UEBER KONVERGENZ UNENDLICHER KETTENBRÜCHE MIT DURCHWEG REELLEN ELEMENTEN.[1]

VON

OTTO SZÁSZ

in FRANKFURT A. M.

Die Konvergenz oder Divergenz einer unendlichen *Reihe* mit komplexen Gliedern $\sum_{1}^{\infty}{}_{\nu}\, a_\nu = \sum_{1}^{\infty}{}_{\nu}\,(\alpha_\nu + i\,\beta_\nu)$ hängt in sehr einfacher Weise von dem Verhalten der beiden Reihen mit reellen Gliedern ab: $\sum_{1}^{\infty}{}_{\nu}\, \alpha_\nu$, $\sum_{1}^{\infty}{}_{\nu}\, \beta_\nu$. Ganz anders ist es bei *Kettenbrüchen;* man kennt keinen Zusammenhang zwischen dem Verhalten eines Kettenbruches mit komplexen Elementen und dem Verhalten von Kettenbrüchen mit reellen Elementen. Wenn ein solcher überhaupt existiert, so dürfte er sehr komplizierter Natur sein. Es ist demnach zu erwarten, dass die Beschränkung auf nur reelle Elemente einen genaueren Einblick in die Struktur des Kettenbruches ermöglichen muss. Spezielle Klassen solcher Kettenbrüche, namentlich die mit lauter positiven Elementen und alternierende Kettenbrüche, sind schon eingehend untersucht worden[2]; in neuerer Zeit hat nun Herr H. TIETZE auf geometrischem Wege für allgemeinere Kettenbrüche einige interessante Konver-

---

[1] Diese Arbeit ist bis auf unwesentliche Änderungen ein Teil meiner Habilitationsschrift, die im Mai 1914 der Akademie für Sozial- und Handelswissenschaften (und später der Naturwissenschaftlichen Fakultät der Universität) zu Frankfurt a. M. vorgelegen hat. (In ungarischer Sprache vorgelegt der Ungar. Akad. d. Wissensch. am 19. April 1915.)

[2] Zur Orientierung verweise ich auf das inhaltsreiche Werk des Herrn O. PERRON, Die Lehre von den Kettenbrüchen, Leipzig, 1913 (vgl. insbesondere §§ 50, 51), im folgenden unter »PERRON, Lehrbuch» zitiert.

genz- und Irrationalitätssätze abgeleitet.[1] Herr PERRON (Lehrbuch, §§ 51—52) bewies sodann diese Sätze auf arithmetischem Wege mit Anwendung der *Extension* (PERRON, Lehrbuch, § 44) von Kettenbrüchen.

In Weiterverfolgung des von Herrn PERRON eingeschlagenen Weges gebe ich nun Verallgemeinerungen dieser Konvergenzsätze. Ferner leite ich aus meinen Sätzen, durch Spezialisierung der darin auftretenden unendlich vielen Parameter, weitere neue Konvergenzkriterien ab. Dabei ergibt sich die Verallgemeinerung eines von mir mit Hilfe unendlicher Kettenbruchdeterminanten gegebenen Satzes,[2] soweit er sich auf Kettenbrüche mit reellen Elementen bezieht; und zwar handelt es sich hierbei um folgendes:

Bekanntlich hat Herr H. v. KOCH[3] den Satz bewiesen:

Der Kettenbruch mit beliebigen (auch komplexen) Elementen $\left[\frac{a_\nu}{1}\right]_1^\infty$ konvergiert sicherlich, wenn $\sum_2^\infty{}_\nu |a_\nu| < 1$ ist. — Herr PRINGSHEIM[4] hat diesen Satz aus seinem Hauptkriterium abgeleitet und auch auf den Fall $\sum_2^\infty{}_\nu |a_\nu| = 1$ erweitert. Ich konnte schliesslich die Konvergenzbedingung: $\sum_2^\infty{}_\nu |a_\nu| \leqq 1$ durch die folgende ersetzen (a. a. O.):

$$\sum_2^\infty{}_\nu |a_\nu| - \sum_2^\infty{}_\nu R(a_\nu) \leqq 2,$$

$$\text{(bei vorausgesetzter Konvergenz von } \sum{}_\nu |a_\nu|),$$

wo $R(a_\nu)$ den reellen Teil von a_ν bedeutet.

Offenbar unterwirft man den Kettenbruch durch die Forderung, dass $\sum_2^\infty{}_\nu |a_\nu|$ konvergiere, einer starken Einschränkung. Für den speziellen Fall lauter

---

[1] H. TIETZE: a) Einige Kettenbruch-Konvergenzkriterien (Monatshefte für Mathematik und Physik, Bd 21, 1910, S. 344—360); b) Über Kriterien für Konvergenz und Irrationalität unendlicher Kettenbrüche (Mathem. Annalen, Bd 71, 1911, S. 236—265).

[2] O. SZÁSZ, Über gewisse unendliche Kettenbruchdeterminanten und Kettenbrüche mit komplexen Elementen (Sitzungsberichte der Akad. d. Wissenschaften, München, Jahrg. 1912, S. 323—361), S. 341.

[3] H. VON KOCH, Sur un théorème de Stieltjes et sur les fonctions définies par des fractions continues (Bull. Soc. Math. de France, t. 23, 1895, p. 33—40).

[4] A. PRINGSHEIM, Über einige Konvergenzkriterien für Kettenbrüche mit komplexen Gliedern (Sitzungsberichte der K. Bayer. Akademie der Wissenschaften (München), Math.-phys. Klasse, Bd 35, 1905, S. 359—380).

reeller a_ν kann ich nun diese Bedingung, soweit als möglich, beseitigen. Es ist jetzt $R(a_\nu) = a_\nu$; ferner sei σ_ν folgendermassen definiert: ist $a_{\nu+1} > 0$, so sei $\sigma_\nu = 0$, ist $a_{\nu+1} < 0$, so bedeute σ_ν die Summe der absolut genommenen auf $a_{\nu+1}$ unmittelbar folgenden negativen Teilzähler ($a_{\nu+1}$ inkl.) bis zum *nächsten* positiven (exkl.). Bedeutet schliesslich

$$\vartheta_\nu = \begin{cases} 0 \text{ für } a_\nu > 0 \\ 1 \text{ für } a_\nu < 0, \end{cases}$$

so lässt sich offenbar σ_ν in der Form anschreiben:

$$\sigma_\nu = \sum_{1}^{\infty}{}_k |a_{\nu+k}| \vartheta_{\nu+1} \vartheta_{\nu+2} \ldots \vartheta_{\nu+k},$$

wo die Summe mit dem ersten verschwindenden ϑ abbricht. Der Satz, der sich am Schlusse dieser Arbeit ergeben wird, lautet nun folgendermassen:

Der Kettenbruch mit lauter reellen Elementen: $\left[\frac{a_\nu}{1}\right]_1^\infty$ $(a_\nu \neq 0)$ *konvergiert, wenn die Bedingungen erfüllt sind:*

$$\sigma_\nu \leqq 1 \ (\nu = 2, 3, \ldots), \qquad \overline{\lim_{\nu=\infty}} \sigma_\nu < 1.$$

Nur wenn von einem gewissen ν an alle ϑ_ν verschwinden, ist für seine Konvergenz ausserdem die Divergenz der Reihe

$$\sum_{1}^{\infty}{}_\nu \left(\frac{r_1 r_3 \ldots r_{2\nu-1}}{r_2 r_4 \ldots r_{2\nu}} + \frac{r_2 r_4 \ldots r_{2\nu}}{r_3 r_5 \ldots r_{2\nu+1}}\right) \qquad (r_\nu = |a_\nu|)$$

erforderlich. (Die ja allemal eine *notwendige* Bedingung der Konvergenz darstellt, im Falle *unendlich* vieler negativer a_ν aber eo ipso erfüllt ist, wie aus dem Beweise hervorgeht.)

Dieser Satz und einige andere Sätze dieser Arbeit bedeuten einen ersten Schritt zur Erweiterung der Resultate, die ich in einer früheren Arbeit gab (a. a. O.), in dem Sinne, wie ich es daselbst auf Seite 361 andeutete; man vergleiche auch Satz 4 meiner im Journal für Math. Bd. 147 (1917), S. 132—160 erschienenen Arbeit: Über die Erhaltung der Konvergenz unendlicher Kettenbrüche bei independenter Veränderlichkeit aller ihrer Elemente.

Noch ein Satz sei hier angeführt, welcher dem obigen etwas ähnlich ist und neben seiner einfachen Formulierung doch auch ziemlich allgemeinen Charakter hat. Man setze zur Abkürzung

$$b_0 = 1,\ \delta_0 = 1,\ \delta_1 = 1,\ \delta_\nu = \frac{b_{\nu-1} b_\nu}{|b_{\nu-1} b_\nu|} \qquad (\nu = 2, 3, \ldots),$$

$$(\text{für } b_{\nu-1} b_\nu = 0 \text{ sei } \delta_\nu = 1)$$

dann gilt der Satz:

Der Kettenbruch mit nur reellen Elementen $\left[\frac{1}{b_\nu}\right]_1^\infty$ *konvergiert, wenn*

$$|b_\nu| \geqq 1 - \frac{1}{2}(\delta_\nu + \delta_{\nu+1}) \qquad (\nu = 1, 2, 3, \ldots)$$

und mindestens für einen Wert von ν $(\nu \geqq 0)$

$$\left[|b_\nu| - 1 + \frac{1}{2}(\delta_\nu + \delta_{\nu+1})\right]\left[|b_{\nu+1}| + \frac{1}{2}(1 - \delta_\nu - \delta_{\nu+1} + \delta_{\nu+2})\right] > 0$$

ist. Nur wenn von einer gewissen Stelle an durchweg $b_{\nu-1} b_\nu \geqq 0$ *ist, muss ausserdem die Divergenz der Reihe* $\sum_1^\infty |b_\nu|$ *vorausgesetzt werden.* (Vgl. Satz 3.)

Es gibt noch kein Analogon dieses Satzes für Kettenbrüche mit komplexen Elementen; einigermassen verwandte Sätze sind in § 6 meiner im Journ. für Math. Bd. 147 erschienenen obenzitierten Abhandlung abgeleitet.

Bei Beschränkung auf reelle Elemente ist obiger Satz eine Verallgemeinerung des bekannten PRINGSHEIM'schen Satzes (auf S. 210 in Fussn. 4 a. O., S. 363):

Der Kettenbruch mit komplexen Elementen: $\left[\frac{1}{b_\nu}\right]_1^\infty$ konvergiert sicherlich, wenn

$$|b_1| \geqq 1, \quad |b_\nu| \geqq 2 \qquad (\nu = 2, 3, \ldots)$$

ist und mindestens einmal Ungleichheit statthat.

Für lauter reelle, negative $b_{\nu-1} b_\nu$ gehen die beiden Sätze ineinander über (es wird $\delta_\nu = -1$).

Manche Stellen dieser Arbeit könnte man stark abkürzen, wollte man für die Teilzähler den Wert Null durchweg ausschliessen. Dies würde aber eine erhebliche Einschränkung der Allgemeinheit bedeuten; diesist klar, falls die Teilzähler Funktionen einer Variabeln sind, die auch Nullstellen besitzen. Andererseits hängt aber die Konvergenzfrage solcher Kettenbrüche mit verschwindenden Teilzählern auch eng mit der Frage zusammen, wann ein endlicher Kettenbruch einen bestimmten Wert hat oder sinnlos ist (vgl. PERRON, Lehrbuch § 42, Satz 1, S. 193).

§ 1.

Vorbereitende Sätze.

Herr PERRON hat in seinem bereits mehrfach zitierten Lehrbuche (§ 44) den Satz abgeleitet:

Satz A. Sei

$$\left[\frac{a_\nu}{b_\nu}\right]_1^{k+1} = \frac{a_1|}{|b_1} + \cdots + \frac{a_{k+1}|}{|b_{k+1}} \qquad (k \geqq 1)$$

ein Kettenbruch mit von Null verschiedenen Teilzählern und mit den Näherungsbrüchen: $\frac{A_\nu}{B_\nu}$ $(\nu = 0, 1, \ldots, k+1)$; ϱ sei eine beliebige von Null verschiedene Zahl. Damit der $(k+2)$-gliedrige Kettenbruch:

$$\frac{a_1|}{|b_1} + \cdots + \frac{a_{k-1}|}{|b_{k-1}} + \frac{\alpha|}{|\beta} + \frac{\alpha'|}{|\beta'} + \frac{\alpha''|}{|\beta''} \tag{a}$$

die Näherungsbrüche:

$$\frac{A_0}{B_0}, \frac{A_1}{B_1}, \ldots, \frac{A_{k-1}}{B_{k-1}}, \frac{A_k - \varrho A_{k-1}}{B_k - \varrho B_{k-1}}, \frac{A_k}{B_k}, \frac{A_{k+1}}{B_{k+1}}$$

besitze, sind folgende Bedingungen hinreichend und — bis auf eine äquivalente Transformation — auch notwendig:

$$\alpha = a_k, \ \beta = b_k - \varrho, \ \alpha' = \varrho, \ \beta' = 1, \ \alpha'' = -\frac{a_{k+1}}{\varrho}, \ \beta'' = b_{k+1} + \frac{a_{k+1}}{\varrho}. \tag{1}$$

Man sagt in diesem Falle nach PERRON, dass der abgeleitete Kettenbruch (a) aus dem ursprünglichen durch *Extension* entstanden ist.

Für das Folgende wird es nützlich sein, zu bemerken, dass der Satz — mit einer geringen Änderung — auch dann noch gültig bleibt, wenn man für die a_ν den Wert Null zulässt; dann sind nämlich die Gleichungen (1) — wie man sich aus dem Beweisgange des Herrn PERRON leicht überzeugt — noch hinreichend, aber nicht notwendig.

Der gesuchte Kettenbruch hat also die Form:

$$\frac{a_1|}{|b_1} + \cdots + \frac{a_{k-1}|}{|b_{k-1}} + \frac{a_k|}{|b_k - \varrho} + \frac{\varrho|}{|1} - \frac{\frac{a_{k+1}}{\varrho}\Big|}{\Big|b_{k+1} + \frac{a_{k+1}}{\varrho}}.$$

In meiner Untersuchung werden ferner die folgenden zwei bekannten Sätze[1] eine Rolle spielen:

Satz B. Hat der Kettenbruch $\left[\frac{p_\nu}{q_\nu}\right]_1^\infty$ lauter positive Elemente, wobei aber auch $q_\nu = 0$ zugelassen wird, sofern nur nicht alle $q_{2\nu+1}$ gleich Null sind, so besteht die notwendige und hinreichende Bedingung für seine Konvergenz darin, dass wenigstens eine der beiden Reihen:

$$\sum_{1}^{\infty}{}_{\nu} \frac{p_1 p_3 \ldots p_{2\nu-1}}{p_2 p_4 \ldots p_{2\nu}} q_{2\nu}, \quad \sum_{1}^{\infty}{}_{\nu} \frac{p_2 p_4 \ldots p_{2\nu}}{p_3 p_5 \ldots p_{2\nu+1}} q_{2\nu+1}$$

divergiert.

Satz C. Der Kettenbruch mit lauter positiven Elementen $\left[\frac{p_\nu}{q_\nu}\right]_1^\infty$, wobei aber auch $q_\nu = 0$ zulässig ist, konvergiert, wenn die Reihe $\sum_{1}^{\infty}{}_{\nu} \left(\frac{q_\nu q_{\nu+1}}{p_{\nu+1}}\right)^{\frac{1}{2}}$ divergiert. Die Konvergenz ist offenbar eine unbedingte.

Zwecks späterer Anwendung (Sätze 6 und 10) beweise ich hierzu den folgenden einfachen Satz:

Satz D. *Der Kettenbruch mit lauter nicht negativen Elementen* $\left[\frac{p_\nu}{q_\nu}\right]_1^\infty$ (also $p_\nu \geqq 0$, $q_\nu \geqq 0$) *konvergiert sicher, wenn mindestens für einen Wert von* ν p_ν *gleich Null ist und die Bedingungen erfüllt sind:*

$$q_\nu + p_{\nu+1} > 0 \quad (\nu = 1, 2, \ldots, k-1), \tag{2}$$
$$q_\nu > 0 \quad (\nu = k, k+1, \ldots)$$

für ein gewisses k $(k \geqq 1)$.[2] (3)

Beweis. Die Näherungsbrüche des Kettenbruches seien:

$$\frac{P_\nu}{Q_\nu} \quad (\nu = 0, 1, 2, \ldots),$$

dann ist bekanntlich:

$$Q_0 = 1, \; Q_1 = q_1, \; Q_2 = q_2 q_1 + p_2$$
$$Q_\nu = q_\nu Q_{\nu-1} + p_\nu Q_{\nu-2} \qquad (\nu = 2, 3, \ldots). \tag{4}$$

---

[1] In bezug auf Quellendaten vgl. Perron, Lehrbuch, § 50.

[2] Man könnte statt dieser Bedingungen etwas allgemeinere einführen; dies würde aber den Beweis komplizieren, und da ich in dieser Arbeit nur den obigen Satz anwenden will, beschränke ich mich auf die hier gegebene Formulierung. — Für $k = 1$ fällt Bedingung (2) fort.

Hieraus ist unmittelbar ersichtlich, dass die Ungleichung gilt:

$$Q_\nu \geqq 0 \qquad (\nu = 0, 1, 2, \ldots);$$

ich beweise nun die Ungleichheit:

$$Q_\nu + Q_{\nu+1} > 0 \qquad (\nu = 0, 1, 2, \ldots). \tag{5}$$

Zunächst bemerke ich, dass aus den Rekursionsformeln:

$$\left.\begin{aligned} Q_\nu &= q_\nu Q_{\nu-1} + p_\nu Q_{\nu-2} \\ Q_{\nu+1} &= q_{\nu+1} Q_\nu + p_{\nu+1} Q_{\nu-1} \end{aligned}\right\} (\nu = 2, 3, \ldots),$$

durch Addition sofort die Beziehung hervorgeht:

$$Q_\nu + Q_{\nu+1} = q_{\nu+1} Q_\nu + (q_\nu + p_{\nu+1}) Q_{\nu-1} + p_\nu Q_{\nu-2} \qquad (\nu = 2, 3, \ldots); \tag{6}$$

nun ist für $\nu = 0, 1$ Ungleichheit (5) offenbar richtig; ihre allgemeine Gültigkeit gewinnt man leicht mit Hilfe vollständiger Induktion. Sei also für ein $\lambda \geqq 2$ bereits

$$Q_{\lambda-1} + Q_\lambda > 0,$$

so muss entweder $Q_\lambda > 0$ sein, und in diesem Falle ist die Ungleichheit

$$Q_\lambda + Q_{\lambda+1} > 0 \tag{7}$$

auch gültig, oder es muss $Q_{\lambda-1} > 0$ sein und in diesem Falle folgt Ungleichheit (7) sofort aus den Beziehungen (2) bezw. (3) und (6) für $\nu = \lambda$. Somit ist Ungleichheit (5) allgemein bewiesen.

Schliesslich leite ich noch die Ungleichheit ab:

$$Q_\nu > 0 \qquad (\nu = k, k+1, \ldots); \tag{8}$$

wegen (5) ist mindestens eine der Grössen Q_{k-1}, Q_k von Null verschieden; nun folgt (8) durch vollständige Induktion: sei für ein λ $(\lambda \geqq k - 1 \geqq 0)$ $Q_\lambda > 0$, dann folgt aus (3) und (4) für $\nu = \lambda + 1$, dass auch $Q_{\lambda+1} > 0$ ist. Somit ist auch (8) allgemein bewiesen.

Nun ist bekanntlich (vgl. PERRON, Lehrbuch, S. 234):

$$\left[\frac{p_\nu}{q_\nu}\right]_1^\infty = \lim_{\nu=\infty} \frac{P_\nu}{Q_\nu} = \frac{P_k}{Q_k} + \sum_{k+1}^{\infty}{}_\nu (-1)^{\nu-1} \frac{p_1 p_2 \ldots p_\nu}{Q_{\nu-1} Q_\nu},$$

und diese Reihe bricht ab, hat also einen bestimmten endlichen Wert, womit Satz D bewiesen ist.

Zusatz. Ist

$$q_k = 0, \quad p_{k+1} \geqq 0, \quad \text{aber} \quad p_k\, q_{k-2} > 0 \text{ (für ein } k \geqq 2), \tag{9}$$

und im übrigen die Bedingungen von Satz D mit eben diesem k erfüllt, so ist der Kettenbruch auch noch konvergent. Dabei ist $q_0 = 1$ zu setzen.

Jetzt wird nämlich infolge der Beziehungen (9):

$$Q_k = p_k\, Q_{k-2}; \tag{10}$$

ich zeige zunächst, dass $Q_{k-2} > 0$ ist. Für $k = 2$ ist dies offenbar richtig; sei also $k > 2$. Aus (2) für $\nu = 1, 2, \ldots, k-1$ folgt, wie früher:

$$Q_\nu + Q_{\nu+1} > 0 \qquad (\nu = 0, 1, \ldots, k-1); \tag{11}$$

ist nun $Q_{k-3} = 0$, so folgt aus (11) für $\nu = k-3$, dass $Q_{k-2} > 0$ ist; ist aber $Q_{k-3} > 0$, so folgt aus (9) und (4) für $\nu = k-2$ wiederum, dass $Q_{k-2} > 0$ ist. Nun folgt aus (9) und (10): $Q_k > 0$ und aus (3) für $\nu > k$ ergibt sich wie vorhin, dass auch die Ungleichheiten gelten:

$$Q_\nu > 0 \qquad (\nu = k,\ k+1, \ldots).$$

Hieraus erschliesst man unmittelbar, wie bei Satz D, die Konvergenz des Kettenbruches. Es gilt also der

Zusatz zu D. In (2) und (3) darf für $\nu = k$ Gleichheit gelten, wenn nur $p_k\, q_{k-2} > 0$ und $k \geqq 2$ ist.

Schliesslich zitiere ich noch den Satz:

Satz E. Bei einem Kettenbruch mit lauter positiven Elementen, wobei aber auch $q_\nu = 0$ zugelassen wird, sofern nur nicht alle $q_{2\nu+1}$ verschwinden, nähern sich die Näherungsbrüche gerader Ordnung wachsend oder doch nicht abnehmend einem Grenzwert k, die ungerader Ordnung abnehmend oder doch nicht wachsend einem Grenzwert K, und es ist $0 < k \leqq K$; nur ist möglicherweise eine endliche Anzahl sinnloser Näherungsbrüche vorhanden. (Vgl. Perron, Lehrbuch, S. 239—240.)

§ 2.

Ein allgemeines Konvergenzkriterium und Folgerungen aus demselben.

Ist allgemein der Kettenbruch vorgelegt:

$$\left[\frac{a_\nu}{b_\nu}\right]_1^\infty = \frac{a_1|}{|b_1} + \frac{a_2|}{|b_2} + \frac{a_3|}{|b_3} + \cdots, \tag{12}$$

wo die a_ν, b_ν beliebige *reelle* Zahlen sind (die Null zugelassen), so setzen wir:

$$a_\nu = \alpha_\nu\,|a_\nu|, \qquad b_\nu = \beta_\nu\,|b_\nu|,$$

wobei

$$\alpha_\nu = \begin{cases} +1 \text{ für } a_\nu \geqq 0 \\ -1 \text{ für } a_\nu < 0, \end{cases} \qquad \beta_\nu = \begin{cases} +1 \text{ für } b_\nu \geqq 0 \\ -1 \text{ für } b_\nu < 0. \end{cases}$$

Nun ist leicht einzusehen, dass:

$$\left[\frac{a_\nu}{b_\nu}\right]_1^\infty \equiv \left[\frac{\frac{\alpha_1}{\beta_1}|a_1|}{|b_1|}, \quad \frac{\frac{\alpha_\nu}{\beta_{\nu-1}\beta_\nu}|a_\nu|}{|b_\nu|}\right]_2^\infty = K$$

(das Zeichen $\equiv$ bedeutet Äquivalenz); im folgenden benutze ich durchweg diese transformierte Form des Kettenbruches (12) und setze zur Abkürzung:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\alpha_1}{\beta_1} = \varepsilon_1, \quad \frac{\alpha_\nu}{\beta_{\nu-1}\beta_\nu} = \varepsilon_\nu \quad (\nu = 2, 3, \ldots) \\ &\vartheta_1 = 0, \ \vartheta_\nu = \frac{1-\varepsilon_\nu}{2} \quad (\nu = 2, 3, \ldots); \quad |a_\nu| = p_\nu, \ |b_\nu| = q_\nu. \end{aligned}\right\} \tag{13}$$

Ich beweise zunächst den

Satz 1. *Wenn die Elemente des Kettenbruches* (12) *reell sind*[1] — *und für eine Folge positiver Zahlen:* $\varrho_0 = 1$, $\varrho_\nu > 0$ $(\nu = 1, 2, 3, \ldots)$ *den Ungleichungen genügen:*

$$q_\nu \geqq \frac{p_\nu \vartheta_\nu}{\varrho_{\nu-1}} + \varrho_\nu \vartheta_{\nu+1} \qquad (\nu = 1, 2, 3, \ldots), \tag{14}$$

[1] Dies wird in dieser Arbeit stillschweigend stets vorausgesetzt.

so ersetze man an allen Stellen, an denen $\vartheta_{k+1} = 1$ $(k \geqq 1)$ ist, die Gliederfolge

$$\frac{\varepsilon_k\, p_k|}{|q_k} - \frac{p_{k+1}|}{|q_{k+1}} \quad durch \quad \frac{\varepsilon_k\, p_k|}{|q_k - \varrho_k} + \frac{\varrho_k|}{|1} + \frac{\dfrac{p_{k+1}}{\varrho_k}\Big|}{\Big|q_{k+1} - \dfrac{p_{k+1}}{\varrho_k}}.$$

Durch wiederholte Anwendung dieses Verfahrens entsteht ein Kettenbruch mit lauter nicht-negativen Elementen (das Vorzeichen von $\varepsilon_1 p_1$ spielt im folgenden keine Rolle). *Seine Konvergenz, die nach den Sätzen B, C und D entschieden werden kann, ist dann hinreichend für die Konvergenz des Kettenbruches* (12). Dabei sind ε_ν, p_ν, q_ν, ϑ_ν durch die Relationen (13) bestimmt, wo α_ν und β_ν die Charakteristiken[1] von a_ν und b_ν sind.

Der Beweis dieses Satzes ist sehr einfach und analog dem, von Herrn PERRON für einen ähnlichen spezielleren Satz[2] gegebenen Beweise.

Bezeichnet man den ursprünglichen Kettenbruch abkürzend mit K, den abgeänderten mit K', so ist aus den Bedingungen (14) unmittelbar ersichtlich, dass K' lauter nicht-negative Elemente hat. Nun seien A_ν, B_ν die Näherungszähler und -nenner von K; aus K geht dann K' nach Satz A durch Extension hervor, wobei die neu hinzugekommenen Näherungsbrüche die Form haben:

$$\frac{A_k - \varrho_k A_{k-1}}{B_k - \varrho_k B_{k-1}} \quad \text{für} \quad \varepsilon_{k+1} = -1.$$

Daher ist die Konvergenz von K' hinreichend für die von K. W. z. b. w.

---

[1] Nach Herrn PRINGSHEIM nennt man $\alpha = \frac{a}{|a|}$ die Charakteristik von a; für $a = 0$ sei $\alpha = +1$.

[2] PERRON, Lehrbuch, S. 242–244. Dort lauten die Bedingungen in unserer Bezeichnungsweise:

$$p_\nu > 0, \quad q_\nu \geqq p_\nu + \vartheta_{\nu+1} \qquad (\nu = 1, 2, 3, \ldots).$$

In etwas anderer Weise hat Herr TIETZE (auf dem S. 210 in Fussn. 1 a) a. O., Satz 2) unter diesen Voraussetzungen die Konvergenzbedingungen formuliert. Offenbar sind meine Bedingungen — und dies ist in Satz 1 das wesentlich Neue — auch wenn durchweg $\rho_\nu = 1$, $p_\nu \neq 0$ gesetzt wird, allgemeiner. Natürlich sind auch die Bedingungen (14) zur Konvergenz des Kettenbruches (12) nicht notwendig; der alternierende zweigliedrig-periodische Kettenbruch z. B.

$$q - \frac{1|}{|q} + \frac{1|}{|q} - \frac{1|}{|q} + \frac{1|}{|q} - + \cdots$$

konvergiert sicher für $0 < q < 1$, wovon man sich am leichtesten mit Hilfe eines PERRON'schen Satzes (vgl. sein Lehrbuch, § 51, Satz 17) oder auch des Konvergenzkriteriums periodischer Kettenbrüche überzeugt. Damit aber für gewisse ρ_ν (14) erfüllt sei, müsste jedenfalls $q_{\nu-1} q_\nu \geqq p_\nu \vartheta_\nu^2$ sein, und dies ist in unserem Falle für kein ungerades ν erfüllt.

Man beachte, dass für ein $\vartheta_{\nu+1} = 0$ (also $\varepsilon_{\nu+1} = +1$) das zugehörige ϱ_ν im extendierten Kettenbruch gar nicht vorkommt; es übt also auf die Konvergenz gar keinen Einfluss aus und es kann ihm irgend ein nur von Null verschiedener Wert, etwa der Wert 1, zugeschrieben werden.

Man kann, analog dem Vorgange des Herrn PERRON, zeigen, dass in gewissen Fällen die Konvergenz von K' auch notwendig ist für die von K. Dies ist z. B. der Fall, wenn alle $q_\nu > 0$ sind und wenn man für $p_{k+1} > 0$ $\varrho_k = \frac{p_{k+1}}{q_{k+1}}$ setzt, weil dann:

$$\frac{A_k - \varrho_k A_{k-1}}{B_k - \varrho_k B_{k-1}} = \frac{A_{k+1}}{B_{k+1}} \text{ ist für } \varepsilon_{k+1} = -1.$$

Diesen speziellen Ansatz machte schon Herr PERRON (Lehrbuch, S. 245—246, Satz 16).

Ich untersuche nun genauer die Struktur des Kettenbruches K'. Dieser Kettenbruch besitzt jedenfalls die Teilnenner:

$$q_\nu - \frac{p_\nu \vartheta_\nu}{\varrho_{\nu-1}} - \varrho_\nu \vartheta_{\nu+1} \qquad (\nu = 1, 2, 3, \ldots);^1$$

für $\vartheta_{\nu+1} = 0$ $(\nu \geqq 1)$ besitzt nun K' die Gliederfolge:

$$\cdots + \frac{\cdots|}{|q_\nu - \frac{p_\nu \vartheta_\nu}{\varrho_{\nu-1}}} + \frac{p_{\nu+1}|}{|q_{\nu+1} - \varrho_{\nu+1}\vartheta_{\nu+2}} + \cdots;$$

ist hingegen $\vartheta_{\nu+1} = 1$, so besitzt K' die Gliederfolge:

$$\cdots + \frac{\cdots|}{|q_\nu - \frac{p_\nu \vartheta_\nu}{\varrho_{\nu-1}} - \varrho_\nu} + \frac{\varrho_\nu|}{|1} + \frac{\frac{p_{\nu+1}}{\varrho_\nu}\Big|}{|q_{\nu+1} - \frac{p_{\nu+1}}{\varrho_\nu} - \varrho_{\nu+1}\vartheta_{\nu+2}} + \cdots.$$

Wendet man nun Satz C an (unter der Voraussetzung, dass durchweg $a_\nu \neq 0$ ist), so ist ersichtlich, dass K' konvergiert, wenn mindestens eine der Reihen:

---

[1] Aus dem vorhergesagten ist nämlich klar, dass für $\vartheta_{k+2} = 1$ der Teilnenner $q_{k+1} - \frac{p_{k+1}\vartheta_{k+1}}{\varrho_k}$ nach Extension in $q_{k+1} - \frac{p_{k+1}\vartheta_{k+1}}{\varrho_k} - \varrho_{k+1}$ übergeht, während er für $\vartheta_{k+2} = 0$ unverändert bleibt.

$$\left.\begin{array}{l}\displaystyle\sum_{\vartheta_{\nu+1}=0}\nolimits_\nu \left[\frac{\left(q_\nu-\frac{p_\nu\vartheta_\nu}{\varrho_{\nu-1}}\right)(q_{\nu+1}-\varrho_{\nu+1}\vartheta_{\nu+2})}{p_{\nu+1}}\right]^{\frac{1}{2}}\\[3ex]\displaystyle\sum_{\vartheta_{\nu+1}=1}\nolimits_\nu \left[\frac{q_\nu-\frac{p_\nu\vartheta_\nu}{\varrho_{\nu-1}}-\varrho_\nu}{\varrho_\nu}\right]^{\frac{1}{2}}\\[3ex]\displaystyle\sum_{\vartheta_{\nu+1}=1}\nolimits_\nu \left[\frac{\left(q_{\nu+1}-\frac{p_{\nu+1}}{\varrho_\nu}-\varrho_{\nu+1}\vartheta_{\nu+2}\right)\varrho_\nu}{p_{\nu+1}}\right]^{\frac{1}{2}}\end{array}\right\}\quad(\nu\geqq 0)$$

divergiert. Dabei sei $p_0 = 1$, $q_0 = 1$, $\vartheta_0 = 0$, $\varrho_{-1} = 1$; man beachte auch, dass $\vartheta_1 = 0$ ist.

Ferner lässt sich ein spezieller Fall einfach erledigen. Sind nämlich von einer gewissen Stelle an alle $\varepsilon_\nu p_\nu$ negativ, so wird durch die Extension von dieser Stelle an zwischen *je zwei* aufeinander folgende Näherungsbrüche von K ein neuer eingeschaltet; die Näherungsbrüche von K sind daher für K' von einer gewissen Stelle an alle von gerader oder alle von ungerader Ordnung. Um also die Konvergenz von K behaupten zu dürfen, hat man sich nach Satz E nur dessen zu versichern, dass nicht alle Teilnenner ungerader Ordnung von K' verschwinden. Dies ist sicher der Fall, wenn $q_1 - \varrho_1\vartheta_2 > 0$ ist, oder wenn unter den Produkten, die aus je zwei aufeinander folgenden Teilnennern von K' gebildet werden, wenigstens eines von Null verschieden ist; mit diesen Aussagen gleichwertig ist aber die, dass die obigen Reihen nicht alle drei identisch verschwinden.

Schliesslich kann man auch den Wert von K' abschätzen, denn es ist offenbar:

$$0 \leqq \varepsilon_1 K' \leqq \frac{p_1}{q_1 - \varrho_1\vartheta_2}\,.$$

Durch Zusammenfassung dieser Resultate ist folgender Satz bewiesen:

Satz 2. *Wenn die Elemente des Kettenbruches* (12) *für eine Folge positiver Zahlen* ϱ_ν $(\nu = 1, 2, 3, \ldots)$ *den Ungleichungen genügen:*

$$p_\nu > 0 \qquad (\nu = 1, 2, 3, \ldots) \tag{15}$$

$$q_\nu \geqq \frac{p_\nu\vartheta_\nu}{\varrho_{\nu-1}} + \varrho_\nu\vartheta_{\nu+1} \qquad (\nu = 1, 2, 3, \ldots), \tag{16}$$

so ist jede der folgenden zwei Bedingungen für die Konvergenz hinreichend:

1) *Von den drei Reihen:*

$$\left.\begin{array}{ll}\sum\limits_{\vartheta_{\nu+1}=0} \left[\dfrac{(\varrho_{\nu-1} q_\nu - p_\nu \vartheta_\nu)(q_{\nu+1} - \varrho_{\nu+1} \vartheta_{\nu+2})}{\varrho_{\nu-1} p_{\nu+1}}\right]^{\frac{1}{2}} & (\alpha_1) \\ \sum\limits_{\vartheta_{\nu+1}=1} \left[\dfrac{\varrho_{\nu-1} q_\nu - p_\nu \vartheta_\nu - \varrho_{\nu-1} \varrho_\nu}{\varrho_{\nu-1} \varrho_\nu}\right]^{\frac{1}{2}} & (\beta_1) \\ \sum\limits_{\vartheta_\nu=1} \left[\dfrac{\varrho_{\nu-1} q_\nu - p_\nu - \varrho_{\nu-1} \varrho_\nu \vartheta_{\nu+1}}{p_\nu}\right]^{\frac{1}{2}} & (\gamma_1)\end{array}\right\} \quad (\nu \geqq 0)$$

ist wenigstens eine divergent.

2) *Von einer gewissen Stelle an sind alle $\vartheta_\nu = 1$ und es verschwindet nicht eine jede der Reihen (α_1), (β_1) und (γ_1) identisch.*

Es ist auch:

$$0 \leqq \varepsilon_1 K \leqq \frac{p_1}{q_1 - \varrho_1 \vartheta_2}.$$

Dabei sind p_ν, q_ν, ϑ_ν durch die Gleichungen (13) bestimmt, und es ist $\varrho_{-1} = 1$, $\varrho_0 = 1$, $\vartheta_0 = 0$.

Bemerkung 1. Statt zu sagen: es verschwindet nicht eine jede der Reihen (α_1), (β_1) und (γ_1) identisch, kann man natürlich auch sagen: es verschwinden nicht alle die Zahlen:

$$(\varrho_{\nu-1} q_\nu - p_\nu \vartheta_\nu)(q_{\nu+1} - \varrho_{\nu+1} \vartheta_{\nu+2}) \quad \text{für alle} \quad \vartheta_{\nu+1} = 0,$$

$$\varrho_{\nu-1} q_\nu - p_\nu \vartheta_\nu - \varrho_{\nu-1} \varrho_\nu \quad \text{für alle} \quad \vartheta_{\nu+1} = 1,$$

$$\varrho_{\nu-1} q_\nu - p_\nu - \varrho_{\nu-1} \varrho_\nu \vartheta_{\nu+1} \quad \text{für alle} \quad \vartheta_\nu = 1.$$

Oder auch: es verschwinden nicht alle die Zahlen:

$$Z_\nu = (\varrho_{\nu-1} q_\nu - p_\nu \vartheta_\nu)(q_{\nu+1} - \varrho_{\nu+1} \vartheta_{\nu+2})(1 - \vartheta_{\nu+1}) + (\varrho_{\nu-1} q_\nu - \\ - p_\nu \vartheta_\nu - \varrho_{\nu-1} \varrho_\nu) \vartheta_{\nu+1} + (\varrho_{\nu-1} q_\nu - p_\nu - \varrho_{\nu-1} \varrho_\nu \vartheta_{\nu+1}) \vartheta_\nu;$$

$$(\nu = 0, 1, 2, \ldots)$$

wegen $\vartheta_{\nu+1}(1 - \vartheta_{\nu+1}) = 0$ ist offenbar

$$Z_\nu = (\varrho_{\nu-1} q_\nu - p_\nu \vartheta_\nu - \varrho_{\nu-1} \varrho_\nu \vartheta_{\nu+1})(q_{\nu+1} - \varrho_{\nu+1} \vartheta_{\nu+2})(1 - \vartheta_{\nu+1}) + \\ + (\varrho_{\nu-1} q_\nu - p_\nu \vartheta_\nu - \varrho_{\nu-1} \varrho_\nu \vartheta_{\nu+1}) \vartheta_{\nu+1} + (\varrho_{\nu-1} q_\nu - p_\nu \vartheta_\nu - \varrho_{\nu-1} \varrho_\nu \vartheta_{\nu+1}) \vartheta_\nu \\ = (\varrho_{\nu-1} q_\nu - p_\nu \vartheta_\nu - \varrho_{\nu-1} \varrho_\nu \vartheta_{\nu+1})[(q_{\nu+1} - \varrho_{\nu+1} \vartheta_{\nu+2})(1 - \vartheta_{\nu+1}) + \vartheta_\nu + \vartheta_{\nu+1}];$$

$$(\nu = 0, 1, 2, \ldots)$$

schliesslich ist klar, dass dieser Ausdruck zugleich mit

$$(\varrho_{\nu-1}\, q_\nu - p_\nu\, \vartheta_\nu - \varrho_{\nu-1}\, \varrho_\nu\, \vartheta_{\nu+1})\,(q_{\nu+1} - \varrho_{\nu+1}\, \vartheta_{\nu+2} + \vartheta_\nu + \vartheta_{\nu+1}) \tag{17}$$
$$(\nu = 0, 1, 2, \ldots)$$

verschwindet oder nicht. Man kann also 2) durch die Aussage ersetzen:

2') *Von einer gewissen Stelle an sind alle* $\vartheta_\nu = 1$ *und für mindestens einen Wert von* $\nu\,(\nu \geqq 0)$ *ist* (17) *von Null verschieden.*

Bemerkung 2. Die Bedingungen (15) und (16) sind i. a. zur Konvergenz nicht hinreichend, selbst wenn darin durchweg Ungleichheit gilt und unendlich oft $\vartheta_\nu = 1$ ist.[1] Der alternierende Kettenbruch z. B., in welchem allgemein

$$\left.\begin{aligned} &\varepsilon_{2\nu-1} = -1, \quad \varepsilon_{2\nu} = 1 \\ &q_{2\nu-1} = q^\nu, \quad q_{2\nu} = 1 + \frac{1}{q^{2\nu}}, \quad q > 1 \\ &p_{2\nu-1} = q^\nu - \frac{1}{q^\nu}, \quad p_{2\nu} = \frac{1}{p_{2\nu-1}} = \frac{q^\nu}{q^{2\nu} - 1} \end{aligned}\right\} \quad (\nu = 1, 2, 3, \ldots)$$

ist, divergiert immer. Man überzeugt sich hiervon leicht mit Hilfe eines PERRON'schen Satzes (vgl. PERRON, Lehrbuch, S. 247, Satz 17). Aus demselben folgt nämlich, dass der Kettenbruch $\left[\frac{(-1)^\nu p_\nu}{q_\nu}\right]_1^\infty$ divergiert, wenn die Bedingungen erfüllt sind:

$$\text{I} \quad (q_{2\nu-1}\, q_{2\nu} + p_{2\nu})\, q_{2\nu+1} \geqq q_{2\nu-1}\, p_{2\nu+1} \qquad (\nu = 1, 2, 3, \ldots)$$

$$\text{II} \quad \sum_\nu \left(\frac{c_3\, c_5 \ldots c_{2\nu-1}}{c_4\, c_6 \ldots c_{2\nu}}\, d_{2\nu} + \frac{c_2\, c_4 \ldots c_{2\nu}}{c_3\, c_5 \ldots c_{2\nu+1}}\, d_{2\nu+1}\right) \ \textbf{konvergiert,}$$

wobei

$$c_\nu = p_{2\nu-1}\, p_{2\nu}\, q_{2\nu-3}\, q_{2\nu+1}, \quad d_\nu = (q_{2\nu-1}\, q_{2\nu} + p_{2\nu})\, q_{2\nu+1} - q_{2\nu-1}\, p_{2\nu+1}$$

ist. Nun lautet jetzt die Bedingung I:

$$\left[q^\nu\left(1 + \frac{1}{q^{2\nu}}\right) + \frac{q^\nu}{q^{2\nu} - 1}\right] q^{\nu+1} \geqq q^\nu \left(q^{\nu+1} - \frac{1}{q^{\nu+1}}\right),$$

[1] Für den speziellen Fall: $p_\nu = 1$, $\varrho_\nu = 1$ $(\nu = 1, 2, 3, \ldots)$ reicht dies sicherlich aus; vgl. Satz 3.

und dies ist offenbar erfüllt. Ferner ist

$$c_\nu = q^{\nu-1} q^{\nu+1} = q^{2\nu}, \quad \text{also} \quad \frac{c_\nu}{c_{\nu+1}} = \frac{1}{q^2} < 1,$$

$$d_\nu = \left[q^\nu \left(1 + \frac{1}{q^{2\nu}}\right) + \frac{q^\nu}{q^{2\nu} - 1}\right] q^{\nu+1} - q^{2\nu+1} + \frac{1}{q}$$

$$= q + \frac{q^{2\nu+1}}{q^{2\nu} - 1} + \frac{1}{q} < q + 1 + \frac{q^2}{q-1};$$

hieraus ist ersichtlich, dass auch Bedingung II erfüllt ist. Schliesslich sind auch die Bedingungen (15) und (16) erfüllt, wenn man durchweg $\varrho_\nu = 1$ setzt. Denn dieselben lauten jetzt:

$$q^{2\nu} > 1, \ q^\nu \geqq q^\nu - \frac{1}{q^\nu}, \ 1 + \frac{1}{q^{2\nu}} \geqq 1$$

und es gilt sogar überall Ungleichheit.

Für $\varrho_\nu = 1$ $(\nu = 1, 2, 3, \ldots)$ erhält man aus Satz 2 eine Verallgemeinerung eines TIETZE'schen Satzes (auf dem S. 210 in Fussn 1 angeführten Orte a), Satz 3; b) Satz 6; vgl. auch PERRON, Lehrbuch, S. 244—245) selbst dann, wenn man die Reihe (γ_1) ausser acht lässt.

Sind von einem gewissen ν an alle $\varepsilon_\nu p_\nu$ positiv, so kann man den Satz 2 noch verschärfen; in diesem Falle sind nämlich von einem gewissen Gliede an die Kettenbrüche K' und K identisch und man kann leicht auf den Kettenbruch K' statt Satz C den allgemeinen Satz B anwenden. Man erhält so den

Zusatz zu Satz 2. Sind von einer gewissen Stelle an alle $\vartheta_\nu = 0$, *so kann die Bedingung 1) durch die folgende ersetzt werden:*

Von den beiden Reihen

$$\sum_1^\infty {}_\nu \frac{p_1 p_3 \ldots p_{2\nu-1}}{p_2 p_4 \ldots p_{2\nu}} q_{2\nu}, \quad \sum_1^\infty {}_\nu \frac{p_2 p_4 \ldots p_{2\nu}}{p_3 p_5 \ldots p_{2\nu+1}} q_{2\nu+1}$$

ist mindestens eine divergent und es verschwindet nicht eine jede der Reihen (α_1), (β_1) *und* (γ_1) *identisch.*[1]

Es sei bemerkt, dass die ϱ_ν denselben Charakter haben, wie die unendlich vielen willkürlichen Parameter p_ν im PRINGSHEIM'schen Hauptkriterium.[2]

[1] Für dies letztere genügt es jetzt offenbar, wenn von einer gewissen Stelle an alle $q_\nu > 0$ sind. Die im Zusatze enthaltene Konvergenzbedingung ist dann bekanntlich stets eine notwendige.

[2] Vgl. die auf S. 210 in Fussn. 4 zitierte Arbeit, insbesondere § 2; den Übergang von den ρ_ν zu den p_ν gewinnt man durch die Substitution: $\rho_\nu = \frac{|b_\nu|}{p_\nu}$.

§ 3.

Ein Konvergenzsatz für Kettenbrüche der Form $\left[\frac{\pm 1}{b_\nu}\right]_1^\infty$ und seine Verallgemeinerung.

Für $p_\nu = 1$, $\varrho_\nu = 1$ $(\nu = 1, 2, 3, \ldots)$ erhält man aus Satz 2 den spezielleren

Satz 2'. Wenn die Elemente des Kettenbruches (12) den Bedingungen genügen:

$$\left.\begin{array}{l} p_\nu = 1 \\ q_\nu \geqq \vartheta_\nu + \vartheta_{\nu+1} \end{array}\right\} \quad (\nu = 1, 2, 3, \ldots),$$

so ist jede der folgenden zwei Bedingungen für die Konvergenz hinreichend:

1) Von den drei Reihen:

$$\left.\begin{array}{ll} \sum\limits_{\vartheta_{\nu+1}=0} [(q_\nu - \vartheta_\nu)(q_{\nu+1} - \vartheta_{\nu+2})]^{\frac{1}{2}} & \\ \sum\limits_{\vartheta_{\nu+1}=1} [q_\nu - \vartheta_\nu - 1]^{\frac{1}{2}} & \\ \sum\limits_{\vartheta_\nu=1} [q_\nu - \vartheta_{\nu+1} - 1]^{\frac{1}{2}} & \end{array}\right\} \quad (\nu \geqq 0) \qquad \begin{array}{r} (\alpha_2) \\ (\beta_2) \\ (\gamma_2) \end{array}$$

ist mindestens eine divergent.

2) Von einer gewissen Stelle an sind alle $\vartheta_\nu = 1$ und es verschwindet nicht eine jede der Reihen (α_2), (β_2) und (γ_2) identisch.

Es ist auch:

$$0 \leqq \varepsilon_1 \left[\frac{a_\nu}{b_\nu}\right]_1^\infty \leqq \frac{1}{|b_1| - \vartheta_2}.$$

In Satz 2' ist ein Konvergenzkriterium des Herrn Tietze (auf dem S. 210 in Fussn. 1 angeführten Orte b), Satz 1) speziell enthalten.

Ich kann, unabhängig von Satz 2 den Satz 2' selbst noch wesentlich verallgemeinern. Zur Herleitung des ersteren Satzes wurde nämlich auf den extendierten Kettenbruch K' Satz C angewendet; ist nun durchweg $p_\nu = 1$, $\varrho_\nu = 1$, so kann man auf K' leicht den weitergehenden Satz B anwenden, weil alle seine Teilzähler und daher auch ein Produkt solcher Teilzähler gleich 1 ist. Ist ferner unendlich oft $\vartheta_\nu = 1$, so tritt unendlich oft 1 als Teilnenner auf; ist aber nur endlich oft $\vartheta_\nu = 1$, so hat K' von einem gewissen Gliede an die Form:

$$\frac{1|}{|q_\nu} + \frac{1|}{|q_{\nu+1}} + \frac{1|}{|q_{\nu+2}} + \cdots.$$

Man gewinnt so bei Beachtung der Bemerkung 1, S. 221 den

Satz 3. *Der Kettenbruch* (12) *konvergiert, wenn die Bedingungen erfüllt sind*:

$$\left.\begin{array}{l} 1)\ |a_\nu| = 1 \\ 2)\ |b_\nu| \geqq \vartheta_\nu + \vartheta_{\nu+1} \end{array}\right\} \quad (\nu = 1, 2, 3, \ldots)$$

3) *Es ist mindestens für einen Wert von* ν $(\nu \geqq 0)$:

$$(q_\nu - \vartheta_\nu - \vartheta_{\nu+1})(q_{\nu+1} - \vartheta_{\nu+2} + \vartheta_\nu + \vartheta_{\nu+1}) > 0.$$

Nur wenn von einem gewissen ν *an alle* ϑ_ν *verschwinden, muss ausserdem die Divergenz der Reihe* $\sum_1^\infty{}_\nu\, q_\nu$ *vorausgesetzt werden.* (Die ja stets eine notwendige Bedingung der Konvergenz darstellt, im Falle unendlich vieler negativer ε_ν aber eo ipso erfüllt ist.) Ferner ist:

$$0 \leqq \varepsilon_1 \left[\frac{a_\nu}{b_\nu}\right]_1^\infty \leqq \frac{1}{|b_1| - \vartheta_2}.$$

Für $a_\nu = 1$ ist

$$\alpha_\nu = 1, \quad \varepsilon_\nu = \frac{1}{\beta_{\nu-1}\,\beta_\nu} = \beta_{\nu-1}\,\beta_\nu = \frac{b_{\nu-1}\,b_\nu}{|b_{\nu-1}\,b_\nu|};$$

man gelangt so zu dem in der Einleitung zitierten Satze.

Diesen Satz erweitere ich mit Hilfe der äquivalenten Transformation:

$$\left[\frac{a_\nu}{b_\nu}\right]_1^\infty \equiv \varrho \cdot \frac{a_1|}{|\varrho\, b_1} + \frac{a_2|}{\left|\frac{b_2}{\varrho}\right.} + \frac{a_3|}{|\varrho\, b_3} + \frac{a_4|}{\left|\frac{b_4}{\varrho}\right.} + \cdots. \qquad (\varrho \neq 0)$$

Sei $\varrho > 0$; wendet man auf den so transformierten Kettenbruch Satz 3 an, so erhält man den allgemeineren

Satz 4. *Der Kettenbruch* (12) *konvergiert, wenn für ein positives* ϱ *die Bedingungen erfüllt sind:*

$$\left.\begin{aligned} &1)\ |a_\nu| = 1 \\ &2)\ \varrho\,|b_{2\nu-1}| \geqq \vartheta_{2\nu-1} + \vartheta_{2\nu}, \quad \frac{|b_{2\nu}|}{\varrho} \geqq \vartheta_{2\nu} + \vartheta_{2\nu+1} \end{aligned}\right\} (\nu = 1, 2, 3, \ldots)$$

3) *Es ist mindestens für einen Wert von* ν *entweder*

$$\left(\frac{q_{2\nu}}{\varrho} - \vartheta_{2\nu} - \vartheta_{2\nu+1}\right)(\varrho\, q_{2\nu+1} - \vartheta_{2\nu+2} + \vartheta_{2\nu} + \vartheta_{2\nu+1}) > 0 \qquad (\nu \geqq 0)$$

oder

$$(\varrho\, q_{2\nu-1} - \vartheta_{2\nu-1} - \vartheta_{2\nu})\left(\frac{q_{2\nu}}{\varrho} - \vartheta_{2\nu+1} + \vartheta_{2\nu-1} + \vartheta_{2\nu}\right) > 0 \qquad (\nu \geqq 1).$$

Nur wenn von einem gewissen ν *an alle* ϑ_ν *verschwinden, muss ausserdem die Divergenz der Reihe* $\sum\limits_{1}^{\infty}{}_\nu\, q_\nu$ *vorausgesetzt werden.*

Man kann Satz 4 leicht auf Kettenbrüche, deren Teilzähler beliebige, von Null verschiedene Werte haben, übertragen. Denn es ist ja

$$\left[\frac{a_\nu}{b_\nu}\right]_1^\infty \equiv p_1 \left[\frac{\varepsilon_1}{q_1}, \frac{\varepsilon_\nu\, p_\nu}{q_\nu}\right]_2^\infty \equiv p_1 \left[\frac{\varepsilon_\nu}{h_\nu}\right]_1^\infty,$$

wo die h_ν durch die Gleichungen bestimmt sind:

$$\left.\begin{aligned} h_1 = q_1, \quad h_{2\nu} &= \frac{p_3\, p_5 \cdots p_{2\nu-1}}{p_2\, p_4\, p_6 \cdots p_{2\nu}} \cdot q_{2\nu} \\ h_{2\nu+1} &= \frac{p_2\, p_4 \cdots p_{2\nu}}{p_3\, p_5 \cdots p_{2\nu+1}} \cdot q_{2\nu+1} \end{aligned}\right\} \quad (\nu = 1, 2, 3, \ldots). \tag{18}$$

Wendet man auf den so transformierten Kettenbruch Satz 4 an, so folgt:

Satz 5. *Der Kettenbruch* (12) *konvergiert, wenn für ein positives* ϱ *die Bedingungen erfüllt sind:*

$$\left.\begin{aligned} &1)\ p_\nu > 0 \\ &2)\ \varrho\, h_{2\nu-1} \geqq \vartheta_{2\nu-1} + \vartheta_{2\nu}, \quad \frac{h_{2\nu}}{\varrho} \geqq \vartheta_{2\nu} + \vartheta_{2\nu+1} \end{aligned}\right\} (\nu = 1, 2, 3, \ldots)$$

3) *Es ist mindestens für einen Wert von* ν *entweder*

$$\left(\frac{h_{2\nu}}{\varrho} - \vartheta_{2\nu} - \vartheta_{2\nu+1}\right)(\varrho\, h_{2\nu+1} - \vartheta_{2\nu+2} + \vartheta_{2\nu} + \vartheta_{2\nu+1}) > 0 \quad (\nu \geqq 0)$$

oder

$$(\varrho h_{2\nu-1} - \vartheta_{2\nu-1} - \vartheta_{2\nu})\left(\frac{h_{2\nu}}{\varrho} - \vartheta_{2\nu+1} + \vartheta_{2\nu} + \vartheta_{2\nu-1}\right) > 0 \quad (\nu \geqq 1).$$

Nur wenn von einem gewissen ν an durchweg $\vartheta_\nu = 0$ ist, muss ausserdem die Divergenz der Reihe $\sum_{1}^{\infty} h_\nu$ vorausgesetzt werden.

Dabei sind die $h_\nu, p_\nu, q_\nu, \vartheta_\nu, \varepsilon_\nu$ durch die Gleichungen (18) und (13) bestimmt, und $h_0 = 1$ zu setzen.

Wenden wir schliesslich auf den extendierten Kettenbruch K' Satz D an, so erhalten wir unmittelbar den

Satz 6. *Der Kettenbruch (12) konvergiert, wenn mindestens für einen Wert von ν $p_\nu = 0$ ist und für ein k ($k \geqq 1$) die Ungleichungen erfüllt sind:*

$$\left.\begin{aligned} & q_\nu - \frac{p_\nu \vartheta_\nu}{\varrho_{\nu-1}} + p_{\nu+1}(1 - \vartheta_{\nu+1}) > 0 \quad (\nu = 1, 2, 3, \ldots k-1) \\ & q_\nu - \frac{p_\nu \vartheta_\nu}{\varrho_{\nu-1}} - \varrho_\nu \vartheta_{\nu+1} > 0 \qquad (\nu = k, k+1, \ldots). \end{aligned}\right\} \tag{19}$$

Den Zusatz zu D verwende ich nur für den Fall, dass

$$\vartheta_k = 1, \quad \vartheta_{k+1} = 0$$

ist. Der Kettenbruch K' hat dann offenbar die Gliederfolge:

$$\cdots + \frac{\cdots|}{|q_{k-1} - \frac{p_{k-1}\vartheta_{k-1}}{\varrho_{k-2}} - \varrho_{k-1}} + \frac{\varrho_{k-1}|}{|1} + \frac{\frac{p_k}{\varrho_{k-1}}|}{|q_k - \frac{p_k}{\varrho_{k-1}}} + \frac{p_{k+1}|}{|q_{k+1} - \varrho_{k+1}\vartheta_{k+2}} + \cdots,$$

und man erhält den

Zusatz. *Ist für ein k ($k \geqq 2$)*

$$\vartheta_k = 1, \ \vartheta_{k+1} = 0, \ p_k\left(q_{k-1} - \frac{p_{k-1}\vartheta_{k-1}}{\varrho_{k-2}} - \varrho_{k-1}\right) > 0,$$

so darf in (19) für $\nu = k$ auch Gleichheit gelten.

Wir werden den Satz 6 und seinen Zusatz in § 4 benutzen.

§ 4.

Ableitung neuer Konvergenzkriterien aus den allgemeinen durch Spezialisierung unendlich vieler Parameter.

Für spezielle Werte der ϱ_ν erhält man aus obigen Sätzen einfachere Konvergenzkriterien, ähnlich, wie Herr PRINGSHEIM[1] aus seinem Hauptkriterium neue Sätze ableitete. Es können dabei vielfach umständliche Formeln auftreten, daher beschränke ich mich auf die einfachsten bemerkenswerten Fälle.

Ich nehme im folgenden an, dass

$$q_\nu > 0 \quad (\nu = 1, 2, 3, \ldots)$$

ist. Setzt man

$$\varrho_\nu = \frac{q_\nu}{u_\nu} \quad (\nu = 1, 2, 3, \ldots),$$

und zur Abkürzung

$$\frac{p_1}{q_1} = r_1, \quad \frac{p_\nu}{q_{\nu-1}\, q_\nu} = r_\nu \quad (\nu = 2, 3, \ldots),$$

so erhalten die Ungleichungen (16) die Form:

$$1 \geqq u_{\nu-1}\, r_\nu\, \vartheta_\nu + \frac{\vartheta_{\nu+1}}{u_\nu} \quad (\nu = 1, 2, 3, \ldots), \tag{20}$$

und die Reihen (α_1), (β_1) und (γ_1) gehen in die folgenden über (man kann ohne Einschränkung der Allgemeinheit $q_\nu = 1$, $p_\nu = r_\nu$ setzen):

$$\left.\begin{array}{ll}
\displaystyle\sum_{\vartheta_{\nu+1}=0} \left[\frac{(1 - u_{\nu-1}\, r_\nu\, \vartheta_\nu)\left(1 - \dfrac{\vartheta_{\nu+2}}{u_{\nu+1}}\right)}{r_{\nu+1}}\right]^{\frac{1}{2}} & (\alpha_3) \\[4ex]
\displaystyle\sum_{\vartheta_{\nu+1}=1} \left[u_\nu - u_{\nu-1}\, u_\nu\, r_\nu\, \vartheta_\nu - 1\right]^{\frac{1}{2}} & (\beta_3) \\[4ex]
\displaystyle\sum_{\vartheta_\nu=1} \left[\frac{1 - u_{\nu-1}\, r_\nu - \dfrac{\vartheta_{\nu+1}}{u_\nu}}{u_{\nu-1}\, r_\nu}\right]^{\frac{1}{2}} & (\gamma_3)
\end{array}\right\} \quad (\nu \geqq 0);$$

dabei sei: $u_{-1} = 1$, $u_0 = 1$, $r_0 = 1$.

---

[1] Auf dem S. 210 Fussn. 4 angeführten Orte und in seiner früheren Arbeit: Über die Konvergenz unendlicher Kettenbrüche [Sitzungsberichte der K. Bayer. Akad. der Wiss. (München), Math.-phys. Klasse, Bd. 28, 1898, S. 295—324].

1. Setzt man nun

$$u_\nu = 1 + \vartheta_\nu \quad (\nu = 1, 2, 3, \ldots),$$

so reduziert sich Ungleichung (20) auf

$$r_\nu \vartheta_\nu \leqq \frac{1 + \vartheta_\nu - \vartheta_{\nu+1}}{(1 + \vartheta_{\nu-1})(1 + \vartheta_\nu)} \quad (\nu = 2, 3, \ldots), \tag{21}$$

und man erhält den

Satz 7. *Der Kettenbruch* $\left[\frac{\varepsilon_\nu r_\nu}{1}\right]_1^\infty$ $(r_\nu > 0,\ \varepsilon_\nu = \pm 1)$ *konvergiert, wenn die Ungleichungen* (21) *erfüllt sind und mindestens eine der Reihen*

$$\sum_{\vartheta_{\nu+1}=\vartheta_{\nu+2}=0} \left[\frac{1 - r_\nu \vartheta_\nu (1 + \vartheta_{\nu-1})}{r_{\nu+1}}\right]^{\frac{1}{2}} \quad (\nu \geqq 0) \quad (\vartheta_{-1} = 0)$$

$$\left.\begin{aligned} &\sum_{\vartheta_\nu=\vartheta_{\nu+1}=1} [1 - 2(1 + \vartheta_{\nu-1}) r_\nu]^{\frac{1}{2}} \\ &\sum_{\vartheta_\nu=1} \left[\frac{1 - (1 + \vartheta_{\nu-1}) r_\nu - \frac{\vartheta_{\nu+1}}{2}}{r_\nu}\right]^{\frac{1}{2}} \end{aligned}\right\} \quad (\nu \geqq 2)$$

divergiert, oder von einem gewissen ν *an alle* $\vartheta_\nu = 1$ *sind und dann die obigen Reihen nicht alle drei identisch verschwinden.*

So konvergiert z. B. der Kettenbruch

$$\frac{r_1|}{|1} - \frac{r_2|}{|1} - \frac{r_3|}{|1} + \frac{r_4|}{|1} - \frac{r_5|}{|1} - \frac{r_6|}{|1} + \cdots, \tag{22}$$

wobei allgemein

$$\vartheta_{3\nu-2} = 0, \ \vartheta_{3\nu-1} = 1, \ \vartheta_{3\nu} = 1 \quad (\nu = 1, 2, 3, \ldots)$$

ist, wenn für ein ε

$$\varepsilon > 0, \ r_{3\nu-1} \leqq \frac{1}{2} - \frac{\varepsilon}{\nu^2}, \ r_{3\nu} \leqq \frac{1}{2} \quad (\nu = 1, 2, 3, \ldots)$$

ist. Die $r_{3\nu-2}$ sind ganz willkürlich (nur positiv).

2. Setzt man

$$u_1 = 1,\ u_\nu = 1 + u,\quad u > 0\quad (\nu = 2, 3, \ldots),$$

so wird die Reihe (β_3) sicher divergieren, falls nur für unendlich viele Werte von ν $\vartheta_\nu = 0$, $\vartheta_{\nu+1} = 1$ ist. Ist dies aber nicht der Fall, so wird von einem gewissen ν an entweder stets $\vartheta_\nu = 1$ oder stets $\vartheta_\nu = 0$ sein. Im ersteren Fall ist die Bedingung 2′) (S. 222) sicher erfüllt, wenn für ein $\nu \geqq 2$ $\vartheta_\nu = 0$ ist. Aus Satz 2 und seinem Zusatz folgt daher mit Rücksicht auf Bemerkung 1 (S. 221) der

Satz 8. *Der Kettenbruch* $\left[\frac{\varepsilon_\nu r_\nu}{1}\right]_1^\infty$ $(r_\nu > 0)$ *konvergiert, wenn für ein* $u > 0$

$$r_2 \vartheta_2 \leqq 1 - \frac{\vartheta_3}{1+u},\quad r_\nu \vartheta_\nu \leqq \frac{1 + u - \vartheta_{\nu+1}}{(1+u)^2}\quad (\nu = 3, 4, \ldots) \tag{23}$$

ist. Sind aber 1) *von* $\nu = 2$ *an alle* $\vartheta_\nu = 1$, *so muss in* (23) *mindestens einmal Ungleichheit gelten; sind* 2) *von einem gewissen* ν *an, alle* $\vartheta_\nu = 0$, *so ist ausserdem die Bedingung:*

$$\sum_1^\infty{}_\nu \left(\frac{r_1 r_3 \ldots r_{2\nu-1}}{r_2 r_4 \ldots r_{2\nu}} + \frac{r_2 r_4 \ldots r_{2\nu}}{r_3 r_5 \ldots r_{2\nu+1}}\right) \text{ divergiert,} \tag{24}$$

erforderlich.

Für den Kettenbruch (22) erhält man hieraus die Konvergenzbedingungen:

$$r_2 \leqq \frac{u}{1+u},\quad r_3 \leqq \frac{1}{1+u},\quad r_{3\nu-1} \leqq \frac{u}{(1+u)^2},\quad r_{3\nu} \leqq \frac{1}{1+u}\quad (\nu = 2, 3, \ldots);$$

$r_{3\nu-2}$ ist willkürlich nur positiv.

Speziell für $u = 1$ reduzieren sich die Bedingungen (23) auf die folgenden:

$$r_2 \vartheta_2 \leqq 1 - \frac{\vartheta_3}{2},\quad r_\nu \vartheta_\nu \leqq \frac{1}{2} - \frac{\vartheta_{\nu+1}}{4}\quad (\nu = 3, 4, \ldots).$$

3. Setzt man

$$u_\nu = \frac{2\nu - 1}{\nu}\quad (\nu = 1, 2, 3, \ldots),$$

so erhält man in ganz ähnlicher Weise den

Satz 9. *Der Kettenbruch* $\left[\frac{\varepsilon_\nu r_\nu}{1}\right]_1^\infty$ $(r_\nu > 0)$ *konvergiert, wenn*

$$r_\nu \vartheta_\nu \leqq \left(1 - \frac{\nu \vartheta_{\nu+1}}{2\nu - 1}\right) \cdot \frac{\nu - 1}{2\nu - 3} \quad (\nu = 2, 3, \ldots) \tag{25}$$

ist. Sind aber 1) *von* $\nu = 2$ *an alle* $\vartheta_\nu = 1$, *so muss in* (25) *wenigstens einmal Ungleichheit gelten; sind* 2) *von einem gewissen* ν *an alle* $\vartheta_\nu = 0$, *so ist die Zusatzbedingung* (24) *auch noch erforderlich.*

4. Sei nun für r_ν auch der Wert Null zulässig; *ich nehme an,* dass die Reihe $\sum_2^\infty{}_\nu\, r_\nu \vartheta_\nu$ konvergiert und nicht grösser als 1 ist. Sei ferner die Zahlenfolge $u_1, u_2, u_3, \ldots$ niemals abnehmend und insbesondere $u_1 \geqq 1$. Dann ist $\vartheta_{\nu+1} \leqq u_{\nu-1}$ und daher sind die Ungleichungen (20) sicher erfüllt, wenn die folgenden gelten:

$$r_\nu \vartheta_\nu \leqq \frac{1}{u_{\nu-1}} - \frac{1}{u_\nu} \quad (\nu = 2, 3, \ldots). \tag{26}$$

Nun setze ich:

$$\frac{1}{u_\nu} = \sum_{\nu+1}^\infty{}_n\, r_n \vartheta_n, \tag{d}$$

falls diese Reihe nicht verschwindet; sie kann aber nur dann verschwinden, wenn

$$\vartheta_n = 0 \quad (n = \nu + 1, \nu + 2, \ldots)$$

ist, und in diesem Falle können $u_\nu, u_{\nu+1}, \ldots$ beliebige Werte haben, welche nur der vorausgesetzten Bedingung $u_n \geqq u_{n-1}$ $(n \geqq 2)$ genügen, man kann etwa $u_n = u_{\nu-1}$ $(n = \nu, \nu + 1, \ldots)$ setzen.

Es ist klar, dass jetzt die Ungleichungen (26) erfüllt sind.

Sei zunächst durchweg $r_\nu > 0$; das allgemeine Glied der Reihe (β_3) ist jetzt:

$$(u_\nu - u_{\nu-1} u_\nu r_\nu \vartheta_\nu - 1)^{\frac{1}{2}} \quad (\text{für } (\vartheta_{\nu+1} = 1),$$

ferner folgt aus Ungleichung (26):

$$u_{\nu-1} u_\nu r_\nu \vartheta_\nu \leqq u_\nu - u_{\nu-1},$$

oder

$$u_\nu - u_{\nu-1} u_\nu r_\nu \vartheta_\nu - 1 \geqq u_{\nu-1} - 1.$$

Gibt es nun unendlich viele $\vartheta_{\nu+1} = 1$, so ist offenbar $\lim\limits_{\nu=\infty} u_\nu = \infty$, und die Reihe (β_3) hat unendlich viele über alle Schranken wachsende Glieder, daher divergiert sie. Dies sichert die Konvergenz des Kettenbruches.

Sind aber von einem gewissen ν an alle $\vartheta_\nu = 0$, so kann man den Zusatz zu Satz 2 anwenden; die Reihe (α_3) hat sicher von Null verschiedene Glieder (sogar unendlich viele), daher ist jetzt für die Konvergenz des Kettenbruches die stets notwendige Bedingung, dass mindestens eine der Reihen:

$$\sum_1^\infty{}_\nu \frac{r_1 r_3 \dots r_{2\nu-1}}{r_2 r_4 \dots r_{2\nu}}, \quad \sum_1^\infty{}_\nu \frac{r_2 r_4 \dots r_{2\nu}}{r_3 r_5 \dots r_{2\nu+1}}$$

divergiere, auch hinreichend.

Um auch den Fall zu erledigen, dass wenigstens eines der p_ν (oder, was auf dasselbe hinauskommt, der r_ν) verschwindet, ist Satz 6 anzuwenden. Die Bedingungen dieses Satzes lauten jetzt:

$$1 - u_{\nu-1} r_\nu \vartheta_\nu + r_{\nu+1}(1 - \vartheta_{\nu+1}) > 0 \qquad (\nu = 2, 3, \dots k-1) \tag{27}$$

$$1 - u_{\nu-1} r_\nu \vartheta_\nu - \frac{\vartheta_{\nu+1}}{u_\nu} > 0 \quad (\nu = k,\ k+1, \dots) \text{ für ein gewisses } k. \tag{28}$$

Gibt es erstens unendlich viele $\vartheta_\nu = 1$, so ist Ungleichheit (27) stets erfüllt, denn für ein $\nu = \lambda$ kann die linke Seite von (27) nur so verschwinden, dass

$$\vartheta_\lambda = 1,\ u_{\lambda-1} r_\lambda = 1,\ r_{\lambda+1}(1 - \vartheta_{\lambda+1}) = 0$$

wird; aus $u_{\lambda-1} r_\lambda = 1$ folgt aber:

$$\vartheta_\nu = 0 \quad (\nu = \lambda + 1,\ \lambda + 2, \dots),$$

und dies ist gegen unsere Voraussetzung. Auch Ungleichheit (28) ist jetzt erfüllt (bei geeigneter Wahl von k), denn man hat:

$$1 - u_{\nu-1} r_\nu \vartheta_\nu - \frac{\vartheta_{\nu+1}}{u_\nu} \geqq \frac{1}{u_\nu}(u_\nu - u_{\nu-1} u_\nu r_\nu \vartheta_\nu - 1) \geqq \frac{u_{\nu-1} - 1}{u_\nu}$$

und dies ist von einem gewissen ν an grösser als Null, weil $\lim\limits_{\nu=\infty} u_{\nu-1} = \infty$. Also der Kettenbruch konvergiert.

Ist zweitens durchweg $\vartheta_\nu = 0$ $(\nu \geqq 2)$, so sind die Ungleichheiten (27) und (28) offenbar schon für $k = 2$ erfüllt; der Kettenbruch konvergiert auch jetzt.

Gibt es schliesslich drittens endlich viele $\vartheta_\nu = 1$, so sei:

$$\vartheta_{k_1} = 1,\ \vartheta_{k_2} = 1, \ldots, \vartheta_{k_\mu} = 1 \quad (\mu \geqq 1)$$

$$\vartheta_\nu = 0 \quad (\nu \neq k_1, \ldots, k_\mu).$$

Die Bedingung (28) ist auch in diesem Falle erfüllt, etwa für $k = k_\mu + 1$. Für $\nu = k_\mu$ wird die linke Seite der Ungleichheit (27): $1 - 1 + r_{k_\mu+1}$; dies ist grösser als Null, *wenn* $r_{k_\mu+1} > 0$ *ist.* Ferner ist für $\nu < k_\mu$:

$$u_{\nu-1} r_\nu \vartheta_\nu = \frac{r_\nu \vartheta_\nu}{r_\nu \vartheta_\nu + r_{\nu+1} \vartheta_{\nu+1} + \cdots + r_{k_\mu}} < 1,$$

daher ist jetzt die Ungleichheit (27) für alle ν gültig und man hat Konvergenz des Kettenbruches.

Es bleibt noch der Unterfall zu erledigen, *dass* $r_{k_\mu+1} = 0$ *ist.* Jetzt sind die Ungleichungen (27) nur für $\nu \neq k_\mu$ erfüllt, es kommt also (laut dem Zusatze zu Satz 6) noch darauf an, ob der Ausdruck:

$$1 - u_{k_\mu-2} r_{k_\mu-1} \vartheta_{k_\mu-1} - \frac{1}{u_{k_\mu-1}} = 1 - \frac{r_{k_\mu-1} \vartheta_{k_\mu-1}}{r_{k_\mu-1} \vartheta_{k_\mu-1} + r_{k_\mu}} - r_{k_\mu} = \frac{r_{k_\mu}}{r_{k_\mu-1} \vartheta_{k_\mu-1} + r_{k_\mu}} - r_{k_\mu}$$

verschwindet oder nicht. Im letzteren Falle hat man sicher Konvergenz. Er verschwindet aber dann und nur dann, wenn die Gl. gilt:

$$r_{k_\mu-1} \vartheta_{k_\mu-1} + r_{k_\mu} = 1. \tag{29}$$

Ist zunächst $\mu = 1$, so kann man statt k_1 einfach k schreiben und da $\vartheta_{k-1} = 0$ sein muss, lautet Gl. (29) jetzt: $r_k = 1$. Man hat somit den Kettenbruch zu untersuchen $(r_{k_\mu+1} = r_{k+1} = 0)$:

$$\frac{r_1|}{|1} + \cdots - \frac{1|}{|1} + \frac{0|}{|1} + \frac{r_{k+2}|}{|1} + \cdots.$$

Jetzt ist:

$$Q_k = Q_{k-1} - Q_{k-2} = r_{k-1} Q_{k-3},\ Q_{k+1} = Q_k,\ Q_{k+2} = (1 + r_{k+2}) Q_k, \ldots;$$

$$P_k = P_{k-1} - P_{k-2} = r_{k-1} P_{k-3},\ P_{k+1} = P_k,\ P_{k+2} = (1 + r_{k+2}) P_k, \ldots;$$

also der Kettenbruch konvergent oder divergent, je nachdem $r_{k-1} Q_{k-3}$ ungleich oder gleich Null ist. Nun ist $Q_{-1} = 0$ und $Q_{k-3} > 0$ für ein $k \geqq 3$, weil $\varepsilon_\nu r_\nu \geqq 0$ für $\nu \leqq k - 1$ ist; also ist für $r_{k-1} = 0$ der Kettenbruch wesentlich divergent; für $k = 2$, $r_1 \neq 0$ ausserwesentlich divergent, im übrigen konvergent.

Für $\mu \geqq 2$ ist $r_{k_\mu} < 1$, also kann Gl. (29) nur dann bestehen, wenn $k_\mu - 1 = k_{\mu-1}$, $\vartheta_{k_\mu - 1} = \vartheta_{k_{\mu-1}} = 1$, $r_{k_{\mu-1}} + r_{k_\mu} = 1$ ist. Dies ist nur so möglich, dass $\mu = 2$ ist. Schreibt man statt k_1 einfach k, so ist also $r_{k+1} = 1 - r_k$ und man erhält den Kettenbruch ($r_{k_\mu + 1} = r_{k+2} = 0$):

$$\frac{r_1|}{|1} + \cdots + \frac{r_{k-1}|}{|1} - \frac{r_k|}{|1} - \frac{1 - r_k|}{|1} + \frac{0|}{|1} + \frac{r_{k+3}|}{|1} + \cdots.$$

Jetzt ist:

$$Q_k = Q_{k-1} - r_k Q_{k-2},\ Q_{k+1} = Q_k - (1 - r_k)\, Q_{k-1} = r_k (Q_{k-1} - Q_{k-2}) = r_k r_{k-1} Q_{k-3},$$

$$Q_{k+2} = Q_{k+1} = r_k r_{k-1} Q_{k-3},\ Q_{k+3} = (1 + r_{k+3})\, r_k r_{k-1} Q_{k-3}, \ldots$$

$$P_k = P_{k-1} - r_k P_{k-2},\ P_{k+1} = P_k - (1 - r_k)\, P_{k-1} = r_k r_{k-1} P_{k-3},$$

$$P_{k+2} = P_{k+1} = r_k r_{k-1} P_{k-3},\ P_{k+3} = (1 + r_{k+3})\, r_k r_{k-1} P_{k-3}, \ldots.$$

Da nun $r_k > 0$ ist, so konvergiert oder divergiert der Kettenbruch wiederum, je nachdem $r_{k-1} Q_{k-3}$ ungleich oder gleich Null ist —. Wir können diese Resultate in folgenden Satz zusammenfassen:

Satz 10. *Der Kettenbruch* $\left[\frac{\varepsilon_\nu r_\nu}{1}\right]_1^\infty$ ($r_\nu \geqq 0$) *konvergiert, wenn*

$$s = \sum_2^\infty {}_\nu r_\nu \vartheta_\nu \leqq 1 \tag{30}$$

ist. Nur wenn durchweg $r_\nu > 0$ *und von einem gewissen* ν *an* $\vartheta_\nu = 0$ *ist, ist für die Konvergenz die weitere Bedingung erforderlich:*

$$\sum_1^\infty {}_\nu \left(\frac{r_1 r_3 \ldots r_{2\nu-1}}{r_2 r_4 \ldots r_{2\nu}} + \frac{r_2 r_4 \ldots r_{2\nu}}{r_3 r_5 \ldots r_{2\nu+1}}\right) \textit{ divergiert.}$$

Ferner ist in den vier Ausnahmefällen:

1) $\vartheta_2 = 1,\ \vartheta_\nu = 0\ (\nu \geqq 3),\ r_2 = 1,\ r_3 = 0$

2) $\vartheta_k = 1,\ \vartheta_\nu = 0\ (\nu \neq k),\ r_{k-1} = 0,\ r_k = 1,\ r_{k+1} = 0,\ (k \geqq 3)$

3) $\vartheta_2 = 1,\ \vartheta_3 = 1,\ \vartheta_\nu = 0\ (\nu \geqq 4),\ r_2 + r_3 = 1,\ r_4 = 0$

4) $\vartheta_k = 1,\ \vartheta_{k+1} = 1,\ \vartheta_\nu = 0\ (\nu \neq k,\ k+1),\ r_{k-1} = r_{k+2} = 0,\ r_k + r_{k+1} = 1,$ $(k \geqq 3)$,

der Kettenbruch wesentlich divergent; nur wenn im Falle 1) *oder* 3) $r_1 \neq 0$ *ist, divergiert er ausserwesentlich.*

Es gilt auch die Beziehung:

$$0 \leqq \varepsilon_1 \left[\frac{\varepsilon_\nu r_\nu}{1}\right]_1^\infty \leqq \frac{r_1}{1 - s\vartheta_2}.$$

§ 5.

Fortsetzung; ein weiterer Konvergenzsatz für Kettenbrüche der Form $\left[\frac{a_\nu}{1}\right]_1^\infty$.

5. Die Bedingung (30) können wir durch eine allgemeinere ersetzen, wenn wir wieder annehmen, dass $r_\nu > 0$ $(\nu = 1, 2, 3, \ldots)$ ist.

Wir betrachten die Reihe:

$$r_\nu \vartheta_\nu + r_{\nu+1} \vartheta_\nu \vartheta_{\nu+1} + r_{\nu+2} \vartheta_\nu \vartheta_{\nu+1} \vartheta_{\nu+2} + \cdots = \sum_0^\infty{}_k \, r_{\nu+k} \vartheta_\nu \vartheta_{\nu+1} \ldots \vartheta_{\nu+k} = \sigma_{\nu-1}; \tag{31}$$

dieselbe besitzt nur dann unendlich viele (nicht verschwindende) Glieder, wenn von einem gewissen ν an alle $\vartheta_\nu = 1$ sind. Ist dies der Fall, so sei die Reihe konvergent. Nun setze ich:

$$\left.\begin{aligned} u_0 = 1,\ u_{\nu-1} = u_{\nu-2} \text{ für } \vartheta_\nu = 0 \\ u_{\nu-1} = \frac{1}{\sigma_{\nu-1}} \text{ für } \vartheta_\nu = 1 \end{aligned}\right\}; \tag{32}$$

für $\vartheta_\nu = 1$ ist das erste Glied der Reihe (31) r_ν, und sie besteht aus so viel Gliedern, wie negative Teilzähler von $\varepsilon_\nu r_\nu$ an (inkl.) bis zum *nächsten* positiven (exkl.) aufeinander folgen; ich nehme an, dass diese Summe den Wert 1 nicht übersteigt; dann ist

$$u_\nu \geqq 1 \quad (\nu = 1, 2, 3, \ldots),$$

daher ist die Bedingung (20) erfüllt, falls $\vartheta_\nu = 0$ ist. Ist aber $\vartheta_\nu = 1$, so ist sogar die schärfere Ungleichung:

$$r_\nu \leqq \frac{1}{u_{\nu-1}} - \frac{\vartheta_{\nu+1}}{u_\nu} \quad \text{für} \quad \vartheta_\nu = 1 \tag{33}$$

auch erfüllt, denn für $\vartheta_{\nu+1} = 0$ ist dieselbe offenbar richtig und für $\vartheta_{\nu+1} = 1$ folgt aus (32) (da auch $\vartheta_\nu = 1$ ist):

$$\frac{1}{u_{\nu-1}} - \frac{1}{u_\nu} = \sigma_{\nu-1} - \sigma_\nu = r_\nu. \text{ Qu. e. d.}$$

Ist nun von einem gewissen ν an stets $\vartheta_\nu = 0$, so kann man den Zusatz 2 (S. 223) anwenden; ist aber für unendlich viele Werte von ν: $\vartheta_{\nu+1} = 1$, so genügt zur Konvergenz des Kettenbruches, dass mindestens eine der Reihen (α_3), (β_3) und (γ_3) divergiert.

Ich untersuche speziell den Fall, dass für eine positive Zahl $\delta\,(\delta < 1)$ und für eine positive ganze Zahl N die weiteren Bedingungen erfüllt sind:

$$\sigma_{\nu-1} \leqq \delta \quad \text{für} \quad \nu \geqq N \tag{34}$$

d. h., dass

$$\overline{\lim_{\nu=\infty}}\, \sigma_\nu < 1$$

ist und zeige, dass in diesem Falle die Reihe (β_3) sicher divergiert.

Sei nämlich $\vartheta_{\nu+1} = 1$; für $\vartheta_\nu = 1$ folgt nun aus (33):

$$u_{\nu-1}\, u_\nu\, r_\nu \leqq u_\nu - u_{\nu-1},$$

daher ist

$$u_\nu - u_{\nu-1}\, u_\nu\, r_\nu - 1 \geqq u_{\nu-1} - 1,$$

und mit Rücksicht auf (32) und (34) für $\nu \geqq N$:

$$u_\nu - u_{\nu-1}\, u_\nu\, r_\nu - 1 \geqq \frac{1}{\sigma_{\nu-1}} - 1 \geqq \frac{1}{\delta} - 1.$$

Ferner ist für $\vartheta_\nu = 0$ $(\nu \geqq N)$:

$$u_\nu - u_{\nu-1}\, u_\nu\, r_\nu\, \vartheta_\nu - 1 = u_\nu - 1 \geqq \frac{1}{\delta} - 1;$$

die Reihe (β_3) divergiert also.

Es gilt daher der

Satz 11. *Der Kettenbruch* $\left[\frac{\varepsilon_\nu r_\nu}{1}\right]_1^\infty$ $(r_\nu > 0)$ *konvergiert, wenn die Bedingungen erfüllt sind:*

$$\sum_0^\infty {}_k\, r_{\nu+k}\, \vartheta_\nu\, \vartheta_{\nu+1} \ldots \vartheta_{\nu+k} = \sigma_{\nu-1} \leqq 1 \quad (\nu = 2, 3, \ldots) \tag{35}$$

$$\overline{\lim_{\nu=\infty}}\, \sigma_\nu < 1. \tag{36}$$

Nur wenn von einem gewissen ν an alle ϑ_ν verschwinden, ist für seine Konvergenz ausserdem erforderlich, dass die Reihe

$$\sum_1^\infty{}_\nu \left(\frac{r_1 r_3 \ldots r_{2\nu-1}}{r_2 r_4 \ldots r_{2\nu}} + \frac{r_2 r_4 \ldots r_{2\nu}}{r_3 r_5 \ldots r_{2\nu+1}}\right) \textit{ divergiert.} \tag{24}$$

Auf den Zusammenhang dieses Satzes mit anderen Sätzen habe ich bereits in der Einleitung hingewiesen.

Offenbar ist die Bedingung (24) sicher erfüllt, wenn $\sum_1^\infty{}_\nu \sqrt{\frac{1}{r_\nu}}$ divergiert.

Die Bedingung (35) selbst ist für die Konvergenz des Kettenbruches nicht notwendig; vgl. hierzu etwa Satz 8.

Schlussbemerkung. Sind die Elemente des Kettenbruches reelle Funktionen von reellen Variabeln, so kann man analoge Sätze über *gleichmässige* Konvergenz aufstellen.