PERIODISCHE FUNKTIONEN

UND

SYSTEME VON UNENDLICH VIELEN LINEAREN GLEICHUNGEN.

Von

PAUL STÄCKEL

IN HEIDELBERG.

§ 1. Bedingungen für die Periodizität einer durch eine Potenzreihe dargestellten Funktion.

Die vorliegenden Untersuchungen beziehen sich auf die Frage, wann die durch eine vorgelegte Potenzreihe

$$P(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{z^n}{n!} \tag{1}$$

definierte analytische Funktion $f(z)$ der Funktionalgleichung

$$f(z + c) = f(z) \tag{2}$$

mit konstantem c genügt, wann also durch die Potenzreihe $P(z)$ eine analytische Funktion von z mit der primitiven Periode c dargestellt wird.[1] Im Allgemeinen wird die Potenzreihe $P(z)$ nur ein Element der Funktion $f(z)$ liefern; nur wenn sie unbeschränkt konvergent ist, kann sie mit der ganzen transzendenten Funktion $f(z)$ zusammenfallen. Hierin liegt eine grosse Schwierigkeit; denn im Allgemeinen wird man, um die Periodizität festzustellen, über den Konvergenzbereich der

[1] Dieselbe Frage habe ich in einer Abhandlung gleichen Titels behandelt, die in der *Festschrift,* HEINRICH WEBER *zu seinem siebzigsten Geburtstag gewidmet,* Leipzig 1912 erschienen ist. Die hier in den §§ 1 und 2 mitgeteilten Ergebnisse finden sich, in etwas anderer Darstellung, schon dort; dagegen werden in § 3 Untersuchungen weitergeführt, die dort nur begonnen worden sind.

Reihe $P(z)$ hinausgehen müssen. Mittel hierzu geben die klassischen Methoden, die G. Mittag-Leffler in seinen Abhandlungen über die analytische Darstellung monogener Funktionen entwickelt hat. Im Folgenden soll jedoch nur von dem alten, elementaren Verfahren der Gewinnung neuer Funktionselemente in Form von Potenzreihen mittels analytischer Fortsetzung Gebrauch gemacht werden. Es wird sich zeigen, dass man bereits auf diesem Wege zu Ergebnissen kommt, die Beachtung verdienen.

Wenn die Reihe (1) den Konvergenzkreis K_0 vom Radius ϱ besitzt, so wird die Funktion $f(z)$ vermöge der Gleichung (2) auch für die Kreise K_m erklärt, die um die Punkte $z = mc$ mit dem Radius ϱ beschrieben sind, wo m irgend eine positive oder negative ganze Zahl bedeutet. Ist nun ϱ kleiner als die Hälfte des absoluten Betrages γ von c, so werden die Kreise K_m und K_{m+1} nicht übereinander greifen, und es werden zwar die betreffenden Stücke der analytischen Funktion $f(z)$ durch das Verfahren der Fortsetzung auseinander hervorgehen, es wird jedoch aussichtslos sein, auf diese Art notwendige und hinreichende Bedingungen für die Koeffizienten a_n herzuleiten. Es genügt sogar noch nicht, dass diese Kreise ein gemeinsames Gebiet haben, man wird vielmehr fordern müssen, dass bei der Fortsetzung schon der erste Schritt zum Ziele führt, dass also die Umgebung des Punktes $z = c$ dem Kreise K_0 angehört oder, mit anderen Worten, dass *der Konvergenzradius ϱ der Reihe $P(z)$ grösser als γ ist.*

Unter dieser Voraussetzung folgt aus der Gleichung (2) die Gleichung

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{z^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{(z+c)^n}{n!}, \tag{3}$$

in der der absolute Betrag von z kleiner als $\varrho - \gamma$ sein muss, und es wird daher

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{z^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{\nu=0}^{n} a_n \frac{c^{n-\nu} z^{\nu}}{(n-\nu)!\,\nu!},$$

oder, da der Weierstrass'sche Doppelreihensatz angewandt werden darf:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{z^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{s=0}^{\infty} a_{n+s} \frac{c^s}{s!} \right) \frac{z^n}{n!}.$$

Demnach ergeben sich, unter den gemachten Voraussetzungen, als notwendige und hinreichende Bedingungen dafür, dass die durch die Reihe (1) definierte Funktion die Periode c besitzt, für die Koeffizienten a_n die Gleichungen

$$a_n = \sum_{s=0}^{\infty} a_{n+s} \frac{c^s}{s!} \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots), \tag{4}$$

die sich sofort in die Gestalt:

$$\sum_{t=1}^{\infty} a_{n+t} \frac{c^{t-1}}{t!} = 0 \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots) \tag{5}$$

bringen lassen; dass die additive Konstante a_0 in den Gleichungen (5) nicht vorkommt, mithin a_0 willkürlich bleibt, kann nicht überraschen.

Hiermit ist folgendes Ergebnis gewonnen:

Sämtliche Potenzreihen

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{z^n}{n!}$$

mit dem gemeinsamen Konvergenzradius ϱ, die periodische Funktionen mit einer Periode c definieren, deren absoluter Betrag kleiner als ϱ ist, ergeben sich, wenn die Koeffizienten a_n den Bedingungen unterworfen werden, dass

I. Das grösste Element der abgeleiteten Menge der Menge der reellen, positiven Werte

$$\sqrt[n]{\frac{|a_n|}{n!}}$$

gleich dem reziproken Werte von ϱ ist (Bedingung von Cauchy*).*

II. Das System der unendlich vielen linearen homogenen Gleichungen für die Grössen a_n:

$$\sum_{t=1}^{\infty} a_{n+t} \frac{c^{t-1}}{t!} = 0 \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots)$$

bei geeigneter Wahl von c identisch erfüllt ist.

Die Bedingung, dass der absolute Betrag von c kleiner als ϱ sein soll, ist unentbehrlich, denn sie sichert erst die Konvergenz der in den Gleichungen (5) auftretenden unendlichen Summen.

Während im Vorhergehenden ϱ als bekannt angesehen wurde, kann auch die Periode c gegeben, d. h. nach den Reihen (1) gefragt werden, deren Konvergenzradius ϱ grösser als der absolute Betrag γ von c ist und die eine analytische Funktion $f(z)$ mit der Periode c erzeugen. Die Antwort liefert der folgende Lehrsatz:

Alle Potenzreihen

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{z^n}{n!},$$

deren Konvergenzradius ϱ grösser als der absolute Betrag γ einer gegebenen Grösse c ist und die Funktionen $f(z)$ mit der Periode c erzeugen, ergeben sich, wenn

I. Die Koeffizienten a_n so gewählt werden, dass das System der unendlich vielen linearen homogenen Gleichungen

$$\sum_{t=1}^{\infty} a_{n+t} \frac{c^{t-1}}{t!} = 0 \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots)$$

erfüllt ist.

II. Die Unbekannten a_n in diesen Gleichungen der Schrankenbedingung unterworfen werden, dass das grösste Element der abgeleiteten Menge der reellen, positiven Werte

$$\sqrt[n]{\frac{|a_n|}{n!}}$$

kleiner ist als der reziproke Wert von γ.

Die Schrankenbedingung ist wiederum notwendig, damit die unendlichen Summen konvergieren; wenn sie durch eine schärfere Bedingung ersetzt wird, so erhält man nur einen Teil der gesuchten Reihen.

§ 2. Über die Lösung des Systems von unendlich vielen linearen Gleichungen für die unendlich vielen Koeffizienten einer Potenzreihe, die eine periodische Funktion definiert.

Die Koeffizienten a_n jeder Potenzreihe (1), deren Konvergenzradius ϱ grösser als der absolute Betrag γ einer gegebenen Grösse c ist und die durch Fortsetzung eine Funktion $f(z)$ mit der Periode c erzeugt, genügen dem System von unendlich vielen linearen homogenen Gleichungen

$$\sum_{t=1}^{\infty} a_{n+t} \frac{c^{t-1}}{t!} = 0 \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots); \tag{5}$$

dabei sind die Unbekannten der Schrankenbedingung unterworfen, dass das grösste Element der abgeleiteten Menge der Menge der reellen, positiven Werte

$$\sqrt[n]{\frac{|a_n|}{n!}}$$

kleiner als der reziproke Wert von γ ist. Versucht man, auf die Lösung des Systems (5) die Methoden anzuwenden, die bis jetzt für Systeme von unendlich vielen linearen Gleichungen mit unendlich vielen Unbekannten entwickelt worden sind, so ist das Ergebnis, dass sie in dem vorliegenden Falle gänzlich versagen.

Bei den meisten Untersuchungen werden nämlich nur »reguläre» Lösungen in Betracht gezogen, bei denen, abgesehen von anderen Forderungen, die Schrankenbedingung erfüllt sein muss, dass die Summe

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n^2|$$

konvergiert.[1] Dass die bei den Gleichungen (5) vorliegende CAUCHYsche Schrankenbedingung einen weit grösserer Bereich von Lösungen umfasst, als die regulären Lösungen, ist leicht einzusehen; das System (5) wird nämlich im Falle der Exponentialfunktion e^z durch die Werte

$$a_n = 1$$

befriedigt, die augenscheinlich keine reguläre Lösung darstellen. Aber auch die Sätze, die H. v. KOCH über nichtreguläre Lösungen aufgestellt hat,[2] erweisen sich als unzureichend. Unter den von ihm betrachteten Bedingungen hat ein System von linearen homogenen Gleichungen dann und nur dann eine von der trivialen Null-Lösung verschiedene Lösung, wenn die unendliche Determinante des Systems verschwindet, während diese bei dem System (5) den Wert 1 besitzt.

Um so bemerkenswerter ist es, dass sich das System (5) unter einer Schrankenbedingung auflösen lässt, die der vorher ausgesprochenen CAUCHYschen Bedingung sehr nahe kommt und unter der im besonderen alle Potenzreihen enthalten sind, bei denen die abgeleitete Menge der Menge der reellen, positiven Werte

$$\sqrt[n]{\frac{|a_n|}{n!}}$$

ein grösstes Element aufweist, das kleiner ist als der reziproke Wert von

$$\frac{1}{2}\sqrt{5}\cdot\gamma;$$

da $\frac{1}{2}\sqrt{5} = 1{,}1180\ldots$ ist, so kommt diese Grenze dem Werte γ nahe.

Sobald der Radius des Konvergenzkreises der Potenzreihe (1) grösser als $\frac{1}{2}\gamma$ ist, verhält sich die durch sie erzeugte Funktion $f(z)$ mit der Periode c regulär in einem Streifen (S), der sich ergibt, wenn zu der durch die Punkte $z = 0$ und $z = c$ gelegten Geraden beiderseits im Abstande

[1] Man vergleiche die umfassende Darstellung, die ERHARD SCHMIDT in den Rend. Circ. mat. Palermo, 25 (1908), S. 53—77 gegeben hat.

[2] *Sur la convergence des déterminants infinis,* Rend. Circ. mat. Palermo, 28 (1909), S. 255—266.

$$\sigma = \sqrt{\varrho^2 - \frac{1}{4}\gamma^2}$$

die Parallelen gezogen werden. Setzt man

$$w = e^{\frac{2\pi i z}{c}},$$

so entspricht dem Rechteck in der z-Ebene mit den Eckpunkten

$$z = \pm \frac{ic\sigma}{\gamma} \qquad z = c \pm \frac{ic\sigma}{\gamma}$$

in der w-Ebene ein Kreisring (R), der von den beiden Kreisen mit dem Mittelpunkt $w = 0$ und den Radien

$$r_1 = e^{\frac{2\pi\sigma}{\gamma}}, \qquad r_2 = e^{-\frac{2\pi\sigma}{\gamma}}$$

begrenzt wird. Nach einer bekannten Schlussweise[1] ist $f(z)$ als Funktion von w angesehen in dem Ringe (R) eindeutig und regulär und lässt sich daher nach dem LAURENTschen Satze in Form einer Summe

$$\sum_{\nu=-\infty}^{+\infty} A_\nu w^\nu$$

darstellen. Mithin hat man für die Funktion $f(z)$ die Darstellung

$$(6) \qquad f(z) = \sum_{\nu=-\infty}^{+\infty} A_\nu e^{\frac{2\pi i \nu z}{c}},$$

bei der die Periodizität in Evidenz gesetzt ist, und zwar findet in dem Streifen (S) der Breite 2σ absolute und gleichförmige Konvergenz statt. Im besonderen gilt dies für den Kreis, der um den Punkt $z = 0$ mit dem Radius σ beschrieben ist. Man darf daher für ihn den WEIERSTRASS'schen Doppelreihensatz anwenden, also die Exponentialausdrücke nach Potenzen von z entwickeln und darauf nach Potenzen von z ordnen. Dann aber ergeben sich durch Vergleichung mit der ursprünglichen Reihe (1) die Formeln:

$$(7) \qquad a_n = \left(\frac{2\pi i}{c}\right)^n \sum_{\nu=-\infty}^{+\infty} A_\nu \nu^n \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots),$$

in denen die unendlichen Summen absolut konvergent sind.

[1] Vgl. etwa W. F. OSGOOD, *Lehrbuch der Funktionentheorie*, 1. Bd., Leipzig 1907, S. 407.

Die Ausdrücke (7) für die Koeffizienten a_n lassen sich jedoch nur dann zur Auflösung der Gleichungen (5) benutzen, wenn die in diesen Gleichungen auftretenden unendlichen Summen konvergieren, das heisst, wenn die zugehörige Potenzreihe (1) in einem Kreise konvergiert, dessen Radius grösser als γ ist. *Mithin muss*

$$\sigma > \gamma$$

sein. Die Formeln (7) liefern daher nur diejenigen Reihen (1), bei denen die durch Fortsetzung entspringende analytische Funktion $f(z)$ mit der Periode c sich in einem Streifen (S) regulär verhält, dessen Breite grösser als 2γ ist. Da aber die Breite von (S), wenn keine besonderen Voraussetzungen über die Potenzreihe (1) gemacht werden,

$$\sqrt{4\varrho^2 - \gamma^2}$$

beträgt, so sind unter den Reihen, die sich aus den Formeln (7) ergeben, sicher sämtliche Reihen enthalten, deren Konvergenzradius ϱ so gross ist, dass

$$\sqrt{4\varrho^2 - \gamma^2} > 2\gamma$$

wird, bei denen also

$$\varrho > \frac{1}{2}\sqrt{5}.\gamma$$

ausfällt; dagegen ergeben sich von den Reihen, deren Konvergenzradius zwischen γ und $\frac{1}{2}\sqrt{5}.\gamma$ liegt, nur diejenigen, aus denen durch Fortsetzung eine Funktion $f(z)$ hervorgeht, die sich in einem Streifen (S) der Breite $2\sigma > 2\gamma$ regulär verhält. Dass es Potenzreihen der zweiten Art gibt, bei denen die Breite des zugehörigen Streifens (S) kleiner als 2γ ist, lässt sich leicht beweisen; hierzu genügt es, einen Pol in einen der beiden Schnittpunkte der Kreise K_0 und K_1 zu legen.

Nachdem die Konvergenzfrage geklärt ist, kann man leicht zeigen, dass durch die Ausdrücke (7) für die Unbekannten a_n die Gleichungen (5) identisch erfüllt sind. Man erhält nämlich

$$\sum_{t=1}^{\infty} a_{n+t}\frac{c^t}{t!} = \sum_{t=1}^{\infty}\left\{\left(\frac{2\pi i}{c}\right)^{n+t}\sum_{\nu=-\infty}^{+\infty} A_\nu \nu^{n+t}\frac{c^t}{t!}\right\} = \left(\frac{2\pi i}{c}\right)^n.\sum_{t=1}^{\infty}\left\{\sum_{\nu=-\infty}^{+\infty}\frac{(2\pi i\nu)^t}{t!}A_\nu \nu^n\right\}$$

und weiter, weil wegen der absoluten Konvergenz die Reihenfolge der Summationen vertauscht werden darf:

$$\sum_{t=1}^{\infty} a_{n+t}\frac{c^t}{t!} = \left(\frac{2\pi i}{c}\right)^n\sum_{\nu=-\infty}^{+\infty}\left\{\sum_{t=1}^{\infty}\frac{(2\pi i\nu)^t}{t!}\right\}A_\nu \nu^n.$$

Diese Summe verschwindet aber, da bekanntlich, wenn ν irgend eine positive oder negative ganze Zahl bezeichnet, die Identitäten bestehen:

$$\sum_{t=1}^{\infty} \frac{(2\pi i \nu)^t}{t!} = e^{2\pi i\nu} - 1 = 0. \tag{8}$$

Das Ergebnis der vorhergehenden Untersuchungen lässt sich in den folgenden Lehrsatz zusammenfassen:

Betrachtet man die Gesamtheit der LAURENTschen *Entwicklungen:*

$$\sum_{\nu=-\infty}^{+\infty} A_\nu w^\nu,$$

die in Ringen mit den Radien

$$r_1 = e^{2\pi\tau},\quad r_2 = e^{-2\pi\tau} \qquad (\tau > 1)$$

konvergieren und bildet aus den Grössen A_ν die Koeffizienten a_n mittels der Formeln:

$$a_n = \left(\frac{2\pi i}{c}\right)^n \cdot \sum_{\nu=-\infty}^{+\infty} A_\nu \nu^n,$$

so ergeben sich von den Potenzreihen

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{z^n}{n!},$$

aus denen durch Fortsetzung analytische Funktionen $f(z)$ mit der Periode c des absoluten Betrages γ entspringen:

1) sämtliche Reihen, deren Konvergenzradius grösser als

$$\frac{1}{2}\sqrt{5}\cdot\gamma$$

ist,

2) von den Reihen, deren Konvergenzradius zwischen γ und $\frac{1}{2}\sqrt{5}\cdot\gamma$ liegt, nur diejenigen, bei denen die zugehörige Funktion $f(z)$ sich in einem Streifen (S) regulär verhält, dessen Breite grösser als 2γ ist.

Hierbei ist zu beachten, dass die Radien r_1 und r_2 von γ unabhängig sind und dass c in den Formeln für die Koeffizienten a_n nur ausserhalb des Summenzeichens vorkommt, und zwar so, dass das Produkt

$$a_n \cdot c^n$$

von c unabhängig ist. Der Grund ist leicht zu erkennen; wird nämlich

$$z = c z'$$

gesetzt, so geht die betrachtete Funktion $f(z)$ in eine Funktion $g(z')$ mit der Periode 1 über.

Bemerkenswert ist ferner der Umstand, dass die Ausdrücke für die gesuchten Koeffizienten a_n:

$$a_n = \left(\frac{2\pi i}{c}\right)^n \sum_{\nu=-\infty}^{+\infty} A_\nu \nu^n \tag{7}$$

die unendlich vielen Grössen

$$A_\nu \qquad (\nu = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$$

enthalten, die nur den leicht anzugebenden Schrankenbedingungen unterworfen sind, welche die Konvergenz der LAURENTschen Entwicklung im Ringe sichern, dass sie im übrigen aber ganz beliebig bleiben. Das System der unendlich vielen linearen Gleichungen

$$\sum_{t=1}^{\infty} a_{n+t} \frac{c^{t-1}}{t!} = 0 \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots) \tag{5}$$

zeigt also in dieser Beziehung ein Verhalten, das von dem Verhalten der Systeme endlich vieler linearer Gleichungen gänzlich abweicht.

§ 3. Besondere Lösungen des Systems von unendlich vielen linearen Gleichungen, das die Bedingung der Periodizität ausdrückt.

Wenn man die Menge der periodischen Funktionen $f(z)$ in Klassen einteilen will, so werden diejenigen als die einfachsten an die erste Stelle kommen, bei denen für die Koeffizienten a_n ein möglichst einfaches Bildungsgesetz besteht. Erfahrungen, die man auf anderen Gebieten der Analysis gemacht hat, legen es nahe, als ein solches Bildungsgesetz eine Rekursionsformel r-ter Stufe zu nehmen, nach der ein jeder Koeffizient a_{n+r} aus den r vorhergehenden Koeffizienten a_n, $a_{n+1}, a_{n+2}, \ldots a_{n+r-1}$ mittels derselben linearen Gleichung

$$a_{n+r} = \lambda_0 a_n + \lambda_1 a_{n+1} + \lambda_2 a_{n+2} + \cdots + \lambda_{r-1} a_{n+r-1} \tag{9}$$

erhalten wird. Dies soll im Folgenden geschehen. Dabei wird sich zugleich eine gewisse Ergänzung der vorhergehenden Untersuchungen ergeben. Bei diesen wurde nämlich zur Herleitung der Auflösung (7) der unendlich vielen linearen Gleichungen (5) die Exponentialfunktion e^z und deren Periodizität benutzt, die in den Gleichungen (8) zur Geltung kommt. Es entsteht daher die Frage, ob sich die Funktion e^z nicht unmittelbar aus den Gleichungen (5) herleiten lässt. Es wird sich zeigen, dass die Exponentialfunktion in der Tat eine gewisse Ausnahmestellung einnimmt.

Es sei zunächst $r = 1$, also

$$a_{n+1} = \lambda_0 a_n. \tag{9'}$$

Hieraus folgt, dass

$$a_n = \lambda_0^{n-1} a_1 \tag{10'}$$

ist, wo der Koeffizient a_1 willkürlich bleibt. Ferner gilt nach (9′) die Identität

$$\sum_{t=1}^{\infty} a_{n+t} \frac{c^{t-1}}{t!} = \lambda_0 \cdot \sum_{t=1}^{\infty} a_{n-1+t} \frac{c^{t-1}}{t!},$$

aus der sich sofort ergibt, dass die sämtlichen Gleichungen (5) auf die einzige Gleichung

$$\sum_{t=1}^{\infty} a_t \frac{c^{t-1}}{t!} = 0$$

zurückkommen. Diese Gleichungen sind demnach erfüllt, wenn bei gegebenem c die von Null verschiedene Grösse λ_0 aus der Gleichung

$$\sum_{t=1}^{\infty} \frac{(\lambda_0 c)^{t-1}}{t!} = 0 \tag{11}$$

bestimmt wird.[1] Nachdem dieses geschehen ist, wird

$$P(z) = a_0 + \frac{a_1}{\lambda_0} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\lambda_0 z)^n}{n!}.$$

Es empfiehl sich daher, die beständig konvergente Potenzreihe

[1] Im Nenner der Gleichung (11) und in den Nennern der beiden vorhergehenden Gleichungen ist in der *Festschrift* (S. 402) $p!$ an Stelle von $t!$ gesetzt worden: dieser Druckfehler ist zu verbessern.

$$E(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \tag{12}$$

einzuführen. Dann wird die ebenfalls beständig konvergente Potenzreihe

$$P(z) = b_0 + b_1 . E(\lambda_0 z),$$

wo b_0 und b_1 willkürliche Konstanten bezeichnen, die vorgeschriebene Periode c besitzen, falls λ_0 aus der Gleichung

$$E(\lambda_0 c) - 1 = 0 \tag{11'}$$

bestimmt wird.

Die ganze Schwierigkeit läuft mithin darauf hinaus, dass eine (von Null verschiedene) Wurzel der Gleichung

$$E(z) = 1 \tag{11''}$$

gefunden werden soll. Hat diese Gleichung eine von Null verschiedene Wurzel c, so besitzt sie unzählig viele solche Wurzeln, denn aus der Periodizität erschliesst man sofort, dass mit der Gleichung $E(c) = 0$ auch die Gleichungen $E(\nu c) = 0$ erfüllt sind, in der ν eine beliebige positive oder negative ganze Zahl bedeutet.

Es ist bekannt, dass

$$c = 2\pi i$$

ist, woraus sich

$$\lambda_0 = \frac{2\pi i}{c}$$

ergibt. Die Ausnahmestellung der Funktion $E(z) = e^z$ ist darin begründet, dass zum Beweise dieses Lehrsatzes weitere Hilfsmittel herangezogen werden müssen. Es wäre sehr zu wünschen, dass die hierbei benutzten Methoden eine historisch-kritische Darstellung fänden. Hier möge nur bemerkt werden, dass zwei Verfahrungsarten am gebräuchlichsten sind. Bei den Beweisen wird entweder der durch das Integral

$$z = \int_1^E \frac{du}{u}$$

erklärte Logarithmus der komplexen Veränderlichen E benutzt oder die Gleichung (11'') in die beiden Gleichungen

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{z^{2\nu}}{(2\nu)!} = 1, \quad \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{z^{2\nu+1}}{(2\nu+1)!} = 0$$

zerlegt, deren identisches Bestehen für $z = 2\pi i$ aus dem Zusammenhang mit den trigonometrischen Funktionen hervorgeht. Vom methodischen Standpunkte aus verdient das erste Verfahren ohne Zweifel den Vorzug, wenn auch das zweite seine didaktischen Vorteile haben mag.

Nunmehr werde $r = 2$ gesetzt, sodass

$$a_{n+2} = \lambda_0 a_n + \lambda_1 a_{n+1} \tag{9''}$$

ist. Hierbei muss λ_0 von Null verschieden sein, während λ_1 verschwinden darf.

Der Fall $\lambda_1 = 0$, der einer besonderen Behandlung bedarf, möge zuerst untersucht werden. Um die Formeln geschmeidiger zu machen, setze man

$$\lambda_0 = \mu^2.$$

Dann folgt aus den Gleichungen (9''):

$$a_{2\nu+1} = \mu^{2\nu} . a_1, \quad a_{2\nu+2} = \mu^{2\nu} . a_2 \qquad (\nu = 1, 2, 3, \ldots). \tag{10''}$$

Ferner gilt die Identität

$$\sum_{t=1}^{\infty} a_{n+t} \frac{c^{t-1}}{t!} = \mu^2 . \sum_{t=1}^{\infty} a_{n-2+t} \frac{c^{t-1}}{t!},$$

sodass die sämtlichen Gleichungen (5) auf die zwei Gleichungen

$$\sum_{t=1}^{\infty} a_t \frac{c^{t-1}}{t!} = 0, \quad \sum_{t=1}^{\infty} a_{t+1} \frac{c^{t-1}}{t!} = 0$$

zurückkommen. Mithin ist nach (10''):

$$\begin{cases} a_1 . \sum\limits_{\nu=0}^{\infty} \frac{(\mu c)^{2\nu}}{(2\nu+1)!} + \frac{a_2}{\mu} . \sum\limits_{\nu=0}^{\infty} \frac{(\mu c)^{2\nu+1}}{(2\nu+2)!} = 0, \\ a_2 . \sum\limits_{\nu=0}^{\infty} \frac{(\mu c)^{2\nu}}{(2\nu+1)!} + \mu a_1 . \sum\limits_{\nu=0}^{\infty} \frac{(\mu c)^{2\nu+1}}{(2\nu+2)!} = 0, \end{cases} \tag{12}$$

man hat also zwei lineare homogene Gleichungen für die beiden in den Gleichungen (12) auftretenden unendlichen Summen, und diese müssen beide gleich Null sein, weil die Determinante der Gleichungen nicht verschwinden kann. Sonst wäre nämlich bei geeigneter Wahl des Vorzeichens von μ:

$$a_2 = \mu \, . \, a_1$$

und daher nach (10''):

$$a_n = \mu^{n-1} \, . \, a_1 ,$$

das heisst, es würde der Fall $r = 1$ vorliegen. Mithin muss die Grösse μc den beiden Gleichungen

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{z^{2\nu}}{(2\nu)!} = 1, \quad \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{z^{2\nu+1}}{(2\nu+1)!} = 0$$

genügen. Diese sind gleichzeitig für

$$z = 2\pi i$$

erfüllt, demnach ist bei gegebenem c

$$\mu = \frac{2\pi i}{c}$$

zu setzen, und die allgemeinste Lösung der Aufgabe wird:

$$P(z) = b_0 + b_1 \sin \frac{2\pi z}{c} + b_2 \cos \frac{2\pi z}{c},$$

wo b_0, b_1, b_2 willkürliche Konstanten bedeuten.

Jetzt möge λ_1 von Null verschieden sein. Dann werden die Koeffizienten a_n lineare, homogene Funktionen von a_1 und a_2, etwa

$$(10^*) \qquad a_n = \varphi_n a_1 + \psi_n a_2 ;$$

hierbei sind φ_n und ψ_n Funktionen von λ_0 und λ_1, die ebenso wie die a_n den Rekursionsformeln (9'') genügen, aus denen sie sich nämlich ergeben, wenn beziehungsweise $a_1 = 1$, $a_2 = 0$ und $a_1 = 0$, $a_2 = 1$ gesetzt wird. Wenn sich nun auch die φ_n und ψ_n mittels Determinanten explizite herstellen lassen, so werden die Formeln doch so verwickelt, dass die wirkliche Durchführung der Rechnungen erhebliche Schwierigkeiten bietet. Indessen lassen sich auch ohne die Benutzung der expliziten Ausdrücke für φ_n und ψ_n einige Schlüsse ziehen.

Zunächst erkennt man, dass das Bestehen der beiden ersten Gleichungen des Systemes (5) das Bestehen aller übrigen nach sich zieht. Werden in diesen Gleichungen für die a_n die Ausdrücke (10*) eingesetzt, so erhält man die Relationen:

$$(13)\quad \begin{cases} a_1 \cdot \sum\limits_{t=1}^{\infty} \dfrac{\varphi_n c^{t-1}}{t!} + a_2 \cdot \sum\limits_{t=1}^{\infty} \dfrac{\psi_n c^{t-1}}{t!} = 0, \\ a_1 \cdot \sum\limits_{t=1}^{\infty} \dfrac{\varphi_{n+1} c^{t-1}}{t!} + a_2 \cdot \sum\limits_{t=1}^{\infty} \dfrac{\psi_{n+1} c^{t-1}}{t!} = 0. \end{cases}$$

Wenn man hierin, wie bei dem Fall $\lambda_1 = 0$, die Grössen a_1 und a_2 als willkürliche Konstanten ansehen wollte, so würden sich *vier* Gleichungen für die beiden Unbekannten λ_0 und λ_1 ergeben, während man in jenem Falle *zwei* Gleichungen für λ_0 bekommen hatte, die jedoch eine gemeinsame Lösung besassen. Ob das auch hier stattfindet, muss unentschieden bleiben. Wenn man jedoch die Grössen a_1 und a_2 ebenfalls als Unbekannte ansieht, so muss die Determinante des Systems (13) verschwinden, und es ergibt sich eine einzige Gleichung zwischen λ_0 und λ_1, gleichzeitig wird aber

$$a_2 = \varkappa a_1,$$

wo $\varkappa$ eine Funktion von λ_0 und λ_1 bedeutet. Man wird daher erwarten dürfen, dass es eine von zwei willkürlichen Konstanten abhängige Funktionenschar gibt, die der Aufgabe genügt. Wenn es auch nicht möglich ist, diese Funktionen explizite herzustellen, so lässt sich doch zeigen, dass sie *notwendig ganze transzendente Funktionen von z sind.*

Zum Beweise beachte man, dass nach den Gleichungen (10*):

$$P(z) = a_0 + a_1 \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n \frac{z^n}{n!} + a_2 \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \psi_n \frac{z^n}{n!}$$

wird, sodass alles auf die Untersuchung der Funktionen

$$\Phi(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n \frac{z^n}{n!}, \quad \Psi(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \psi_n \frac{z^n}{n!}$$

ankommt. Es wird genügen, die Funktion $\Phi(z)$ zu betrachten, da sich der Beweis für $\Psi(z)$ ganz ähnlich gestaltet. Nunmehr werde eine positive Grösse σ so gewählt, dass sie grösser als 1, $|\lambda_0|$, $|\lambda_1|$ ist. Dann folgt aus der Gleichung

$$\varphi_{n+2} = \lambda_0 \varphi_n + \lambda_1 \varphi_{n+1}$$

die Ungleichheit

$$|\varphi_{n+2}| < [|\varphi_n| + |\varphi_{n+1}|] \cdot \sigma,$$

und man erhält jetzt, weil

$$\varphi_1 = 1, \ \varphi_2 = 0$$

ist, der Reihe nach die Ungleichheiten:

$$|\varphi_3| < \sigma,$$
$$|\varphi_4| < \sigma \,.\, \sigma,$$
$$|\varphi_5| < (\sigma + \sigma^2) \,.\, \sigma < 2\sigma^3,$$
$$|\varphi_6| < (\sigma^2 + 2\sigma^3) \,.\, \sigma < 4\sigma^4.$$
$$|\varphi_7| < (2\sigma^3 + 4\sigma^4) \,.\, \sigma < 8\sigma^5,$$

sodass allgemein

$$|\varphi_n| < 2^{n-4}\sigma^{n-2}$$

wird. Die Reihe für die Funktion $\Phi(z)$ konvergiert daher mindestens ebenso stark wie die Reihe für die Funktion $e^{2\sigma z}$.

Für den Fall einer beliebigen Stufenzahl r möge nur bemerkt werden, dass die unendlich vielen linearen Gleichungen (5) für die Koeffizienten a_n auf die r ersten zurückkommen und dass man in ähnlicher Weise wie für $r = 2$ Reihen erhält, die mindestens ebenso stark konvergieren wie die Funktion $e^{r\sigma z}$, wo σ eine Konstante bedeutet.

Karlsruhe i. B., im Oktober 1912.