* Anzahl von Gliedern und bricht mit  $\varphi(2)$  oder  $\varphi(3)$  ab, je nachdem  $\nu$  gerade oder ungerade ist.

Man erhält zum Beispiel aus (20)

$$\tilde{\omega}(x) = \sum_2^{\infty} x^\nu \left( -l s_\nu + \frac{(2\pi)^2}{3!} l s_{\nu-2} - \frac{(2\pi)^4}{5!} l s_{\nu-4} + \dots \right), \quad (21)$$

$$\tau(x) = \sum_2^{\infty} x^\nu \left( -s_\nu^2 + \frac{(2\pi)^2}{3!} s_{\nu-2}^2 - \frac{(2\pi)^4}{5!} s_{\nu-4}^2 + \dots \right), \quad (22)$$

$$\mu(x) = \sum_2^{\infty} x^\nu \left( -\frac{1}{s_\nu} + \frac{(2\pi)^2}{3!} \frac{1}{s_{\nu-2}} - \frac{(2\pi)^4}{5!} \frac{1}{s_{\nu-4}} + \dots \right). \quad (23)$$

Überhaupt können die Koeffizienten der Mehrzahl der in der analytischen Zahlentheorie auftretenden Potenzreihen dieser Art einfach durch die »Potenzsummen«  $s_\nu$  ausgedrückt werden,<sup>1</sup> doch erfordert die Reihe für  $\mathcal{A}(x)$  auch Kenntnis von  $\zeta'(\nu)$ . In Bezug auf die von KOCH'sche Divisorfunktion hat dieser Verfasser schon erkannt, dass ihre Koeffizienten rationale Polynome in  $\pi$  sind.

In Bezug auf die Grössenordnung von  $a_\nu$  ist, da  $f(x)$  das Geschlecht 1 hat, nach POINCARÉ

$$\lim_{\nu \rightarrow \infty} a_\nu \sqrt{\nu!} = 0, \quad (24)$$

<sup>1</sup> In Bezug auf die numerischen Werte der  $s_\nu$  siehe die in N. NIELSEN »Handbuch der Theorie der Gammafunktion« S. 39 angegebene Literatur.

also speziell

$$a_\nu = O\left(\frac{1}{V\nu!}\right). \quad (25)$$

Man kann dieses Resultat verschärfen, indem man in (2) die Identität

$$\frac{\sin 2\pi(x-n)}{x-n} = \int_0^{2\pi} \cos(x-n)t dt$$

einführt und differentiiert. Man erhält

$$\left. \begin{aligned} a_{2r} &= \frac{(-1)^r}{2\pi(2r)!} \sum_{n=1}^{\infty} f(n) \int_0^{2\pi} t^{2r} \cos nt dt, \\ a_{2r+1} &= \frac{(-1)^r}{2\pi(2r+1)!} \sum_{n=1}^{\infty} f(n) \left[ \frac{(2\pi)^{2r+1}}{n} + \int_0^{2\pi} t^{2r+1} \sin nt dt \right], \end{aligned} \right\} \quad (26)$$

woraus durch leichte Rechnungen

$$\left. \begin{aligned} |a_\nu| &< K \frac{(2\pi)^{\nu-1}}{(\nu-1)!}, \\ K &= \frac{1}{\pi} \sum_1^{\infty} \frac{|f(n)|}{n^2}. \end{aligned} \right\} \quad (27)$$

Entwickelt man  $f(x)$  nach Potenzen von  $lx$ , so erhält man eine für jeden endlichen Wert von  $lx$  geltende Potenzreihe

$$\left. \begin{aligned} f(x) &= \sum_0^{\infty} g_n (lx)^n, \\ g_n &= \frac{1}{n!} \sum_2^{\infty} a_\nu \nu^n, \end{aligned} \right\} \quad (28)$$

wo

$$\left. \begin{aligned} |g_n| &< \frac{K}{n!} \sum_{\nu=2}^{\infty} \frac{(2\pi)^{\nu-1} \nu^n}{(\nu-1)!} \\ &< \frac{K}{2\pi} (n+1) \left( \frac{e}{l \frac{n+1}{2\pi}} \right)^{n+1} - \frac{K}{n!}. \end{aligned} \right\} \quad (29)$$



Über die Möglichkeit, Reihen von der Form (28) für numerische Rechnungen zu benutzen, gibt (29) leider keinen Aufschluss.

Der Versuch,  $f(x)$  in eine *Faktoriellenreihe*, das heisst in eine Reihe nach den Polynomen

$$x^{(n)} = x(x-1) \dots (x-n+1)$$

zu entwickeln, führt auf interessante Resultate. Wir nehmen zum Ausgangspunkt NEWTON'S Formel für Interpolation mit dividierten Differenzen<sup>1</sup>

$$\left. \begin{aligned} u(x) = & u(a) + (x-a) \delta(a, b) + (x-a)(x-b) \delta(a, b, c) + \dots \\ & + (x-a)(x-b) \dots (x-g) \delta(a, b, \dots, h) \\ & + (x-a)(x-b) \dots (x-h) \delta(a, b, \dots, h, x), \end{aligned} \right\} \quad (30)$$

wo

$$\delta(a, b, \dots, h, x) = \frac{u(x)}{(x-a)(x-b) \dots (x-h)} + \sum \frac{u(e)}{(e-a)(e-b) \dots (e-x)}. \quad (31)$$

Für die spezielle Argumentenreihe

$$0, 1, -1, 2, -2, \dots, n, -n$$

erhält man hieraus

$$\begin{aligned} x(x^2-1) \dots (x^2-n^2) \sum_{\nu=-n}^{\nu=n} \frac{-u(\nu)}{\nu(\nu^2-1) \dots (\nu^2-n^2)(\nu-x)} = \\ = u(0) + \frac{x}{1} \mathcal{A} u(0) + \dots + \frac{x(x^2-1) \dots [x^2-(n-1)^2] \cdot (x-n)}{(2n)!} \mathcal{A}^{2n} u(-n), \end{aligned}$$

wo im Nenner der Faktor  $(\nu-r)$  für  $r=\nu$  ausgelassen wird. Um in dieser Formel  $n$  ohne Grenzen wachsen lassen zu dürfen, kann man  $\sum \left| \frac{u(\nu)}{\nu} \right|$  konvergent annehmen. Man erhält dann durch einfache Überlegungen den Satz:

Es sei  $\sum_{-\infty}^{\infty} \left| \frac{u(\nu)}{\nu} \right|$  konvergent; dann hat man

$$\left. \begin{aligned} -\frac{\sin \pi x}{\pi} \sum_{-\infty}^{\infty} \frac{(-1)^\nu u(\nu)}{\nu-x} = u(0) + \\ + \sum_0^{\infty} \left[ \binom{x+r}{2r+1} \mathcal{A}^{2r+1} u(-r) + \binom{x+r}{2r+2} \mathcal{A}^{2r+2} u(-r-1) \right], \end{aligned} \right\} \quad (32)$$

<sup>1</sup> THEILE: Interpolationsrechnung, S. 5 (Leipzig 1909).

eine Reihe, die gleichmässig in jedem endlichen Bereich konvergiert. Jede ganze Funktion von dem Typus

$$u(x) = -\frac{\sin \pi x}{\pi} \sum_{-\infty}^{\infty} \frac{(-1)^{\nu} u(\nu)}{\nu - x}$$

lässt sich daher unter der gegebenen Voraussetzung in eine Faktoriellenreihe der genannten Art entwickeln.

Man erhält z. B. für  $u(0) = 1$ ,  $u(\nu) = 0$  ( $\nu \neq 0$ ),

$$\frac{\sin \pi x}{\pi x} = 1 + \sum_0^{\infty} \frac{(0-x^2)(1-x^2)(4-x^2)\dots(r^2-x^2)}{[(r+1)!]^2} \quad (33)$$

und für  $x = \frac{1}{2}$

$$\frac{2}{\pi} = 1 + \sum_0^{\infty} \frac{\left(0 - \frac{1}{4}\right)\left(1 - \frac{1}{4}\right)\left(4 - \frac{1}{4}\right)\dots\left(r^2 - \frac{1}{4}\right)}{[(r+1)!]^2}. \quad (34)$$

Eine wichtige Folgerung aus (32) ist, dass die Interpolationsformel von DE LA VALLÉE-POUSSIN<sup>1</sup> — welche nichts als die linke Seite von (32) für eine endliche Anzahl von  $u(\nu)$  ist — sich immer in eine beständig konvergierende Faktoriellenreihe der genannten Art entwickeln lässt. Bei dieser Entwicklung ersetzt man natürlich die fehlenden Funktionswerte durch Nullen.

Unsere Funktionenklasse  $f(x)$  gehört zum Typus  $u(x)$ ; um ihre Entwicklung nach (32) zu erhalten, ersetzt man einfach darin  $x$  durch  $2x$  und setzt

$$u(0) = u(-n) = u(2n+1) = 0,$$

$$u(2n) = \frac{f(n)}{n}.$$

Hinreichende Bedingungen für die Entwicklung einer ganzen Funktion in eine Interpolationsreihe sind neuerdings von G. FABER<sup>2</sup> elementar aufgestellt worden.<sup>3</sup> Die FABER'sche Bedingungen scheinen jedoch auf die Funktionenklasse  $f(x)$  nicht unmittelbar anwendbar zu sein.

<sup>1</sup> Académie Royale de Belgique, Bulletins de la classe des sciences, 1908, S. 319.

<sup>2</sup> Mathematische Annalen, vol. 70 (1911), S. 48.

<sup>3</sup> Das exakte Restglied in NEWTON's Formel ist von J. L. W. V. JENSEN angegeben worden (Bull. de l'Ac. Royale de Danemark, 1894, S. 251).

Der wichtigste Bestandteil von  $f(x)$ , nämlich die meromorphe Funktion  $b(x)$ , kann unter gewissen — freilich ziemlich einschränkenden — Bedingungen nach *Fakultäten* (in englischer Bezeichnungsweise »inverse Faktoriellen«) entwickelt werden.

Es muss offenbar eine Identität von der Form

$$\sum_1^n \frac{(-1)^{\nu+1} \nu a_\nu}{x + \nu} = \sum_1^n \frac{\nu! b_\nu}{(x+1) \dots (x+\nu)} \quad (35)$$

bestehen. Man erhält durch den allgemeinen Induktionsbeweis

$$b_r = a_r - \binom{r+1}{1} a_{r+1} + \binom{r+2}{2} a_{r+2} - \dots + (-1)^{n-r} \binom{n}{n-r} a_n. \quad (36)$$

Indem man in (35)  $n$  ohne Grenzen wachsen lässt, erhält man den folgenden Satz:<sup>1</sup>

Es sei

$$\beta_r \equiv \sum_{\nu=0}^{\infty} (-1)^\nu \binom{r+\nu}{\nu} a_{r+\nu} \quad (r = 0, 1, 2, \dots) \quad (37)$$

und  $\sum_1^{\infty} r^N \beta_r$  konvergent; es sei ferner der absolute Betrag der Summe der ersten  $m$  Glieder von (37) kleiner als eine von  $m$  und  $r$  unabhängige Konstante; dann ist

$$\sum_1^{\infty} \frac{(-1)^{\nu+1} \nu a_\nu}{x + \nu} = \sum_1^{\infty} \frac{r! \beta_r}{(x+1) \dots (x+r)}, \quad (38)$$

wo die Partialbruchreihe in jedem endlichen Bereich, und die Fakultätenreihe in jedem endlichen, ganz rechts von der Geraden  $\Re(x) = -N$  liegenden Bereich (nach Ausschneiden der Pole) gleichmässig konvergiert.<sup>2</sup>

Diese Bedingungen sind für alle  $N$  immer erfüllt, wenn die Reihe  $\sum_0^{\infty} a_\nu t^\nu$  einen Konvergenzradius grösser als 2 hat. In diesem Falle findet also die Beziehung (38) immer statt (Satz von PINCHERLE).<sup>3</sup>

Wir werden schliesslich  $b(x)$  und somit  $f(x)$  mittels bestimmter Integrale darstellen. Man kann auf die Potenzreihe (7) die allgemeinen Summations-

<sup>1</sup> Cfr. Hilfsatz von H. BOHR in »Bidrag til de DIRICHLET'ske Rækkers Teori«, Kopenhagen 1910, S. 58—59.

<sup>2</sup> Über Beziehungen zwischen Partialbruchreihen und Fakultätenreihen siehe ferner N. NIELSEN: Handbuch der Theorie der Gammafunktion. §§ 96, 97.

<sup>3</sup> Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, t. 2, p. 225—6; 1888.

formeln<sup>1</sup> anwenden; wir werden in (5) der Bequemlichkeit halber  $f(r) = O(r^{1-\delta})$  annehmen und erhalten zuerst (LINDELÖF, S. 61, Formel IV) die Formel

$$b(x) = \frac{1}{2} x \varphi(2) + \int_1^{\infty} x^{\tau} \varphi(\tau + 1) d\tau + ix \int_0^{\infty} \frac{x^{it} \varphi(2 + it) - x^{-it} \varphi(2 - it)}{e^{2\pi t} - 1} dt, \quad (39)$$

welche für  $|x| < 1$ ,  $|\text{Arg. } x| < 2\pi$  gültig ist. Hier ist  $x^z = e^{z \log x}$ , wo  $\log x$  den Hauptwert des Logarithmus bezeichnet. Das zweite der in (39) auftretenden Integrale stellt für  $|x| > 0$ ,  $|\text{Arg. } x| < 2\pi$  eine holomorphe Funktion dar. Das Integral

$$I(x) = \int_1^{\infty} x^{\tau} \varphi(\tau + 1) d\tau \quad (|x| < 1) \quad (40)$$

muss deshalb eine Funktion mit denselben Singularitäten (Polen) wie  $b(x)$  und ausserdem einem kritischen Punkt in  $x = 0$  darstellen. Das Studium der Funktion  $f(x)$  ist demnach wesentlich auf eine Untersuchung des Integrals  $I(x)$  reduziert.

Man erhält eine Bestätigung dieses Resultats, indem man in (40) die DIRICHLET'sche Reihe für  $\varphi(\tau + 1)$  einführt. Man erhält dadurch die wichtige Formel

$$\sum_1^{\infty} \frac{f(r)}{r^2} \frac{1}{lr - lx} = \int_0^{\infty} x^t \varphi(t + 2) dt \quad (41)$$

oder

$$\sum_1^{\infty} \frac{f(r)}{r^2} \frac{1}{z + lr} = \int_0^{\infty} e^{-zt} \varphi(t + 2) dt, \quad (42)$$

wodurch eine Reihe von neuen Beziehungen zwischen zahlentheoretischen Funktionen und den zugehörigen DIRICHLET'schen Reihen hergestellt ist. Die linke Seite von (42) konvergiert gleichmässig in jedem endlichen Bereich (nach Ausschneiden der Pole in gewöhnlicher Weise); die rechte Seite konvergiert gleichmässig für  $\Re(z) > \eta > 0$ .

Durch Anwendung einer anderen Summationsformel [LINDELÖF, S. III, Formel (4)] erhält man die Darstellung

<sup>1</sup> E. LINDELÖF: Le calcul des résidus et ses applications à la théorie des fonctions, Paris 1905, chap. III (als »LINDELÖF« zitiert).

$$b(x) = - \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} \frac{x^z \varphi(z+1)}{e^{2\pi iz} - 1} dz, \quad (43)$$

wo  $0 < \alpha < 1$ ,  $1 - \delta < \alpha$ .<sup>1</sup> In  $x^z = e^{zlx}$  bedeutet  $lx$  nicht mehr den Hauptwert, sondern hat unterhalb der positiven Achse einen anderen Wert. Das Integral in (43) konvergiert, wenn  $x$  nicht der Strecke  $0 \cdots +\infty$  angehört. Die Konvergenz ist gleichmässig in jedem endlichen Bereich, welcher keinen Teil dieser Strecke enthält.

Für  $f(x)$  erhält man demnach die Hauptdarstellung

$$f(x) = \frac{\sin 2\pi x}{2\pi} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} \frac{x^z \varphi(z+1)}{e^{2\pi iz} - 1} dz, \quad (44)$$

welche unter den soeben angegebenen Bedingungen gültig ist. Wenn  $x$  der verbotenen Strecke angehört, kann man jedoch  $f(x)$  aus (44) durch einen Grenzübergang erhalten.

Man kann in (44)  $\alpha = 1$  setzen, wenn man zum Integral  $-\frac{1}{2}x\varphi(2)$  addiert (LINDELÖF, S. 116). Wir setzen zur selben Zeit  $x = -\xi$  und verstehen jetzt wieder unter  $l$  den Hauptwert des Logarithmus. Führt man die Bezeichnung

$$\Xi(t, \xi) = \sum_1^{\infty} \frac{f(r)}{r^2} \sin\left(t \cdot l \frac{\xi}{r}\right) \quad (45)$$

ein, so kann (44) demnach in reeller Form geschrieben werden

$$f(-\xi) = \frac{\xi \sin 2\pi \xi}{2\pi} \left[ -\frac{1}{2} \varphi(2) + 2 \int_0^{\infty} \frac{\Xi(t, \xi)}{e^{\pi t} - e^{-\pi t}} dt \right]. \quad (46)$$

Als sehr speziellen Fall erhält man für  $f(1) = 1$ ,  $f(r) = 0 (r > 1)$  die leicht zu verifizierende Formel

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{1 + \xi} = 2 \int_0^{\infty} \frac{\sin(t \cdot l \xi)}{e^{\pi t} - e^{-\pi t}} dt. \quad (47)$$

---

<sup>1</sup> Wenn die DIRICHLET'sche Reihe für  $\varphi(s)$  für  $\Re(s) > 1$  absolut konvergiert, braucht man die Bedingung  $1 - \delta < \alpha$  nicht.

Nachdem wir einige der wichtigsten Darstellungen unserer Funktionenklasse untersucht haben, wird es von Wichtigkeit sein, die endliche Summe  $\sum_1^{n-1} f(x)$ , welche von besonderem Interesse für die analytische Zahlentheorie ist, zu studieren.

Wir benutzen die Bezeichnung

$$\Psi_{\nu+1}(n) = \sum_{x=1}^{n-1} x^\nu; \quad (48)$$

diese Summe lässt sich bekanntlich mittels BERNOULLI'scher Zahlen ausdrücken; man findet

$$\Psi_{\nu+1}(n) = \frac{n^{\nu+1}}{\nu+1} - \frac{n^\nu}{2} + \sum_{r=1}^{\nu-1} (-1)^{\frac{r-1}{2}} \frac{B_r}{r+1} \binom{\nu}{r} n^{\nu-r}, \quad (49)$$

wo

$$B_{2m} = 0; \quad B_1 = \frac{1}{6}, \quad B_3 = \frac{1}{30}, \dots$$

Wendet man dies auf (20) an, so erhält man zunächst für jedes positive ganze  $n$

$$\sum_1^{n-1} f(x) = \sum_{\nu=2}^{\infty} a_\nu \Psi_{\nu+1}(n). \quad (50)$$

Man findet z. B. für die Summe  $\sum_1^{n-1} \tilde{\omega}(x)$ , welche mit der Primzahlmenge eng verwandt ist und als »Menge der dividierten Primzahlpotenzen« bezeichnet worden ist, den exakten Ausdruck

$$\sum_1^{n-1} \tilde{\omega}(x) = \sum_{\nu=2}^{\infty} \Psi_{\nu+1}(n) \left( -l s_\nu + \frac{(2\pi)^2}{3!} l s_{\nu-2} - \frac{(2\pi)^4}{5!} l s_{\nu-4} + \dots \right). \quad (51)$$

Wir werden später sehen, wie man (50) so modifizieren kann, dass man eine ganze Funktion von  $n$  bekommt.

Auch die Faktoriellenreihen für  $f(x)$  und für  $\frac{f(x)}{x}$  lassen sich leicht gliedweise summieren und zwar so, dass man unmittelbar ersieht, dass man hier eine ganze Funktion von  $n$  bekommt. Wir werden jedoch die schwer verwendbaren Ausdrücke nicht hier niederschreiben.

Man kann ferner die PLANA-CAUCHY'sche Summationsformel<sup>1</sup> auf  $\frac{f(x)}{x}$  anwenden<sup>2</sup>; dies gibt

$$\sum_m^n \frac{f(\nu)}{\nu} = \frac{1}{2} \left[ \frac{f(m)}{m} + \frac{f(n)}{n} \right] + \int_m^n \frac{f(x)}{x} dx - 2 \int_0^\infty \frac{q(m, t) - q(n, t)}{e^{2\pi t} - 1} dt, \quad (52)$$

wo

$$q(x, t) = \frac{1}{2i} \left[ \frac{f(x + it)}{x + it} - \frac{f(x - it)}{x - it} \right]. \quad (53)$$

Diese Darstellung ist jedoch von unserm gegenwärtigen Gesichtspunkte aus von wenig Wert, da die rechte Seite von (52) im Allgemeinen keine analytische Funktion von  $n$  darstellt. Dieses ist zwar der Fall, wenn z. B.

$$\frac{f(z + it)}{z + it} = O \left( \frac{e^{2\pi |t|}}{|t|^{1+\varepsilon}} \right) \quad (\varepsilon > 0) \quad (54)$$

für alle  $z$ , welche einem zweidimensionalen Bereich angehören, und für  $z = m$ ; aber unsere Funktionenklasse  $f(x)$  befriedigt im Allgemeinen nicht die Bedingung (54). Man findet nämlich aus (16) durch einfache Rechnungen gleichmässig für alle  $\xi$ , welche zwischen zwei beliebigen endlichen Grenzen liegen,

$$\frac{b(x)}{x} = \begin{cases} O(\eta^{-\delta}) & (0 < \delta < 1) \\ O(\eta^{-1} l \eta) & (\delta = 1) \\ O(\eta^{-1}) & (\delta > 1) \end{cases} \quad (55)$$

oder

$$f(x) = \begin{cases} O(e^{2\pi \eta} \eta^{1-\delta}) & (0 < \delta < 1) \\ O(e^{2\pi \eta} l \eta) & (\delta = 1) \\ O(e^{2\pi \eta}) & (\delta > 1) \end{cases}, \quad (56)$$

Relationen, die weniger genau als (54) sind.

Auch die Reihe (28) kann gliedweise durch die PLANA-CAUCHY'sche Formel summiert werden; man erhält dadurch neue exakte Ausdrücke für die Primzahlmenge und ähnliche Funktionen. Wir werden jedoch hierauf nicht näher eingehen.

<sup>1</sup> LINDELÖF S. 61 Formel III.

<sup>2</sup> Nicht aber auf  $f(x)$ , welches an sich eine ziemliche Beschränkung ist.

Dagegen müssen wir eine Summationsformel besprechen, welche der Formel von LUBBOCK<sup>1</sup> darin ähnlich ist, dass sie nicht die Kenntnis der Differentialquotienten, sondern nur die der äquidistanten Differenzen der zu summierenden Funktion voraussetzt. Die neue Formel lässt sich leicht durch die sogenannten »symbolischen« Methoden formell ableiten,<sup>2</sup> lässt sich aber für unsere Funktionenklasse streng begründen. Man hat nämlich identisch

$$\int_0^n F(x) dx = \sum_{k=0}^{n-1} \int_0^1 F(x+k) dx, \quad (57)$$

wo nur vorausgesetzt wird, dass  $F(x)$  in dem Intervall  $0 \dots n$  integrabel ist.

Hat die Funktion die Form

$$\begin{aligned} F(x+k) &= -\frac{\sin \pi x}{\pi} \sum_{-\infty}^{\infty} \frac{(-1)^{\nu} F(\nu+k)}{\nu-x} \\ &= -\frac{\sin \pi(x+k)}{\pi} \sum_{-\infty}^{\infty} \frac{(-1)^{\nu} F(\nu)}{\nu-(x+k)}, \end{aligned}$$

so erhält man aus (32) für alle  $k$

$$F(x+k) = F(k) + \sum_0^{\infty} \left[ \binom{x+r}{2r+1} \Delta^{2r+1} F(k-r) + \binom{x+r}{2r+2} \Delta^{2r+2} F(k-r-1) \right]$$

und durch Einsetzen in (57)

$$\left. \begin{aligned} \sum_0^{n-1} F(k) &= \int_0^n F(x) dx - \sum_0^{\infty} \left[ P_{2r+1} \Delta^{2r} (F(n-r) - F(-r)) + \right. \\ &\quad \left. + P_{2r+2} \Delta^{2r+1} (F(n-r-1) - F(-r-1)) \right] \end{aligned} \right\} \quad (58)$$

wo

$$P_{2r+1} = \int_0^1 \binom{x+r}{2r+1} dx, \quad P_{2r+2} = \int_0^1 \binom{x+r}{2r+2} dx = 2P_{2r+3}. \quad (59)$$

Man findet

<sup>1</sup> Cambridge Philosophical Transactions 1829; siehe auch Institute of Actuaries' Text Book II S. 467 (10. Ed., London 1887).

<sup>2</sup> THEILE: Interpolationsrechnung § 29 (Leipzig 1909).



$$P_1 = \frac{1}{2}$$

$$P_3 = -\frac{1}{24}$$

$$P_5 = \frac{11}{1440}$$

$$P_7 = -\frac{191}{120960}$$

$$P_9 = \frac{2497}{7257600}$$

und durch den »Zweiten Mittelwertsatz«

$$|P_{2r+1}| \leq \frac{1}{(8r+4) \binom{2r}{r}} \quad (r > 0). \quad (60)$$

Wenn ferner

$$\lim_{r \rightarrow \infty} P_{2r+1} A^{2r} [F(n-r) - F(-r)] = 0,$$

eine Voraussetzung, die z. B. immer erfüllt ist, wenn  $F(\pm m) = O(1)$ , so kann man schreiben

$$\left. \begin{aligned} \sum_0^{n-1} F(k) &= \int_0^n F(x) dx - \frac{1}{2} [F(n) + F(0)] - \\ &- \sum_0^\infty P_{2r+1} A^{2r-1} [F(n-r) + F(n-r+1) - F(-r) - F(-r+1)]. \end{aligned} \right\} \quad (61)$$

Wenn man (58) und (61) mit den gewöhnlichen Summationsformeln<sup>1</sup> vergleicht, so erhellt, dass während diese letzteren durchgehends »halbkonvergent« sind, (58) und (61) immer konvergieren, wenn  $F(x)$  zum Typus  $u(x)$  gehört.

Mit anderen Worten:  $\sum_0^{n-1} F(k)$  kann dann als die Summe einer ganzen Funk-

tion von  $n$ , nämlich  $\int_0^n F(x) dx$ , und einer beständig konvergenten Reihe von Kor-

<sup>1</sup> LINDELÖF S. 75—83.

rektionsgliedern dargestellt werden, so dass das Summationsproblem hauptsächlich auf die Berechnung der ganzen Funktion  $\int_0^n F(x)dx$  zurückgeführt ist.

Um den Satz auf  $\frac{f(x)}{x}$  anzuwenden<sup>1</sup>, setzt man

$$F(0) = F(-\nu) = F(2\nu + 1) = 0,$$

$$F(2\nu) = \frac{f(\nu)}{\nu};$$

man erhält dann, wenn in (58)  $2n$  für  $n$  gesetzt wird,

$$\sum_0^{n-1} \frac{f(\nu)}{\nu} = 2 \int_0^n \frac{f(x)}{x} dx + \text{Korrektionsglieder.} \quad (62)$$

Dass die Summe durch das *zweifache* Integral approximiert wird, ist eigentlich und stammt von den vielen Nullstellen der Funktion  $f(x)$  her.

Wir fragten oben nach den analytischen Eigenschaften von (50). A. HURWITZ<sup>2</sup> hat die allgemeine Frage gelöst:

Die Differenzengleichung

$$F_1(z + 1) - F_1(z) = F(z), \quad (63)$$

wo  $F(z)$  eine gegebene ganze Funktion ist, durch eine ganze Funktion zu integrieren.

Es sei in der Tat

$$F(z) = \sum_0^{\infty} \alpha_\nu z^\nu \quad (64)$$

überall konvergent und

$$g(z) = \sum_0^{\infty} \frac{n! \alpha_n}{(2\pi iz)^{n+1}} \quad (65)$$

für  $|z| > l$  konvergent;<sup>3</sup> die erste ganze Zahl  $> l$  werde durch  $r + 1$  bezeichnet;

<sup>1</sup> Auf  $f(x)$  selbst ist er nicht anwendbar.

<sup>2</sup> Acta Mathematica XX S. 285.

<sup>3</sup> Auch der Fall, dass (65) nirgends konvergiert, wird von Hurwitz behandelt; wir brauchen dies hier nicht.

endlich werden die Summen  $\pi_{m,r}$  eingeführt, definiert durch

$$\pi_{m,r}(z) = m! \sum_{k=\pm 1}^{k=\pm r} \frac{1 - e^{2k\pi iz}}{(2k\pi i)^{m+1}}, \quad (66)$$

wo  $k$  sämtliche positiven und negativen ganzen Zahlen von  $\pm 1$  bis  $\pm r$  inklusive durchläuft.

Der Satz von HURWITZ lautet dann mit unserer Bezeichnung (48):

*Eine ganze Funktion, welche (63) befriedigt, ist*

$$F_1(z) = \sum_0^{\infty} \alpha_m [\Psi_{m+1}(z) - \pi_{m,r}(z)], \quad (67)$$

*eine Reihe, die gleichmässig in jedem endlichen Bereich konvergiert. Sämtliche ganzen Lösungen werden erhalten, indem man zu (67) eine beliebige ganze Funktion mit der Periode 1 addiert.*

Für  $F_1(z)$  gibt HURWITZ die Integraldarstellung an

$$F_1(z) = \int_C \frac{e^{2\pi iz\zeta} - 1}{e^{2\pi i\zeta} - 1} g(\zeta) d\zeta, \quad (68)$$

wo über einen Kreis  $C$  um den Nullpunkt mit einem Radius grösser als  $l$  aber kleiner als  $r + 1$  integriert wird.

Wegen (27) kann man diesen Satz auf  $F(z) = f(z)$  mit  $l = 1$ ,  $r = 1$  anwenden und hat also

$$\sum_1^{s-1} f(x) = \sum_{v=2}^{\infty} a_v [\Psi_{v+1}(z) - \pi_{v,1}(z)], \quad (69)$$

*wo die rechte Seite eine ganze Funktion ist; für  $z = n$  wird diese Formel mit (50) identisch. Die Integraldarstellung (68) gilt hier, wenn  $C$  einen Radius zwischen 1 und 2 hat.*

Hierdurch kann man z. B. die Menge von dividierten Primzahlpotenzen als ganze Funktion in einer Form darstellen, in welche die Primzahlen selbst nicht eingehen.

In der übrigens sehr schönen Abhandlung von HURWITZ scheint es der Aufmerksamkeit des Verfassers entgangen zu sein, dass (69) sich durch eine kleine Modifikation der allgemeinen Summationsformel darstellen lässt. Man hat in der Tat

$$\left. \begin{aligned} \sum_1^{z-1} f(x) = \int_0^z f(\tau) d\tau - \frac{1}{2} [f(z) - f(0)] + 2 \int_0^\infty \frac{q(z, t) - q(0, t)}{e^{2\pi t} (e^{2\pi t} - 1)} dt + \\ + 2z \int_0^1 f(z\tau) \cos 2\pi z(1-\tau) d\tau, \end{aligned} \right\} \quad (70)$$

wo

$$q(z, t) = \frac{1}{2i} [f(z + it) - f(z - it)]. \quad (71)$$

Man erkennt dieses nach einigen Rechnungen, wenn man die rechten Seiten von (69) und (70) nach Potenzen von  $z$  entwickelt.

Die Formel (70) behält ihre Gültigkeit, wenn man überall  $f(s)$  durch  $\frac{f(s)}{s}$  ersetzt.

Man kann (70) etwas vereinfachen, wenn nicht verlangt wird, dass die  $\sum_1^{z-1} f(x)$  darstellende ganze Funktion mit der HURWITZ'schen identisch sein soll. Das letzte Glied in (70) kann nämlich folgendermassen geschrieben werden

$$2 \cos 2\pi z \int_0^z f(t) \cos 2\pi t dt + 2 \sin 2\pi z \int_0^z f(t) \sin 2\pi t dt;$$

für ganze  $z$  wird dies auf

$$2 \int_0^z f(t) \cos 2\pi t dt$$

reduziert. Man hat also die Summationsformel

$$\sum_1^{z-1} f(x) = \int_0^z (1 + 2 \cos 2\pi \tau) f(\tau) d\tau - \frac{1}{2} [f(z) - f(0)] + 2 \int_0^\infty \frac{q(z, t) - q(0, t)}{e^{2\pi t} (e^{2\pi t} - 1)} dt, \quad (72)$$

wo die rechte Seite eine ganze Funktion von  $z$  darstellt. Diese Summationsformel ist die einfachste, welche wir aufstellen können, wenn gefordert wird, dass sie eine ganze Funktion darstellen soll.

Man erhält zum Beispiel für die Menge der dividierten Primzahlpotenzen, als ganze Funktion aufgefasst,

$$\sum_1^{x-1} \tilde{\omega}(x) = \int_0^x (1 + 2 \cos 2\pi\tau) \tilde{\omega}(\tau) d\tau - \frac{1}{2} \tilde{\omega}(x) + 2 \int_0^\infty \frac{q(z, t) - q(0, t)}{e^{2\pi t}(e^{2\pi t} - 1)} dt, \quad (73)$$

wo

$$q(z, t) = \frac{1}{2i} [\tilde{\omega}(z + it) - \tilde{\omega}(z - it)]. \quad (74)$$

Eine Summationsformel, welche (72) als Spezialfall enthält, ist von LINDELÖF gegeben worden;<sup>1</sup> dieser Verfasser hat jedoch nicht die Eigenschaften der Formel als analytische Funktion der oberen Summationsgrenze vor Augen. Jedenfalls sind durch unsere Untersuchung die Resultate von HURWITZ und LINDELÖF in einen interessanten Zusammenhang gebracht worden.

Wir werden hier nur noch die einleuchtende Summationsformel

$$\sum_1^x f(n) = -\frac{1}{2\pi i} \int_\gamma b(z) dz \quad (75)$$

erwähnen, von welcher wir später einen wichtigen Gebrauch machen werden. Der Integrationsweg  $\gamma$  ist ein passend gewählter Kreis um den Nullpunkt.

Zum Summationsproblem gehört noch die Frage über den Zusammenhang zwischen  $\sum \frac{f(n)}{n}$  und  $\sum f(n)$ . Auch in den Fällen, wo die Summationsformel direkt auf beide Summen anwendbar ist, muss man — wie von LANDAU hervorgehoben — gewöhnlich vorziehen, nur die eine direkt zu berechnen und den Übergang auf die andere durch partielle Summation auszuführen. Man hat hierzu, indem wir die Bezeichnungen

$$S(x) = \sum_1^x f(n), \quad S_1(x) = \sum_1^x \frac{f(n)}{n} \quad (76)$$

einführen, die Formeln

$$S(x) = x S_1(x) - \sum_1^{x-1} S_1(n), \quad (77)$$

$$S_1(x) = \frac{1}{x+1} S(x) + \sum_1^x \frac{S(n)}{n(n+1)}. \quad (78)$$

---

<sup>1</sup> LINDELÖF S. 63.

Die Benutzung von (78) ist einfach, wenn  $S(x)$  positiv ist. Es kann jedoch bisweilen notwendig sein, auf (77) zurückzugreifen, da ja nicht alle unsere Summationsformeln  $S(x)$ , sondern bisweilen nur  $S_1(x)$  geben. In diesem Falle kann der folgende einfache Satz nützlich sein:

*Es sei  $S_1(x)$  eine integrable, positive, nicht abnehmende Funktion von  $x$ .  
Dann ist*

$$\left. \begin{aligned} S(x) = xS_1(x) - \int_1^x S_1(t) dt + [S_1(x) - S_1(1)]\varepsilon_x, \\ 0 \leq \varepsilon_x \leq 1. \end{aligned} \right\} \quad (79)$$

Wir gehen jetzt zu der für die Zahlentheorie so wichtigen Frage über die *asymptotischen Formeln* über. Zuerst werden wir die asymptotischen Eigenschaften der Funktion  $f'(-\nu)$  untersuchen; man hat nach (2)

$$\left. \begin{aligned} f'(-\nu) &= -b(-\nu) \\ &= \sum_1^{\infty} \left( \frac{1}{n} - \frac{1}{n+\nu} \right) f(n). \end{aligned} \right\} \quad (80)$$

Wir müssen hier die Bemerkung einschieben, dass man in gewissen Fällen aus (80) die exakte Formel

$$\sum_1^{\nu} \frac{f(n)}{n} = f'(-\nu) \quad (81)$$

gewinnt, nämlich wenn für gegebenes  $\nu$  und alle  $n$  die Relation  $f(\nu+n) = f(n)$  besteht, das heisst, *wenn  $f(n)$  periodisch in  $n$  mit der Periode  $\nu$  ist*. Dies ist zwar ein sehr spezieller, aber ziemlich wichtiger Fall, da DIRICHLET'sche Reihen mit periodischen Koeffizienten in der analytischen Zahlentheorie häufig auftreten. Der einfachste Fall ist  $f(n) = 1$  für alle  $n$ ; man erhält dann für  $f(x)$  eine ganze Funktion, welche für ganze, positive Werte von  $x$  den Wert 1 annimmt, nämlich

$$f(x) = \frac{\sin 2\pi x}{2\pi} [C + \Psi(1-x)],$$

wo  $\Psi$  die GAUSS'sche Funktion und  $C$  die EULER'sche Konstante bedeutet. Hieraus erhält man, wie zu erwarten war,

$$f'(-\nu) = \sum_1^{\nu} \frac{1}{n} \\ = \Psi(1 + \nu) + C.$$

Unsere Betrachtungsweise liefert aber auch eine Darstellung von  $\sum_1^x \frac{1}{n}$  als ganze Funktion von  $x$ , nämlich [durch Differentiation der Formel für das spezielle  $f(x)$ ]

$$f'(-x) = \sum_1^x \frac{1}{n} \\ = [C + \Psi(1 + x)] \cos 2\pi x + \frac{\sin 2\pi x}{2\pi} \Psi'(1 + x)$$

oder noch einfacher die andere Funktion

$$\sum_1^x \frac{1}{n} = C + \Psi(1 + x) + \frac{\sin 2\pi x}{2\pi} \Psi'(1 + x).$$

Es lässt sich jetzt zeigen, dass (81) in solchen Fällen, wo sie ihre exakte Gültigkeit verliert, noch immer eine asymptotische Formel liefern kann. Wir nehmen zunächst  $f(n) = O(1)$  an, eine Bedingung, welche z. B. von  $\tilde{\omega}(n)$ ,  $\mu(n)$ ,  $\lambda(n)$ ,  $\frac{\varphi_0(n)}{n}$  erfüllt ist. Summiert man in (80) rechts von 1 bis  $N$  und untersucht das Restglied, so erhält man, indem wir die Bezeichnung

$$\bar{S}(N) = \sum_1^N |f(n)| \tag{82}$$

einführen,

$$\sum_1^N \frac{f(n)}{n} = f'(-\nu) + O\left[\frac{\nu}{N} + \frac{\bar{S}(N)}{\nu}\right] \quad (f(n) = O(1)), \tag{83}$$

welche nützlich sein kann, wenn man eine vorläufige Kenntniss der Grössenordnung von  $\bar{S}(N)$  besitzt. Für  $N = \nu$  erhält man speziell

$$\sum_1^{\nu} \frac{f(n)}{n} = f'(-\nu) + O(1) \quad (f(n) = O(1)). \tag{84}$$

Man kann sich von der Voraussetzung  $f(n) = O(1)$  frei machen, indem man schreibt

$$\sum_1^{\nu} \frac{f(n)}{n} = f'(-\nu) + \sum_1^{\nu} \frac{f(n)}{n+\nu} - \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=k\nu+1}^{n=k\nu+\nu} \frac{\nu}{n+\nu} \frac{f(n)}{n},$$

woraus nach einer kleinen Rechnung

$$\sum_1^{\nu} \frac{f(n)}{n} = f'(-\nu) + O \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} \frac{\bar{S}(k\nu)}{k\nu}. \quad (85)$$

Diese Formel ist auch genauer als (83); ist z. B.  $\bar{S}(N) = O\left(\frac{N}{lN}\right)$ , so erhält man für  $\nu = \frac{N}{\sqrt{lN}}$  den besten Wert des Restgliedes in (83) nämlich  $O\left(\frac{1}{\sqrt{lN}}\right)$ , während das Restglied in (85) sich als  $O\left(\frac{1}{lN}\right)$  ergibt.

Man kann übrigens eine vorläufige Idee von der Grössenordnung von  $\sum_1^{\nu} \frac{f(n)}{n}$  bekommen in dem Fall, wo  $f(n) \geq 0$  für alle  $n$ , da alsdann

$$\sum_1^{\nu} \frac{f(n)}{n} \leq \sum_1^{\infty} \frac{2\nu}{n+\nu} \frac{f(n)}{n}$$

oder

$$\sum_1^{\nu} \frac{f(n)}{n} \leq 2f'(-\nu) \quad (f(n) \geq 0). \quad (86)$$

Während alle diese Formeln weniger genau sind als diejenigen, welche durch Benutzung der Eigenschaften spezieller Formen von  $f(x)$  abgeleitet werden können, besitzen unsere Formeln andererseits eine grosse Allgemeinheit, welche sie zur vorläufigen Orientierung geeignet machen. Es wird hierbei die Kenntnis von  $f'(-\nu)$  vorausgesetzt; wir besitzen zwei Darstellungen dieser Funktion, wo von der Zahlenfolge  $f(n)$  kein Gebrauch gemacht wird. Erstens ist nach (20)

$$\left. \begin{aligned} f'(-\nu) &= \sum_{n=2}^{\infty} n a_n (-\nu)^{n-1}, \\ a_n &= -\varphi(n) + \frac{(2\pi)^2}{3!} \varphi(n-2) - \frac{(2\pi)^4}{5!} \varphi(n-4) + \dots, \end{aligned} \right\} \quad (87)$$

wodurch  $f'(-\nu)$  als ganze Funktion von  $\nu$  definiert ist.



Noch wichtiger ist die aus (43) fließende Darstellung

$$\left. \begin{aligned} f(-\nu) &= -b(-\nu) \\ &= \int_{\alpha-i\infty}^{\alpha+i\infty} \frac{(-\nu)^z \varphi(z+1)}{e^{2\pi iz} - 1} dz, \end{aligned} \right\} \quad (88)$$

wo  $0 < \alpha < 1$ ,  $1 - \delta < \alpha$ . Hier kann  $\nu$  jede komplexe oder reelle Zahl bedeuten, welche nicht der Strecke  $0 \dots -\infty$  angehört. Die durch (87) und (88) dargestellten analytischen Funktionen werden natürlich nur für ganze, positive  $\nu$  als identisch vorausgesetzt.

LINDELÖF<sup>1</sup> hat untersucht, wie Integrale von der Form (88) sich asymptotisch verhalten. Aus seinen Resultaten folgt für unsere Funktionenklasse der Satz:

*Die durch das Integral (88) dargestellte meromorphe Funktion von  $\nu$  ist  $= \nu^\alpha \varepsilon(\nu)$ , wo  $\varepsilon(\nu)$  gleichmäßig verschwindet, wenn  $\nu$  sich ins Unendliche entfernt innerhalb eines Winkels, welcher nicht die negative Achse enthält.*

Speziell ist also für ganze, positive  $\nu$

$$f(-\nu) = \nu^\alpha \varepsilon(\nu). \quad (89)$$

Wenn die DIRICHLET'sche Reihe für  $\varphi(z+1)$  absolut konvergiert für  $\Re(z) > 0$ , kann man  $\alpha$  beliebig klein, doch fest und  $> 0$  annehmen. Durch Vergleich mit (86) erhält man den Satz:

*Die Summe  $\sum_1^\nu \frac{f(n)}{n}$ , wo  $f(n) \geq 0$ , wächst langsamer als  $\nu^\alpha$ .*

Dieser Satz ist zwar trivial für  $f(n) = O(1)$ , kann aber Bedeutung erhalten, wenn  $f(n)$  ohne Grenzen mit  $n$  wachsen kann.

Es folgt ferner aus LINDELÖF's Resultaten der folgende Satz:

*Es sei  $\varphi(z+1)$  holomorph für  $\Re(z) \geq 0$ , und es sei in diesem Bereiche  $\varphi(z+1) = O(e^{\varepsilon \cdot |z|})$ , wo  $\varepsilon$  beliebig klein aber  $> 0$  ist; dann konvergiert  $-b(-\nu)$  gleichmäßig gegen  $\varphi(1)$ , wenn  $\nu$  sich ins Unendliche entfernt innerhalb eines Winkels, welcher nicht die negative Achse enthält.*

Speziell konvergiert  $f(-\nu)$  in diesem Falle gegen  $\varphi(1)$ , wenn  $\nu$  mit ganzen, positiven Werten ohne Grenzen wächst.

Der Kern der soeben abgeleiteten asymptotischen Formeln kann bequem, wenn auch etwas ungenau, so ausgedrückt werden:

---

<sup>1</sup> LINDELÖF S 113—119.

$$\text{Der prinzipale Teil von } \sum \frac{f(n)}{n} \text{ ist } f'(-\nu). \quad (\text{I})$$

Desgleichen hat man nach (62) den Satz:

$$\text{Der prinzipale Teil von } \sum \frac{f(n)}{n} \text{ ist } 2 \int \frac{f(\tau)}{\tau} d\tau. \quad (\text{II})$$

Man kann hierzu den, wie wir sehen werden, viel genaueren Satz fügen:

$$\text{Der prinzipale Teil von } \sum \frac{f(n)}{n} \text{ ist } \int (\mathbf{1} + 2 \cos 2\pi\tau) \frac{f(\tau)}{\tau} d\tau, \quad (\text{III})$$

und zwar besteht hier ausserdem ein analoger Satz für  $\sum f(n)$ .

Um dieses einzusehen, muss man das in (72) auftretende Integral

$$J(z) = 2 \int_0^{\infty} \frac{q(z, t)}{e^{2\pi t} (e^{2\pi t} - \mathbf{1})} dt$$

möglichst genau unter Zugrundelegung der Annahme  $f(n) = O(n^{1-\delta})$  abschätzen, indem wir  $z$  positiv ganz annehmen und auf die Definition von  $f(x)$  durch (2) und (3) zurückgreifen. Man erhält in dieser Weise nach einigen Rechnungen, welche wir hier unterlassen müssen, die zwei Hauptformeln

$$\sum_1^n \frac{f(\nu)}{\nu} = \int_0^n (\mathbf{1} + 2 \cos 2\pi\tau) \frac{f(\tau)}{\tau} d\tau - J(0) + O(n^{-1} + n^{-\delta}) \ln n \quad (90)$$

und

$$\sum_1^n f(\nu) = \int_0^n (\mathbf{1} + 2 \cos 2\pi\tau) f(\tau) d\tau + O(\mathbf{1} + n^{1-\delta}) \ln n. \quad (91)$$

Als eine spezielle Anwendung von (91) können wir  $f(x) = \tilde{\omega}(x)$  und  $\delta = \mathbf{1}$  setzen; man erhält

$$\sum_1^n \tilde{\omega}(\nu) = \int_0^n (\mathbf{1} + 2 \cos 2\pi\tau) \tilde{\omega}(\tau) d\tau + O(\ln n), \quad (92)$$

so dass man, um das asymptotische Verhalten der Primzahlmenge zu erkennen, nur die verhältnismässig einfache ganze Funktion von  $n$

$$\int_0^x (1 + 2 \cos 2\pi\tau) \tilde{\omega}(\tau) d\tau$$

zu studieren braucht.

Man erhält leicht die Potenzreihe der ganzen Funktion

$$\int_0^x (1 + 2 \cos 2\pi\tau) f(\tau) d\tau,$$

nämlich

$$\left. \begin{aligned} \int_0^x (1 + 2 \cos 2\pi\tau) f(\tau) d\tau &= \sum_3^{\infty} \frac{z^\nu}{\nu} \Gamma_{\nu-1}, \\ \Gamma_\nu &= -\frac{1+2}{1} \varphi(\nu) + \frac{(1+2^3)(2\pi)^2}{3!} \varphi(\nu-2) - \frac{(1+2^5)(2\pi)^4}{5!} \varphi(\nu-4) + \dots \end{aligned} \right\} \quad (93)$$

Speziell findet man für die Menge der dividierten Primzahlpotenzen die asymptotische Formel

$$\left. \begin{aligned} \sum_1^x \tilde{\omega}(\nu) &= O(lx) + \sum_3^{\infty} K_\nu z^\nu, \\ K_\nu &= \frac{1}{\nu} \left[ -\frac{1+2}{1} l_{s_{\nu-1}} + \frac{(1+2^3)(2\pi)^2}{3!} l_{s_{\nu-3}} - \frac{(1+2^5)(2\pi)^4}{5!} l_{s_{\nu-5}} + \dots \right]. \end{aligned} \right\} \quad (94)$$

Eine andere Klasse von asymptotischen Formeln wird durch Anwendung der Integraldarstellung (44) für  $f(x)$  erhalten. Da diese Darstellung leider nicht für positive  $x$  gilt, muss man zuerst einen Hilfsatz ableiten. Es sei  $\varepsilon_\nu > 0$  eine Grösse, welche für  $\nu = \infty$  verschwindet. Man erhält aus (2) und (3)

$$f(\nu + i\varepsilon_\nu) = -\frac{\sin 2\pi i\varepsilon_\nu}{2\pi} \sum_1^{\infty} \left( \frac{1}{n - \nu - i\varepsilon_\nu} - \frac{1}{n} \right) f(n)$$

und durch Benützung von  $f(n) = O(n^{1-\delta})$  nach Rechnungen, welche unterbleiben können,

$$f(\nu + i\varepsilon_\nu) = f(\nu) + O(1 + \nu^{1-\delta}) \varepsilon_\nu l\nu. \quad (95)$$

Speziell wird

$$f\left(\nu + \frac{i}{\nu}\right) = f(\nu) + O(\nu^{-1} + \nu^{-\delta}) l\nu. \quad (96)$$

Unter Anwendung dieser Formel erhält man aus der Integraldarstellung (44) nach einer leichten Rechnung

$$f(\nu) = i \int_{\alpha-i\infty}^{\alpha+i\infty} \frac{\left(\nu + \frac{i}{\nu}\right)^{z-1} \varphi(z+1)}{e^{2\pi iz} - 1} dz + O(\nu^{-1} + \nu^{-\delta}) l\nu. \quad (97)$$

Es ist hier  $\nu$  positiv und ganz vorausgesetzt worden; für komplexe  $\nu$  kann man im Integral, welches jedoch für solche Werte nicht die Funktion  $f$  darstellt,  $\nu + \frac{i}{\nu} = s$  setzen; das Integral konvergiert dann absolut und gleichmässig für alle  $s$  innerhalb des endlichen Teils eines jeden Winkels, welcher nicht die positive Achse einschliesst. Man kann z. B. immer einen rechteckigen Bereich in der Ebene der komplexen Variablen  $\nu$  bestimmen, welcher die Punkte  $\nu = 1, 2, \dots, N$  enthält und innerhalb dessen das Integral absolut und gleichmässig konvergiert.

Man kann übrigens in (97), ohne den Genauigkeitsgrad einzubüssen, die unendlichen Integrationsgrenzen z. B. durch  $\frac{1}{2} - i\nu^3$  und  $\frac{1}{2} + i\nu^3$  ersetzen.

Nimmt man  $\varepsilon$  von  $\nu$  unabhängig an und setzt  $\alpha = \frac{1}{2}$ , so erhält man aus (44) für ganze positive  $\nu$

$$f(\nu + i\varepsilon) = \frac{\sin 2\pi i\varepsilon}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(\nu + i\varepsilon)^{\frac{1}{2}+it} \varphi\left(\frac{3}{2} + it\right)}{e^{-2\pi t} + 1} dt,$$

also

$$f(\nu) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(\nu + i\varepsilon)^{\frac{1}{2}+it} \varphi\left(\frac{3}{2} + it\right)}{e^{-2\pi t} + 1} dt, \quad (98)$$

was sich auf

$$f(\nu) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon \int_0^{\infty} (\nu + i\varepsilon)^{\frac{1}{2}+it} \varphi\left(\frac{3}{2} + it\right) dt \quad (99)$$

reduzieren lässt. Man findet hieraus die asymptotische Formel

$$f(\nu) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon \int_0^{\frac{\nu^2}{\varepsilon}} (\nu + i\varepsilon)^{\frac{1}{2}+it} \varphi\left(\frac{3}{2} + it\right) dt + O\left(e^{-\frac{\nu}{2}}\right). \quad (100)$$

Wichtiger als diese Formeln ist eine asymptotische Formel für  $\sum_1^{\nu} f(n)$ , welche man aus (75) unmittelbar erhält, indem man für  $b(z)$  die Integraldarstellung (43) einsetzt. Man integriert dann auf dem Kreis  $\gamma$  von  $\nu + \frac{1}{2} + i\varepsilon$  in positiver Richtung nach  $\nu + \frac{1}{2} - i\varepsilon$  und sucht für das Integral den Limes dieser Integration für  $\varepsilon = 0$ . Das Resultat ist<sup>1</sup>

$$2\pi i \sum_1^{\nu} f(n) = \lim_{\substack{\varepsilon=0 \\ a-i\infty}}^{a+i\infty} \int \frac{\left(\nu + \frac{1}{2} - i\varepsilon\right)^{s+1} - \left(\nu + \frac{1}{2} + i\varepsilon\right)^{s+1}}{e^{2\pi iz} - 1} \frac{\varphi(z+1)}{z+1} dz. \quad (101)$$

Indem man die Bezeichnung

$$\Phi(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} \frac{x^{s+1}}{e^{2\pi iz} - 1} \frac{\varphi(z+1)}{z+1} dz \quad (102)$$

einführt, kann (101) folgendermassen geschrieben werden

$$\sum_1^{\nu} f(n) = \lim_{\varepsilon=0} \left[ \Phi\left(\nu + \frac{1}{2} - i\varepsilon\right) - \Phi\left(\nu + \frac{1}{2} + i\varepsilon\right) \right]. \quad (103)$$

Die Funktion  $\Phi(x)$  kann offenbar im Allgemeinen *keine eindeutige Funktion sein*; es ist demnach notwendig, bei der Benutzung von (101) zu berücksichtigen, in welcher Weise man von  $\nu + \frac{1}{2} + i\varepsilon$  nach  $\nu + \frac{1}{2} - i\varepsilon$  gelangt ist. Das Integral (102) konvergiert übrigens absolut und gleichmässig in dem endlichen Teil einer jeden Winkelöffnung, welche nicht die Strecke  $0 \cdots + \infty$  enthält.

Für die Summe  $\sum_1^{\nu} \frac{f(n)}{n}$  erhält man in entsprechender Weise die Darstellung

$$2\pi i \sum_1^{\nu} \frac{f(n)}{n} = \lim_{\substack{\varepsilon=0 \\ a-i\infty}}^{a+i\infty} \int \frac{\left(\nu + \frac{1}{2} - i\varepsilon\right)^s - \left(\nu + \frac{1}{2} + i\varepsilon\right)^s}{e^{2\pi iz} - 1} \frac{\varphi(z+1)}{z} dz. \quad (104)$$

---

<sup>1</sup> Diese Formel ist früher in leicht abgeänderter Gestalt von MELLIN in anderer Weise abgeleitet worden (Acta Mathematica, vol. 28 (1904), S. 46–47).

In den folgenden Ausführungen werden wir zur Abkürzung immer

$$\nu + \frac{1}{2} = \mu \quad (105)$$

schreiben. Um aus den exakten Formeln asymptotische zu gewinnen, integrieren wir in derselben Weise in (75) von  $\mu + \frac{i}{\mu}$  nach  $\mu - \frac{i}{\mu}$  und erhalten

$$\sum_1^{\nu} f(n) + \frac{1}{2\pi i} \int_{\mu - \frac{i}{\mu}}^{\mu + \frac{i}{\mu}} b(x) dx = \Phi\left(\mu - \frac{i}{\mu}\right) - \Phi\left(\mu + \frac{i}{\mu}\right), \quad (106)$$

wo das Integral auf der linken Seite für grosse  $\nu$  geradlinig genommen werden kann. Nach (3) und (4) erhält man für dieses Integral in üblicher Weise die Abschätzung

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\mu - \frac{i}{\mu}}^{\mu + \frac{i}{\mu}} b(x) dx = O(\nu^{-1} + \nu^{-\delta}) l \nu,$$

also

$$\sum_1^{\nu} f(n) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\alpha - i\infty}^{\alpha + i\infty} \frac{\left(\mu - \frac{i}{\mu}\right)^{z+1} - \left(\mu + \frac{i}{\mu}\right)^{z+1}}{e^{2\pi iz} - 1} \frac{\varphi(z+1)}{z+1} dz + O(\mu^{-1} + \mu^{-\delta}) l \mu \quad (107)$$

und in entsprechender Weise

$$\sum_1^{\nu} \frac{f(n)}{n} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\alpha - i\infty}^{\alpha + i\infty} \frac{\left(\mu - \frac{i}{\mu}\right)^z - \left(\mu + \frac{i}{\mu}\right)^z}{e^{2\pi iz} - 1} \frac{\varphi(z+1)}{z} dz + O(\mu^{-2} + \mu^{-1-\delta}) l \mu. \quad (108)$$

Setzt man in diesen Formeln  $\alpha = \frac{1}{2}$ , so kann man, wie sich leicht verifizieren lässt, in den Integrationsgrenzen  $\infty$  durch  $\mu^3$  ersetzen, ohne die Genauigkeitsgrenze zu überschreiten, und erhält in dieser Weise die grundlegenden Formeln

$$\sum_1^{\nu} f(n) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\frac{1}{2}-i\mu^3}^{\frac{1}{2}+i\mu^3} \frac{\left(\mu - \frac{i}{\mu}\right)^{z+1} - \left(\mu + \frac{i}{\mu}\right)^{z+1}}{e^{2\pi iz} - 1} \frac{\varphi(z+1)}{z+1} dz + O(\mu^{-1} + \mu^{-\delta}) l\mu, \quad (109)$$

$$\sum_1^{\nu} \frac{f(n)}{n} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\frac{1}{2}-i\mu^3}^{\frac{1}{2}+i\mu^3} \frac{\left(\mu - \frac{i}{\mu}\right)^z - \left(\mu + \frac{i}{\mu}\right)^z}{e^{2\pi iz} - 1} \frac{\varphi(z+1)}{z} dz + O(\mu^{-2} + \mu^{-1-\delta}) l\mu. \quad (110)$$

Aus diesen lassen sich alle übrigen asymptotischen Formeln durch passende Deformation des Integrationsweges ableiten. Die Formeln (109) und (110) finden sich nicht bei MELLIN, der überhaupt die Konsequenzen seiner interessanten Darstellung nur unvollständig gezogen hat, indem er sich an »heuristisch« begründeten asymptotischen Resultaten genügen lässt.

Wir gehen jetzt zu den speziellen zahlentheoretischen Anwendungen über. Es wird dadurch nicht angestrebt, eine erschöpfende Behandlung zu geben; nach dem Plan dieser Arbeit trat ja die allgemeine Theorie der Funktionenklasse  $f(x)$  an die Spitze; jedoch würde unser Zweck verfehlt sein, wenn sich nicht schliesslich an Beispielen nachweisen liesse, dass auch die rein zahlentheoretischen Ergebnisse unserer Methode wenigstens eben so tief gehen wie diejenigen, welche man mit früheren Methoden erreicht hat.

Nach dieser Richtung hin leistet zwar die Funktion  $f'(-\nu)$  vorläufig nicht mehr, als was man auch mit rein elementaren Methoden erreichen kann. Man kann z. B. zuerst aus (89), auf  $\tau(x)$  und  $\frac{\sigma(x)}{x}$  angewandt, schliessen, dass die Summen

$$\sum_1^{\nu} \frac{\tau(n)}{n}, \quad \sum_1^{\nu} \frac{\sigma(n)}{n^2}$$

langsamer als eine beliebig kleine Potenz von  $\nu$  wachsen. Um ein genaueres Resultat zu erreichen, bemerken wir, dass — wie aus den bekannten Eigenschaften der Zetafunktion folgt<sup>1</sup> —

$$\zeta^2(1+s) = \frac{1}{s^2} + \frac{2C}{s} + C_0 + sR(s), \quad (111)$$

<sup>1</sup> LANDAU: I S. 164 und 169.

wo  $C$  die EULER'sche Konstante bedeutet, während  $sR(s)$  eine ganze Funktion ist mit der Eigenschaft  $R(s) = O \frac{l^2 |t|}{|t|}$  auf der Geraden  $s = it$ . Für  $f(n) = \tau(n)$ ,  $\varphi(x) = \zeta^2(x)$  erhält man aus (43)

$$-b(-z) = \int_{\alpha-i\infty}^{\alpha+i\infty} \frac{(-z)^s \zeta^2(1+s)}{e^{2\pi is} - 1} ds$$

und durch (111)

$$-b(-z) = \int_0^z \frac{l(1+t)}{t} dt + 2C \cdot l(1+z) + \frac{C_0 z}{1+z} + \int_{\alpha-i\infty}^{\alpha+i\infty} \frac{(-z)^s s R(s)}{e^{2\pi is} - 1} ds, \quad (112)$$

wie man leicht erkennt, indem man statt der drei ersten LINDELÖF'schen Integrale die durch sie dargestellten Potenzreihen einführt. Es sei jetzt  $z = \nu$  positiv ganz; man kann dann in dem letzten Integral nach den LINDELÖF'schen Resultaten  $\alpha = 0$  setzen und erhält, da ja  $R(it) = O \frac{l^2 |t|}{|t|}$ ,

$$\left. \begin{aligned} -b(-\nu) &= \int_0^\nu \frac{l(1+t)}{t} dt + 2C \cdot l(1+\nu) + O(1), \\ &= \tau'(-\nu). \end{aligned} \right\} \quad (113)$$

Man findet demnach aus (86) die verbesserte Formel

$$\sum_1^\nu \frac{\tau(n)}{n} = O(l^2 \nu) \quad (114)$$

statt

$$\sum_1^\nu \frac{\tau(n)}{n} = O(\nu^\epsilon) \quad (\epsilon > 0).$$

Um die genauere Relation (85) anzuwenden, muss man eine vorläufige Kenntnis von  $\sum_1^\nu \tau(n)$  voraussetzen; man kann diese folgendermassen ganz elementar gewinnen:<sup>1</sup>

$$\sum_1^\nu \tau(n) = \sum_{k=1}^\nu \left[ \frac{\nu}{k} \right] \leq \nu \sum_1^\nu \frac{1}{k} = O(\nu l \nu). \quad (115)$$

Mittels dieses Majorantwertes gibt (85) nach einfacher Rechnung

<sup>1</sup> BACHMANN: Die analytische Zahlentheorie S. 312.



$$\sum_1^{\nu} \frac{\tau(n)}{n} = \frac{1}{2} l^2 \nu + O(l \nu), \quad (116)$$

wodurch (114) wesentlich verschärft ist. Es muss zwar zugegeben werden, dass sich auch (116) rein elementar beweisen lässt; man kann sich aber dann nicht mit dem einfachen Majorantwert (115) begnügen, sondern muss die asymptotische Formel

$$\sum_1^{\nu} \tau(n) = \nu l \nu + O(\nu),$$

welche sich bekanntlich elementar beweisen lässt, ansetzen. Durch Anwendung von (78) gelangt man dann ohne Mühe zu (116).

In analoger Weise beweist man den auch elementar beweisbaren Satz

$$\sum_1^{\nu} \frac{\sigma(n)}{n^2} = \frac{\pi^2}{6} l \nu + O(1). \quad (117)$$

Um eine andere Anwendung von  $f(-\nu)$  zu machen, setzen wir  $f(n) = \mu(n)$ ,  $\varphi(x) = \zeta^{-1}(x)$ , also

$$-b(-z) = \int_{a-i\infty}^{a+iz} \frac{(-z)^s \zeta^{-1}(1+s)}{e^{2\pi i s} - 1} ds. \quad (118)$$

Da  $\varphi(1+s) = \zeta^{-1}(1+s)$  für  $\Re(s) \geq 0$  holomorph und  $= O(e^{|s|})$  ist, hat man nach einem oben zitierten Satz von LINDELÖF, indem man sich der Bedeutung von  $-b(-z)$  erinnert,  $\lim_{z \rightarrow \infty} b(-z) = 0$ , oder

$$\lim_{z \rightarrow \infty} \sum_1^{\infty} \frac{z}{n+z} \frac{\mu(n)}{n} = 0, \quad (119)$$

wenn  $z$  in der geforderten Weise, z. B. mit positiven Werten wächst.

Ferner erhält man aus (84) die bekannte Formel

$$\sum_1^{\nu} \frac{\mu(n)}{n} = O(1). \quad (120)$$

Aus (119) darf man natürlich nicht schliessen, dass

$$\sum_1^{\infty} \frac{\mu(n)}{n} = 0,$$

sondern nur, dass, falls diese Reihe konvergiert, der Grenzwert Null sein muss (da dann, wie leicht zu beweisen, der Bereich der gleichmässigen Konvergenz

den Punkt  $z = +\infty$  enthält); eigentliche Divergenz kann wegen (120) nicht auftreten, so dass es sich nur um Oszillation zwischen endlichen Grenzen oder Konvergenz handeln könnte.

In entsprechender Weise erhält man

$$\lim_{z \rightarrow \infty} \sum_1^{\infty} \frac{z}{n+z} \frac{\mu(n) \ln n}{n} = -1, \quad (121)$$

$$\sum_1^{\nu} \frac{\mu(n) \ln n}{n} = O(\ln \nu). \quad (122)$$

Ogleich wir somit aus den Eigenschaften von  $f'(-\nu)$  bisher nur solche zahlen-theoretischen Sätze haben herleiten können, welche man auch elementar beweisen kann, haben wir diese Funktion mit Absicht ziemlich eingehend behandelt. Es ist nämlich klar, dass  $f'(-\nu)$  als erstes Glied einer Entwicklung für  $\sum_1^{\nu} \frac{f(n)}{n}$  betrachtet werden kann, und  $f'(-\nu)$ , als analytische Funktion von  $\nu$  betrachtet, hat den Vorteil, dass sie in einem Bereich, welcher die positive Achse enthält, durch ein absolut-gleichmässig konvergierendes Integral darstellbar ist. Es ist daher zu hoffen, dass künftige Untersuchungen über diesen Gegenstand interessante Resultate zu Tage bringen können.

Ein im Augenblicke fruchtbareres Arbeitsfeld wird von den Formeln (109) und (110) abgegeben. Als Exempel der Anwendung von (109) nehmen wir die Funktion

$$\psi(\nu) = \sum_1^{\nu} \mathcal{A}(n), \quad (123)$$

welche für

$$f(n) = \mathcal{A}(n), \quad \varphi(x) = -\frac{\zeta'(x)}{\zeta(x)}$$

erhalten wird. Man findet aus (109) für  $z = s - 1$

$$\psi(\nu) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\frac{3}{2}-i\mu^3}^{\frac{3}{2}+i\mu^3} \frac{\left(\mu + \frac{i}{\mu}\right)^s - \left(\mu - \frac{i}{\mu}\right)^s}{e^{2\pi i s} - 1} \frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} \frac{ds}{s} + O(\mu^{-1+\epsilon}), \quad (124)$$

wo die Konstante  $\epsilon > 0$  beliebig klein angenommen werden kann. Hierin ist nach Voraussetzung

$$\left. \begin{aligned} \mu + \frac{i}{\mu} &= \rho e^{i\theta} \\ \mu - \frac{i}{\mu} &= \rho e^{i(2\pi - \theta)} \end{aligned} \right\} \quad \left( 0 < \theta < \frac{\pi}{2} \right) \quad (125)$$

und

$$\left. \begin{aligned} \rho &= \sqrt{\mu^2 + \frac{1}{\mu^2}} = \mu + \frac{1}{2\mu^3} - \dots = O(\mu), \\ \theta &= \arctg \frac{1}{\mu^2} = \frac{1}{\mu^2} - \frac{1}{3\mu^6} + \dots = O\left(\frac{1}{\mu^2}\right). \end{aligned} \right\} \quad (126)$$

Wir führen jetzt die Funktion

$$\sum_1^{v-1} \frac{\psi(n)}{n(n+1)} = \sum_1^v \frac{\mathcal{A}(n)}{n} - \frac{\psi(v)}{v} \quad (127)$$

ein. Für  $\sum_1^v \frac{\mathcal{A}(n)}{n}$  erhält man aus (110)

$$\sum_1^v \frac{\mathcal{A}(n)}{n} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\frac{3}{2}-i\mu^3}^{\frac{3}{2}+i\mu^3} \frac{\left(\mu + \frac{i}{\mu}\right)^{s-1} - \left(\mu - \frac{i}{\mu}\right)^{s-1}}{e^{2\pi i s} - 1} \frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} \frac{ds}{s-1} + O(\mu^{-2+\epsilon}), \quad (128)$$

und man findet demnächst aus (127) und (124) nach einer kleinen Reduktion die Hauptformel

$$\left. \begin{aligned} \sum_1^{v-1} \frac{\psi(n)}{n(n+1)} &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\frac{3}{2}-i\mu^3}^{\frac{3}{2}+i\mu^3} \frac{\left(\mu + \frac{i}{\mu}\right)^{s-1} - \left(\mu - \frac{i}{\mu}\right)^{s-1}}{e^{2\pi i s} - 1} \frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} \frac{ds}{s(s-1)} \\ &\quad - \frac{1}{(\mu^2 + i)\pi} \int_{\frac{3}{2}-i\mu^3}^{\frac{3}{2}+i\mu^3} \frac{\left(\mu - \frac{i}{\mu}\right)^{s-1}}{e^{2\pi i s} - 1} \frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} \frac{ds}{s} + O(\mu^{-1+\epsilon}), \end{aligned} \right\} \quad (129)$$

welche wir zur Abkürzung

$$\sum_1^{v-1} \frac{\psi(n)}{n(n+1)} = \frac{1}{2\pi i} I_1 - \frac{1}{(\mu^2 + i)\pi} I_2 + O(\mu^{-1+\epsilon}) \quad (130)$$

schreiben werden.

Bei der Behandlung der Integrale  $I_1$  und  $I_2$  kann man dem von LANDAU in einem ähnlichen Falle<sup>1</sup> eingeschlagenen Weg folgen, indem wir bemerken, dass die kleine Komplikation unserer Integrale im Vergleich mit den LANDAU'schen nur anscheinend ist. Man kann zuerst den Satz S. 179 (in LANDAU's Handbuch I) über die Zetafunktion anwenden, indem man  $\mu^3 > 3$  annimmt und den Integrationsweg  $ABCDEF A$  benutzt, wo

$$A = \frac{3}{2} - \mu^3 i,$$

$$B = \frac{3}{2} + \mu^3 i,$$

$$C = 1 - \frac{1}{c t^{\mu^3}} + \mu^3 i,$$

$$D = 1 - \frac{1}{c t^{\mu^3}} + 3 i,$$

$$E = 1 - \frac{1}{c t^{\mu^3}} - 3 i,$$

$$F = 1 - \frac{1}{c t^{\mu^3}} - \mu^3 i.$$

Die Stücke  $AB$ ,  $BC$ ,  $DE$ ,  $FA$  sind geradlinig, während  $CD$  das Kurvenstück (indem  $s = \sigma + it$ )

$$\sigma = 1 - \frac{1}{c t^{\mu^3}}, \quad \mu^3 \geq t \geq 3$$

und  $EF$  das Kurvenstück

$$\sigma = 1 - \frac{1}{c t^{\mu^3}}, \quad -3 \geq t \geq -\mu^3$$

bezeichnen.

Das zu  $I_1$  gehörige Residuum  $R_1$  wird, wenn

$$\left. \begin{aligned} \mu + \frac{i}{\mu} &= p \\ \mu - \frac{i}{\mu} &= q \end{aligned} \right\} \quad (131)$$

gesetzt wird,

---

<sup>1</sup> LANDAU: I S. 186 fig.

$$\begin{aligned} R_1 &= \frac{1}{2\pi i} \left[ \frac{1}{2} l^2 q - \frac{1}{2} l^2 p + (lp - lq)(\pi i + C + 1) \right] \\ &= \left( 1 - \frac{\theta}{\pi} \right) (lq - C - 1) \\ &= l\mu - (C + 1) + O(\mu^{-1+\epsilon}). \end{aligned}$$

Entsprechend erhält man für  $I_2$

$$\begin{aligned} R_2 &= \frac{1}{2\pi i} (-lq + \pi i + C + 1) \\ &= O(l\mu). \end{aligned}$$

Der von diesen Residuen herrührende Teil der Summe  $\sum_1^{v-1} \frac{\psi(n)}{n(n+1)}$  wird

$$R_1 - \frac{2\pi i}{(\mu^2 + i)\pi} R_2 = l\mu - (C + 1) + O(\mu^{-1+\epsilon}). \quad (132)$$

Die Teilintegrale werden alle nach einigen Rechnungen, welche wir auslassen müssen,  $= O(\mu^{-1+\epsilon})$ ; nur auf der Strecke  $ED$  erhält man  $O\left(\mu^{-\frac{1}{c^2 3}}\right)$  und auf den Strecken  $DC$ ,  $FE$   $O\left(e^{-\frac{1}{Vl\mu}}\right)$ . Zusammen genommen gibt dies, da  $\mu = \nu + \frac{1}{2}$  und  $\psi(\nu) = O(\nu l \nu)$ ,

$$\sum_1^{\nu} \frac{\psi(n)}{n(n+1)} = l\nu - (C + 1) + O\left(e^{-\frac{1}{Vl\nu}}\right) \quad (133)$$

wo noch  $\sqrt[11]{l\nu}$  durch  $\sqrt[10+\kappa]{l\nu}$  ( $\kappa > 0$ ) ersetzt werden kann.

Durch ganz elementare Betrachtungen schliesst man hieraus in einer mit der LANDAU'schen<sup>1</sup> analogen Weise

$$\frac{\psi(x)}{x} = 1 + O\left(e^{-\frac{1}{Vlx}}\right) \quad (134)$$

und hieraus für die Primzahlmenge

$$\pi(x) = \int_{\frac{x}{2}}^x \frac{dt}{t} + O\left(x e^{-\frac{1}{Vlx}}\right). \quad (135)$$

Man kann endlich, wenn man den schärfsten Satz über die Zetafunktion<sup>2</sup> anwendet und den modifizierten LANDAU'schen Integrationsweg<sup>3</sup> für unsere Integrale

<sup>1</sup> LANDAU: I §§ 52, 53.

<sup>2</sup> LANDAU I S. 321 und S. 326.

<sup>3</sup> LANDAU I S. 328 fig.

benutzt, auch durch diese den genauesten, bisher bekannten Primzahlsatz beweisen:

$$\pi(x) = \int_2^x \frac{dt}{t} + O(xe^{-\alpha\sqrt{tx}}), \quad (136)$$

wo man z. B.  $\alpha = \frac{1}{5}$  setzen kann. Diese Formel ist bekanntlich zuerst von DE LA VALLÉE-POUSSIN bewiesen worden.

In Bezug auf die zahlreichen Konsequenzen des Primzahlsatzes für die analytische Zahlentheorie, insbesondere für die schon berührten Summen  $\sum_1^v \frac{\mu(n)}{n}$  und  $\sum_1^v \frac{\mu(n) \ln n}{n}$ , muss auf LANDAU'S Handbuch verwiesen werden.

Hier wollen wir noch zum Schluss einen merkwürdigen exakten Satz erwähnen, welchen man durch Anwendung eines Satzes von HADAMARD<sup>1</sup> auf die Potenzreihe (7) für die meromorphe Funktion  $b(x)$  erhält. Zur grösseren Prägnanz werden wir die Funktion  $\varphi(x)$  spezialisieren und gleich  $l\zeta(x)$  annehmen. Man findet dann den Satz:

*Es bezeichne  $\pi_v$  die  $v$ te Primzahlpotenz und  $\Delta_{n,r}$  die Determinante*

$$\Delta_{n,r} = \begin{vmatrix} l s_{n+1} & l s_{n+2} & \dots & l s_{n+r} \\ l s_{n+2} & l s_{n+3} & \dots & l s_{n+r+1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ l s_{n+r} & l s_{n+r+1} & \dots & l s_{n+2r-1} \end{vmatrix}. \quad (137)$$

*Dann ist*

$$\frac{1}{\pi_1 \pi_2 \dots \pi_r} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{V \Delta_{n,r}}. \quad (138)$$

<sup>1</sup> BOREL: Leçons sur les fonctions méromorphes (Paris 1903), Chap. III.