ÜBER DIE AUTOMORPHEN FUNKTIONEN ZWEIER VERÄNDERLICHEN.

Von

P. J. MYRBERG

in Helsingfors.

Herrn Professor G. Mittag-Leffler zu seinem 75-jährigen Geburtstage, als Zeugnis meiner aufrichtigen Verehrung für seine Persönlichkeit und sein Lebenswerk, ebenso wie meiner tiefgefühlten Dankbarkeit für die Gelegenheit zu Studien als Stipendiat des Institutes Mittag-Leffler.

P. J. Myrberg.

Einleitung.

Die vorliegende Abhandlung zerfällt in zwei Teile. Der erste von ihnen, dessen Inhalt von geometrisch-gruppentheoretischer Natur ist, hat den Zweck, die Theorie der Singularitäten der automorphen Funktionen von mehreren Veränderlichen von einem neuen Standpunkt aus zu entwickeln. Es handelt sich hier vor allem um eine zweckmässige Verallgemeinerung des Diskontinuitätsbegriffs, welche erlaubt, der Existenz der wesentlichen Singularitäten bei automorphen Funktionen mehrerer Veränderlichen eine natürliche Erklärung zu geben.

Der zweite Teil ist den Reihenentwicklungen automorpher Funktionen gewidmet. Insbesondere wird eine neue Gattung unendlicher Reihen gegeben, welche wie die Poincaréschen Reihen $(-2)^{\text{ter}}$ Dimension direkt zur Darstellung automorpher Differentiale führen.

Die folgende Untersuchung beschäftigt sich mit einer speziellen Klasse automorpher Funktionen zweier Veränderlichen. Die wichtigsten Resultate werden aber in einer Form gegeben, in der ihre Gültigkeit in viel allgemeineren Fällen und für beliebig viele Veränderliche zur Evidenz gebracht wird.

I. Definition hyperbolischer Bewegungen.

1. Den Gegenstand der folgenden Untersuchungen bilden die allgemeinsten diskontinuierlichen Gruppen reeller projektiven Substitutionen

$$X = \frac{\alpha_1 x + \beta_1 y + \gamma_1}{\alpha_3 x + \beta_3 y + \gamma_3}, \quad Y = \frac{\alpha_2 x + \beta_2 y + \gamma_2}{\alpha_3 x + \beta_3 y + \gamma_3}, \tag{1}$$

deren entsprechende lineare homogene Substitutionen

$$u_i' = \alpha_i u_1 + \beta_i u_2 + \gamma_i u_3 \qquad (i = 1, 2, 3) \tag{2}$$

eine vorgelegte indefinite quadratische Form

$$\varphi(u_1, u_2, u_3) = \sum_{p, q = 1}^{3} a_{p,q} u_p u_q \tag{3}$$

mit reellen Koeffizienten invariant lassen. Geometrisch stellt jede derartige Substitution eine »hyperbolische Bewegung» oder eine »Spiegelung» dar, wobei

$$\varphi(u_1, u_2, u_3) = 0 \tag{4}$$

die Gleichung des in der Cayleyschen Massbestimmung gebrauchten absoluten Kegelschnittes in homogenen Koordinaten ist.

2. Die allgemeinste hyperbolisch kongruente Abbildung (Bewegung oder Spiegelung) enthält drei willkürliche Parameter. Um diese Parameter in den Koeffizienten von (1) explizite hervortreten zu lassen, legen wir den folgenden Untersuchungen die spezielle quadratische Form

$$\varphi_0(u_1, u_2, u_3) = u_1^2 + u_2^2 - u_3^2 \tag{4'}$$

zu Grunde, was keine Beschränkung der Allgemeinheit ist, weil bekanntlich jede reelle indefinite ternäre quadratische Form vermittels einer reellen ternären Substitution in die Form φ_0 bzw. $-\varphi_0$ transformiert werden kann. Dies bedeutet geometrisch, dass wir den allgemeinen reellen Kegelschnitt (4) durch den mit ihm kollinearen Einheitskreis ersetzen. Zwischen den neun Koeffizienten von (1) herrschen in diesem Falle die Relationen

$$\begin{aligned} \alpha_1^2 + \alpha_2^2 - \alpha_3^2 &= 1, & \alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2 - \alpha_3\beta_3 &= 0, \\ \beta_1^2 + \beta_2^2 - \beta_3^2 &= 1, & \alpha_1\gamma_1 + \alpha_2\gamma_2 - \alpha_3\gamma_3 &= 0, \\ \gamma_1^2 + \gamma_2^2 - \gamma_3^2 &= -1, & \beta_1\gamma_1 + \beta_2\gamma_2 - \beta_3\gamma_3 &= 0. \end{aligned} \tag{5}$$

3. Wir wollen jetzt in wohlbekannter Weise die »hyperbolische Ebene«, d. h. das Innere des »absoluten Kreises« $x^2 + y^2 = 1$ (einschl. des Randes) in Zusammenhang mit der komplexen t-Ebene bringen, wo jeder hyperbolischen Bewegung und Spiegelung eine durch eine reelle lineare Substitution

$$t' = \frac{at + b}{ct + d} \tag{6}$$

vermittelte Kreisverwandtschaft entspricht.

Zu diesem Zweck projizieren wir zunächst die t-Ebene stereographisch auf die Kugel

$$\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = 1 \qquad (\xi + i\eta = t)$$

vom Pole $\xi = \eta = 0, \zeta = 1$ aus, und nachher diese Kugel orthogonal auf die $\xi\zeta$-Ebene. Wenn die x-und die y-Achse zu der ξ- und der ζ-Achse parallel und der Mittelpunkt der Kugel zum Nullpunkt der xy-Ebene gewählt werden, erhält man in dieser Weise die Relationen

$$\begin{aligned} x &= \frac{2\xi}{\xi^2 + \eta^2 + 1}, & y &= \frac{\xi^2 + \eta^2 - 1}{\xi^2 + \eta^2 + 1}, \\ \xi &= \frac{x}{1 - y} \quad, & \eta &= \pm \frac{\sqrt{1 - x^2 - y^2}}{1 - y}. \end{aligned} \tag{7}$$

Wir zerlegen jetzt die lineare Funktion (6) in ihren reellen und imaginären Bestandteil und erhalten dadurch die quadratische Cremonasubstitution

$$\xi' = \frac{ac(\xi^2 + \eta^2) + (ad + bc)\xi + bd}{c^2(\xi^2 + \eta^2) + 2cd\xi + d^2}, \quad \eta' = \frac{(ad - bc)\eta}{c^2(\xi^2 + \eta^2) + 2cd\xi + d^2}. \tag{8}$$

Vermittels der Relationen (7) erhält man alsdann für die Transformation der Variabeln x, y den Ausdruck

$$\begin{aligned} X &= \frac{(ad + bc)x + (ac - bd)y + (ac + bd)}{(ab + cd)x + \frac{1}{2}(a^2 + c^2 - b^2 - d^2)y + \frac{1}{2}(a^2 + b^2 + c^2 + d^2)}, \\ Y &= \frac{(ab - cd)x + \frac{1}{2}(a^2 + d^2 - b^2 - c^2)y + \frac{1}{2}(a^2 + b^2 - c^2 - d^2)}{(ab + cd)x + \frac{1}{2}(a^2 + c^2 - b^2 - d^2)y + \frac{1}{2}(a^2 + b^2 + c^2 + d^2)}, \end{aligned} \tag{9}$$

wo die Determinante der neun Koeffizienten gleich der dritten Potenz der Determinante

$$D = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$$

ist. Diese Koeffizienten bilden die allgemeinste Lösung der Gleichungen (5) unter der Voraussetzung

$$D = \pm 1,$$

d. h. die Formeln (9) stellen die allgemeinste im Cayleyschen Sinne kongruente Abbildung der hyperbolischen Ebene auf sich selbst dar.

Nach dem Vorzeichen der Determinante D hat man zwischen zwei wesentlich verschiedenen Fällen zu unterscheiden. Dem Fall $D = 1$ entspricht nämlich eine Kreisverwandtschaft, bei welcher jede der beiden t-Halbebenen in sich überführt wird, und eine Kollineation (1), die geometrisch eine hyperbolische Bewegung darstellt. Dem Fall $D = -1$ entspricht eine Kreisverwandtschaft, bei welcher die beiden t-Halbebenen miteinander vertauscht werden, und eine Kollineation, die geometrisch eine hyperbolisch kongruente Abbildung mit Umlegung der Winkel, also eine Spiegelung, repräsentiert.

4. Durch die Formeln (7) ist eine umkehrbar eindeutige Beziehung zwischen den Punkten der hyperbolischen Ebene und den aus zwei konjugiert komplexen t-Werten gebildeten Punktpaaren festgestellt, wobei die reellen Punkte des absoluten Kreises und die doppelt zu zählenden Punkte der reellen t-Achse einander entsprechen.

Indem wir jetzt die Variabeln x und y beliebige reelle oder komplexe Werte annehmen lassen, ordnen wir jedem Wertpaar (x, y) die durch (7) bestimmten Grössen

$$\sigma = \xi + i\eta, \qquad \tau = \xi - i\eta \tag{10}$$

zu, welche wir durch Punkte der t-Ebene repräsentieren. Hierdurch wird eine umkehrbar eindeutige Beziehung festgestellt zwischen den Punkten des durch die reellen und imaginären Bestandteile von x und y definierten vierdimensionalen Raumes R_4 und den Punktpaaren σ, τ der t-Ebene. Die Grössen σ, τ wollen wir die »t-Koordinaten» des betreffenden Punktes von R_4 nennen und diesen Punkt selbst mit $P(\sigma, \tau)$ oder kurz (σ, τ) bezeichnen.

Aus dem Obigen geht hervor, dass die Punkte $P(\sigma, \tau)$ und $P(\tau, \sigma)$ identisch sind.

Für die Punkte der hyperbolischen Ebene stimmt die obige Zuordnung mit der in der vorigen Nummer angegebenen überein, da in diesem Falle σ und τ konjugiert komplexe Grössen sind. Ferner entspricht jedem ausserhalb des Einheitskreises gelegenen Punkte P der reellen xy-Ebene ein Punktpaar σ, τ der reellen t-Achse, nämlich die Bilder der beiden Schnittpunkte der Polaren von P mit dem absoluten Kreis. Schliesslich sei noch bemerkt, dass komplexen Punkten des absoluten Kreises komplexe Doppelpunkte der t-Ebene zugeordnet werden.

Es sei nun

$$Ax + By + C = 0 \tag{11}$$

die Gleichung irgend einer reellen oder komplexen Geraden. Die Abhängigkeit zwischen den t-Koordinaten ihrer Punkte wird durch die bilineare Gleichung

$$(C + B)\sigma\tau + A(\sigma + \tau) + (C - B) = 0 \tag{12}$$

dargestellt, welche eine involutorische Projektivität zwischen σ und τ definiert.

Die Koeffizienten von (11) seien insbesondere reell. Jenachdem diese Gerade den absoluten Kreis schneidet oder nicht, hat man auf der reellen t-Achse eine hyperbolische oder elliptische Involution, deren Fixpunkte die Repräsentanten des Poles der genannten Geraden sind. Insbesondere entsprechen im ersten Falle der innerhalb des absoluten Kreises gelegenen Sehne die Paare konjugierter Punkte auf dem durch die Fixpunkte der hyperbolischen Involution gehenden Orthogonalkreise der reellen Achse.

Es sei schliesslich (11) eine Tangente des absoluten Kreises, welche diesen Kreis in einem beliebigen reellen oder komplexen Punkt $(\varkappa, \varkappa)$ berührt. Die Involution (12) nimmt dann die ausgeartete Form

$$\sigma = \varkappa \text{ bzw. } \tau = \varkappa$$

an. Hieraus kann zur späteren Anwendung der Schluss gezogen werden, dass der Punkt (σ, τ) den Schnittpunkt der durch die Punkte (σ, σ) und (τ, τ) des absoluten Kreises gezogenen Tangenten bildet.

II. Die invarianten Mannigfaltigkeiten hyperbolischer Bewegungen.

5. Wir haben die Kollineationen (9) als Bewegungen bzw. Spiegelungen der hyperbolischen Ebene gedeutet. Es ist unsere nächste Aufgabe, die fundamentalen Eigenschaften dieser Transformationen in dem ganzen vierdimensionalen Raum R_4 zu untersuchen. Bei dieser Untersuchung handelt es sich vor allem um die Bestimmung der Gesamtheit der invarianten Gebilde, d. h. der Punktmannigfaltigkeiten, welche jeder Kollineation (9) gegenüber invariant bleiben.

Weil diese Fragen an und für sich ein geometrisches Interesse besitzen, wollen wir bei ihnen ausführlicher verweilen, als es für die funktionentheoretischen Zwecke notwendig wäre.

Die Gesamtheit der reellen Kollineationen (9) bildet eine ∞^3- fach ausgedehnte kontinuierliche Gruppe, in welcher die Gruppe der Kollineationen mit positiver Determinante, der eigentlichen hyperbolischen Bewegungen, als eine ausgezeichnete Untergruppe des Index zwei enthalten ist.

Es sei nun $P(x,y)$ irgend ein Punkt des Raumes R_4. Diejenigen Punkte dieses Raumes, zu welchen man vom Punkte P aus vermittels aller möglichen hyperbolischen Bewegungen gelangen kann, bilden ein algebraisches Kontinuum, welches wegen der Anzahl der in (9) enthaltenen unbestimmten Parameter im Allgemeinen dreidimensional ist. Es ist ersichtlich, dass diese Mannigfaltigkeiten uns die einfachsten invarianten Gebilde liefern, aus denen sich alle anderen zusammensetzen lassen.

Zur näheren Untersuchung dieser invarianten Mannigfaltigkeiten betrachten wir das Doppelverhältnis

$$J(\sigma,\tau)=\frac{\sigma-\bar\sigma}{\sigma-\bar\tau}:\frac{\tau-\bar\sigma}{\tau-\bar\tau}\quad\left(=\frac{\sigma-\bar\sigma}{\sigma-\bar\tau}\cdot\frac{\tau-\bar\tau}{\tau-\bar\sigma}\right), \tag{13}$$

wo $\bar\sigma,\bar\tau$ die konjugierten Zahlen von σ und τ bedeuten. Dieser Ausdruck hat für jedes Wertpaar σ,τ einen ganz bestimmten Wert, von demjenigen Fall abgesehen, wo σ und τ reell und einander gleich sind.

Wenn die Punkte σ und τ auf derselben Seite der reellen Achse liegen, ist offenbar $0<J(\sigma,\tau)\leq 1$. Speziell ist $J(\sigma,\tau)=1$ für $\sigma=\tau$. Wenn dagegen die Punkte σ,τ in verschiedenen Halbebenen liegen, ist $J(\sigma,\tau)<0$. Speziell ist hier $J(\sigma,\tau)=-\infty$, wenn σ und τ konjugiert komplexe Zahlen sind. Sobald irgend einer der Punkte σ,τ zur reellen Achse gelangt, wird $J(\sigma,\tau)=0$ (vorausgesetzt, dass jene Punkte dabei nicht zusammenfallen).

Wir wählen jetzt irgend einen Punkt (x,y), der dem reellen absoluten Kreis nicht angehört. Es seien σ,τ seine t-Koordinaten und J der entsprechende Wert von (13). Jeder auf x und y ausgeübten reellen Kollineation (9) entspricht eine reelle lineare Substitution (6) der Variabeln σ und τ. Jede solche Substitution lässt aber das Doppelverhältnis $J(\sigma,\tau)$ invariant. Es besteht daher die Gleichung

$$J(\sigma,\tau)=J \tag{14}$$

für sämtliche Punkte derjenigen Mannigfaltigkeit M, welche erhalten wird, wenn der gegebene Punkt (x,y) allen reellen Kollineationen (9) unterworfen wird.

6. Wir nehmen zuerst

$$J\neq 0,1,-\infty$$

an. Nach dem Obigen sind dann die Zahlen σ, τ, welche der Gleichung (14) genügen, voneinander verschiedene nicht konjugierte Zahlen und daher $\bar{\sigma} \neq \tau$, $\bar{\tau} \neq \sigma$.

Wenn σ_1, τ_1 und σ_2, τ_2 zwei beliebige Lösungen von (14) sind, gibt es in diesem Falle stets eine reelle lineare Substitution (6), welche gleichzeitig σ_1, τ_1 auf σ_2, τ_2 und $\bar{\sigma}_1, \bar{\tau}_1$ auf $\bar{\sigma}_2, \bar{\tau}_2$ abbildet. Dies wird in der Tat durch die Substitution

$$(15) \qquad \frac{t' - \sigma_2}{t' - \tau_2} = K \frac{t - \sigma_1}{t - \tau_1}$$

geleistet, wenn K der Bedingung

$$(15)' \qquad K = \frac{\bar{\sigma}_2 - \sigma_2}{\bar{\sigma}_2 - \tau_2} : \frac{\bar{\sigma}_1 - \sigma_1}{\bar{\sigma}_1 - \tau_1} \quad \left(= \frac{\bar{\tau}_2 - \sigma_2}{\bar{\tau}_2 - \tau_2} : \frac{\bar{\tau}_1 - \sigma_1}{\bar{\tau}_1 - \tau_1} \right)$$

gemäss gewählt wird.

Im vorliegenden Falle gehören daher sämtliche Punkte von R_4, deren t-Koordinaten die Gleichung (14) befriedigen, der oben definierten Mannigfaltigkeit M an, welche wir von jetzt ab mit H_J bezeichnen wollen. Diese Mannigfaltigkeit hat als einzige Grenzpunkte die reellen Punkte des absoluten Kreises. Um dies einzusehen, braucht man nur auf irgend ein der Gleichung (14) genügendes Wertpaar σ, τ die lineare Substitution

$$t' = t_0 + \varrho (t - t_0)$$

auszuüben, wo t_0 einen beliebigen reellen Wert hat und ϱ ein reeller Parameter ist. Wenn der Wert von ϱ von Eins bis Null kontinuierlich abnimmt, wobei die Gleichung (14) fortwährend ihre Gültigkeit behält, nähern sich die Grössen σ und τ beide kontinuierlich dem Wert t_0, und der zugeordnete Punkt (x, y) von H_J konvergiert mithin gegen den Punkt (t_0, t_0) des absoluten Kreises. Jeder reelle Punkt dieses Kreises ist somit ein Grenzpunkt der Mannigfaltigkeit H_J und andere Grenzpunkte kann es nach dem Obengesagten nicht geben.

Die invariante Mannigfaltigkeit H_J besitzt wesentlich verschiedene Charaktere, jenachdem $J < 0$ oder $J > 0$ ist.

Im ersten Falle repräsentieren die t-Koordinaten σ und τ irgend eines inneren Punktes von H_J Punkte der t-Ebene, welche auf verschiedenen Seiten der reellen Achse liegen. Weil nun (σ, τ) und (τ, σ) einen und denselben Punkt von R_4 darstellen und weil anderseits $J(\sigma, \tau) \equiv J(\tau, \sigma)$ ist, so können die Koordinaten σ_1, τ_1 und σ_2, τ_2 zweier beliebigen inneren Punkte von H_J im vorliegenden Falle so gewählt werden, dass σ_1 und σ_2 auf einer und derselben Seite der reellen t-Achse liegen, und ebenfalls τ_1 und τ_2. Es ist dann möglich, eine kontinuierliche

Folge von infinitesimalen Substitutionen (6) zu definieren, welche σ_1 in σ_2 und τ_1 in τ_2 überführen, ohne dass die reelle Achse überschritten wird. M. a. W. können die entsprechenden Punkte von H_J miteinander vermittels einer auf H_J gelegenen kontinuierlichen Kurve vereinigt werden, deren sämtliche Punkte innere Punkte von H_J sind. Die Mannigfaltigkeit H_J besteht also im vorliegenden Falle $J < 0$ aus einem einzigen dreidimensionalen Kontinuum, dessen Grenzpunkte aus der Gesamtheit der reellen Punkte des absoluten Kreises bestehen.

Wenn $J > 0$ ist, sind die Punkte σ und τ auf derselben Seite der reellen Achse gelegen. Bei beliebiger Verschiebung des Punktes (x, y) im Innern von H_J können die Punkte σ und τ nach dem Obigen die reelle Achse nicht überschreiten. Hieraus geht aber hervor, dass die Mannigfaltigkeit H_J im Falle $J > 0$ aus zwei verschiedenen dreidimensionalen Kontinua besteht, die nur längs der Peripherie des reellen absoluten Kreises miteinander zusammenhängen. Das eine Kontinuum entspricht den Punktpaaren der oberen Halbebene, das andere denjenigen der unteren Halbebene. Diese Halbebenen gehen vermittels jeder reellen Substitution (6) negativer Determinante ineinander über und mithin werden die betreffenden zwei Kontinua vermittels jeder Kollineation (9) negativer Determinante ineinander überführt. Einer Spiegelung der Halbebenen an der reellen Achse entspricht im Speziellen der Uebergang vom Punkte (x, y) zum konjugierten Punkt $(\bar{x}, \bar{y})$. Die beiden Kontinua sind also miteinander spiegelbildlich kongruent.

7. Es erübrigt noch die oben ausgeschlossenen Spezialfälle zu untersuchen. Im Falle $J = -\infty$ sind σ und τ in der zugeordneten Gleichung (14) konjugiert komplexe Grössen, und die entsprechenden Punkte (x, y) sind also reelle Punkte im Inneren des absoluten Kreises. Die Mannigfaltigkeit $H_{-\infty}$ ist daher identisch mit der reellen hyperbolischen Ebene, die als Grenzpunkte die reellen Punkte des absoluten Kreises hat.

Im Falle $J = 1$ ergibt sich aus (13) dass σ und τ komplex und einander gleich sind. Die entsprechenden Punkte (x, y) sind die komplexen Punkte des absoluten Kreises. Die invariante Mannigfaltigkeit H_1 besteht also aus der Gesamtheit der komplexen Punkte des absoluten Kreises, die ein zweidimensionales Kontinuum bilden, welches von den reellen Punkten des absoluten Kreises begrenzt ist.

Es sei schliesslich $J = 0$. Dann ist entweder eine der zugeordneten Grössen σ, τ reell oder es sind beide reell. Diese Eigenschaften bleiben bei Ausführung irgendeiner Substitution (6) mit reellen Koeffizienten unverändert. Es sei nur eine der t-Koordinaten reell. Die im allgemeinen Falle für $J > 0$ erhaltenen Resultate gelten hier unverändert, indem einer der Ausdrücke $(15)'$ für K stets einen bestimmten Wert gibt. Man hat also im Falle $J = 0$ zwei dreidimensionale invariante Mannigfaltigkeiten, welche erhalten werden, wenn die eine t-Koordinate alle reellen Werte, die andere aber alle der einen oder anderen Halbebenen zugehörigen komplexen Werte durchläuft. Diese Mannigfaltigkeiten hängen in den durch die reellen σ und τ repräsentierten Punkten (σ, τ) mit einander zusammen, welche eine invariante zweidimensionale Mannigfaltigkeit bilden, nämlich das Äussere des reellen absoluten Kreises. Beide Teile von H_0 sind übrigens spiegelbildlich miteinander kongruent.

8. Durch die obigen Betrachtungen sind alle invarianten Mannigfaltigkeiten bestimmt worden. Unter diesen Mannigfaltigkeiten gibt es eine eindimensionale, nämlich die Mannigfaltigkeit der reellen Punkte des absoluten Kreises, und drei zweidimensionale, nämlich das Innere und das Äussere des absoluten Kreises und die Mannigfaltigkeit der komplexen Punkte dieses Kreises.

Die übrigen Mannigfaltigkeiten sind alle dreidimensional und können durch die aus (14) folgende Gleichung

$$(1 - x\bar{x} - y\bar{y})^2 = \lambda (1 - x^2 - y^2)(1 - \bar{x}^2 - \bar{y}^2) \tag{16}$$

dargestellt werden[1], wo

$$\lambda = \left(\frac{1 + J}{1 - J}\right)^2.$$

Unter den dreidimensionalen Gebilden (16) ist wohl am meisten bekannt die Hypersphäre

$$x\bar{x} + y\bar{y} - 1 = 0, \tag{16$'$}$$

die für $J = -1$ erhalten wird. In der Theorie der automorphen Funktionen hat jedoch der Fall $J = 0$ die wichtigste Bedeutung, d. h. die Gleichung[1]

$$(1 - x\bar{x} - y\bar{y})^2 = (1 - x^2 - y^2)(1 - \bar{x}^2 - \bar{y}^2), \tag{17}$$

die auch in der Form

$$(x_1 y_2 - x_2 y_1)^2 = x_2^2 + y_2^2$$

[1] Für $J > 0$ stellt (16) die Mannigfaltigkeit H_J dar, für $J \leq 0$ die Gesamtheit der Mannigfaltigkeiten H_J und $H_{\frac{1}{J}}$. Also stellt insbesondere die Gleichung (17) die Gesamtheit der Gebilde H_0 und $H_{-\infty}$ dar.

darstellbar ist, wenn $x = x_1 + i x_2$, $y = y_1 + i y_2$ gesetzt wird. Es wird nämlich aus den späteren Untersuchungen hervorgehen, dass das Gebilde H_0 für die automorphen Funktionen der in vorliegender Arbeit untersuchten Gruppen als natürliche Grenze dieselbe Rolle spielt, wie der Grenzkreis für die lakunären automorphen Funktionen einer Variabeln.

Zur Gleichung (17) ist PICARD[1] in einer kürzlich erschienen Arbeit über eine spezielle Gruppe reeller hyperbolischer Bewegungen gelangt, ohne jedoch die prinzipielle Wichtigkeit des Gebildes H_0 zu betonen.

9. Aus der Gleichung (14) geht hervor, dass durch irgend einen Punkt des Raumes R_4 eine und im allgemeinen nur eine invariante Mannigfaltigkeit H_J geht. Eine Ausnahme machen nur die reellen Punkte des absoluten Kreises, die zu jedem invarianten Gebilde gehören.

Wir sagen der Kürze wegen, der Punkt (σ, τ) liege auf dem Gebilde H_J, bzw. innerhalb oder ausserhalb desselben, jenachdem das zugeordnete Doppelverhältnis (13) gleich, kleiner oder grösser als J ist. Wenn also J alle reellen Werte von $+1$ bis zu $-\infty$ durchläuft, erhält man die ∞^1- fache Schar ineinander geschalteter invarianter Gebilde, unter welchen die hyperbolische Ebene $H_{-\infty}$ das innerste und der absolute Kreis, als Träger sowohl der reellen als komplexen Punkte, das äusserste ist.

Wir untersuchen jetzt die Teilung des Ganzen Raumes R_4 durch das spezielle invariante Gebilde H_0 näher.

Das Innere von H_0 besteht nach dem Obigen aus der Gesamtheit der Punkte (σ, τ), deren σ und τ Punkte verschiedener t-Halbebenen darstellen. Diese Punkte bilden einen einfachzusammenhängenden Bereich A, welcher u. a. die hyperbolische Ebene und die Hypersphäre (16)' als Teile enthält.

Das Äussere von H_0 besteht dagegen aus zwei verschiedenen, mit einander spiegelbildlich kongruenten Gebieten B und C, nämlich aus den zwei Punktmannigfaltigkeiten, deren σ und τ entweder beide der oberen oder beide der unteren t-Halbebene angehören. Diese Gebiete werden durch einen zweidimensionalen Teil von H_0, nämlich durch den ausserhalb des absoluten Kreises gelegenen Teil der reellen xy-Ebene von einander getrennt.

10. Die Eigenart des Gebildes H_0 lässt sich noch in folgender Weise charakterisieren, was für die späteren Anwendungen wichtig ist:

---

[1] *Sur certains groupes discontinus correspondant aux formes quadratiques ternaires;* (Annales scientifiques de l'école normale supérieure. III série, tome 33; 1916).

Vgl. auch G. GIRAUD, *Leçons sur les fonctions automorphes*, S. 122.

Es sei

$$(18) \qquad x_0 x + y_0 y - 1 = 0$$

die Gleichung irgend einer reellen Geraden. Man hat dann auch die Gleichung

$$(18)' \qquad x_0 \bar{x} + y_0 \bar{y} - 1 = 0.$$

Aus (18) und (18)' erhält man durch leichte Umformung

$$(1 - x\bar{x} - y\bar{y})^2 - (1 - x^2 - y^2)(1 - \bar{x}^2 - \bar{y}^2) = (x_0^2 + y_0^2 - 1)(x\bar{y} - \bar{x}y)^2.$$

Nun sei (x, y) ein beliebiges, dieser Gleichung genügendes Wertpaar, H_J die durch den entsprechenden Punkt des Raumes R_4 gehende invariante Mannigfaltigkeit und (16) die Gleichung dieser Mannigfaltigkeit. Nach der obigen Gleichung ist dann sign. $(\lambda - 1) =$ sign. $(x_0^2 + y_0^2 - 1)$, und nach der S. 297 gegebenen Relation zwischen λ und J ist somit sign. $J =$ sign. $(x_0^2 + y_0^2 - 1)$. Hieraus geht aber hervor, dass der Punkt (x, y) dem Innern, dem Äussern von H_0 oder dem Gebilde H_0 selbst angehört, jenachdem die Gerade (18) den absoluten Kreis schneidet, nicht trifft oder berührt.

Hiernach kann das invariante Gebilde H_0 als die Einhüllende der Tangenten des reellen absoluten Kreises angesehen werden, wobei diese Tangenten als Träger ihrer sowohl reellen als komplexen Punkte, somit als zweidimensionale Mannigfaltigkeiten zu betrachten sind.

11. Die Existenz der oben gefundenen invarianten Mannigfaltigkeiten H_J lässt sich invariantentheoretisch in folgender Weise begründen.

Bekanntlich besitzt die allgemeine ternäre quadratische Form (3), ausser der Determinante der Koeffizienten, welche eine »Invariante» ist, noch einen zweiten invarianten Ausdruck, nämlich die »Kontravariante»

$$(19) \qquad F = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & v_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & v_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & v_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 & 0 \end{vmatrix},$$

wo die kontragredienten Variabeln

$$v_1 = \begin{vmatrix} u_2 & u_3 \\ \bar{u}_2 & \bar{u}_3 \end{vmatrix}, \quad v_2 = \begin{vmatrix} u_3 & u_1 \\ \bar{u}_3 & \bar{u}_1 \end{vmatrix}, \quad v_3 = \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ \bar{u}_1 & \bar{u}_2 \end{vmatrix}$$

der zur Substitution der kongredienten Variabeln u und $\bar{u}$ reziproken Substitution zu unterwerfen sind. Wir wählen die Variabeln u und $\bar{u}$ konjugiert imaginär und legen bei der Bildung der Kontravariante F die spezielle Form (4)' zu Grunde. Für F ergibt sich dann der Ausdruck

$$F_0 = \begin{vmatrix} u_2 \, u_3 \\ \bar{u}_2 \, \bar{u}_3 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} u_3 \, u_1 \\ \bar{u}_3 \, \bar{u}_1 \end{vmatrix}^2 - \begin{vmatrix} u_1 \, u_2 \\ \bar{u}_1 \, \bar{u}_2 \end{vmatrix}^2 .$$

Die Gleichung

$$F_0 = \lambda \varphi_0 \bar{\varphi}_0, \tag{20}$$

wo $\bar{\varphi}_0$ die konjugierte Grösse von φ_0 bedeutet, stellt aber, wie leicht einzusehen ist, die Gleichung (16) der invarianten Mannigfaltigkeiten H_J in homogenen Punktkoordinaten dar.

III. Diskontinuierliche Gruppen hyperbolischer Bewegungen.

12. Bevor wir zur funktionentheoretischen Seite unserer Betrachtungen übergehen, haben wir gewisse Aufgaben im Gebiet der geometrischen Gruppentheorie zu lösen. Es handelt sich vor allem um die Definition und Untersuchung der allgemeinsten im Raume R_4 »eigentlich diskontinuierlichen» Gruppen reeller hyperbolische Bewegungen, d. h. Gruppen mit endlich ausgedehntem, vierdimensionalem Fundamentalbereich, indem nur diese Gruppen automorphe Funktionen besitzen können.

Zu diesem Zweck hat man die Häufungsmengen $M'(P)$ derjenigen Punktmengen $M(P)$ zu studieren, die aus den vermittels der Substitutionen der betrachteten Gruppe erhaltenen Transformierten irgend eines gegebenen Punktes P bestehen. Die Punkte der Mengen $M'(P)$, welche wir »Grenzpunkte» der Gruppe nennen wollen, können in zwei Klassen geteilt werden.

Es zeigt sich nämlich, dass die Häufungsmenge $M'(P)$ von der Wahl des Ausgangspunktes P unabhängig ist, sobald dieser Punkt ausserhalb gewisser spezieller Punktgebilde von höchstens dritter Dimension gewählt wird. Die Punkte dieser koiinzidierenden Mengen $M'(P)$ werden wir »Hauptgrenzpunkte» der Gruppe nennen und ihre Gesamtheit mit (M) bezeichnen. Wenn aber der Punkt P jenen speziellen Punktgebilden angehört, kann es eintreffen, dass $M'(P)$ Punkte enthält, die in (M) nicht vorkommen. Diese Punkte wollen wir »spezielle Grenzpunkte» der Gruppe nennen.

13. Wir wollen zunächst den einfachsten Fall, die zyklischen Gruppen, für sich betrachten.

Es sei

$$\frac{t' - t_1}{t' - t_2} = K \frac{t - t_1}{t - t_2} \tag{21}$$

irgend eine reelle lineare Substitution mit den Fixpunkten t_1 und t_2. Die zugeordnete Kollineation (9) hat dann im ganzen drei invariante Punkte (σ, τ), nämlich die Punkte

$$(t_1, t_1),\ (t_2, t_2),\ (t_1, t_2).$$

Die beiden ersten sind Punkte des absoluten Kreises; sie sind reell oder konjugiert komplex, jenachdem die Substitution (21) hyperbolisch oder elliptisch ist. Der dritte Fixpunkt ist stets reell und liegt im ersten Falle ausserhalb, im zweiten innerhalb des reellen absoluten Kreises.

Bei einer parabolischen Substitution gibt es ein einziges invariantes Punktpaar, nämlich $(t_0, t_0,)$, wo t_0 den Fixpunkt der parabolischen Substitution bezeichnet, und demgemäss hat die zugeordnete Kollineation nur einen, auf dem reellen absoluten Kreis gelegenen Fixpunkt.

Jede von einer einzigen elliptischen Substitution erzeugte Gruppe ist entweder endlich oder kontinuierlich. Wir nehmen daher die Substitution (21) als hyperbolisch an und bezeichnen sie kurz $\Sigma(t)$. Es sei die reelle positive Zahl $K < 1$. Die Punkte $\Sigma^n(t)$ und $\Sigma^{-n}(t)$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ haben dann, unter der Voraussetzung $t \neq t_2$ *bzw.* $t \neq t_1$, die Fixpunkte t_1 *bzw.* t_2 zu Häufungsstellen.

Wenn also der Punkt $P(\sigma, \tau)$ von R_4 keiner der beiden durch (t_1, t_1) und (t_2, t_2) gehenden Tangenten des absoluten reellen Kreises angehört, reduziert sich die Häufungsmenge $M'(P)$ immer auf die zwei Punkte (t_1, t_1) und (t_2, t_2), wenn dagegen P auf einer dieser Tangenten liegt und von den ebengenannten zwei Punkten verschieden ist, tritt in $M'(P)$ der neue Punkt (t_1, t_2) auf.

Die Punkte (t_1, t_1) und (t_2, t_2) sind daher die Hauptgrenzpunkte, der Punkt (t_1, t_2) der einzige spezielle Grenzpunkt der zyklischen Gruppe.

Im Falle einer parabolischen Substitution ist der auf dem absoluten Kreis liegende Fixpunkt der einzige Hauptgrenzpunkt, während keine speziellen Grenzpunkte existieren.

14. Es sei jetzt Γ eine beliebige Gruppe hyperbolischer Bewegungen und g die Gruppe der zugeordneten reellen linearen Substitutionen (6). Diese beiden miteinander holoedrisch isomorphen Gruppen sind offenbar gleichzeitig diskontinuierlich.

Bekanntlich ist die Nichtexistenz infinitesimaler Substitutionen für die eigentliche Diskontinuität der Gruppe g in der komplexen Ebene hinreichend. Eine Folge davon ist, dass die diskontinuierlichen Gruppen reeller hyperbolischer Bewegungen im Raume R_4 eigentlich diskontinuierlich sind. Wir werden einen Beweis für unsere Behauptung erbringen, indem wir für diese Gruppen einen Fundamentalbereich konstruieren, d. h. einen vierdimensionalen Bereich, der zu jedem Punkt des Raumes R_4 (*bzw.* eines Teiles desselben) einen und nur einen mit demselben äquivalenten Punkt aufweist.

Wir wollen aber zunächst eine Klassifikation unserer Gruppen Γ einführen.

Bekanntlich besteht die Menge (m) der Grenzpunkte jeder diskontinuierlichen Gruppe g reeller linearen Substitutionen entweder aus der Gesamtheit der Punkte der reellen Achse oder aus einem auf dieser Achse gelegenen System diskreter Puukte. Die ersten Gruppen, unter dessen die Modulgruppe die bekannteste ist, wollen wir *Gruppen erster Klasse*, die anderen *Gruppen zweiter Klasse* nennen. Diese Benennungen übertragen wir auf die zugeordneten Kollineationsgruppen Γ.

Es sei g zunächst eine Gruppe erster Klasse. R_0 sei ein etwa in der oberen t-Halbebene gewählter Fundamentalbereich von g und $\bar{R}_0$ das Spiegelbild von R_0 bezüglich der reellen Achse. Ausser in den möglicherweise vorhandenen »parabolischen Ecken» gibt es zwischen den beiden Bereichen R_0 und $\bar{R}_0$ keinen Zusammenhang.[1]

Wir betrachten jetzt die Gesamtheit derjenigen Punkte (σ, τ) des Raumes R_4, deren σ dem Bereich R_0 angehört, während τ ein beliebiger Punkt der unteren Halbebene ist. Diese Punkte (σ, τ) bilden einen einfachzusammenhängenden, innerhalb H_0 gelegenen vierdimensionalen Bereich A_0, welcher ein Fundamentalbereich der Gruppe Γ ist, wenn man sich auf den innerhalb des Gebildes H_0 gelegenen Teil A von R_4 beschränkt. (vergl. S. 298).

Es sei nämlich (σ, τ) irgendein innerer Punkt von A. Der Punkt $t = \sigma$ liegt dann in einem Bildbereich von R_0, der durch eine gewisse Substitution Σ erhalten wird. Durch die Kollineation (9), welche der inversen Substitution Σ^{-1} entspricht, wird offenbar der Punkt (σ, τ) in einen Punkt von A_0 überführt.

Anderseits gibt es im Bereiche A_0 keine zwei hinsichtlich Γ äquivalente Punkte. Denn im entgegengesetzten Falle wären die zugeordneten Punkte σ, welche beide im Fundamentalbereich R_0 liegen, bezüglich g miteinander äquivalent.

In ähnlicher Weise lässt sich zeigen, dass die Gruppe Γ in den Räumen B und C ausserhalb H_0 die Fundamentalbereiche B_0 *bzw.* C_0 besitzt, welche aus der Gesamtheit der Punkte (σ, τ) bestehen, deren σ-Koordinaten Punkte von R_0 *bzw.* $\bar{R}_0$ repräsentieren, während τ auf die obere *bzw.* untere Halbebene beschränkt ist.

Es sei alsdann Γ eine Gruppe zweiter Klasse. Die Bereiche R_0 und $\bar{R}_0$ hängen dann längs endlicher Strecken der reellen Achse miteinander zusammen. Die Bereiche A_0, B_0 und C_0 bilden also einen einzigen Bereich, welcher zum Fundamentalbereich der Gruppe Γ gewählt werden kann.

[1] R_0 und $\bar{R}_0$ können offenbar ihre Rolle vertauschen.

15. Es sei jetzt $P(\sigma, \tau)$ ein beliebiger Punkt von R_4 derart, dass von den entsprechenden Punkten σ und τ der t-Ebene keiner der Menge (m) angehört, und es sei m' ein beliebig gegebener Punkt dieser Menge. Es gibt dann immer eine unendliche Folge von Substitutionen der Gruppe G, die, auf den Punkt σ ausgeführt, eine gegen m' konvergierende Punktfolge geben. Wegen der Invarianz des Doppelverhältnisses (13) konvergieren die Transformierten des Punktes τ vermittels dieser Substitutionen gegen denselben Grenzpunkt m'.

Hieraus geht hervor, dass die Menge (M) der Hauptgrenzpunkte der betrachteten Gruppe Γ mit der auf dem reellen absoluten Kreise liegenden Punktmenge (m, m) zusammenfällt, wo m die Punkte der Menge (m) durchläuft.

Wenn Γ eine Gruppe erster Klasse ist, umfasst demnach die Menge (M) sämtliche reellen Punkte des genannten Kreises, wogegen sie aus diskreten Punkten dieses Kreises besteht, wenn Γ der zweiten Klasse angehört.

Zur Bestimmung der speziellen Grenzpunkte schicken wir den folgenden Hilfssatz voraus.

Hilfssatz. *Es gibt stets Substitutionen der Gruppe g, deren Fixpunkte von zwei beliebig gegebenen Punkten der Menge (m) beliebig wenig abweichen.*

Zum Beweis wählen wir in vorgeschriebenen beliebig kleinen Umgebungen der gegebenen Punkte, etwa in der oberen Halbebene, irgend zwei Kreisbogenpolygone, welche Bilder des Fundamentalbereichs sind. Es sei K der obere Randkreis des einen Polygons, K' der entsprechende Randkreis des zweiten, Σ diejenige Substitution von g, die K in K' überführt. Wir nehmen an, dass K' nicht der obere Randkreis des zweiten Polygons ist.[1] Dann ist Σ offenbar eine hyperbolische Substitution, die den einen Kreis auf den anderen in der Weise abbildet, dass die Inneren und Äusseren einander wechselseitig entsprechen und deren Fixpunkte *bzw.* innerhalb der Kreise K und K' liegen. Weil nun die Radien der Randkreise der Polygone bei unbegrenzter Annäherung an die reelle Achse unterhalb jeder endlichen Grenze herabsinken, ist die Richtigkeit des ausgesprochenen Hilfssatzes bewiesen.

Jetzt sei P irgend ein Punkt, von dem wenigstens die eine t-Koordinate einen Punkt der Menge (m) repräsentiert. Die zugeordnete Häufungsmenge $M'(P)$ besteht dann offenbar aus Punkten, deren t-Koordinaten beide Punkte der Menge (m) darstellen und welche sich daher unter den Polen derjenigen Geraden befinden, welche die Hauptgrenzpunkte paarweise verbinden. Anderseits ist jeder dieser Pole wegen des obigen Hilfssatzes entweder ein ausserhalb des absoluten Kreises liegender Fixpunkt einer hyperbolischen Substitution oder eine

[1] Wäre dies nicht der Fall, so brauchte man nur das zweite Polygon durch ein nächst unten folgendes zu ersetzen.

Häufungsstelle solcher Fixpunkte. Weil nach N:o 13 jeder dieser Fixpunkte ein spezieller Grenzpunkt für die betreffende zyklische Untergruppe ist, so ist dargetan, dass die Gesamtheit der speziellen Grenzpunkte und ihrer Häufungspunkte mit der Gesamtheit derjenigen ausserhalb des absoluten Kreises gelegenen Punkte zusammenfällt, wo die durch die Hauptgrenzpunkte gezogenen Tangenten einander paarweise schneiden.

Bei den Gruppen erster Klasse besteht demnach die Menge der speziellen Grenzpunkte und ihrer Häufungspunkte aus der Gesamtheit des Äussern $x^2+y^2>1$ des absoluten Kreises, bei den Gruppen zweiter Klasse aus einer in jenem Bereiche gelegenen Menge diskreter Punkte.

Durch das Obige ist die Diskontinuität der Gruppen Γ für alle Punkte des Raumes R_4, von den im Bereiche $x^2+y^2\geqq 1$ liegenden Grenzpunkten abgesehen, bewiesen.

IV. Häufung beliebiger Punktmannigfaltigkeiten.

16. Die grundlegende Bedeutung der Grenzpunkte bei den automorphen Funktionen einer komplexen Veränderlichen besteht darin, dass jene Punkte gerade die wesentlichen Singularitäten der Gesamtheit der automorphen Funktionen erschöpfen, und dass sich ausserhalb jener Punkte diese Funktionen wie rationale Funktionen verhalten.

In der Theorie der automorphen Funktionen von zwei und mehreren Variabeln hat man mit Erscheinungen von wesentlich neuer Art zu tun. Der Grund dazu liegt in dem Umstande, dass die Singularitäten der Funktionen mehrerer Veränderlichen keine isolierten Punkte, sondern kontinuierliche Gebilde sind, woraus folgt, dess es für die Untersuchung der Singularitäten im Falle mehrerer Veränderlichen nicht hinreicht, die Häufung einzelner Punkte zu untersuchen. Man hat vielmehr hier ein ganz neues Problem zu lösen, nämlich die Bestimmung der Häufungsgebilde von räumlich ausgedehnten Mannigfaltigkeiten. Von dem neuen Standpunkt aus wird man eine volle Analogie zwischen den automorphen Funktionen einer und mehrerer Veränderlichen hinsichtlich der Eigenart der wesentlichen Singularitäten gewinnen.

Wir werden die folgenden Untersuchungen in allgemeinerer Form durchführen, als es für die funktiontheoretischen Zwecke erforderlich wäre.

17. Es sei (μ) eine ganz beliebige im Raume R_4 gelegene abgeschlossene Punktmenge. Wir betrachten die Gesamtheit der Punktmengen $S(\mu)$, die aus der gegebenen Menge vermittels der verschiedenen Substitutionen S der Gruppe Γ er-

halten werden. Es sei $\Gamma(\mu)$ die Gesamtheit der Häufungspunkte der Mengen $S(\mu)$. Jeder Punkt von $\Gamma(\mu)$ hat also die Eigenschaft, dass in einer beliebig kleinen Umgebung desselben Punkte von unendlich vielen Mengen $S(\mu)$ vorhanden sind.

Hinsichtlich der Menge $\Gamma(\mu)$ werden wir folgenden allgemeinen Satz beweisen:

Satz. *Die Punkte der Menge $\Gamma(\mu)$ liegen sämtlich auf den durch die Hauptgrenzpunkte gehenden, als zweidimensional betrachteten Tangenten des absoluten Kreises, vorausgesetzt, dass die gegebene Menge (μ) keinen Hauptgrenzpunkt dieser Gruppe enthält.*

Es sei U ein beliebiger Bereich des Raumes R_4, welcher von den genannten Tangenten überall endlichen Abstand hat. Unser Satz lässt sich offenbar auch so aussprechen, dass es unter den Bildbereichen von U nur endlich viele gibt, die Punkte der gegebenen Menge (μ) enthalten.

Es seien D_1 und D_2 die von den Punkten σ bezw. τ beschriebenen Bereiche der t-Ebene, wenn $P(\sigma, \tau)$ den Bereich U beschreibt. Wegen der gemachten Voraussetzung haben die Bereiche D_1 und D_2 von den Grenzpunkten (m) der Gruppe g einen endlichen, von Null verschiedenen kürzesten Abstand.

Wenn es nun unendlich viele Bildbereiche von U gäbe, die Punkte von (μ) enthalten, könnten wir unter den entsprechenden Substitutionen von g eine unendliche Folge auswählen derart, dass die vermittels dieser Substitutionen erhaltenen Bildpunkte eines beliebig gewählten, ausserhalb der Menge (m) gelegenen Punktes P der *t-Ebene* gegen einen bestimmten Punkt m' dieser Menge konvergieren würden. Die entsprechenden Bildbereiche von D_1 und D_2 würden dann (vgl. S. 303) m' als einzigen Grenzpunkt besitzen, und, da die Menge (μ) abgeschlossen ist, würde sie demnach den Punkt (m', m') des reellen absoluten Kreises enthalten, was unserer Voraussetzung widerspricht.

18. Der obige Satz wird in zweckmässiger Weise durch den folgenden Satz ergänzt, wodurch funktionentheoretisch wichtige Schlüsse ermöglicht werden.

Satz. *Wenn die Menge (μ) keinen Hauptgrenzpunkt von Γ enthält, und wenn dazu die Gesamtheit der Punkte der t-Ebene, die von den t-Koordinaten σ und τ der einzelnen Punkte von (μ) repräsentiert werden, eine gewisse zweidimensionale Umgebung jedes Punktes der Menge (m) überall dicht bedeckt, so besteht die Menge $\Gamma(\mu)$ aus den reellen und komplexen Punkten sämtlicher durch die Hauptgrenzpunkte der Gruppe gehenden Tangenten des absoluten Kreises.*

Es sei wiederum (21) eine hyperbolische Substitution der Gruppe g. Wir beschreiben um den Fixpunkt t_2, welcher bei der Annahme $K < 1$ ein Repulsionszentrum ist, einen kleinen Kreis C_2, welcher ganz in der im Satze vorausgesetzten Umgebung des Grenzpunktes t_2 liegt. Weil nach der Voraussetzung der Hauptgrenzpunkt (t_2, t_2) der Menge (μ) nicht angehört, können wir den Kreis C_2 so klein annehmen, dass die einem Punkte von (μ) entsprechenden Punkte σ und τ nie beide innerhalb C_2 fallen. Es gibt also eine solche Teilmenge (μ') von (μ), dass von den zugehörigen Punkten σ', τ' die einen, sagen wir die Punkte σ', das Innere von C_2 überall dicht bedecken, während die Punkte τ' ausserhalb C_2 liegen. Vermittels einer hinreichend grossen positiven Potenz Σ^n von (21) wird C_2 auf einen den attrahierenden Fixpunkt t_1 umschliessenden Kreis C_1 abgebildet, so dass das Äussere des einen Kreises dem Innern des anderen entspricht, und umgekehrt. Die Punkte $\Sigma^n(\sigma')$ bedecken dann das Äussere von C_1 überall dicht, während die Punkte $\Sigma^n(\tau')$ sämtlich im Innern von C_1 liegen. Weil nun bei unbegrenzt wachsendem n der Kreis C_1 sich nach dem Punkt t_1 zusammenzieht, so ist dargetan, dass jeder Punkt (σ, t_1), wo σ einen beliebigen Wert hat, ein Häufungspunkt der Mengen $\Sigma^n(\mu) (n = 1, 2, 3, \ldots)$ ist. Mithin umfasst die Menge $\Gamma(\mu)$ jeden Punkt der durch (t_1, t_1) gehenden, als zweidimensionale Mannigfaltigkeit aufgefassten Tangente des absoluten Kreises. Weil nun die Hauptgrenzpunkte der Gruppe gerade aus der Gesamtheit der Fixpunkte der hyperbolischen Substitutionen und ihrer Häufungspunkte bestehen, ist der obige Satz hiermit bewiesen.

19. Die Bedingungen des obigen Satzes sind insbesondere für jede algebraische Mannigfaltigkeit erfüllt. In der Tat sind die t-Koordinaten σ, τ in diesem Falle miteinander algebraisch verbunden, und die Punkte σ (*bzw.* τ) bedecken sogar die ganze t-Ebene. Wir haben somit den

Satz. *Die Häufungsgebilde der vermittels der Substitutionen der diskontinuierlichen Gruppe Γ erhaltenen Transformierten eines beliebigen algebraischen Gebildes*

$$P(x, y) = 0 \tag{22}$$

bestehen aus der Gesamtheit der durch die Hauptgrenzpunkte gehenden Tangenten des absoluten Kreises, vorausgesetzt, dass das gegebene Gebilde keinen Hauptgrenzpunkt der Gruppe enthält.

Es mag hier nebenbei bemerkt werden, dass die Richtigkeit dieses Satzes speziell für lineare Gebilde aus der polaren Beziehung zwischen den Punkten und Geraden auf Grund der Ergebnisse der N:o 15 ohne weiteres geschlossen werden kann.

Durch das Obige ist dargetan, dass die durch die Hauptgrenzpunkte gehenden Tangenten des absoluten Kreises als Häufungsgebilde von räumlich ausgedehnten Punktmannigfaltigkeiten dieselbe Rolle spielen, wie die Hauptgrenzpunkte als Häufungsstellen für die Transformierten isolierter Punkte. Es ist daher zweckmässig, diese Tangenten »Hauptgrenzgebilde» der Gruppe zu nennen. Bei den Gruppen erster Klasse ist ihre Gesamtheit mit dem dreidimensionalen Gebilde H_0 identisch, während sie bei den Gruppen zweiter Klasse auf H_0 diskret liegen.

20. Neben den Hauptgrenzgebilden können spezielle Grenzgebilde als Häufungsgebilde auftreten, wenn das gegebene Gebilde den Voraussetzungen des obigen Satzes nicht genügt. Wir wollen dies durch ein paar Beispiele erläutern.

Wir betrachten zuerst irgend eine durch den attrahierenden Fixpunkt der hyperbolischen Substitution (21) gehende Sekante. Aus N:o 13 geht hervor, dass ihre vermittels der Wiederholung von (21) erhaltenen Transformierten als Häufungsgebilde die durch die Fixpunkte t_1, t_2 gehende Gerade haben, welche daher ein spezielles Grenzgebilde ist.

Wir betrachten ferner die Transformierten des Gebildes

$$A\left(\frac{\sigma - t_2}{\sigma - t_1}\right) + B\left(\frac{\tau - t_2}{\tau - t_1}\right) + C = 0 \tag{23}$$

vermittels der Potenzen von (21). Aus ihren Gleichungen

$$A\left(\frac{\sigma - t_2}{\sigma - t_1}\right) + B\left(\frac{\tau - t_2}{\tau - t_1}\right) + C K^n = 0 \quad (|K| < 1)$$

geht hervor, dass sie als Grenzgebilde das durch die Gleichung

$$A\left(\frac{\sigma - t_2}{\sigma - t_1}\right) + B\left(\frac{\tau - t_2}{\tau - t_1}\right) = 0$$

dargestellte, im allgemeinen nicht lineare Gebilde haben, welches teils ausserhalb der Mannigfaltigkeit H_0, teils auf derselben liegt, wenn $\frac{B}{A}$ reell und negativ ist.

V. Die Picardschen Reihen.

21. Dem Poincaréschen Gedankengang folgend beweist PICARD die Existenz automorpher Funktionen bei eigentlich diskontinuierlichen Gruppen in zwei Variabeln vermittels unendlicher Reihen der Form

$$\Theta(x, y) = \sum R(S, T)\left(\frac{\partial (S, T)}{\partial (x, y)}\right)^m, \tag{24}$$

wo R eine rationale Funktion bedeutet und die Summierung sich über die Gesamtheit der Substitutionen (S, T) der betreffenden Gruppen erstreckt. Jede Reihe der obigen Form ist nämlich für hinreichend grosse Werte m absolut und gleichmässig konvergent und genügt der Funktionalgleichung

$$\Theta(S, T) = \Theta(x, y)\left(\frac{\partial(S, T)}{\partial(x, y)}\right)^{-m}, \tag{25}$$

die der Funktionalgleichung

$$\Theta(S) = \Theta(z)\left(\frac{dS}{dz}\right)^{-m}$$

der Poincaréschen Θ-Funktionen analog ist. Der Quotient irgend zweier Funktionen (24), die nicht identisch verschwinden, ist daher eine automorphe Funktion der betreffenden Gruppe.

22. Nach PICARD sind die Reihen (24) für $m \geqq 2$ in gewissen Bereichen des Raumes R_4 absolut und gleichmässig konvergent u. a. bei allen diskontinuierlichen Gruppen linearer Substitutionen

$$X = \frac{\alpha_1 x + \beta_1 y + \gamma_1}{\alpha_3 x + \beta_3 y + \gamma_3}, \quad Y = \frac{\alpha_2 x + \beta_2 y + \gamma_2}{\alpha_3 x + \beta_3 y + \gamma_3} \tag{26}$$

mit komplexen ganzzahligen Koeffizienten, deren zugeordnete homogene Substitutionen eine vorgelegte ternäre indefinite quadratische oder Hermitesche Form in sich überführen (»Hyperfuchssche Gruppen»).[1] Ferner hat PICARD in einer kürzlich erschienenen Abhandlung den speziellen Fall näher betrachtet, wo $\alpha_\nu, \beta_\nu, \gamma_\nu$ reelle ganze Zahlen sind, und für den Konvergenzexponent m in diesem Falle den genaueren Wert $m = 1$ gefunden.[2] Dieses Resultat kann in folgender Weise verschärft und verallgemeinert werden.

Satz. *Die Θ-Reihen sind, von einem gewissen Glied ab, in jedem endlichen, von den auf H_0 gelegenen Hauptgrenzgebilden in endlicher Entfernung gelegenen Bereich für $m \geqq \frac{2}{3}$ absolut und gleichmässig konvergent, vorausgesetzt, dass die singulären Gebilde der rationalen Funktion $R(x,y)$ keinen Hauptgrenzpunkt der Gruppe enthalten.*

Wir gehen von der Beobachtung aus, dass die einzelnen Glieder der Reihe (24) im allgemeinen für die Punkte der algebraischen Gebilde

$$\frac{1}{R(S, T)} = 0, \quad \alpha_3 x + \beta_3 y + \gamma_3 = 0 \tag{27}$$

[1] E. PICARD. *Sur une classe de groupes discontinus de substitutions linéaires et sur les fonctions de deux variables indépendantes restant invariables par ces substitutions.* (Acta mathematica, Bd. I; 1882).

[2] E. PICARD. *Sur les fonctions de deux variables complexes restant invariables par les substitutions d'un groupe discontinu.* (Comptes rendus 1916).

und nur für diese polar unstetig werden. Nach unserer Voraussetzung enthalten die ersteren Gebilde keinen Hauptgrenzpunkt und dasselbe gilt für die Fluchtgeraden

$$\alpha_3 x + \beta_3 y + \gamma_3 = 0, \tag{27'}$$

die vermittels der Substitutionen der Gruppe Γ ineinander übergeführt werden, indem diese Geraden wegen der Relation

$$\alpha_3^2 + \beta_3^2 - \gamma_3^2 = -1 \tag{28}$$

ausserhalb des absoluten Kreises liegen. Die Bedingungen des in N:o 17 bewiesenen Satzes betreffs der Häufung der Transformierten einer algebraischen Mannigfaltigkeit sind also gültig, und wir erhalten das Resultat, dass die Gebilde (27) die Gesamtheit der Hauptgrenzgebilde und nur diese als Häufungsgebilde haben.

Es sei jetzt U ein beliebiger endlicher Bereich des Raumes R_4, welcher von den Hauptgrenzgebilden eine von Null verschiedene Entfernung hat. Die vermittels der verschiedenen Substitutionen von Γ erhaltenen Bildbereiche von U haben nach S. 303 als einzige Häufungspunkte die Hauptgrenzpunkte der Gruppe. Weil nach unserer Voraussetzung die Funktion $R(x,y)$ in diesen Punkten endlich ist, und weil anderseits, nach dem oben Gesagten, der Bereich U nur von endlich vielen unter den Gebilden (27) durchsetzt wird, so sieht man, dass, wenn diejenigen Glieder der Reihe, die diese Gebilde als polare Unstetigkeiten besitzen, ausgelassen werden, in sämtlichen übrigen Gliedern der Reihe die Grössen $|R(S,T)|$ im Bereiche U unter einer endlichen Grenze liegt. Hieraus folgt, dass die Reihe (24) hinsichtlich der absoluten und gleichmässigen Konvergenz durch die Reihe

$$\sum \left(\frac{\partial(S,T)}{\partial(x,y)}\right)^m = \sum \frac{1}{(\alpha_3 x + \beta_3 y + \gamma_3)^{3m}} \tag{29}$$

ersetzt werden kann, welche der speziellen Wahl $R(x,y) \equiv 1$ der rationalen Funktion entspricht.

23. Wir behaupten jetzt, dass die Untersuchung der absoluten und gleichmässigen Konvergenz der Reihe (29) auf die Untersuchung der Konvergenz der Reihe

$$\sum \frac{1}{\gamma_3^{3m}} \tag{30}$$

zurückgeführt werden kann.

Es sei Δ der kürzeste Abstand der Punkte des Bereichs U von den Fluchtlinien (27)'. Man hat dann für jede Substitution und jeden Punkt des Bereichs U die Ungleichung

$$\left|\frac{\alpha_3 x + \beta_3 x + \gamma_3}{\sqrt{\alpha_3^2 + \beta_3^2}}\right| \leqq \varDelta,$$

deren linke Seite den kürzesten Abstand des Punktes (x, y) von den Punkten der zweidimensionalen Mannigfaltigkeit $(27)'$ darstellt. Wegen der Relation (28) ist daher für jeden Punkt von U

$$\frac{1}{|\alpha_3 x + \beta_3 y + \gamma_3|} \leqq \frac{1}{\varDelta} \cdot \frac{1}{\sqrt{\gamma_3^2 - 1}}. \tag{31}$$

Anderseits ist in diesem Bereich, wenn die grösste Entfernung seiner Punkte vom Nullpunkt mit d bezeichnet wird,

$$\frac{|\alpha_3 x + \beta_3 y + \gamma_3|}{\gamma_3} \leqq \frac{|\alpha_3 x + \beta_3 y|}{\gamma_3} + 1 \leqq \frac{\sqrt{\alpha_3^2 + \beta_3^2} \cdot \sqrt{|x|^2 + |y|^2}}{\gamma_3} + 1$$
$$< \sqrt{|x|^2 + |y|^2} + 1 \leqq d + 1,$$

und somit

$$\frac{1}{|\alpha_3 x + \beta_3 y + \gamma_3|} > \frac{1}{d+1} \cdot \frac{1}{\gamma_3}. \tag{31$'$}$$

Durch die Ungleichungen (31) und $(31)'$ ist die Gleichzeitigkeit der absoluten und gleichmässigen Konvergenz der Reihe (29) im Bereich U mit der Konvergenz der aus lauter positiven Gliedern bestehenden Reihe (30) dargetan.

24. Nun folgt aus (1) und (9) die Gleichung

$$\gamma_3 = \frac{1}{2}(a^2 + b^2 + c^2 + d^2), \tag{32}$$

die uns zeigt, dass die Reihe (30) bis auf einen Zahlenfaktor ($= 2^{3m}$) mit der Reihe

$$\sum \frac{1}{(a^2 + b^2 + c^2 + d^2)^{3m}} \tag{33}$$

übereinstimmt, wo sich die Summierung über sämtliche Substitutionen

$$t' = \frac{at + b}{ct + d} = \Sigma(t)$$

der Gruppe g erstreckt. Wegen der Relation

$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = \frac{|\Sigma(i)|^2 + 1}{\left|\frac{d\,\Sigma(i)}{dt}\right|}, \qquad (i = \sqrt{-1}), \tag{34}$$

kann diese letzte Reihe (33) in der Form

$$\sum \frac{1}{(|\Sigma(i)|^2+1)^{3m}}\left|\frac{d\,\Sigma(i)}{dt}\right|^{3m} \tag{35}$$

geschrieben werden.

Wir wollen annehmen, dass der Punkt $t = i$ im Innern des Fundamentalbereichs R_0 der Gruppe g liegt, was man im allgemeinen durch geeignete Wahl von R_0 erreichen kann.[1] Es sei $\varkappa_0$ ein kleiner Kreis mit dem Mittelpunkt $t = i$ und dem Radius ϱ, der ganz innerhalb R_0 liegt. Für den Inhalt τ des vermittels der Substitution $\Sigma(t)$ erhaltenen Bildkreises $\varkappa$ hat man dann die Ungleichung

$$\tau > \frac{\tau_0}{|ct+d|^4_{\max}}, \qquad (\tau_0 = \pi\varrho^2), \tag{36}$$

wo das Maximum für die Punkte des Kreises $\varkappa_0$ zu nehmen ist. Weil ferner die reellen Punkte $\Sigma^{-1}(\infty) = -\frac{d}{c}$ vom Mittelpunkte $t = i$ des Kreises $\varkappa_0$ einen endlichen Abstand $\geqq 1$ haben, so gilt für jeden Punkt t von $\varkappa_0$ die Ungleichung

$$1-\varrho \leqq \left|\frac{t+\frac{d}{c}}{i+\frac{d}{c}}\right| \leqq 1+\varrho. \tag{37}$$

Aus (36) und (37) ergibt sich

$$\left|\frac{d\,\Sigma(i)}{dt}\right|^2 = \frac{1}{|ci+d|^4} \leqq \frac{(1+\varrho)^4}{|ct+d|^4_{\max}} < (1+\varrho)^4\,\frac{\tau}{\tau_0}. \tag{38}$$

In analoger Weise findet man für jeden Punkt von $\varkappa_0$

$$\left|\frac{\Sigma(i)}{\Sigma(t)}\right| = \left|\frac{i+\frac{b}{a}}{t+\frac{b}{a}}\right| : \left|\frac{i+\frac{d}{c}}{t+\frac{d}{c}}\right| > \frac{1-\varrho}{1+\varrho},$$

woraus folgt

$$|\Sigma(i)| > \frac{1-\varrho}{1+\varrho}\,|\Sigma(t)|_{\max} \tag{39}$$

[1] Nur wenn $t = i$ ein elliptischer Fixpunkt ist, ist dies nicht möglich. In diesem Falle bedarf aber die folgende Darstellung nur einer unbedeutenden Modifizierung.

Aus (38) und (39) ergibt sich

$$(40)\qquad \frac{1}{(|\Sigma(i)|^2+1)^2}\left|\frac{d\,\Sigma(i)}{d\,t}\right|^2 < \frac{C_1\,\tau}{(C_2\,|\Sigma(t)|^2+1)^2} < C_1\int\limits_{(\varkappa)}\frac{r\,d\,r\,d\,\varphi}{(C_2 r^2+1)^2},$$

wo r, φ polare Koordinaten in Bezug auf Origo bedeuten und C_1 und C_2 positive, von Null verschiedene endliche Konstanten sind, welche von der Substitution $\Sigma(t)$ unabhängig sind.

Wir summieren jetzt die Ungleichungen (40) über die Gesamtheit der Substitution von Γ und bemerken, dass die entsprechenden Kreise $\varkappa$ alle ausserhalb einander liegen. Als Resultat erhält man die Ungleichung

$$(41)\qquad \sum\frac{1}{(|\Sigma(i)|^2+1)^2}\left|\frac{d\,\Sigma(i)}{d\,t}\right|^2 < C_1\int\limits_{r=0}^{\infty}\int\limits_{\varphi=0}^{\pi}\frac{r\,d\,r\,d\,\varphi}{(C_2\,r^2+1)^2} = \frac{\pi}{2}\frac{C_1}{C_2}.$$

Mithin konvergiert die Reihe (35), und somit auch die Reihe (30) für $m = \frac{2}{3}$, und also a fortiori für $m > \frac{2}{3}$, womit der oben ausgesprochene Satz bewiesen ist.

25. Für die Gruppen der zweiten Klasse hat man das folgende genauere Resultat, welches für die Untersuchungen des folgenden Kapitels wichtig ist.

Satz. *Die Picardschen Reihen sind bei Gruppen der zweiten Klasse schon für $m = \frac{1}{3}$ absolut und gleichmässig konvergent.*

Wir nehmen an, dass der Punkt $t = \infty$ kein Grenzpunkt ist, was stets vermittels einer reellen linearen Transformation erreicht werden kann. Nach einem bekannten Satz von Burnside und Ritter konvergiert in diesem Falle die Reihe

$$\sum\frac{1}{c^2}.$$

Auf Grund der Relation (32) ist dann die Reihe

$$(42)\qquad \sum\frac{1}{\gamma_3}$$

a fortiori konvergent.

Für die Gruppen der ersten Klasse kann man dagegen zeigen, dass die Reihe (42) divergiert. Wir wollen den Beweis indess hier übergehen.

26. Aus der gleichmässigen Konvergenz der Picardschen Reihen (24) folgt, dass sie analytische Funktionen der Variabeln x, y darstellen. Zur Untersuchung ihrer analytischen Eigenschaften bemerken wir zunächst, dass die betreffenden Funktionen für die Punkte der Gebilde (27) im allgemeinen polar unstetig werden. In der Tat können diese singulären Gebilde einander nur in einzelnen Punkten aufheben, wenn es nicht zufälligerweise eine Substitution von Γ gibt, die eines unter den singulären Gebilden der rationalen Funktion $R(x, y)$ entweder in sich selbst oder in irgend ein anderes überführt.

Wir setzen ferner wie stets voraus, dass die singulären Gebilde von $R(x, y)$ keinen Hauptgrenzpunkt der Gruppe Γ enthalten. Unter dieser Voraussetzung bestehen die Häufungsgebilde der Gebilde (27) aus den Hauptgrenzgebilden, deren Punkte somit sämtlich wesentlich singuläre Stellen und zwar die einzigen derartigen Stellen der Funktionen (24) sind. Hieraus folgt aber, dass der Charakter der durch die Picardschen Reihen definierten automorphen Transzendenten wesentlich von der Klasse der Gruppe abhängt.

Es sei nämlich Γ zuerst eine Gruppe erster Klasse. Nach den Ergebnissen des Kapitels IV fällt die Gesamtheit der Hauptgrenzgebilde mit dem Gebilde H_0 zusammen. Jeder Punkt dieser dreidimensionalen Mannigfaltigkeit ist daher ein wesentlich singulärer Punkt für sämtliche Picardsche Θ-Funktionen.

Wir haben also in diesem Falle das bemerkenswerte Resultat, dass jede Picardsche Reihe drei verschiedene analytische Funktionen definiert, welche in je einem unter den drei von H_0 begrenzten Räumen A, B, C existieren (vrgl. S. 298), über deren Grenze hinaus sie nicht analytisch fortgesetzt werden können. Wesentlich anders verhält es sich bei den Gruppen zweiter Klasse. Die Hauptgrenzgeraden bilden hier eine Menge auf H_0 gelegener diskreter Geraden, durch welche der vierdimensionale Raum R_4 nicht geteilt wird. Jede Picardsche Reihe definiert also eine einzige analytische Funktion, deren Existenzbereich, von den Hauptgrenzgeraden abgesehen, den ganzen Raum R_4 umfasst.

Durch die obigen Betrachtungen ist eine vollständige Analogie mit den automorphen Funktionen einer Variabeln hinsichtlich der Eigenart der Singularitäten gewonnen, welche Analogie wir durch den folgenden Satz ausdrücken.

Satz. *Die von den Picardschen Reihen dargestellten analytischen Funktionen sind transzendente Funktionen, deren wesentliche Singularitäten nicht von der Wahl der Funktionen, sondern nur von der Gruppe allein abhängen. Ausser diesen Singularitäten gibt es nur polare Unstetigkeiten.*

27. Die obigen Betrachtungen setzen voraus, dass die Picardschen Reihen nicht identisch verschwinden. Diese Möglichkeit ist bei den Θ-Funktionen, welche

Pole besitzen, ausgeschlossen. Wir wollen in dieser Nummer die Existenz von polfreien nicht identisch verschwindenden Funktionen nachweisen.

Es sei Γ eine Gruppe erster Klasse, und $R(x, y)$ eine rationale Funktion, die für reelle Werte der Variabeln x, y reell und positiv ist. Wir nehmen an, dass die polaren Unstetigkeiten von $R(x, y)$, ausser der stets geltenden oben gemachten Voraussetzung, noch der weiteren genügt, dass keine ihrer Punkte innerhalb H_0 liegen. Dies erreicht man z. B durch die Wahl

$$R(x, y) = \frac{1}{(Ax + By + C)^2},$$

wo $Ax + By + C = 0$ die Gleichung irgend einer reellen ausserhalb des absoluten Kreises liegenden Geraden ist.

Unter den obigen Voraussetzungen ist die innerhalb des Gebildes H_0 existierende Θ-Funktion polfrei. Dass diese Funktion nicht identisch Null ist, geht aus der Gleichung

$$\Theta(0,0) = \sum R(S(0,0), T(0,0)) \frac{1}{\gamma_3^{3m}} \tag{43}$$

hervor, deren rechte Seite eine Reihe mit lauter positiven Gliedern darstellt.

28. Wir wollen in dieser Nummer auf eine Analogie zwischen den Picardschen Reihen $(-3)^{\text{ter}}$ Dimension $(m = 1)$

$$\Theta(x, y) = \sum R(S, T) \frac{\partial(S, T)}{\partial(x, y)} \tag{44}$$

und den Poincaréschen Reihen $(-2)^{\text{ter}}$ Dimension

$$\Theta(z) = \sum R(S) \frac{dS}{dz}$$

hinweisen.

Diese Poincaréschen Reihen stellen, nach Multiplikation mit dz, wenn sie absolut konvergieren, automorphe Differentiale dar. Ganz analog besitzt man in den Reihen (44) analytische Ausdrücke, die unmittelbar automorphe Doppeldifferentiale ergeben.

In der Tat folgt aus der Funktionalgleichung (25) im Falle $m = 1$, also aus der Gleichung

$$\Theta(S, T) = \Theta(x, y) \left(\frac{\partial(S, T)}{\partial(x, y)}\right)^{-1}, \tag{45}$$

die Relation

$$\Theta(S, T)\, dS\, dT = \Theta(x, y)\, dx\, dy,$$

woraus hervorgeht, dass der Ausdruck

$$\Theta(x, y)\, dx\, dy \tag{46}$$

ein automorphes Doppeldifferential darstellt.

Dagegen ist es nicht möglich, von den Picardschen Reihen aus in entsprechender Weise zur Darstellung einfacher automorpher Differentiale zu gelangen. Diese Darstellung kann bei den Gruppen zweiter Klasse durch eine neue Verallgemeinerung der Poincaréschen Reihen erreicht werden, wie wir im folgenden Kapitel zeigen wollen.

VI. Eine neue Verallgemeinerung der Poincaréschen Reihen.

29. Wir bilden das folgende Paar einander »konjugierter» Reihen:

$$(47)\qquad \begin{aligned} \varphi(x, y) &= \sum \left\{ A(S, T) \frac{\partial S}{\partial x} + B(S, T) \frac{\partial T}{\partial x} \right\}, \\ \overline{\varphi}(x, y) &= \sum \left\{ A(S, T) \frac{\partial S}{\partial y} + B(S, T) \frac{\partial T}{\partial y} \right\}, \end{aligned}$$

wo A und B rationale Funktionen bezeichnen, deren singuläre Gebilde keinen Hauptgrenzpunkt der Gruppe enthalten.

Hinsichtlich der Konvergenz der neuen Reihen gilt der

Satz. *Die Reihen* (47) *sind bei allen Gruppen zweiter Klasse absolut und gleichmässig konvergent.*

In Analogie mit der Untersuchung der Picardschen Reihen kann man sich hier auf den Nachweis der absoluten und gleichmässigen Konvergenz der speziellen Reihen

$$\sum \frac{\partial S}{\partial x}, \sum \frac{\partial S}{\partial y}, \sum \frac{\partial T}{\partial x}, \sum \frac{\partial T}{\partial y}$$

beschränken. Es genügt die erste dieser Reihen zu betrachten, weil sich die Untersuchung für die übrigen ganz ähnlich gestaltet.

Aus

$$\frac{\partial S}{\partial x} = \frac{(\alpha_1 \beta_3 - \alpha_3 \beta_1) y + (\alpha_1 \gamma_3 - \alpha_3 \gamma_1)}{(\alpha_3 x + \beta_3 y + \gamma_3)^2}$$

folgt, wegen der Relationen

$$\left|\frac{\alpha_1\beta_3-\alpha_3\beta_1}{\gamma_3}\right|=\left|\frac{a^2+b^2-c^2-d^2}{a^2+b^2+c^2+d^2}\right|<1,$$

$$\left|\frac{\alpha_1\gamma_3-\alpha_3\gamma_1}{\gamma_3}\right|=\left|\frac{a^2-b^2-c^2+d^2}{a^2+b^2+c^2+d^2}\right|<1,$$

die Ungleichung

$$\left|\frac{\partial S}{\partial x}\right|<\frac{(|y|+1)\gamma_3}{|\alpha_3 x+\beta_3 y+\gamma_3|^2}.$$

Es sei U irgend ein endlicher Bereich des Raumes R_4, welcher von den Hauptgrenzpunkten überall endlich entfernt liegt und welcher dazu von den Fluchtlinien $(27)'$ eine von Null verschiedene kürzeste Entfernung $\varDelta$ hat. Man hat nach S. 310 die Ungleichung

$$\left|\frac{\alpha_3 x+\beta_3 y+\gamma_3}{\sqrt{\gamma_3^2-1}}\right|\geqq\varDelta$$

und daher

$$\left|\frac{\partial S}{\partial x}\right|<\frac{|y|+1}{\varDelta^2}\cdot\frac{\gamma_3}{\gamma_3^2-1},$$

woraus hervorgeht, dass für die absolute und gleichmässige Konvergenz der Reihe $\sum\frac{\partial S}{\partial x}$ im Bereiche U die Konvergenz der Reihe (42) hinreichend ist. Diese Reihe ist aber nach N:o 25 bei den Gruppen zweiter Klasse konvergent, womit unser Satz bewiesen ist.

Die Reihen (47) definieren, wenn sie konvergieren, analytische Funktionen, deren Existenzbereich mit demjenigen der Picardschen Funktionen übereinstimmt.

30. Es ist auf zwei wesentlich verschiedene Weisen möglich von den Reihen (47) aus zur Darstellung automorpher Funktionen zu gelangen. Die eine Methode benutzt automorphe Differentiale, die zweite gewisse aus den Reihen (47) gebildete Determinanten.

Mit Hilfe der neuen Reihen bilden wir den Ausdruck:

$$\varphi(x,y)\,dx+\bar{\varphi}(x,y)\,dy=\Sigma\,(A\,(S,T)\,dS+B(S,T)\,dT). \tag{48}$$

Wenn die rationalen Funktionen A, B der Bedingung

$$\frac{\partial A(x,y)}{\partial y}=\frac{\partial B(x,y)}{\partial x} \tag{49}$$

genügen, stellt der Ausdruck (48) ein totales automorphes Differential dar, woraus durch Integration eine analytische Funktion der Variabeln x, y hervorgeht, die entweder eine automorphe Funktion oder eine Integralfunktion ist, die bei Ausführung der Substitutionen der Gruppe um additive Konstanten geändert wird.

Es seien insbesondere A und B die partiellen Derivierten einer und derselben rationalen Funktion

$$A = \frac{\partial C}{\partial x}, \quad B = \frac{\partial C}{\partial y}.$$

Aus dem zugeordneten Ausdruck (48) ergibt sich durch Integration die Funktion

$$\sum \{C[S(x, y), T(x, y)] - C[S(x_0, y_0), T(x_0, y_0)]\}, \tag{50}$$

welche den Abelschen Integralen zweiter Gattung analog ist.

Speziell sei

$$C = \frac{1}{x-a} \quad bzw. \quad C = \frac{1}{y-b}.$$

Die zugehörigen Funktionen (50):

$$\sum \left\{\frac{1}{S(x, y) - a} - \frac{1}{S(x_0, y_0) - a}\right\}$$

und

$$\sum \left\{\frac{1}{T(x, y) - b} - \frac{1}{T(x_0, y_0) - b}\right\}$$

sind Integrale, die nur für $x = a$ *bzw.* $y = b$ und die transformierten Gebilde polar unstetig werden, und also den elementaren Abelschen Integralen zweiter Gattung analog.

Es sei alsdann

$$A = \frac{1}{x-a}, \quad B = 0,$$

bzw.

$$A = 0, \quad B = \frac{1}{y-b}.$$

Die zugeordneten Integrale (48)

$$\ln \prod \frac{S(x, y) - a}{S(x_0, y_0) - a} \quad bzw. \quad \ln \prod \frac{T(x, y) - b}{T(x_0, y_0) - b}$$

sind den elementaren Abelschen Integralen dritter Gattung analoge Transzendenten.

31. Zu der zweiten oben genannten Methode zur Bildung automorpher Funktionen aus (47) gelangt man in folgender Weise.

Die Funktionen (47) genügen, wie leicht zu verifizieren ist, den Funktionalgleichungen

$$
\begin{aligned}
\varphi(x, y) &= \varphi(S, T)\frac{\partial S}{\partial x} + \overline{\varphi}(S, T)\frac{\partial T}{\partial x}, \\
\overline{\varphi}(x, y) &= \varphi(S, T)\frac{\partial S}{\partial y} + \overline{\varphi}(S, T)\frac{\partial T}{\partial y}.
\end{aligned} \tag{51}
$$

Es seien nun $\varphi_1, \overline{\varphi}_1$ und $\varphi_2, \overline{\varphi}_2$ zwei Paare einander konjugierter φ-Funktionen. Für die aus ihnen gebildete Determinante

$$
\Delta(x, y) = \begin{vmatrix} \varphi_1(x, y) & \overline{\varphi}_1(x, y) \\ \varphi_2(x, y) & \overline{\varphi}_2(x, y) \end{vmatrix} \tag{52}
$$

ergibt sich aus (51) die Funktionalgleichung

$$
\Delta(S, T) = \Delta(x, y)\left(\frac{\partial(S, T)}{\partial(x, y)}\right)^{-1},
$$

d. h. diejenige der Picardschen Θ-funktionen $(-3)^{\text{ter}}$ Dimension. Der Quotient

$$
\Delta(x, y) : \Theta(x, y),
$$

wo Θ eine Picardsche Funktion $(-3)^{\text{ter}}$ Dimension ist, stellt daher eine automorphe Funktion der Gruppe dar.

Es seien ferner $\Delta_1(x, y)$ und $\Delta_2(x, y)$ irgend zwei wesentlich verschiedene Determinanten (52). Der Quotient $\dfrac{\Delta_1(x, y)}{\Delta_2(x, y)}$ und allgemeiner jede homogene Funktion nullten Grades der Determinanten (52) ist eine automorphe Funktion.

Man kann auf ähnliche Weise wie bei den mit Polen behafteten Θ-Funktionen beweisen, dass die nach der neuen Methode gebildeten Funktionen im allgemeinen nicht identisch verschwinden.