

EINE DARSTELLUNG VON J. HJELMSLEVS PROJEKTIVER INFINITESIMALGEOMETRIE

VON

FR. FABRICIUS-BJERRE

in Kopenhagen

Einleitung

Auf dem 9. skandinavischen Mathematikerkongress in Helsingfors im Jahre 1938 trug J. Hjelslev über eine Arbeit vor (s. Literaturverzeichnis [8]), in der er — im Hinblick auf weitere Anwendungen in der projektiven Infinitesimalgeometrie — geometrische Repräsentanten (abgeleitete Elemente) für infinitesimale Abstände und Winkel im projektiven Raum einführte. Es gelang ihm nicht, seine weitergehenden Untersuchungen auf diesem Gebiete vor seinem Tode im Jahre 1950 zu veröffentlichen. Unter seinen nachgelassenen Papieren fanden sich aber zwei Manuskripte mit demselben Titel, „Grundlagen der projektiven Infinitesimalgeometrie“, die beide für Kurven und geradlinige Flächen eine systematische, mit Hilfe der im Kongressvortrag eingeführten Begriffe aufgebaute Theorie enthalten. In der zuletzt ausgearbeiteten, sehr umfangreichen Abhandlung (ca. 250 handgeschriebene Seiten) setzte Hjelslev diese Theorie mit seinen allgemeinen Untersuchungen über Projektivgeometrie [10], seinen Arbeiten über reelle Kurven ([4] und [6]) sowie mit seinen spätesten Untersuchungen über schwache Figuren [12] und Kurven in Nullsystemen ([9] und [11]) in Verbindung. Leider lag keines der Manuskripte in einer solchen Form vor, dass eine Veröffentlichung unmittelbar möglich war.

Mit den nachgelassenen Papieren als Grundlage habe ich in der vorliegenden Arbeit versucht, den Hauptinhalt derjenigen Untersuchungen von Hjelslev über die projektive Infinitesimalgeometrie darzustellen, die direkt an die in dem Kongressvortrag eingeführten Begriffe anknüpfen. In dem ersten Abschnitt werden diese Begriffe dargestellt und im zweiten Abschnitt finden sich Anwendungen auf ebene Kurven, Raumkurven, geradlinige und allgemeine Flächen.

Die von Hjelmslev eingeführte geometrische Darstellung erweist sich als am besten geeignet für Untersuchungen der Krümmungsverhältnisse — also der abgeleiteten Elemente zweiter Ordnung — von Kurven und Flächen, während sie weniger übersichtlich wird, wenn es sich um Ableitungen höherer Ordnung handelt. Die vorliegende Arbeit hat darum nur geringe Beziehungen zu der gewöhnlichen projektiven Differentialgeometrie, wo die projektiv invarianten Begriffe überwiegend von Differentialquotienten höherer Ordnung abhängen.

1. ABSCHNITT

Abgeleitete Elemente

§ 1. Projektive Konvergenz

1.1. Im folgenden beschäftigen wir uns mit Punkten, Kurven und Flächen des reellen projektiven Raumes, speziell der projektiven Ebene. Im Raum kann man in gewöhnlicher Weise homogene Koordinaten $\mathfrak{x} = (x_0, x_1, x_2, x_3)$ einführen, wobei die Koordinaten reelle Zahlen sind. Zeichnet man eine feste Ebene als „unendlich ferne Ebene“ (Referenzebene) aus, so kann man in bezug auf diese affine Koordinaten einführen, und wählt man in dieser Ebene ein elliptisches Polarsystem, so erhält man eine euklidische Metrik im Raum. Im allgemeinen werden wir jedoch projektive und nur bei speziellen Aufgaben affine oder euklidische Koordinaten verwenden.

1.2. Wir sagen, dass ein variabler Punkt P' mit dem Koordinatenvektor $\mathfrak{x}' = (x'_0, x'_1, x'_2, x'_3)$, wobei $x_0'^2 + x_1'^2 + x_2'^2 + x_3'^2 = 1$ ist, gegen den Punkt mit dem Koordinatenvektor $\mathfrak{x} = (x_0, x_1, x_2, x_3)$ konvergiert, wenn sämtliche Unterdeterminanten 2. Ordnung der Matrix

$$\begin{vmatrix} x'_0 & x'_1 & x'_2 & x'_3 \\ x_0 & x_1 & x_2 & x_3 \end{vmatrix}$$

gegen 0 konvergieren. Wir sagen dann auch, dass \mathfrak{x}' gegen \mathfrak{x} konvergiert. Ferner wird von einer variablen Geraden p' gesagt, dass sie gegen die Gerade p konvergiert, wenn der zu p' gehörende 6-Vektor, der aus den Plückerkoordinaten der Geraden besteht, im analogen Sinn gegen den entsprechenden 6-Vektor von p konvergiert. Für algebraische Kurven und Flächen kann man entsprechend Konvergenz definieren, indem man die Vektoren betrachtet, die aus den Koeffizienten der zugehörigen Gleichungen gebildet sind.

Mit Hilfe der gewöhnlichen Konvergenzsätze kann man dann eine Reihe von Sätzen über Konvergenz von Punkten, Geraden und Ebenen usw. beweisen. Als Beispiele führen wir die folgenden beiden Sätze an: Wenn zwei Punkte P' und Q' gegen verschiedene Grenzpunkte P und Q konvergieren, so konvergiert die Gerade $P'Q'$ gegen die Gerade PQ . Wenn

ein eigentlicher Kegelschnitt c' gegen den eigentlichen Kegelschnitt c und eine Gerade p' gegen die Gerade p konvergiert, so konvergieren die Schnittpunkte von c' und p' gegen die Schnittpunkte von c und p . (Vgl. [1], p. 43.) Wir wollen uns im folgenden nicht bei Beweisen dieser Sätze aufhalten, da es in jedem einzelnen Fall immer leicht entscheidbar ist, ob der vorliegende Grenzübergang zulässig ist oder nicht.

1.3. Auf die projektivgeometrischen Definitionen und Sätze, die wir im folgenden aufstellen, kann man natürlich das *Dualitätsprinzip* anwenden. Wir werden die dadurch entstehenden neuen Definitionen und Sätze nur dann nennen, wenn sie für die betreffende Frage oder für die allgemeine Darstellung von besonderem Interesse sind.

§ 2. Elemente erster Ordnung

2.1. In der Ebene oder im Raum sei eine Kurve k_0 , d.h. ein eindeutiges und stetiges Bild einer Strecke, gegeben. Konvergiert ein variabler Punkt T' auf der Kurve gegen den festen Punkt T , so habe die Gerade TT' eine bestimmte Grenzlage, die Kurventangente t im Punkte T . Die Kurve k_0 , die speziell eine Gerade sein kann, wird im folgenden die *Parameterkurve* genannt, und ihre Punkte heißen Parameterpunkte.

Wir denken uns die Kurve k_0 durch eine stetige Abbildung (Funktion) $P' = \varphi(T')$ in der Umgebung des Punktes T auf eine andere Kurve k , die dieselben Voraussetzungen wie k_0 erfüllt, abgebildet. Die Tangente an die Kurve k im Punkte P heisse p .

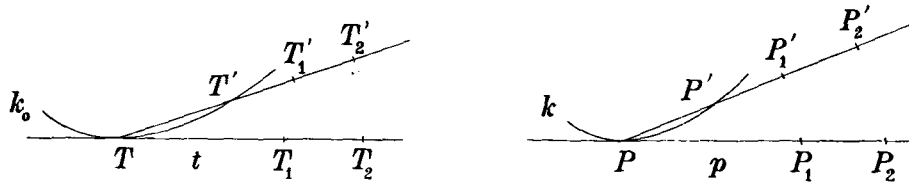


Fig. 1.

Auf der Tangente t wählen wir zwei von einander und von T verschiedene feste Punkte T_1 und T_2 , und auf der Geraden $t' = TT'$ wählen wir zwei variable Punkte T'_1 und T'_2 , die für $T' \rightarrow T$ gegen T_1 bzw. T_2 konvergieren. Auf der Tangente p wählen wir einen von P verschiedenen festen Punkt P_2 und auf der Geraden $p' = PP'$ einen Punkt P'_2 , der für $T' \rightarrow T$ gegen P_2 konvergiert. Endlich *bestimmen* wir auf p' den Punkt P'_1 derart, dass

$$PP'P'_1P'_2 \bar{\wedge} TT'T'_1T'_2 \tag{2.1}$$

gilt.

Konvergiert nun P'_1 beim Grenzübergang $T' \rightarrow T$ gegen einen Punkt P_1 auf p , so nennen wir die Abbildung oder Funktion φ *infinitesimal projektiv* im Punkte T (Fig. 1).

Die Punkttripel TT_1T_2 und PP_1P_2 heißen zu den variablen Punkten T' und P' gehörige *abgeleitete* Elemente (erster Ordnung); T_1 und P_1 werden die *abgeleiteten Punkte*

genannt, T_2 und P_2 die *Referenzpunkte*. Ein Element heisst *ordinär*, wenn es aus drei verschiedenen Punkten besteht, sonst *singulär*. Das Element $T T_1 T_2$ ist nach Definition ordinär, während das Element $P P_1 P_2$ ordinär oder singulär sein kann. Ist das Element $P P_1 P_2$ singulär, so heisst es *Null-* oder *Unendlichkeitselement*, je nachdem P_1 in P oder in P_2 liegt. Die Abbildung selbst heisst *ordinär* oder *singulär*, je nachdem das zu P' gehörige Element ordinär oder singulär ist.

2.2. In der obigen Definition sind die Hilfspunkte T_1 , T_2 und P_2 und die gegen diese konvergierenden Punkte T'_1 , T'_2 und P'_2 frei wählbar, während P'_1 (und eventuell P_1) aus den vorliegenden Punkten bestimmt wird. Wir wollen nun zeigen, dass die Wahl der Hilfspunkte keinen Einfluss darauf hat, ob φ infinitesimal projektiv (im folgenden oft abgekürzt i. p.) ist oder nicht, und gleichzeitig wollen wir den Zusammenhang zwischen verschiedenen Gruppen von Hilfspunkten finden.

Halten wir die Parameterpunkte fest, erstatten aber P'_2 durch einen Punkt Q'_2 , der gegen einen Punkt Q_2 auf p konvergiert, so tritt an Stelle von P'_1 ein Punkt Q'_1 , für welchen

$$P P' Q'_1 Q'_2 \bar{\wedge} T T' T'_1 T'_2. \quad (2.2)$$

Aus (2.1) und (2.2) folgt

$$P P' Q'_1 Q'_2 \bar{\wedge} P P' P'_1 P'_2. \quad (2.3)$$

Aus dieser Relation ergibt sich nun: Wenn zu P' ein ordinäres Element $P P_1 P_2$ gehört, wenn also P'_1 gegen einen von P und P_2 verschiedenen Punkt P_1 konvergiert, so konvergiert auch Q'_1 gegen einen Punkt Q_1 auf p , und Q_1 und Q_2 entsprechen einander in einer parabolischen Projektivität auf p , deren Doppelpunkt P ist, und bei der P_1 dem Punkte P_2 entspricht.

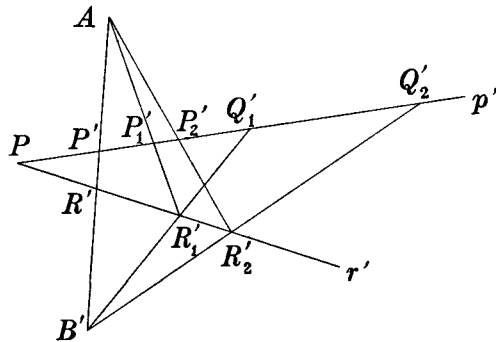


Fig. 2 a.

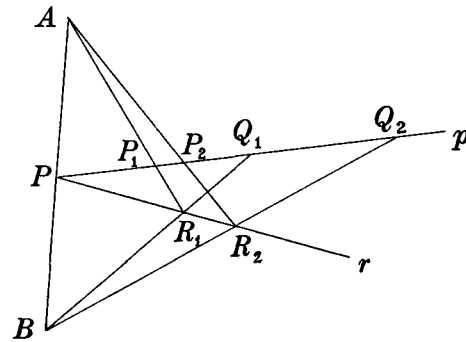


Fig. 2 b.

Es sei A ein fester, nicht auf p (oder p') gelegener Punkt; die Ebene durch A und p' schneide eine feste Ebene α durch P , die p (oder p') nicht enthält, in einer Geraden r' . Von A aus werden die Punkte P' , P'_1 und P'_2 in die Punkte R' , R'_1 und R'_2 auf r' projiziert (Fig. 2 a). Da nun

$$PP'Q_1'Q_2' \bar{\wedge} PP'P_1'P_2' \bar{\wedge} PR'R_1'R_2',$$

gehen die Geraden $P'R'$, $Q_1'R_1'$ und $Q_2'R_2'$ durch denselben Punkt B' .

Bei dem Grenzübergang geht p' in p über, und die Gerade r' konvergiert daher gegen die Schnittgerade von α mit der Ebene durch A und p . Die Punkte R_1' und R_2' konvergieren gegen die Projektionen R_1 und R_2 der Punkte P_1 und P_2 von A aus, und die Gerade $Q_2'R_2'$ schneidet die Gerade AP im Grenzpunkt B des Punktes B' . Der Punkt Q_1' muss dann gegen den Schnittpunkt Q_1 von p mit der Geraden BR_1 konvergieren, und aus Fig. 2 b ersieht man, dass P_1 , P_2 und Q_1 , Q_2 Paare einer parabolischen Projektivität mit dem Doppelpunkt P sind. Hiermit ist die Behauptung bewiesen.

Aus dem obigen folgt speziell, dass Q_1 in P_1 fällt, wenn Q_2 in P_2 fällt, d. h. es spielt keine Rolle, auf welche Weise P_2' gegen P_2 konvergiert. Beispielsweise kann P_2' sich auf einer Geraden oder einer Ebene durch P_2 bewegen.

Ist das zu P' gehörige Element singularär und fällt P_1 in P bzw. in P_2 , so entnimmt man aus der Figur, dass entsprechend Q_1 in Q bzw. in Q_2 fällt.

Im ordinären Fall hat P' also unendlich viele abgeleitete Elemente PP_1P_2 , PQ_1Q_2 , ..., die einander in den genannten Projektivitäten entsprechen. Eine solche parabolische Projektivität nennt man eine *Elation* mit dem Zentrum P .

In ähnlicher Weise kann man das ordinäre Element TT_1T_2 abändern. Sind S_1 und S_2 entsprechende Punkte der Elation mit dem Zentrum T und den einander entsprechenden Punkten T_1 und T_2 , so entsprechen dem zu T' gehörigen Element TS_1S_2 dieselben zu P' gehörigen Elemente wie dem Element TT_1T_2 .

Endlich könnte man P_2' und T_2' und damit die Referenzpunkte P_2 und T_2 festhalten, aber T_1' durch einen Punkt U_1' , der gegen den Punkt U_1 auf t konvergiert, ersetzen. Der Punkt P_1' muss dann durch einen Punkt Q_1' ersetzt werden, für den

$$PP'Q_1'P_2' \bar{\wedge} TT'U_1'T_2'.$$

Da T' gegen T konvergiert, erhält man aus (2.1) die Relation

$$PP_1Q_1P_2 \bar{\wedge} TT_1U_1T_2, \quad (2.4)$$

d. h. U_1 und Q_1 sind entsprechende Punkte in der durch TT_1T_2 und PP_1P_2 bestimmten Projektivität zwischen den Geraden t und p .

Aus den obigen Betrachtungen geht hervor, dass die Wahl der Hilfspunkte keine Rolle spielt, und wir haben eine Beziehung zwischen den abgeleiteten Elementen von T' und P' gefunden. Wir bemerken ferner, dass man in der oben genannten Projektivität zwischen t und p die Punkte T_2 und P_2 durch ein anderes Paar zusammengehöriger Punkte ersetzen kann, ohne T_1 und P_1 zu ändern.

2.3. Ist der vorliegende Raum *affin*, und sind T und P eigentliche Punkte, so kann man die Hilfspunkte T'_2 und P'_2 (und damit T_2 und P_2) als unendlich ferne Punkte wählen, und die Bedingungsgleichung (2.1) kann dann durch

$$\frac{PP'}{PP'_1} = \frac{TT'}{TT'_1} \quad (2.5)$$

ersetzt werden. Hieraus ersieht man, dass TT_1 und PP_1 als „Repräsentanten“ der infinitesimalen Verschiebungen TT' und PP' bezeichnet werden können, und im projektiven Fall können wir daher TT_1T_2 und PP_1P_2 als *projektive Repräsentanten* der genannten Verschiebungen auffassen.

Führen wir eine *euklidische Metrik* im Raum ein, so kann (2.5) durch

$$\frac{PP'}{TT'} = \frac{PP'_1}{TT'_1} \quad (2.6)$$

ersetzt werden. Aus dieser Gleichung geht hervor, dass *die Abbildung dann und nur dann i. p. ist, wenn das Verhältnis PP'/TT' einen bestimmten Grenzwert PP_1/TT_1 hat. Der Grenzwert kann speziell 0 oder ∞ sein.*

2.4. Anstatt die Kurve k_0 auf eine Kurve k abzubilden, kann man unter Anwendung des Dualitätsprinzips k_0 auf eine einparametrische stetige Schar von Geraden (durch einen Punkt oder in einer Ebene) oder von Ebenen abbilden. Auch k_0 kann natürlich durch eine solche Schar ersetzt werden. Wir betrachten im folgenden ein einfaches Beispiel.

Die in einer festen Ebene α gelegene variable Gerade m' konvergiere so gegen die Gerade m , dass der Schnittpunkt $M' = mm'$ eine bestimmte Grenzlage M hat. Dieser Grenzschnittpunkt wird der *Charakteristikkpunkt* der Geraden genannt. Wir betrachten nun eine stetige Abbildung $m' = \varphi(T')$. Wir legen durch M eine von m verschiedene Hilfsgerade m_2 und durch M' eine Gerade m'_2 , die für $T' \rightarrow T$ gegen m_2 konvergiert. Mit Hilfe der (2.1) entsprechenden Relation

$$mm'm'_1m'_2 \bar{\wedge} TT'T'_1T'_2 \quad (2.7)$$

bestimmen wir eine Gerade m'_1 durch M' . Hat die so bestimmte Gerade für $T' \rightarrow T$ eine Grenzlage m_1 , so heisst φ *infinitesimal projektiv*, und wir sagen, dass die Gerade m' das *abgeleitete Element mm_1m_2* (erster Ordnung) hat. Die oben angeführten Bezeichnungen und Sätze können nun leicht übertragen werden. Speziell sei hervorgehoben, dass für ordinäres φ , wenn also m , m_1 und m_2 drei verschiedene Geraden sind, m_1 und m_2 durch andere zusammengehörige Geraden derjenigen Elation im Büschel mit dem Scheitel M ersetzt werden können, die m als Achse (Doppelgerade) hat und in der m_1 und m_2 einander zugeordnet sind.

Führt man in α eine *euklidische Metrik* ein, und wählt man m'_2 und damit m_2 senkrecht auf m , so erhält man aus (2.7) die (2.6) entsprechende Gleichung

$$\frac{\text{tg}(mm')}{TT'} = \frac{\text{tg}(mm'_1)}{TT'_1}. \quad (2.8)$$

Diese Gleichung zeigt, dass φ dann und nur dann i. p. ist, wenn das Verhältnis des infinitesimalen Winkels (mm') zum infinitesimalen Abstand TT' einen bestimmten Grenzwert $\text{tg}(mm_1)/TT_1$ hat. Das Element mm_1m_2 wird als ein *projektiver Repräsentant* des infinitesimalen Winkels (mm') aufgefasst.

Für eine *variable Ebene* μ' mit der Grenzebene μ und der Grenzschnittgeraden (Charakteristikgeraden) m findet man entsprechend, dass μ' durch ein aus drei Ebenen bestehendes Element $\mu\mu_1\mu_2$ „dargestellt“ wird, wenn $\mu' = \varphi(T')$ infinitesimal projektiv ist.

§ 3. Elemente zweiter Ordnung

3.1. Es sei k eine Kurve, die im Punkte P die Tangente p und die Schmiegebene π hat. Konvergiert P' auf k gegen P , so konvergiere die Gerade $p' = PP'$ gegen die Tangente p und die Ebene $\pi' = pp'$ gegen die Schmiegebene π . Die Kurve kann speziell eine ebene Kurve sein.

Wir wollen nun einige Begriffe einführen, die sich nur auf die gegebene Kurve, die dann als „Parameterkurve“ betrachtet werden kann, beziehen. Als Element erster Ordnung von P' soll dann immer ein ordinäres Element PP_1P_2 gewählt werden. Wie oben bezeichnen wir die gegen P_1 und P_2 konvergierenden Punkte mit P'_1 und P'_2 . Wir nehmen an, dass der Punkt P'_1 eine Kurve mit der Tangente r_1 in P_1 , die dann Grenzlage der Geraden $r'_1 = P_1P'_1$ ist, durchläuft.

Da $P'_1 \rightarrow P_1$ für $P' \rightarrow P$, ist es sinnvoll, die Abbildung $P'_1 = \varphi(P')$ zu betrachten. Falls sie im Punkte P infinitesimal projektiv ist, gehört zu P'_1 ein Element, das durch $P_1P_{11}P_{12}$ bezeichnet und *Element zweiter Ordnung* der Kurve k (oder von P') im Punkte P genannt werden soll. Wir führen einen Hilfspunkt P'_{12} auf r'_1 ein, der gegen einen Punkt P_{12} auf r_1 konvergiert. Bestimmen wir dann den Punkt P'_{11} auf r'_1 so, dass

$$P_1P'_1P'_{11}P'_{12} \bar{\wedge} PP'P'_1P'_2, \quad (3.1)$$

so soll dieser Punkt P'_{11} für $P' \rightarrow P$ gegen P_{11} auf r_1 konvergieren. (Fig. 3 a und b.) Die Gerade r_1 kann von p verschieden sein oder mit p zusammenfallen, und das Element $P_1P_{11}P_{12}$ kann ordinär oder singulär sein. Wir werden unten die Beziehungen zwischen den verschiedenen Elementen zweiter Ordnung von k im Punkte P untersuchen.

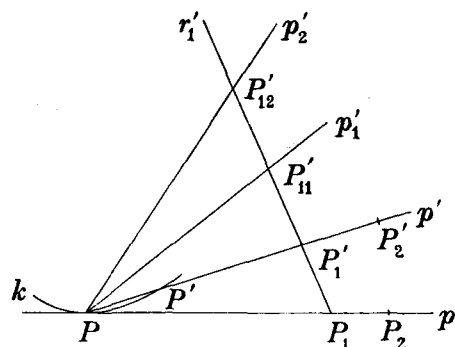


Fig. 3 a.

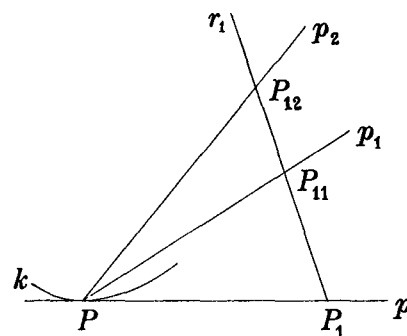


Fig. 3 b.

3.2. Wir führen zunächst den Begriff des *Krümmungselements* der Kurve k im Punkte P ein. Dazu betrachten wir die Abbildung $p' = \psi(P')$, die dem variablen Punkte P' die durch ihn gehende *Sekante* $p' = PP'$ der Kurve zuordnet. Ist diese Abbildung i. p. im Punkte P , so entspricht dem Element PP_1P_2 von P' ein in der Schmiegebene π liegendes Element pp_1p_2 von p' . Das System der drei Punkte und drei Geraden PP_1P_2 , pp_1p_2 heisst ein *Krümmungselement* der Kurve im Punkte P . Wir sagen, dass die Kurve ordinäre Krümmung in P hat, wenn ψ ordinär ist, d. h. wenn p , p_1 und p_2 verschiedene Geraden sind; anderenfalls wird der Kurve in P die Krümmung 0 oder ∞ zugeschrieben, je nachdem das zu p' gehörige Element ein Null- oder Unendlichkeitselement ist. Haben zwei Kurven in einem Punkt ein gemeinsames Krümmungselement, so sagen wir, dass sie *dieselbe Krümmung* in diesem Punkte haben.

Das Krümmungselement kann nach den in § 2 genannten Regeln abgeändert werden. Die Punkte P_1 und P_2 sowie die Gerade p_2 können beliebig gewählt werden, wonach p_1 festgelegt ist.

3.3. Bezüglich der Beziehung zwischen Krümmungselementen und Elementen zweiter Ordnung bemerken wir zunächst: Gibt es ein Element zweiter Ordnung $P_1P_{11}P_{12}$, das auf einer von p verschiedenen Geraden r_1 in der Schmiegebene gelegen ist, so existiert auch ein Krümmungselement, nämlich das Element PP_1P_2 , pp_1p_2 , wo p_1 und p_2 den Punkt P mit P_{11} bzw. P_{12} verbinden. Dies folgt daraus, dass man als die gegen p_1 und p_2 konvergierenden Geraden PP'_{11} und PP'_{12} wählen kann (Fig. 3 a und b).

Liegt umgekehrt ein Krümmungselement PP_1P_2 , pp_1p_2 vor, so kann man eine beliebige von p verschiedene Gerade r_1 durch P_1 (in der Schmiegebene π) wählen und auf der Kegelfläche mit dem Scheitel P und der Leitkurve k (die von p' durchlaufen wird) eine Kurve mit der Tangente r_1 in P_1 legen. Wählt man nun als Punkt P'_1 den Schnittpunkt dieser Kurve mit p' , so findet man analog zu den obigen Betrachtungen, dass die Existenz des

Krümmungselementes die Existenz eines Elementes zweiter Ordnung $P_1P_{11}P_{12}$ auf der Geraden r_1 mit sich führt, wo die Punkte P_{11} und P_{12} die Schnittpunkte von r_1 mit p_1 und p_2 sind. — Da P_1 auch als ein beliebiger Punkt auf p angesehen werden kann, kann man also in dieser Weise auf jeder nicht durch P gehenden Geraden in π Elemente zweiter Ordnung konstruieren.

3.4. Liegt k in einem affinen Raum, und ist P ein eigentlicher Punkt, so kann man die Hilfspunkte P'_2 und P'_{12} (und damit die Referenzpunkte P_2 und P_{12}) als unendlich ferne Punkte wählen, und man findet dann, der Gleichung (2.5) entsprechend,

$$\frac{P_1P'_1}{P_1P'_{11}} = \frac{PP'}{PP'_1}. \quad (3.2)$$

Bezeichnet man das infinitesimale Verhältnis mit t , so erhält man

$$\overline{PP'} = t \cdot \overline{PP'_1} = t(\overline{PP_1} + \overline{P_1P'_1})$$

und weiter

$$\overline{PP'} = t \cdot \overline{PP_1} + t^2 \cdot \overline{P_1P'_{11}} + \delta(t^2) \quad (3.3)$$

wo $\delta(t^2)$ einen Vektor bezeichnet, der nach Division mit t^2 gleichzeitig mit t gegen null konvergiert.

Aus (3.3) ersehen wir, dass man nach Einführung eines festen Parallelkoordinatensystems xyz die Kurve k in der Umgebung von P durch

$$(x, y, z) = (f(t) + o(t^2), g(t) + o(t^2), h(t) + o(t^2)) \quad (3.4)$$

darstellen kann, wo $f(t)$, $g(t)$ und $h(t)$ Polynome zweiten Grades in t sind. Die Existenz von Krümmungselementen oder von Elementen zweiter Ordnung ist dann gleichbedeutend damit, dass k im Punkte P eine Schmiegeparabel hat. Wir werden solche Kegelschnitte in § 5 genauer betrachten.

§ 4. Elemente höherer Ordnung

4.1. Ebenso wie wir im vorigen Paragraphen Elemente zweiter Ordnung eingeführt haben, können wir Elemente dritter und höherer Ordnung einführen. Wir gehen von dem in 3.1 definierten Element zweiter Ordnung $P_1P_{11}P_{12}$ aus und betrachten z. B. einen gegen P_{11} konvergierenden Punkt P'_{11} . Wir nehmen an, dass dieser Punkt eine Kurve mit der Tangente r_{11} im Punkte P_{11} , die also Grenzlage der Geraden $r'_{11} = P_{11}P'_{11}$ ist, durchläuft. Wir setzen nun voraus, dass die Abbildung $P'_{11} = \varphi(P')$ im Punkte P infinitesimal projektiv ist. Dadurch erhält man ein an den Punkt P_{11} geknüpft Element $P_{11}P_{111}P_{112}$, das als Element

dritter Ordnung der Kurve k im Punkte P bezeichnet wird. Führt man auf r'_{11} einen Hilfspunkt P'_{112} ein, der gegen einen Punkt P_{112} von r_{11} konvergiert, und bestimmt man auf r'_{11} einen Punkt P'_{111} durch die (3.1) entsprechende Relation

$$P_{11}P'_{11}P'_{111}P'_{112} \bar{\wedge} PP'P'_1P'_2, \quad (4.1)$$

so soll der Punkt P'_{111} gegen P_{111} auf r_{11} konvergieren.

In dieser Weise kann man offenbar fortfahren und somit Elemente beliebig hoher Ordnung einführen.

Ist k eine Raumkurve, so kann man im Zusammenhang mit den Elementen dritter Ordnung *Torsionselemente* von k im Punkte P einführen. Zu diesem Zwecke betrachten wir die Abbildung, die dem Punkt P' die Ebene $\pi' = pp'$ zuordnet. Setzen wir die Abbildung als i. p. voraus, so entspricht dem Element PP_1P_2 von P' ein Element $\pi\pi_1\pi_2$ von π' . Das System der drei Punkte und der drei Ebenen PP_1P_2 , $\pi\pi_1\pi_2$ heisst ein *Torsionselement* von k in P ; wir sagen, dass die Kurve *ordinäre Torsion* hat, falls die Abbildung ordinär ist.

4.3. In Analogie zum obigen kann man nun die Beziehung zwischen Elementen dritter Ordnung und Torsionselementen herleiten. Unmittelbar ergibt sich: Hat k in P *ordinäre Krümmung*, und existiert ausserdem ein Element dritter Ordnung $P_{11}P_{111}P_{112}$, das auf einer nicht in der Schmiegebene π gelegenen Geraden r_{11} liegt, so gibt es Torsionselemente in P , und die Kurve hat *ordinäre Torsion*, falls das genannte Element dritter Ordnung ordinär ist.

Umgekehrt gibt es für Kurven mit ordinärer Krümmung zu gegebenen Torsionselementen Elemente dritter Ordnung, die zu dem Ebenenelement $\pi\pi_1\pi_2$ perspektiv gelegen sind.

Hat k nicht ordinäre Krümmung in P , so können andere Verhältnisse eintreffen. Die Kurve kann z. B. Torsionselemente in P haben, ohne Krümmungselemente zu besitzen. Dagegen kann die Kurve natürlich keine Elemente dritter Ordnung haben, ohne Elemente zweiter Ordnung zu besitzen.

4.4. Liegt k in einem *affinen* Raum, so können wir (in Fortsetzung von 3.4) auch den Punkt P'_{112} (und damit P_{112}) unendlich fern wählen. Die Gleichung (4.1) ergibt dann eine (3.2) entsprechende Relation, aus der unmittelbar die (3.3) entsprechende Gleichung

$$\overline{PP'} = t \cdot \overline{PP_1} + t^2 \cdot \overline{P_1P_{11}} + t^3 \cdot \overline{P_{11}P_{111}} + \bar{o}(t^3) \quad (4.2)$$

folgt.

Allgemeiner finden wir für eine Kurve k , die im Punkte P Elemente n -ter Ordnung besitzt, in der Umgebung von P eine Entwicklung der Form

$$\overline{PP'} = t\bar{p}_1 + t^2\bar{p}_2 + \cdots + t^n\bar{p}_n + \bar{o}(t^n), \quad (4.3)$$

wo $\bar{p} = \overline{PP_1}$, $\bar{p}_1 = \overline{P_1P_{11}}$, usw. gesetzt ist. In einem Koordinatensystem xyz im Raum finden wir dann, dass sich die Koordinaten (x, y, z) von P' durch Gleichungen der Form (3.4) ausdrücken lassen, wo $f(t)$, $g(t)$ und $h(t)$ Polynome n -ten Grades in t sind, und wo $o(t^2)$ durch $o(t^n)$ zu ersetzen ist.

Die Existenz von Elementen n -ter Ordnung ist dann für eine ebene Kurve mit der Existenz einer „Schmiegeparabel“ n -ter Ordnung, für eine Raumkurve mit der Existenz einer „Schmiegraumparabel“ n -ter Ordnung gleichbedeutend.

4.5. Über Eigenschaften der Kurve in von P verschiedenen Punkten gibt (4.3) keinen Aufschluss. Die Kurve braucht also in von P verschiedenen Punkten nicht einmal Tangenten zu haben, selbst wenn (4.3) gilt. Gelten indessen auch für die übrigen Punkte der Kurve Entwicklungen der Form (4.3), so sind die Koeffizienten der zugehörigen Polynome n -ten Grades $f(t)$, $g(t)$ und $h(t)$ Funktionen der Koordinaten des variablen Kurvenpunktes; man kann zeigen, dass die Kurve n mal stetig differenzierbar ist, falls die Funktionen $f(t)$, $g(t)$ und $h(t)$ stetig sind. (Siehe Problem 4, *Mathematica Scandinavica* 1 (1953), S. 310, 2 (1954), S. 159.

2. ABSCHNITT

Kurven und Flächen

§ 5. Krümmung und Torsion

5.1. Es sei eine ebene Kurve k und auf dieser ein Punkt P mit der Tangente p gegeben. Es sei ferner ein Element (S, s) gegeben, das aus einem nicht auf p gelegenen Punkt S und einer durch S , aber nicht durch P gehenden Geraden s besteht. Auf der Kurve betrachten wir einen Punkt P' , der gegen P konvergiert, und in der Ebene denken wir uns ein Element (S', s') , das gleichzeitig gegen (S, s) konvergiert, gegeben.

Durch die Elemente (P, p) , (S', s') und durch den Punkt P' können wir einen Kegelschnitt c' legen. Für diesen Kegelschnitt wollen wir den folgenden Satz beweisen:

SATZ 5.1. *Konvergiert P' auf der Kurve k gegen P , so konvergiert der Kegelschnitt c' dann und nur dann gegen einen eigentlichen Kegelschnitt c , wenn k ordinäre Krümmung im Punkte P hat.*

Auf der Geraden $p' = PP'$ wählen wir den Punkt P'_2 als ihren Schnittpunkt mit s' und den Punkt P'_1 beliebig. Ferner wählen wir PS' als die Gerade p'_2 (Fig. 4a). Den von S' verschiedenen Schnittpunkt von c' mit der Geraden $S'P'_1$ bezeichnen wir mit S'_1 . Wenn nun

$$pp'p'_1p'_2 \bar{\wedge} PP'P'_1P'_2, \tag{5.1}$$

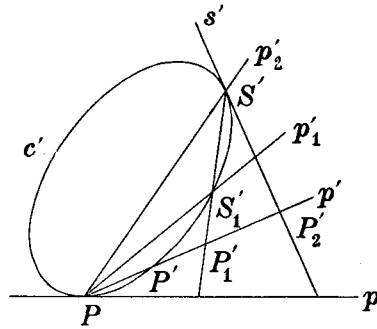


Fig. 4 a.

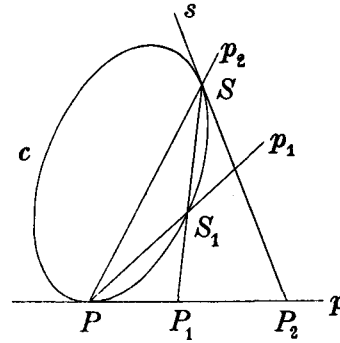


Fig. 4 b.

ist die Gerade PS'_1 mit p'_1 identisch. Beim Grenzübergang $P' \rightarrow P$ konvergiert nun (S', s') gegen (S, s) , infolgedessen P'_2 gegen $P_2 = ps$ und p'_2 gegen $p_2 = PS$ (Fig. 4 b). Konvergiert nun P'_1 gegen einen Punkt P_1 auf p , so konvergiert c' dann und nur dann gegen einen eigentlichen Kegelschnitt c , wenn S'_1 auf der Geraden SP_1 eine bestimmte von P_1 und S verschiedene Grenzlage hat. Das ist aber gleichbedeutend damit, dass die Gerade $PS'_1 = p'_1$ eine von p und p_2 verschiedene Grenzlage $p_1 = PS_1$ hat. Hiermit ist der Satz bewiesen.

Die Beziehung zwischen dem Krümmungselement PP_1P_2 , pp_1p_2 , dem Element (S, s) und dem Kegelschnitt c ist in Fig. 4 b dargestellt. Man bemerkt, dass P_1S_1S ein Element zweiter Ordnung von k in P ist. Ferner ist klar, dass der Kegelschnitt c dasselbe Krümmungselement in P hat wie die Kurve k . Da k und c somit dieselbe Krümmung im Punkte P haben, heisst c ein *Krümmungkegelschnitt* von k im Punkte P .

Wir bemerken, dass c' gegen einen, aus den Geraden p und s bestehenden, ausgearteten Kegelschnitt konvergiert, wenn k in P die Krümmung 0 hat, wenn also p_1 in p fällt.

5.2. Eine Kurve k mit ordinärer Krümmung im Punkte P hat offenbar ∞^2 Krümmungkegelschnitte. Liegt ein Krümmungselement PP_1P_2 , pp_1p_2 sowie das Element (S, s) vor, so ändert man die Punkte P_1, P_2 und die Geraden p_1, p_2 (in den zugehörigen Relationen) so ab, dass P_2 mit dem Punkte (s, p) und p_2 mit der Geraden SP zusammenfällt. Bewegt sich P_1 auf der Geraden p und dreht sich p_1 projektiv dazu um den Punkt P , so durchläuft der Schnittpunkt S_1 der projektiven Geradenbüschel (p_1) und $S(P_1)$ den Kegelschnitt c .

Wählt man auf c einen von S_1 verschiedenen Punkt S_2 , so kann man im Krümmungselement von P als Punkt P_2 den Schnittpunkt von p und SS_2 , als Gerade p_2 die Gerade PS_2 benutzen (siehe 2.2). Hieraus ergibt sich weiter, wie man einen Krümmungkegelschnitt durch zwei gegebene Punkte S_1 und S_2 konstruieren kann. Das gegebene Krümmungselement wird so abgeändert, dass p_1 und p_2 durch S_1 bzw. S_2 gehen. Die Geraden P_1S_1 und P_2S_2

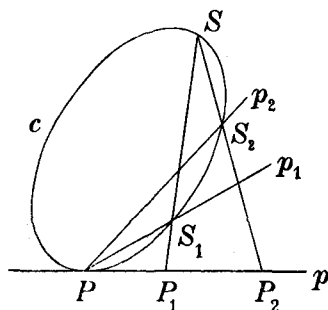


Fig. 5.

schnneiden sich im Punkte S , und der Krümmungskegelschnitt ist dann durch das Element (P, p) und die Punkte S, S_1 und S_2 bestimmt. (Fig. 5.)

Die ∞^2 Krümmungskegelschnitte bilden ein spezielles *Netz*, das *Krümmungsnetz* genannt werde. Es hat drei zusammenfallende Grundpunkte in P . Zwei verschiedene Kegelschnitte des Netzes haben ausser P höchstens noch einen Punkt gemeinsam. Sämtliche Krümmungskegelschnitte haben in P dieselbe Krümmung.

5.3. Ist die Ebene *affin*, so kann man in P eine *Krümmungsparabel mit gegebener Achsenrichtung* bestimmen. In Fig. 4 b ist dann s die unendlich ferne Gerade und S der unendlich ferne Punkt der Parabel. Man muss nur das gegebene Krümmungselement so abändern, dass P_2 ein unendlich ferner Punkt und p_2 die gegebene Achsenrichtung wird. Legen wir dann durch P_1 eine zur Achse parallele Gerade, so schneidet diese die Gerade p_1 in einem Parabelpunkt S_1 .

Ist die Ebene *euklidisch*, so kann man den im Krümmungsnetz enthaltenen *Krümmungskreis* finden. Man ändert zu diesem Zweck das Krümmungselement so ab, dass P_2 ein unendlich ferner Punkt wird und p_2 auf p senkrecht steht. Legt man dann durch P_1 eine auf p_1 senkrechte Gerade, so schneidet diese die Gerade p_2 im Punkte S , und der Kreis mit dem Durchmesser PS ist der gesuchte Krümmungskreis. (Fig. 6.)

Der in 2.4 genannte Grenzwert $\text{tg}(pp_1)/PP_1$ des Verhältnisses des infinitesimalen Winkels (pp') zum infinitesimalen Abstand PP' wird hier $1/PS$, also die *Hälfte* der gewöhnlichen Krümmung.

Falls die Kurve k selbst ein Kegelschnitt ist, gibt die letztere Konstruktion eine allgemeine Bestimmung des Krümmungskreises in einem beliebigen Punkt eines Kegelschnittes. Ist der Kegelschnitt durch fünf Punkte P, Q, S, S_1 und S_2 gegeben, so kann man mit Hilfe des Pascalschen Satzes die Tangente p in P bestimmen. Danach findet man gemäss Fig. 5 das Krümmungselement und kann dann die obige Konstruktion anwenden.

5.4. Die obigen Betrachtungen können dual auf stetige Geradenscharen in der Ebene übertragen werden. Es liege also eine variable Gerade m' vor, die gegen eine feste Gerade

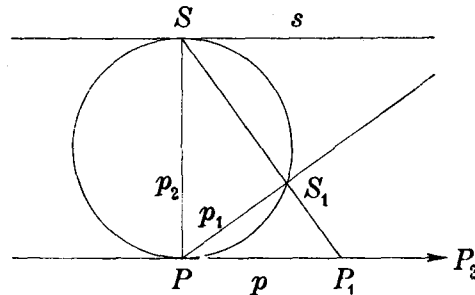


Fig. 6.

m so konvergiert, dass der Schnittpunkt $M' = mm'$ auf m eine Grenzlage hat. Wir nehmen (analog zu 3.2) an, dass die Abbildung $M' = \varphi(m')$ infinitesimal projektiv ist; es ergibt sich dann ein *Krümmungselement* mm_1m_2 , MM_1M_2 , das aus drei Geraden durch M und aus drei Punkten auf m besteht. Wir nennen solche Elemente „Geraden-Krümmungselemente“ im Gegensatz zu den oben eingeführten, die wir in diesem Zusammenhang „Punkt-Krümmungselemente“ nennen wollen. Entsprechend brauchen wir die Benennungen „Punktkrümmung“ und „Geradenkrümmung“.

5.5. Es sei k nun ein *konvexer* Bogen, der in der Umgebung des Punktes P mit der Tangente p eine stetig variierende Tangente hat. Für eine solche selbstduale Kurve kann man sowohl von Punkt- als auch von Geradenkrümmung im Element (P, p) sprechen. Wir wollen nun zeigen: *Hat die Kurve k in (P, p) ordinäre Punktkrümmung, so hat sie auch ordinäre Geradenkrümmung, und umgekehrt.* Zu diesem Zwecke betrachten wir den variablen Kegelschnitt c' , der durch (P, p) , (S', s') und P' geht. Liegt P' genügend nahe bei P , so haben k und c' bekanntlich eine gemeinsame Tangente, die für $P' \rightarrow P$ gegen p konvergiert. Da der Dualität zufolge der umgekehrte Satz ebenfalls gilt, entnimmt man aus Satz 5.1 und dem dazu dualen, dass die beiden Krümmungsarten (Krümmungselemente) gleichzeitig existieren oder nicht.

Das System der Krümmungskegelschnitte, das Krümmungsnetz, ist dann dasselbe für die beiden Krümmungsbegriffe. Es ist folglich selbstdual, und man kann sagen, dass die Kegelschnitte in der Geraden p drei zusammenfallende Tangenten haben.

Der einzelne Krümmungskegelschnitt ist dann auch durch eine Menge von Geraden-Krümmungselementen bestimmt. Wendet man auf die Fig. 4 b das Dualitätsprinzip an, so erhält man Fig. 7, die zeigt, wie man c aus den Geraden-Krümmungselementen $pp_1^*p_2^*$ $PP_1^*P_2^*$ bestimmt. Durch Übergang zum Krümmungskreis kann man zeigen, dass die durch Geraden-Krümmungselemente bestimmte „Geradenkrümmung“ *doppelt so gross* wie die gewöhnliche Krümmung ist.

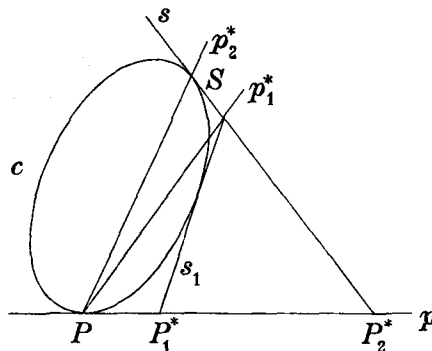


Fig. 7.

5.6. Mit Hilfe einer Zentralprojektion oder der Dualität im Raume können die obigen Definitionen auf stetige Scharen von Geraden oder Ebenen durch einen festen Punkt im Raum übertragen werden.

Für Geradenscharen, also für *Kegelflächen*, ergeben sich *Krümmungselemente* pp_1p_2 , $\pi\pi_1\pi_2$, die aus drei Geraden und drei Ebenen bestehen. Hier ist p die betreffende Erzeugende und π die Tangentialebene an den Kegel längs p ; die Geraden p_1 und p_2 liegen in π , und die Ebenen π_1 und π_2 gehen durch p . Schneidet man die Kegelfläche mit einer nicht durch ihren Scheitel gehenden Ebene σ , so hat die Schnittkurve im Schnittpunkt P mit p Krümmungselemente, die die Schnitte von σ mit den Krümmungselementen des Kegels sind. Zu der Kegelfläche gehört ein Netz von *Krümmungskegeln*, das durch Zentralprojektion des Krümmungsnetzes, das zu der Schnittkurve mit σ gehört, entsteht. Dieses Netz enthält einen *Rotationskegel*.

Ist die Kegelfläche speziell *konvex* mit stetig variierender Tangentialebene in der Umgebung von p , so können die obigen Betrachtungen über die beiden Krümmungsformen unmittelbar von der Ebene her übertragen werden.

5.7. Ist k eine *Raumkurve*, die im Punkte P die Tangente p und die Schmiegebene π hat, so existiert auch in diesem Fall ein Krümmungskegelschnitt in P , vorausgesetzt dass k in diesem Punkt ordinäre Krümmung hat. Satz 5.1 kann übertragen werden, wenn man nur im Beweis das Element (S', s') statt in der festen Ebene in der variablen Ebene $\pi' = pp'$ wählt. Der Krümmungskegelschnitt liegt in der Schmiegebene π . Projiziert man k von einem ausserhalb von π gelegenen Punkt C auf eine Ebene $\bar{\pi}$ in die Kurve \bar{k} , so werden die Krümmungselemente und die Elemente zweiter Ordnung von k in entsprechende Elemente von \bar{k} projiziert. Projiziert man speziell auf π selbst, so bleiben diese Elemente liegen, und k und \bar{k} haben dasselbe Krümmungsnetz.

5.8. Es sei k wie oben eine Raumkurve mit *ordinärer Krümmung* im Punkte P . Das ist offenbar gleichbedeutend damit, dass die projizierende Kegelfläche $C(k)$ mit ausserhalb der Schmiegeebene gelegenen Projektionszentrum C längs der Erzeugenden CP ordinäre Krümmung hat. Setzen wir nun weiter voraus, dass auch der projizierende Kegel $P(k)$ mit dem Punkt P selbst als Scheitel längs der Erzeugenden (Tangente) ordinäre Krümmung hat, so führt dies mit sich, dass k in P ordinäre Torsion hat (vergl. 4.2). Als Beispiel sei erwähnt, dass eine (algebraische) kubische Raumkurve c_3 in jedem Punkt ordinäre Krümmung und Torsion hat; wählen wir nämlich C auf c_3 so sind beide projizierenden Kegel von zweiter Ordnung.

Wählen wir bei gegebener Kurve k einen beliebigen der zu $P(k)$ gehörenden Krümmungskegel, auf diesem einen Punkt C und mit C als Scheitel einen beliebigen der Krümmungskegel von $C(k)$, so haben diese beiden Kegel zweiter Ordnung eine kubische Raumkurve c_3 gemeinsam, die in P dieselbe Krümmung und Torsion wie k hat. Lassen wir die genannten Krümmungskegel variieren, so entsteht eine Schar von Kurven C_3 , die alle dieselbe Krümmung und Torsion in P haben. Wir wollen diese Schar näher untersuchen.

Der Kegel $P(k)$ hat ∞^2 Krümmungskegel, der Punkt C kann auf jedem von diesen auf ∞^2 Weisen gewählt werden, und zu jedem Punkt C gibt es ∞^2 Krümmungskegel von $C(k)$. Die Schar besteht jedoch nur aus ∞^5 Kurven, da jede c_3 , in Übereinstimmung damit dass C beliebig auf ihr gewählt werden kann, ∞^1 mal entsteht.

Durch einen festen Punkt S gehen ∞^3 Kurven c_3 ; denn man kann S als Punkt C wählen, und der Krümmungskegel von $P(k)$ muss dann die Erzeugende PS haben. Durch zwei Punkte S und S_1 gehen ∞^1 Kurven c_3 , da der Krümmungskegel von $P(k)$ dadurch bestimmt ist, dass er die Erzeugenden PS und PS_1 haben muss, und da der andere Krümmungskegel die Gerade SS_1 enthalten muss. An Stelle zweier Punkte kann man einen Punkt S mit zugehöriger Tangente s vorgeben.

Wählt man ein Element (S, s, σ) , wo S auf s liegt und σ eine durch s gehende Ebene ist, und verlangt, dass die kubische Raumkurve durch das Element gehen, also in S die Tangente s und die Schmiegeebene σ haben soll, so gibt es bei allgemeiner Lage des Elements *eine und nur eine Kurve* c_3 , die diesen Bedingungen genügt; denn die beiden oben betrachteten Krümmungskegel sind durch das gegebene Element eindeutig bestimmt. Dieses Ergebnis ist offensichtlich der Bestimmung eines Krümmungskegelschnitts durch ein Element (S, s) analog.

§ 6. Sätze über ebene Kurven. Enveloppen

6.1. In den folgenden Paragraphen 6–9 betrachten wir die durch Funktionen $P' = \varphi(T')$ und $Q' = \psi(T')$ gegebenen Abbildungen der Parameterkurve k_0 auf zwei Kurven

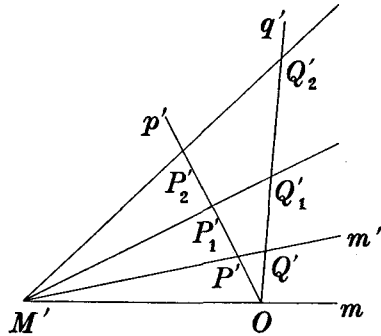


Fig. 8 a.

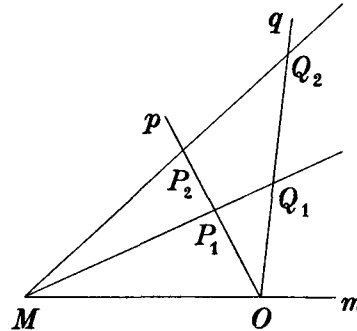


Fig. 8 b.

k_1 und k_2 . Die Kurven k_1 und k_2 sollen in den Grenzpunkten P und Q von P' bzw. Q' Tangenten p bzw. q haben, und beide Abbildungen werden im Grenzpunkt T von T' als stetig vorausgesetzt. Da die Punkte P' und Q' im allgemeinen von einander verschieden sind, bestimmen sie eine Gerade m' , und wir können somit auch die Abbildung $m' = \chi(T')$ betrachten. Sind die gegebenen Kurven ebene Kurven, so hüllt m' im allgemeinen eine Kurve ein, sind sie dagegen Raumkurven, so erzeugt m' eine geradlinige Fläche.

Wir führen wie in § 2 Hilfspunkte T'_1, T'_2, T_1 und T_2 für T' und entsprechende Punkte P'_1, P'_2, \dots und Q'_1, Q'_2, \dots für die variablen Punkte P' und Q' ein. Wir schliessen dann aus (2.1), dass zwischen den letzteren Hilfspunkten die Relation

$$PP'P'_1P'_2 \bar{\wedge} QQ'Q'_1Q'_2 (\bar{\wedge} TT'T'_1T'_2) \tag{6.1}$$

besteht, die den Ausgangspunkt für die folgenden Sätze bildet.

6.2. Wir betrachten zunächst den Fall, wo die Punkte P und Q in einem Punkt O zusammenfallen, während die Tangenten p und q von einander verschieden sind. Die gegebenen Kurven können ebene Kurven oder Raumkurven sein. Aus (6.1) folgt, dass die drei Geraden $m' = P'Q', P'_1Q'_1$ und $P'_2Q'_2$ durch denselben Punkt M' gehen (Fig. 8 a). Der Voraussetzung über die Punkte P'_2 und Q'_2 zufolge konvergieren diese für $T' \rightarrow T$ gegen zwei von O verschiedene Punkte P_2 und Q_2 , und ein eventueller Grenzpunkt von M' muss dann auf der Geraden P_2Q_2 liegen.

Wir setzen nun voraus, dass eine der Abbildungen, etwa φ , infinitesimal projektiv und ordinär ist, so dass P' das ordinäre Element OP_1P_2 hat. Dann hat der Punkt Q'_1 offenbar dann und nur dann eine Grenzlage Q_1 (auf q), wenn der Punkt M' eine bestimmte Grenzlage M (auf P_2Q_2) hat, d. h. wenn die Gerade m' eine bestimmte Grenzlage m (durch O) hat. Ferner sieht man, dass das zu Q' gehörige Element OQ_1Q_2 ordinär ist, wenn m von p und q verschieden ist, und ein Null- oder Unendlichkeitselement ist, wenn m mit p bzw. q zusammenfällt. Damit haben wir den folgenden Satz bewiesen:

SATZ 6.1. *Es seien zwei Abbildungen $P' = \varphi(T')$ und $Q' = \psi(T')$ mit gemeinsamem Grenzpunkt $P = Q = O$, aber verschiedenen Tangenten p und q gegeben. Ist φ infinitesimal projektiv und ordinär, so ist ψ dann und nur dann i. p., wenn die Gerade $m' = P'Q'$ für $T' \rightarrow T$ eine bestimmte Grenzlage m hat. Das zu Q' gehörige Element ist ordinär, ein Null- oder Unendlichkeitsselement, je nachdem m von p und q verschieden ist, in p oder in q fällt.*

Dieser Satz kann auch so ausgesprochen werden: ψ ist dann und nur dann i. p., wenn die Funktion $m' = \chi(T')$ in T stetig ist.

Im ordinären Fall, wo m von p und q verschieden ist, und das Element OQ_1Q_2 ordinär ist, ergibt sich, dass sich Q_1 und Q_2 in derjenigen Homologie mit dem Zentrum O und der Achse m entsprechen, in der P_1 und P_2 entsprechende Punkte sind. Legt man auf der von m' beschriebenen Fläche andere Kurven durch O mit in der Ebene p, q gelegenen Tangenten r, s, \dots , so schneidet m' diese Kurven in Punkten R', S', \dots , zu welchen es abgeleitete Elemente OR_1R_2, OS_1S_2, \dots gibt, wobei R_1 und R_2, S_1 und S_2 entsprechende Punkte in der genannten Homologie sind. Zwei Kurven mit derselben Tangente in O ergeben dieselben abgeleiteten Elemente. Man hat somit einen Überblick über die verschiedenen projektiven Repräsentanten in der Ebene p, q vom Punkte O aus. In analoger Weise kann man die Frage im Raum behandeln, wenn für drei Kurven von O aus, deren Tangenten nicht in einer Ebene liegen, Repräsentanten vorliegen.

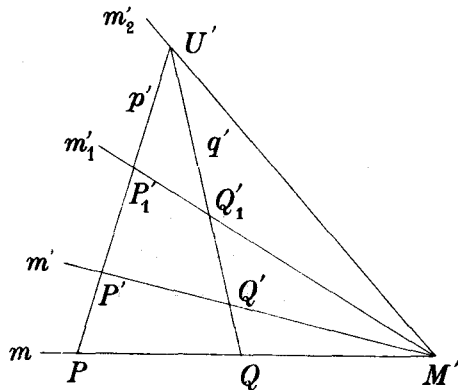


Fig. 9 a.

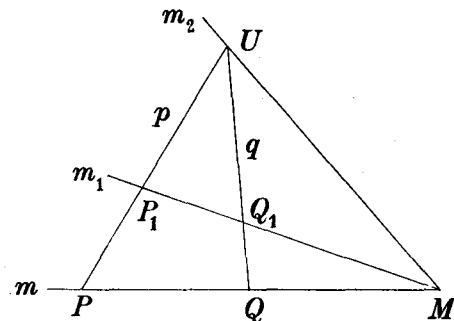


Fig. 9 b.

6.3. Wir gehen nun zu dem Fall über, wo die Kurven k_1 und k_2 eben sind, die Punkte P und Q von einander verschieden sind und die Tangenten p und q sich in einem von P und Q verschiedenen Punkt U schneiden. Wir wählen als die beiden Punkte P'_2 und Q'_2 den Schnittpunkt U' der Geraden p' und q' ; die Punkte P_2 und Q_2 fallen dann beide in U . Aus (6.1) folgt nun, dass die Geraden $m = PQ$, $m' = P'Q'$ und die Gerade $P'_1Q'_1$, die mit m'_1 bezeichnet werde, durch denselben Punkt M' gehen. Hat P' wieder das ordinäre Element

$PP_1P_2 = PP_1U$, wird also φ als infinitesimal projektiv und ordinär vorausgesetzt, so sieht man, dass der Punkt Q'_1 dann und nur dann eine bestimmte Grenzlage Q_1 (auf q) hat, wenn der Punkt M' eine bestimmte Grenzlage M (auf m) hat. Das Element ist ordinär, wenn M von P und Q verschieden ist, und ein Null- oder Unendlichkeitselement, wenn M in Q bzw. P fällt. Damit haben wir

SATZ 6.2. *Es seien in der Ebene zwei Abbildungen $P' = \varphi(T')$ und $Q' = \psi(T')$ mit verschiedenen Grenzpunkten P und Q und Tangenten p und q , die sich in einem von P und Q verschiedenen Punkt schneiden, gegeben. Ist φ infinitesimal projektiv und ordinär, so ist ψ dann und nur dann i. p., wenn $m' = P'Q'$ für $T' \rightarrow T$ einen bestimmten Charakteristikpunkt hat. Das zu Q' gehörige Element ist ordinär, ein Null- oder Unendlichkeitselement, je nachdem M von P und Q verschieden ist, in Q bzw. in P fällt.*

Im ordinären Fall findet man den in Fig. 9 b angegebenen Zusammenhang zwischen dem Charakteristikpunkt M und den zu P' und Q' gehörigen abgeleiteten Elementen, da man hier einen gemeinsamen Referenzpunkt $U = P_2 = Q_2$ hat. Sind beliebige Elemente PP_1P_2 und QQ_1Q_2 auf p bzw. q vorgegeben, so kann man durch die zugehörigen Elationen auf p und q die Punkte P_2 und Q_2 in U überführen und damit zu Fig. 9 b zurückkehren. Man kann aber auch den obigen Satz 6.1 anwenden, indem man das auf der Geraden PQ_2 liegende Element PS_1Q_2 (Fig. 10) findet; die Gerade S_1Q_1 schneidet dann die Gerade m in dem Charakteristikpunkt M .

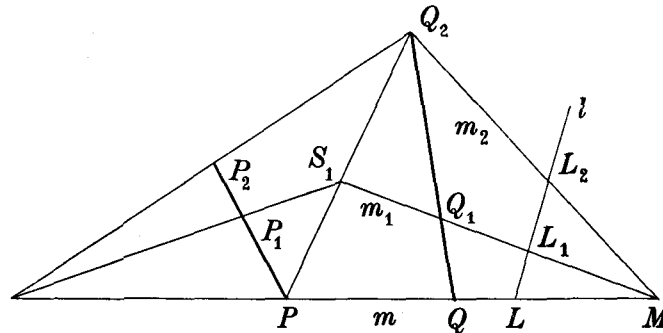


Fig. 10.

Mit Hilfe der Sätze 6.1 und 6.2 erhält man einen Überblick über sämtliche Verschiebungen in der Ebene, indem die Gerade m' gegen m mit dem Charakteristikpunkt M konvergiert. So findet man auf der Geraden l (Fig. 10) das Element LL_1L_2 , und andere Elemente können daraus leicht abgeleitet werden. Speziell ergibt sich durch Grenzübergang, dass auf l ein Nullelement entsteht, wenn L in den Charakteristikpunkt M fällt. (Vgl. Satz 6.2.)

Aus den Figuren 9 a und 9 b geht hervor, dass es für nicht in P fallendes M auch ein

zur Geraden m' gehöriges abgeleitetes Element $m m_1 m_2$ gibt, wo $m_1 = MP_1$ und $m_2 = MP_2 = MU$, mit anderen Worten, dass $m' = \chi(T')$ eine i. p. und ordinäre Funktion ist. Man hat somit ein Element erster Ordnung für die durch die Gerade m' bestimmte Enveloppe in der Lage m konstruiert.

6.4. Wir haben oben vorausgesetzt, dass die Tangenten p und q in P und Q sich in einem von P und Q verschiedenen Punkt U schneiden. Wir wollen nun annehmen, dass die Tangente q den Punkt P enthält, und wie oben, dass sowohl P' als auch Q' ordinäre Ableitungen PP_1P_2 und QQ_1Q_2 haben. Legen wir nun eine weitere Gerade l durch den Punkt Q , so folgt aus Satz 6.1, dass das zum Schnittpunkt L' von l und m' gehörige Element QL_1L_2 ein Nullelement ist, so dass Q ein Charakteristikpunkt auf m ist.

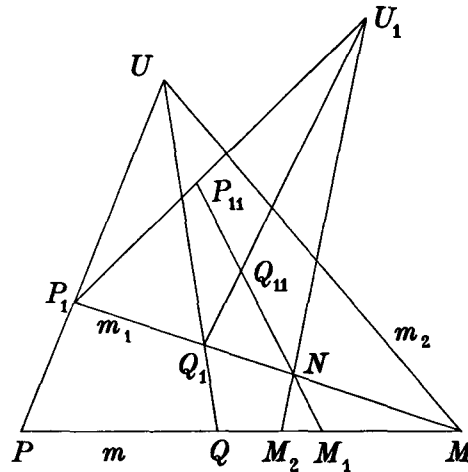


Fig. 11.

6.5. Wir betrachten nun wieder den allgemeinen Fall, wo wir von den zu P' und Q' gehörigen Elementen PP_1U und QQ_1U ausgehend das zu m' gehörige Element $m m_1 m_2$ konstruiert haben (Fig. 11). Wir machen die neue Voraussetzung, dass k_1 und k_2 in P bzw. Q ordinäre Krümmung haben. In diesem Fall wollen wir ein zum Punkte M' gehöriges Element $M M_1 M_2$, d. h. ein (Geraden)-Krümmungselement $m m_1 m_2$, $M M_1 M_2$ der Enveloppe von m' im Punkte M konstruieren.

Von gegebenen Krümmungselementen PP_1U , pp_1p_2 und QQ_1U , qq_1q_2 ausgehend hatten wir Elemente zweiter Ordnung $P_1P_{11}U_1$ und $Q_1Q_{11}U_1$ gefunden, wobei wir den Schnittpunkt von p_2 mit q_2 als gemeinsamen Referenzpunkt $U_1 = P_{12} = Q_{12}$ gewählt hatten. Der Punkt M' ist der Schnittpunkt der Geraden m mit der gegen m_1 konvergierenden Geraden m'_1 . Auf m_1 wird wie oben der Charakteristikpunkt N , der von M verschieden vorausgesetzt

§ 7. Berührende Kurven. Der Satz von Meusnier

7.1. Es seien k_1 und k_2 zwei Kurven, die sich in einem Punkt O berühren, aber in diesem Punkt *verschiedene Schmiegeebenen* haben. Die Tangente der Kurven in O bezeichnen wir mit o , die Schmiegeebenen der Kurven mit π_1 und π_2 .

Durch eine o nicht schneidende Gerade a , und einen gegen O konvergierenden Punkt O' auf o legen wir eine Ebene α' , die k_1 und k_2 in den Punkten P' und Q' schneide; P' und Q' konvergieren dann auch gegen O . Betrachten wir nun die Tangente o als „Parameterkurve“ und ordnen O' das Element OO_1O_2 zu, so haben auch P' und Q' dieses Element als abgeleitetes Element, und die Beziehungen zwischen O' , P' und Q' sind offenbar infinitesimal projektiv und eineindeutig.

Wir setzen nun voraus, dass k_1 in O ordinäre Krümmung mit dem Krümmungselement OO_1O_2 , op_1p_2 hat, und beweisen den folgenden

SATZ 7.1. *Die Kurve k_2 hat dann und nur dann eine bestimmte Krümmung in O , wenn die Ebene $\omega' = OP'Q'$ für $O' \rightarrow O$ eine bestimmte Grenzlage ω hat. Die Krümmung von k_2 im Punkte O ist ordinär, 0 oder ∞ , je nachdem ω von π_1 und π_2 verschieden ist oder mit π_1 bzw. π_2 zusammenfällt.*

Der Satz ist eine unmittelbare Folge von Satz 6.1 angewandt auf die Ecke mit dem Scheitel O . Da für k_1 ordinäre Krümmung vorausgesetzt ist, hat man das zur Geraden $p' = OP'$ gehörige Element op_1p_2 in der Ebene π_1 ; ob k_2 eine bestimmte Krümmung in O , also ein Krümmungselement der Form OO_1O_2 , op_1p_2 hat, ist abhängig davon, ob es ein zur Geraden $q' = OQ'$ gehöriges Element oq_1q_2 gibt. Diese Frage wird aber durch Satz 6.1 beantwortet.

7.2. Wir wollen nun annehmen, dass auch k_2 in O *ordinäre Krümmung* mit dem genannten Krümmungselement hat. Schneiden wir die durch O gehenden Geraden p_1 , p_2 , q_1 und q_2 mit einer Ebene, so entsteht eine der Fig. 8 b entsprechende Figur, wo die Schnittpunkte der Ebene mit den vier Geraden den Punkten P_1 , P_2 , Q_1 und Q_2 entsprechen, während die Spur der Tangente o der Punkt O und die Spur der Grenzebene ω die Gerade m ist. Wählen wir in ω einen Punkt C ausserhalb o , so wird ein Krümmungselement von k_1 in O durch Zentralprojektion von C aus auf π_2 in ein Krümmungselement von k_2 in O übergeführt. Die projizierenden Kegelflächen $C(k_1)$ und $C(k_2)$ haben dann dieselbe Krümmung längs der Erzeugenden CO , und die Ebene ω ist die sogenannte *Halphensche Hauptebene* (s. [1], S. 140, 3). Diese Ebene ist offenbar (abgesehen von der Geraden o) der geometrische Ort der Punkte C mit der genannten Eigenschaft.

Ein Krümmungskegelschnitt von k_1 in O wird von C aus in einen Krümmungskegelschnitt von k_2 in O projiziert. Umgekehrt hat die Kegelfläche, die durch zwei solche (in

π_1 und π_2 gelegenen) Krümmungskegelschnitte geht, die Halphensche Hauptebene zur Tangentialebene, und ihr Scheitel liegt in dieser Ebene.

Wir bemerken, dass die Gerade $m' = P'Q'$ für $O' \rightarrow O$ eine bestimmte Grenzlage hat, nämlich die Spur der Grenzebene der oben genannten Ebene α' in ω .

7.3. Wir wollen nun annehmen, dass die Kurven k_1 und k_2 auf einer Fläche Φ liegen, die in O eine von π_1 und π_2 verschiedene Tangentialebene hat. Diese Tangentialebene möge sämtliche Grenzlagen von Sekanten durch zwei Punkte der Fläche, die beliebig gegen O konvergieren, enthalten. (S. dazu § 11, wo die Bedingungen, denen eine solche Fläche unterworfen ist, näher diskutiert werden.) Für $O' \rightarrow O$ konvergiert die Gerade $m' = P'Q'$ gegen die in der Ebene α gelegene Tangente an Φ , und die Ebene $OP'Q' = Om'$ konvergiert gegen ω . Satz 7.1 zufolge hat dann k_2 ordinäre Krümmung in O , wenn dies für k_1 gilt, und die Tangentialebene ist offenbar die zu den Kurven gehörige Halphensche Hauptebene ([1], S. 140, 4).

Es seien nun die Ebene π_1 und die Kurve k_1 fest, während k_2 eine Schnittkurve von Φ mit einer (von ω verschiedenen) beliebigen Ebene π_2 durch o ist. Dann wird jede Kegelfläche, deren Scheitel C in ω ausserhalb o liegt und die durch einen Krümmungskegelschnitt c_1 von k_1 in O geht, von π_2 in einem Krümmungskegelschnitt von k_2 in O geschnitten. Es gibt also ∞^4 Kegelflächen zweiter Ordnung, die zur Bestimmung der Krümmung von Kurven auf Φ durch das Element (O, o) dienen können. — Man sieht indessen, dass nicht nur diese Kegelflächen, sondern jede Fläche zweiter Ordnung Ψ_2 , die c_1 enthält und Φ in O berührt, diese Eigenschaft hat. Die Fläche Ψ_2 schneidet nämlich die Ebene π_2 in einem Kegelschnitt, der die Zentralprojektion von c_1 aus einem Punkt in ω ist. Wir erhalten somit

SATZ 7.2. *Auf der Fläche Φ sei eine Kurve k_1 , deren Schmiegebene in O von der Tangentialebene ω der Fläche verschieden ist, durch das Element (O, o) gegeben. Hat k_1 ordinäre Krümmung in O , so gilt dies für jede Kurve k durch (O, o) , die eine von ω verschiedene Schmiegebene π hat. Legt man durch einen Krümmungskegelschnitt c_1 von k_1 eine beliebige Fläche zweiter Ordnung Ψ_2 , die ω in O berührt, so schneidet π diese Fläche in einem Krümmungskegelschnitt von k .*

Dieser Satz soll der *projektive Meusniersche Satz* genannt werden (vgl. [8], S. 11), da er den Satz von Meusnier aus der gewöhnlichen Flächengeometrie umfasst. Dies kann man folgendermassen einsehen: Die Fläche Φ liege in einem euklidischen Raum, es sei k_1 ein Normalschnitt der Fläche durch (O, o) , und c_1 sei der zugehörige Krümmungskreis. Die Kugelfläche mit c_1 als Grosskreis hat die im Satz 7.2 genannte Lage und schneidet daher Ebenen durch o in Krümmungskreisen der entsprechenden ebenen Schnitte von Φ . Die Fläche Ψ_2 nennen wir eine zu dem Element (O, o) gehörende Meusniersche Fläche.

7.4. Wir wenden nun auf die in 7.2 gefundenen Resultate das Dualitätsprinzip an. Dem Fall, dass k_1 und k_2 ebene Kurven sind, entsprechend finden wir: Berühren sich zwei Kegelflächen längs einer gemeinsamen Erzeugenden o und haben sie beide in o ordinäre Krümmung, so gibt es einen Punkt M , den Halphenschen Hauptpunkt, mit der Eigenschaft, dass jede Ebene durch M , die o nicht enthält, die Kegelflächen in Kurven schneidet, welche in M dieselbe Krümmung haben. Sind k_1 und k_2 Raumkurven, so sind die Kegelflächen durch Tangentenflächen zu ersetzen, die sich längs einer Erzeugenden berühren. Die Krümmungselemente solcher Flächen werden dual den Krümmungselementen von Raumkurven definiert.

Die Anwendung des Dualitätsprinzips auf Satz 7.2 ergibt folgende Resultate. Es sei Φ eine Fläche mit der Tangentialebene τ im Punkt O und o sei eine durch O gehende Tangente. Die Fläche soll Eigenschaften haben, die zu den in 7.3 genannten dual sind. Durch einen Punkt P auf o legen wir eine Φ umschriebene Kegelfläche, die in o ordinäre Krümmung habe; es sei Γ der zugehörige Krümmungskegel. Durchläuft P die von O verschiedenen Punkte der Tangente o , so haben die umschriebenen Kegel sämtlich ordinäre Krümmung längs o , und die zugehörigen Krümmungskegel können als umschriebene Kegelflächen einer beliebigen Fläche zweiter Ordnung Ψ_2 , welche Φ in O sowie Γ berührt, gewählt werden. Wie oben können die Kegelflächen durch Tangentenflächen ersetzt werden.

Aus dieser projektiven Darstellung ergibt sich insbesondere die von Mannheim, Hostinsky und E. Müller aufgestellte metrische Dualisierung des Satzes von Meusnier (s. [14]). Die Fläche Γ kann nämlich als Rotationskegel gewählt werden, und es sei Ψ_2 die in Γ eingeschriebene Kugel, die Φ in O berührt. Man findet dann, dass sämtliche Rotationskegelflächen, die zu Punkten auf der Tangente o gehörige Krümmungskegel sind, der genannten Kugelfläche umschrieben sind.

§ 8. Sich schneidende Kurven. Krümmung in einem Punkt einer geradlinigen Fläche

8.1. Es seien k_1 und k_2 zwei Kurven, die den Punkt O gemeinsam haben, aber in diesem Punkt *verschiedene Tangenten* p und q besitzen. Diese Tangenten bestimmen eine Ebene ω . Wir nehmen an, dass die Schmiegeebenen π_1 und π_2 der Kurven in O sich in einer Geraden u schneiden, die nicht in ω liegt. Es seien i. p. Abbildungen $P' = \varphi(T')$ und $Q' = \psi(T')$ auf k_1 und k_2 mit zu P' und Q' gehörigen ordinären abgeleiteten Elementen OP_1P_2 bzw. OQ_1Q_2 gegeben. Die Gerade $m' = P'Q'$ hat dann für $T' \rightarrow T$ eine bestimmte von p und q verschiedene Grenzlage m durch O . Die Geraden $m_1 = P_1Q_1$ und $m_2 = P_2Q_2$ schneiden sich in einem Punkte M von m (Fig. 13).

Wir setzen nun voraus, dass k_1 ordinäre Krümmung in O mit dem Krümmungselement OP_1P_2 , pp_1p_2 hat und beweisen

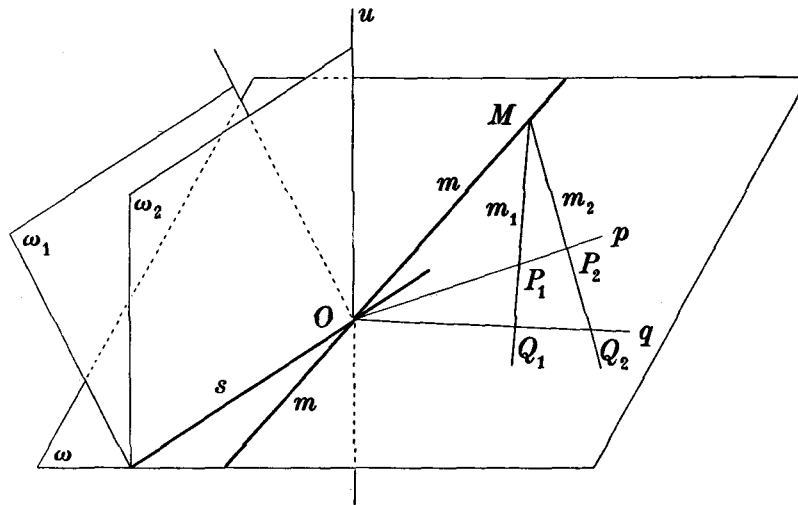


Fig. 13.

SATZ 8.1. Die Kurve k_2 hat dann und nur dann eine bestimmte Krümmung in O , wenn die Schnittgerade s' der Ebene ω mit der Ebene $\omega' = Om' = OP'Q'$ für $T' \rightarrow T$ eine bestimmte Grenzlage s hat. Die Krümmung von k_2 ist ordinär, 0 oder ∞ , je nachdem s von p und q verschieden ist, in q bzw. in p fällt.

Satz 8.1 folgt in derselben Weise aus Satz 6.2 wie Satz 7.1 aus Satz 6.1, d.h. durch Anwendung von Satz 6.2 auf die Ecke mit dem Scheitel O .

Es habe nun k_2 ordinäre Krümmung mit dem Element OQ_1Q_2, qq_1q_2 . Wählen wir sowohl p_2 als auch q_2 mit u zusammenfallend und schneiden die Ecke mit dem Scheitel O mit einer Ebene, so erhalten wir eine Figur wie Fig. 9 b, wo P_1, Q_1 und U den Schnittpunkten mit den Geraden p_1, q_1 und u entsprechen, während m die Spur von ω ist. Es gibt dann auch ein zur Ebene ω' gehöriges abgeleitetes Element $\omega\omega_1\omega_2$. Die Charakteristikgerade s ist Schnittgerade von ω mit der Ebene $\omega_1 = p_1q_1$, und ω_2 ist die Ebene s, u .

Die variable Gerade $m' = P'Q'$ erzeugt eine durch k_1 und k_2 gehende geradlinige Fläche Φ , die im Punkte O die Erzeugende m und die Tangentialebene ω hat. Die Gerade s wird die *Haupttangente* in O genannt. Schneidet man Φ mit einer beliebigen Ebene durch die Gerade u , so hat die Schnittkurve eine bestimmte Krümmung in O mit Krümmungselementen, die durch Schnitt von $mm_1m_2, \omega\omega_1\omega_2$ mit der Ebene entstehen. Das System $mm_1m_2, \omega\omega_1\omega_2$ wird dann als *Krümmungselement* der geradlinigen Fläche im Punkte O bezeichnet. Es ist durch Angabe der Krümmungselemente zweier Schnitte durch O (und die Gerade m) oder durch Angabe des Krümmungselementes eines ebenen Schnittes und die Geraden m und s festgelegt.

Die Geraden m und s können speziell *zusammenfallen*. In diesem Fall erhält man das Krümmungselement eines Schnittes durch O aus dem Element eines anderen Schnittes durch Zentralprojektion von einem beliebigen Punkt der Geraden $m = s$ aus.

Wir konstruieren nun Krümmungskegelschnitte c_1 und c_2 von k_1 und k_2 , die durch einen beliebigen Punkt U von u gehen und in diesem Punkt eine O nicht enthaltende Ebene τ berühren. Durch diese beiden Kegelschnitte und die Gerade m können wir eine Fläche zweiter Ordnung Ψ_2 legen, die als eine geradlinige Fläche, deren Erzeugendensystem die Gerade m enthält, aufgefasst werden kann. Die beiden Flächen Φ und Ψ_2 besitzen, da ihre Schnitte mit den Ebenen u , p und u , q dieselben Krümmungselemente haben, dasselbe Krümmungselement mm_1m_2 , $\omega\omega_1\omega_2$. Jede Ebene durch u schneidet dann Ψ_2 in einem Krümmungskegelschnitt der Schnittkurve mit Φ . Geht die Ebene speziell durch m oder durch s so entartet der Kegelschnitt in Geraden, da die Krümmung 0 wird. Wir sagen, dass die Fläche Ψ_2 die Fläche Φ im Punkte O *oskuliert*. Sind m und s von einander verschieden, so ist Ψ_2 eine allgemeine nicht-konvexe Fläche zweiter Ordnung. Für zusammenfallende m und s ergibt sich eine Kegelfläche. Es gibt ∞^3 solche oskulierenden Flächen zweiter Ordnung.

Sind m und s von einander verschieden, so schneidet die Tangentialebene ω die Fläche Φ in einer Kurve, deren Tangente im Punkte O die Gerade s ist. Die Gerade m' schneidet nämlich ω in einem auf s' liegenden Punkt, der für $m' \rightarrow m$ und $s' \rightarrow s$ gegen O konvergiert.

8.2. Ersetzt man die der Kurve k_2 zugeordnete Funktion $Q' = \psi(T')$ durch eine andere i. p. ordinäre Funktion $Q' = \psi^*(T')$, so entsteht ein anderes abgeleitetes Element $OQ_1^*Q_2^*$, das im allgemeinen nicht mit OQ_1Q_2 äquivalent ist. Es entsteht zugleich eine andere Fläche Φ^* durch k_1 und k_2 mit einer von m verschiedenen Erzeugenden m^* durch O . Wählt man dieselben Krümmungskegelschnitte c_1 und c_2 wie oben, so erhält man eine neue zu Φ^* gehörende oskulierende Fläche Ψ_2^* , die durch m^* geht und zu dem durch c_1 und c_2 bestimmten Flächenbüschel gehört.

Dieses Flächenbüschel schneidet die Tangentialebene ω in Erzeugenden m^* und Haupttangente s^* , die sich in einer Involution, in der p und q einander zugeordnet sind, entsprechen, was der Ausartung der Fläche in die Ebenen π_1 und π_2 entspricht. Die Involution ist elliptisch oder hyperbolisch, je nachdem alle Flächen des Büschels nicht-konvex sind oder nicht. Diese beiden Möglichkeiten liegen vor, je nachdem die Kurven k_1 und k_2 in der Umgebung von O auf entgegengesetzten Seiten oder derselben Seite von O liegen. Im letzten Fall gibt es in der Involution *reelle Doppelstrahlen* d_1 und d_2 , und in diesen Richtungen arten die oskulierenden Flächen in Kegelflächen aus. Die Geraden d_1 und d_2 sind mit den Tangentialrichtungen p und q harmonisch verbunden, und aus ihren Schnittpunkten mit τ , den Scheiteln der entsprechenden Kegel, wird c_1 in c_2 projiziert.

Die Involution in ω ist offenbar unabhängig von dem Element (U, τ) , da die Erzeugende m^* und die Haupttangente s^* der Fläche Φ^* zusammengehörige Geraden sind. Die Doppelstrahlen d_1 und d_2 haben dann dieselben Eigenschaften wie die Punkte in der in 7.1 behandelten Halphenschen Hauptebene. Für jeden Punkt C von d_1 oder d_2 (abgesehen von dem Punkte O) haben die projizierenden Kegel $C(k_1)$ und $C(k_2)$ längs der Erzeugenden CO dieselbe Krümmung. (Siehe [2].)

8.3. Es seien nun k_1 und k_2 speziell *ebene konvexe Kurven*, die in der Umgebung von O auf derselben Seite von ω liegen. Auf jeder der beiden Kurven betrachten wir einen von O ausgehenden Bogen. Durch solche Bögen \bar{k}_1 und \bar{k}_2 kann man genau eine abwickelbare Fläche (Tangentenfläche) legen, wobei die Tangentialebenen dieser Fläche durch die Tangenten p' und q' , die von einem gegen O konvergierenden Punkt O' auf der Geraden u ausgehen, bestimmt sind. Die Ebene p', q' schneidet ω in einer Geraden d' , von der wir zeigen werden, dass sie für $O' \rightarrow O$ gegen eine der Geraden d_1 oder d_2 konvergiert (Fig. 14).

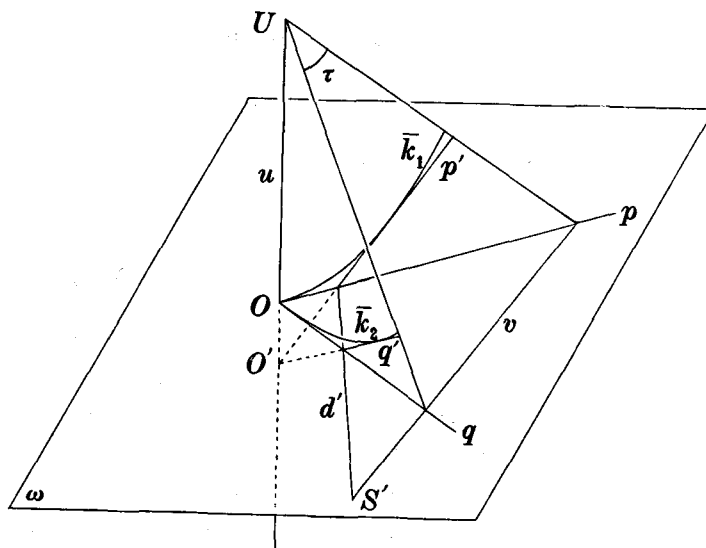


Fig. 14.

Die Ebene τ durch den Punkt U auf u schneide ω in einer Geraden v . In der Ebene π_1 legen wir nun einen Kegelschnitt c'_1 der ω in O und τ in U berührt und zugleich p' zur Tangente hat. Entsprechend legen wir einen Kegelschnitt c'_2 in der Ebene π_2 . Diese Kegelschnitte gehen aus einander durch Zentralprojektion vom Schnittpunkt S' von d' mit v aus hervor.

Für $O' \rightarrow O$ konvergieren nun p' und q' gegen p und q , während c'_1 und c'_2 gegen die durch das Element (U, τ) bestimmten Krümmungskegelschnitte c_1 und c_2 von k_1 bzw. k_2 kon-

vergiere. Die Kegelfläche durch c'_1 und c'_2 mit dem Scheitel S' konvergiert gegen eine Kegelfläche durch c_1 und c_2 , d. h. der Punkt S' muss gegen den Schnittpunkt von v mit derjenigen der Geraden d_1 und d_2 konvergieren, die nicht in dem durch die Halbtangenten in O an die Bögen \bar{k}_1 und \bar{k}_2 bestimmten Winkelraum liegt. Die Gerade d' muss gegen die hierdurch bestimmte Gerade d_1 oder d_2 gehen.

Durch die Kurven k_1 und k_2 kann man somit zwei abwickelbare Flächen legen, deren durch O gehende Erzeugende genau die Geraden d_1 und d_2 sind. Für solche Flächen fällt die Haupttangente mit der Erzeugenden in O zusammen.

8.4. Wenden wir das Dualitätsprinzip auf die obigen Betrachtungen an, so finden wir eine Bestimmung der Tangenten an die Schnittkurve zweier konvexer Kegelflächen, die eine gemeinsame Tangentialebene haben, deren in dieser Ebene gelegene Erzeugenden aber einen von den Scheiteln verschiedenen Punkt D gemeinsam haben. Die Kegel sollen auf derselben Seite der gemeinsamen Tangentialebene liegen und schneiden sich dann in einer Raumkurve, auf der D Doppelpunkt mit Doppelpunktstangenten, die mit den Erzeugenden durch D harmonisch verbunden sind, ist. Legt man zwei Krümmungskegel der gegebenen Kegelflächen längs der Erzeugenden durch D derart, dass sie eine beliebig gewählte Ebene durch die Gerade, die die Kegelscheitel verbindet, berührt, so schneiden sich diese Kegel, die zwei gemeinsame Tangentialebenen haben, in zwei Kegelschnitten, deren Tangenten in D die Doppelpunktstangenten sind.

§ 9. Krümmung längs einer Erzeugenden einer geradlinigen Fläche

9.1. Wir betrachten in diesem Paragraphen zwei Raumkurven k_1 und k_2 , die speziell eben sein können, in allgemeiner Lage. Wie oben denken wir uns die Abbildungen $P' = \varphi(T')$ und $Q' = \psi(T')$ auf k_1 bzw. k_2 gegeben, aber hier nehmen wir an, dass P und Q verschiedene Punkte sind. Die Gerade $m' = P'Q'$ erzeugt eine geradlinige Fläche, die wir mit Φ bezeichnen wollen. Für $T' \rightarrow T$ konvergiert m' gegen die Erzeugende $m = PQ$. Im folgenden setzen wir voraus, dass die Funktionen φ und ψ infinitesimal projektiv und ordinär sind, so dass es zu den Punkten P' und Q' ordinäre Elemente PP_1P_2 und QQ_1Q_2 gibt, die auf den Tangenten p bzw. q der Kurven k_1 bzw. k_2 in P bzw. Q liegen.

Wir wollen hier die beiden Hauptfälle betrachten, wo die Tangenten p und q entweder A) windschief sind oder B) sich in einem von P und Q verschiedenen Punkte schneiden. Im ersten Fall heisst die Erzeugende m regulär, im zweiten Fall singular.

A. Die Erzeugende m ist regulär

9.2. Mit unseren früheren Bezeichnungen folgt aus Gleichung (6.1) (S. 127), dass die vier Geraden $m = PQ$, $m' = P'Q'$, $m'_1 = P'_1Q'_1$ und $m'_2 = P'_2Q'_2$ Erzeugende desselben Systems

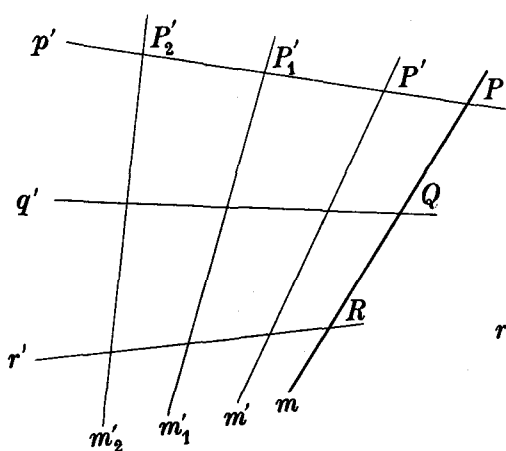


Fig. 15 a.

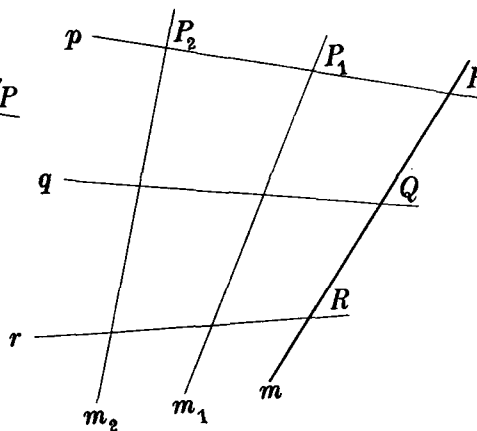


Fig. 15 b.

einer Fläche zweiter Ordnung Σ'_2 sind, die durch die gegen p und q konvergierenden Sekanten $p' = PP'$ und $q' = QQ'$ geht. Beim Grenzübergang $T' \rightarrow T$ konvergiert diese Fläche offenbar gegen die Fläche zweiter Ordnung Σ_2 , die durch die drei windschiefen Geraden $m, m_1 = P_1Q_1$ und $m_2 = P_2Q_2$ bestimmt ist und die Tangenten p und q enthält.

Wir betrachten die auf Σ'_2 liegende Erzeugende r' , die durch einen beliebigen Punkt R auf m geht und von m verschieden ist. Diese Erzeugende schneidet die vier oben genannten Geraden in Punkten R, R', R_1, R_2 und diese Gruppe ist projektiv zu den entsprechenden Punktgruppen auf p' und q' . Für $T' \rightarrow T$ konvergiert r' gegen die Erzeugende r auf Σ_2 durch R ($r \neq m$), und zu R' gehört offenbar ein abgeleitetes Element RR_1R_2 , wo R_1 und R_2 die Schnittpunkte von r mit m_1 bzw. m_2 sind. Bezeichnet S' einen weiteren Punkt auf m' , der gleichfalls gegen R konvergiert, so strebt RS' einer Grenzlage in der Ebene m, r zu, und zu S' gehört ein abgeleitetes Element RS_1S_2 . Dabei sind S_1 und S_2 zusammengehörige Punkte in derjenigen Elation in der Ebene m, r , die die Achse m und das Zentrum R hat und in der R_1 dem Punkte R_2 entspricht.

Hieraus folgt, dass die Fläche Φ im Punkte R die *Tangentialebene* $q = m, r$, also dieselbe Tangentialebene wie Σ_2 hat. Die Fläche Φ hat dann ebenso wie Σ_2 längs m ein *Büschel von Tangentialebenen, das zur Reihe der Berührungspunkte projektiv ist*. Ferner sehen wir, dass alle abgeleiteten Elemente der Punkte auf m' in einer *biaxialen Kollineation* mit zusammenfallenden Achsen (einer axialen Elation), in der m_1 der Geraden m_2 entspricht und m die Achse ist, zusammengehören.

9.3. Wir setzen nun ausserdem voraus, dass k_1 und k_2 in P bzw. Q ordinäre Krümmung haben und dass die Schmiegeebenen π_1 und π_2 nicht mit den Tangentialebenen m, p und m, q in diesen Punkten zusammenfallen. Dann können wir den folgenden Satz beweisen:

SATZ 9.1. *Jeder ebene Schnitt der Fläche Φ hat eine bestimmte Krümmung im Schnittpunkt mit der Erzeugenden m . Es gibt eine Fläche zweiter Ordnung Ψ_2 , die in jedem Punkt von m oskulierende Fläche von Φ ist.*

Von dem Punkte R aus projizieren wir die Kurven k_1 und k_2 in eine Ebene μ . Die Spur von m in μ sei O . Unter den gemachten Annahmen haben die Projektionen von k_1 und k_2 ordinäre Krümmung in O , und es entstehen die in 6.6 beschriebenen Lageverhältnisse. (Vgl. Fig. 12.) Wir betrachten nun die Ecke mit dem Scheitel R . Konvergiert die variable Ebene $\rho' = R, m'$ gegen die Tangentialebene ρ im Punkte R , so ergibt sich aus den Betrachtungen in 6.6, dass es in ρ eine Charakteristiklinie, nämlich die Haupttangente s_R , sowie ein zur Ebene ρ' gehöriges Element $\rho q_1 q_2$ gibt. Es existiert also im Punkte R ein Krümmungselement der Fläche Φ (s. 8.1), und jeder durch R gehende ebene Schnitt von Φ hat somit eine bestimmte Krümmung. Dies gilt für jeden von P und Q verschiedenen Punkt R von m und also auch für P und Q selbst. Hiermit ist der erste Teil von Satz 9.1 bewiesen.

Zum Beweise des zweiten Teils betrachten wir eine Fläche zweiter Ordnung Ψ'_2 , die Φ in den Punkten P, Q und R berührt und zugleich die Gerade m' enthält. Eine solche Fläche ist eindeutig bestimmt und berührt Φ in jedem Punkt von m . Die Ebene $\rho' = R, m'$ schneidet die Tangentialebene ρ in einer gegen s_R konvergierenden Geraden s'_R , die zugleich Erzeugende von Ψ'_2 ist. Entsprechendes gilt in den Punkten P und Q , und Ψ'_2 konvergiert dann für $m' \rightarrow m$ gegen die durch die Haupttangente s_P, s_Q und s_R bestimmte Fläche Ψ_2 . Alle Haupttangente in Punkten von m liegen auf Ψ_2 und gehören zu demselben Erzeugendensystem.

Die hierdurch bestimmte Fläche zweiter Ordnung Ψ_2 oskuliert Φ in jedem Punkt von m . Eine beliebige Ebene γ durch R schneidet nämlich die Fläche Ψ_2 in einem Kegelschnitt c' , der ρ in R berührt und durch den gegen R konvergierenden Schnittpunkt R' von γ und m' geht. Für $m' \rightarrow m$ konvergiert c' gegen den Kegelschnitt c , in dem γ die Fläche Ψ_2 schneidet, und dieser ist ein Krümmungskegelschnitt der Schnittkurve von γ und Φ . Hiermit ist Satz 9.1 vollständig bewiesen.

Wir wenden uns nun dem zweiten Fall zu.

B. Die Erzeugende m ist singulär

9.4. In diesem Fall liegen die Tangente p und q in derselben Ebene α und schneiden sich in einem Punkt U . Wir setzen voraus, dass k_1 und k_2 ebene Kurven sind. Die Schnittgerade u der Ebenen π_1 und π_2 , in denen k_1 und k_2 gelegen sind, gehe durch den Punkt U und liege nicht in der Ebene α .

Wir betrachten hier den allgemeinen Fall, wo m' und m während des Grenzüberganges

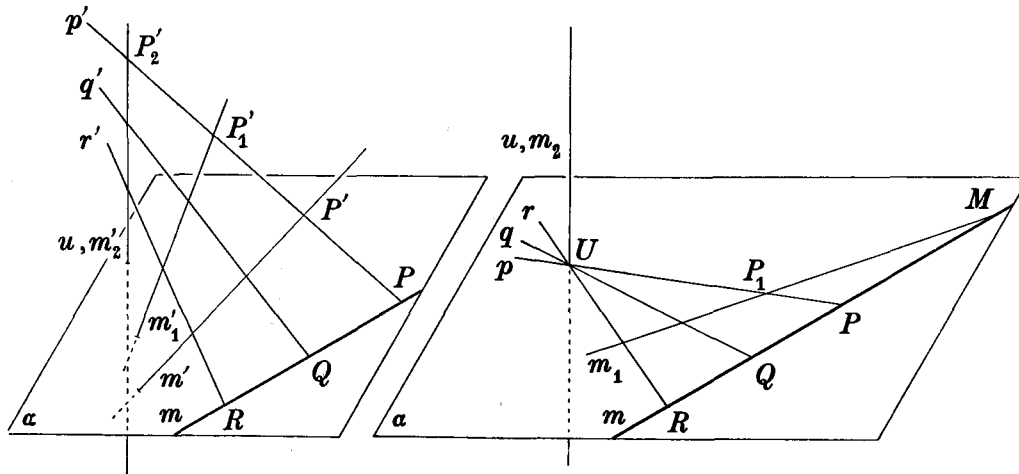


Fig. 16 a.

Fig. 16 b.

$m' \rightarrow m$ windschiefe Geraden sind. Wir wählen die Punkte P'_2 und Q'_2 als Schnittpunkte von p' bzw. q' mit der Geraden u , so dass sie beide beim Grenzübergang gegen den Punkt U konvergieren. Die Gerade m'_2 fällt also mit $u = m_2$ zusammen, während $m'_1 = P'_1Q'_1$ gegen eine in der Ebene α gelegene Gerade $m_1 = P_1Q_1$ konvergiert. Die Gerade m_1 schneidet m in einem Punkt M , der auch hier als *Charakteristikpunkt* bezeichnet wird (Fig. 16 a und b).

Durch einen beliebigen Punkt R auf m legen wir wie oben die Gerade r' , die m' in R' , m'_1 in R'_1 und $u = m'_2$ in R'_2 schneidet. Ist R nicht gerade der *Charakteristikpunkt* M , so konvergiert r' für $m' \rightarrow m$ gegen eine Gerade durch R , die die Geraden m_1 und u schneidet, also gegen die Gerade RU , und der Punkt R'_1 konvergiert gegen den Schnittpunkt von r_1 mit m_1 . Hieraus folgt, dass die *Fläche* Φ die *Tangentialebene* α im Punkt R hat, und dass zu R' das *Element* RR_1U gehört.

Ist R speziell der Punkt M , so können wir aus dem obigen nur schliessen, dass eine eventuelle Grenzlage von r' die Gerade u schneiden muss. Setzen wir weiter voraus, dass Φ eine bestimmte *Tangentialebene* im Punkte M hat (die die Gerade m enthält), so schneidet diese Ebene u in einem Punkt R_2 , so dass r' gegen die Gerade RR_2 konvergiert. Gleichzeitig konvergiert R'_1 gegen den Punkt M , so dass in diesem Fall auf r_1 ein Nullelement bestimmt wird. Unabhängig davon, ob die Ebene α oder eine andere Ebene *Tangentialebene* der Fläche Φ im Punkte M ist, sind die Verschiebungen von einer singulären Erzeugenden aus dieselben, als ob m' in der *Tangentialebene* α läge. Projizieren wir die Geradenschar m' von einem Punkt C aus in eine Ebene, so wird M offenbar für jede Lage von C (ausserhalb α) in den *Charakteristikpunkt* der Projektion von m projiziert.

9.5. Wir setzen nun voraus, dass die Kurven k_1 und k_2 *ordinäre Krümmung* in den

Setzen wir voraus, dass k_1 in P ordinäre Krümmung hat, so konvergiert P'_{11} beim Grenzübergang gegen einen Punkt P_{11} auf der Geraden VP_1 , und wir können PP_1U , pp_1p_2 mit $p_1 = PP_{11}$ und $p_2 = PV$ als Krümmungselement wählen. Der durch das Geradenelement (V, u) bestimmte Krümmungskegelschnitt von k_1 in P enthält dann gerade den Punkt P_{11} . (Vgl. Fig. 4a und b.)

In entsprechender Weise bestimmen wir auf der Geraden VQ'_1 einen Punkt Q'_{11} derart, dass

$$\bar{Q}'_1 Q'_1 Q'_{11} V \bar{\wedge} Q Q' Q'_1 Q'_2, \quad (9.2)$$

wo Q'_{11} gegen einen Punkt Q_{11} auf der Geraden VQ_1 konvergiert. Aus den Gleichungen (9.1) und (9.2) geht hervor, dass die Geraden $\bar{m}'_1 = \bar{P}_1 \bar{Q}'_1$, $m'_1 = P'_1 Q'_1$ und $m'_{11} = P'_{11} Q'_{11}$ durch denselben Punkt O'_1 gehen.

Die Gerade m'_{11} schneidet die Gerade VR'_1 in einem Punkt R'_{11} , für den

$$\bar{R}'_1 R'_1 R'_{11} V \bar{\wedge} R R' R'_1 R'_2 \quad (9.3)$$

gilt, da die drei rechten Seiten und die drei linken Seiten der Relationen (9.1), (9.2) und (9.3) projektive Gruppen bilden. Beim Grenzübergang konvergiert R'_1 gegen R_1 und R'_{11} gegen den Schnittpunkt R_{11} von m_1 mit der Geraden VR_1 . Die Kurve k hat daher eine bestimmte ordinäre Krümmung in R mit dem Krümmungselement RR_1U , rr_1r_2 wobei $r_1 = RR_1$ und $r_2 = RV$ ist, und es gibt einen Krümmungskegelschnitt durch (R, r) , (V, u) und den Punkt R_{11} . Hieraus folgt, wenn wir noch die letzten Bemerkungen in 9.5 in Betracht ziehen,

SATZ 9.3. *Hat die Fläche Φ die singuläre Erzeugende m , so hat jeder Schnitt mit einer Ebene, die den Charakteristikpunkt nicht enthält, eine bestimmte Krümmung im Schnittpunkt mit m .*

Der obengenannte Punkt O'_1 konvergiert gegen den Schnittpunkt O_1 von m_{11} und m_1 (m_{11} und α). Den zugehörigen Punkt O auf der Erzeugenden m nennen wir den *Nullpunkt*. Schneiden wir Φ mit der Ebene u , O , so erhalten wir eine Kurve mit der Krümmung null im Punkte O .

Aus Fig. 17b geht hervor, dass die Krümmungen in jedem von dem Charakteristikpunkt M verschiedenen Punkt festgelegt sind, wenn M , der Nullpunkt O sowie die Krümmung in einem einzigen dritten Punkt gegeben sind.

Projiziert man von dem Punkte M aus die durch das Element (V, u) bestimmten Krümmungskegelschnitte c_P, c_Q, \dots in die Ebenen $u, P; u, Q; \dots$, so entsteht ein Büschel von Kegelflächen zweiter Ordnung $M(c_P), M(c_Q), \dots$, das sich als zur Punktreihe $P, Q \dots$ projektiv erweist. Die Kegelflächen berühren nämlich alle die Ebene α längs der Erzeugenden

m und die Ebene M , u längs der Geraden MV , und sie werden von der festen Ebene V , m_{11} in den Erzeugenden MP_{11} , MQ_{11} , ... geschnitten, die ein zur Punktreihe projektives Geradenbüschel bilden. Da jeder einzelne Kegelschnitt c_P, c_Q, \dots durch Schnitt des genannten Büschels von Kegelflächen mit dem dazu projektiven Ebenenbüschel $u, P; u, Q; \dots$ entsteht, liegen diese Kegelschnitte auf einer *algebraischen Fläche dritter Ordnung*. Diese Fläche enthält die Gerade u und berührt die Ebene α längs der Geraden m , und sie enthält gleichzeitig die Gerade m_{11} . Durchläuft m_1 das Geradenbüschel mit dem Scheitel M , so entspricht jeder Lage von m_1 eine Gerade m_{11} auf der kubischen Fläche. Diese ist also *geradlinig* und wird von m_{11} erzeugt.

Fallen speziell die Punkte M und O zusammen, so liegen die genannten Kegelschnitte auf einer Kegelfläche zweiter Ordnung mit dem Scheitel $M = O$. Dieser Kegel ist *oskulierende Kegelfläche* von Φ längs der ganzen Erzeugenden m , abgesehen von dem Punkte $M = O$.

§ 10. Variable Dreiecke

10.1. In § 2 haben wir abgeleitete Elemente für einen variablen Punkt P' mit dem Grenzpunkt P eingeführt, wenn eine i. p. Funktion $P' = \varphi(T')$ gegeben war, wo T' längs einer Parameterkurve gegen T mit einem gegebenen abgeleiteten Element $T T_1 T_2$ konvergiert. Das Element $PP_1 P_2$ kann, wie in 2.3 erwähnt, als projektiver Repräsentant der infinitesimalen Verschiebung PP' , d. h. einer infinitesimalen Strecke, deren einer Endpunkt fest ist, aufgefasst werden. Wir wollen nun diese Darstellung so erweitern, dass sie auch für infinitesimale Strecken $P'P''$, bei denen beide Endpunkte variieren, gilt.

Wir nehmen an, dass das Punktepaar $P'P''$ eine Funktion von T' ist, $P'P'' = \varphi(T')$, und zwar so, dass für $T' \rightarrow T$ die Punkte P' und P'' gegen denselben Punkt P und die Gerade $p' = P'P''$ gegen eine Gerade p durch P konvergieren. Wir wählen nun wie früher Hilfspunkte T'_1, T'_2, T_1 und T_2 für T' und ebenso auf p' und p Hilfspunkte P'_2 und P_2 . Der Punkt P'_1 auf p' wird dann durch die (2.1) entsprechende Relation

$$P'P''P'_1P'_2 \bar{\wedge} T T' T'_1 T'_2 \quad (10.1)$$

bestimmt, und wir nehmen an, dass P'_1 für $T' \rightarrow T$ gegen einen Punkt P_1 (auf p) konvergiert. Wir finden dann für das Punktepaar (den infinitesimalen Vektor) $P'P''$ den projektiven Repräsentanten $PP_1 P_2$.

Ist dieses Element ordinär, so kann es nach den in § 2 genannten Regeln abgeändert werden, und alle früheren Bezeichnungen sowie die in 2.2 genannten Sätze werden auf unseren Fall übertragen. Aus der Formel (2.6) entsprechenden Relation findet man, dass die Existenz eines zu $P'P''$ gehörigen Elementes $PP_1 P_2$ im euklidischen Raum damit gleichbedeutend ist, dass das Verhältnis der infinitesimalen Strecken $P'P''$ und $T T'$ für

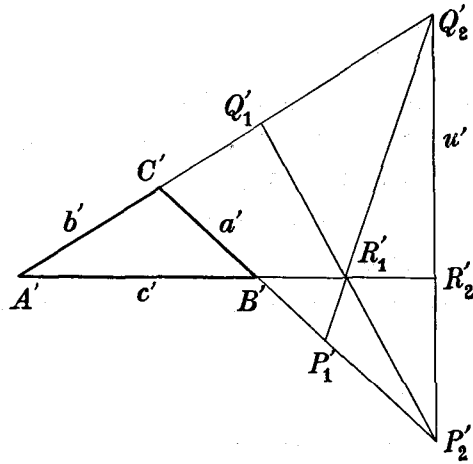


Fig. 18 a.

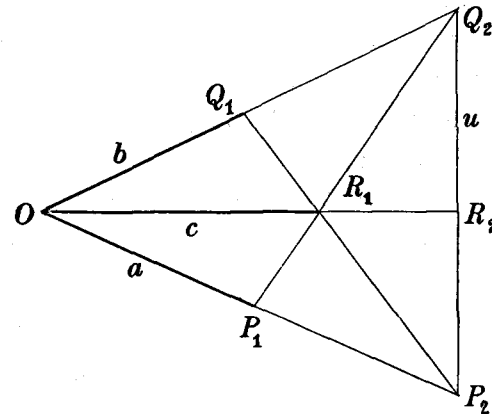


Fig. 18 b.

$T' \rightarrow T$ einen bestimmten Grenzwert hat (immer vorausgesetzt, dass die Gerade $P'P''$ eine bestimmte Grenzrichtung hat).

Mit Hilfe des Dualitätsprinzips findet man entsprechende Repräsentanten für infinitesimale Winkel zwischen Geraden oder Ebenen, deren Schnittpunkt bzw. Schnittgerade eine bestimmte Grenzlage hat.

10.2. Wir wollen unsere Betrachtungen auf ein *variables Dreieck* $A'B'C'$ anwenden, dessen Lage von dem Parameterpunkt so abhängt, dass für $T' \rightarrow T$ alle Ecken gegen einen festen Punkt O und die Ebene $\omega' = A'B'C'$ gegen eine Ebene ω durch O konvergiert. Ein Beispiel haben wir in dem in 6.2 genannten Dreieck $OP'Q'$ (wo allerdings die Ecke O fest liegt).

In der Ebene ω wählen wir eine feste Gerade u , die nicht durch O geht, und in ω' eine gegen u konvergierende Gerade u' . Die Schnittpunkte der Seiten $a' = B'C'$, $b' = C'A'$, $c' = A'B'$ mit der Geraden u' bezeichnen wir mit P_2', Q_2' und R_2' . Auf a' , b' und c' bestimmen wir nun Punkte P_1', Q_1' und R_1' so, dass

$$A' B' R_1' R_2' \bar{\wedge} A' C' Q_1' Q_2' \bar{\wedge} C' B' P_1' P_2' (\bar{\wedge} T T' T_1' T_2'). \quad (10.2)$$

In dieser Weise entsteht Fig. 18 a, wo wegen (10.2) die Gerade $P_1'R_1'$ durch Q_2' und die Gerade $Q_1'R_1'$ durch P_2' geht.

Nehmen wir nun an, dass die Seiten a' , b' und c' bestimmte, von einander verschiedene Grenzrichtungen a , b und c haben, so haben offenbar alle drei Seiten ein abgeleitetes Element, wenn dies für eine der Seiten gilt; der Zusammenhang geht aus Fig. 18 b hervor. Haben zwei der Seiten Grenzrichtungen und projektive Repräsentanten, so hat auch die

dritte Seite eine Grenzrichtung und einen projektiven Repräsentanten. In beiden Fällen liegt eine Erweiterung von Satz 6.1 vor.

Sehen wir u als unendlich ferne Gerade in einer affinen Ebene an, so zeigt Fig. 18 b die Addition der affinen infinitesimalen Vektoren: $A'C' + C'B' = A'B'$; wir können daher sagen, dass Fig. 18 b eine projektive Verallgemeinerung dieser Vektoraddition darstellt.

Fallen zwei Richtungen, z. B. die Geraden b und c zusammen, während a von dieser Richtung verschieden ist, so gehört zu $A'C'$ und $A'B'$ dasselbe Element, während P_1 in den Punkt O fällt, so dass $B'C'$ durch ein Nullelement (einen Nullvektor) repräsentiert wird.

§ 11. Abbildung von Flächen

11.1. Die Flächen, die wir im folgenden betrachten, sollen eineindeutige und stetige Bilder von ebenen Gebieten sein. Auf jeder dieser Flächen Φ soll es zwei Kurvenscharen geben, von denen jede die Fläche überdeckt und die die folgende Eigenschaft haben: Keine zwei Kurven derselben Schar haben einen Punkt gemeinsam, während zwei Kurven aus verschiedenen Scharen sich in einem und nur einem Punkt schneiden. In jedem Punkt der Fläche sollen ferner die beiden durch ihn gehenden Kurven nicht zusammenfallende Tangenten haben, und diese Tangenten sollen stetig mit dem Punkte variieren. Die Kurven dieser beiden Scharen werden im folgenden die Parameterkurven von Φ genannt.

Sind diese Bedingungen erfüllt, so kann man zeigen ([5], S. 177 oder [7], S. 6), dass die genannten Tangenten eine Tangentialebene der Fläche Φ in dem betreffenden Punkt bestimmen. Diese Tangentialebene enthält die Tangenten an sämtliche Kurven der Fläche durch den Punkt (und hängt stetig von ihm ab). Ferner liegt jede Grenzgerade einer Geraden durch zwei Flächenpunkte, die gegen den betrachteten Punkt konvergieren, in dieser Tangentialebene.

11.2. Es sei O ein Punkt auf einer solchen Fläche Φ und ω die Tangentialebene in O . Wir nehmen an, dass die durch O gehenden Parameterkurven k_1 und k_2 die Tangenten p und q in O haben. Es sei k_3 eine weitere Kurve durch O mit der von p und q verschiedenen Tangente r . Auf k_3 wählen wir einen gegen O konvergierenden Punkt R' , und durch R' legen wir die Parameterkurven k'_1 und k'_2 , die zusammen mit k_1 und k_2 ein Viereck $OP'R'Q'$ bestimmen, dessen Ecken sämtlich mit R' gegen O konvergieren (Fig. 19 a). Für $R' \rightarrow O$ haben die Seiten des Dreiecks $OP'R'$ die voneinander verschiedenen Grenzrichtungen p , q und r ; wählt man ein zu OR' gehöriges Element OR_1R_2 , so ergeben sich gemäss § 10 zu OP' und $P'R'$ gehörige projektive Repräsentanten OP_1P_2 und OQ_1Q_2 , deren gegenseitige Beziehung aus der Fig. 18 b entsprechenden Fig. 19 b hervorgeht. In dieser Figur liegen die Punkte R_2 , P_2 und Q_2 auf einer beliebigen, O nicht enthaltenden Geraden u in

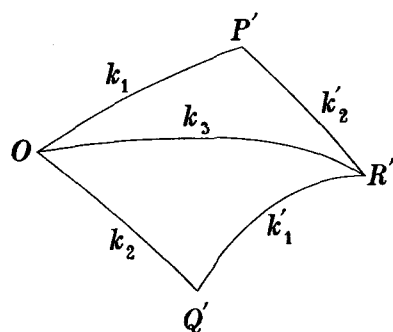


Fig. 19 a.

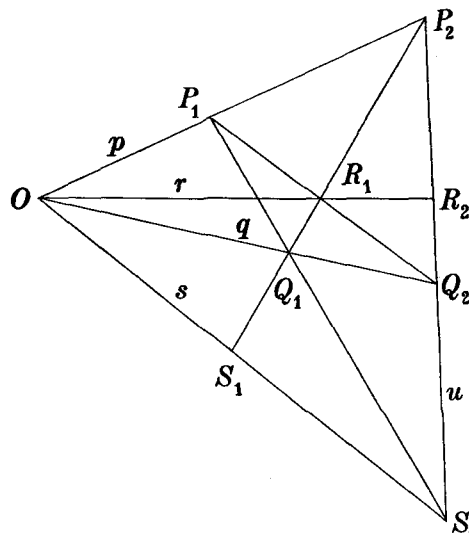


Fig. 19 b.

ω , und $P_1 R_1$ geht durch Q_2 , während $Q_1 R_1$ den Punkt P_2 enthält. Die Seiten des infinitesimalen Dreiecks $O R' Q'$ haben dieselben Grenzrichtungen wie die Seiten von $O P' R'$, und man erhält somit dieselbe Repräsentantenfigur wie für das erstgenannte Dreieck.

Weiter sehen wir, dass die Gerade $P' Q'$ eine bestimmte Grenzrichtung s und die Seite $P' Q'$ einen Repräsentanten $O S_1 S_2$ hat, da die Seiten $O P'$ und $O Q'$ bestimmte Grenzrichtungen und die Repräsentanten $O P_1 P_2$ und $O Q_1 Q_2$ haben. Aus Fig. 19 b ist die Konstruktion von s und dem Element $O S_1 S_2$ ersichtlich. Man bemerkt, dass die Geraden r und s mit p und q harmonisch verbunden sind.

Fig. 19 b gibt somit den Zusammenhang zwischen den Repräsentanten der Seiten und der Diagonalen des infinitesimalen Vierecks $O P' R' Q'$.

11.3. Wir betrachten nun Φ als „Parameterfläche“ und bilden sie durch die Funktion $\bar{R}' = \varphi(R')$ auf die Fläche $\bar{\Phi}$ so ab, dass der Punkt O in den Punkt \bar{O} übergeht. Die Abbildung sei in O stetig; ausserdem seien die folgenden Bedingungen erfüllt:

1) Die beiden Scharen der Parameterkurven auf Φ werden auf die beiden Scharen der Parameterkurven auf $\bar{\Phi}$ abgebildet.

2) Die Abbildungen der Parameterkurven k_1 und k_2 durch O sind in O infinitesimal projektiv.

Sind diese Bedingungen erfüllt, so nennen wir die Abbildung $\bar{R}' = \varphi(R')$ *infinitesimal projektiv* in O . Sind beide in 2) betrachteten Abbildungen ordinär, so heisst auch φ *ordinär*. Im folgenden wollen wir nur ordinäre Abbildungen untersuchen.

Die oben betrachtete Kurve k_3 , die in O die Tangente r hat, wird auf eine Kurve \bar{k}_3 durch \bar{O} abgebildet. Diese Abbildung betreffend beweisen wir den folgenden

SATZ 11.1. *Die Kurve k_3 wird im Punkte O infinitesimal projektiv und ordinär auf die Kurve \bar{k}_3 abgebildet.*

Die Kurven k_1 und k_2 gehen in die Kurven \bar{k}_1 und \bar{k}_2 über, die in \bar{O} die Tangenten \bar{p} und \bar{q} haben. Da diese Abbildungen in O ordinär sind, werden die Punkte P' und Q' auf Punkte \bar{P}' und \bar{Q}' abgebildet, die von \bar{O} verschieden sind, wenn R' genügend nahe bei O liegt. Die Parameterkurven durch \bar{P}' und \bar{Q}' schneiden sich in dem R' entsprechenden Punkt \bar{R}' , und dem Viereck $OP'R'Q'$ auf Φ entspricht dann das Viereck $\bar{O}\bar{P}'\bar{R}'\bar{Q}'$ auf $\bar{\Phi}$. Wir wollen nun zeigen, dass das Viereck auf $\bar{\Phi}$ für $R' \rightarrow O$ eine Repräsentantenfigur besitzt, die dasselbe Aussehen wie Fig. 19b hat.

Die Seiten $\bar{O}\bar{P}'$ und $\bar{O}\bar{Q}'$ haben auf den Tangenten \bar{p} und \bar{q} gelegene Repräsentanten $\bar{O}\bar{P}_1\bar{P}_2$ und $\bar{O}\bar{Q}_1\bar{Q}_2$, für welche \bar{P}_2 und \bar{Q}_2 auf einer beliebigen Geraden \bar{u} in $\bar{\omega}$ liegen. Die Seite $\bar{P}'\bar{Q}'$ hat dann auch einen auf einer Geraden \bar{s} gelegenen Repräsentanten $\bar{O}\bar{S}_1\bar{S}_2$, wo \bar{S}_2 auf \bar{u} liegt. Für das Dreieck $\bar{P}'\bar{Q}'\bar{R}'$ findet man dieselben Grenzrichtungen der Seiten wie für das Dreieck $\bar{O}\bar{P}'\bar{Q}'$, und man kann also dieselbe Repräsentantenfigur benutzen. Endlich haben die Seiten $\bar{O}\bar{P}'$ und $\bar{P}'\bar{R}'$ des Dreiecks $\bar{O}\bar{P}'\bar{R}'$ bestimmte Grenzrichtungen und Repräsentanten. Daher hat auch die Gerade $\bar{O}\bar{R}'$ eine bestimmte Grenzrichtung, und es gibt einen Repräsentanten $\bar{O}\bar{R}_1\bar{R}_2$ des infinitesimalen Abstandes $\bar{O}\bar{R}'$. Wir sehen, dass wir eine mit Fig. 19b übereinstimmende Figur erhalten, wobei wir aber hier im Gegensatz zu dem obigen die Gerade \bar{s} vor der Geraden \bar{r} finden.

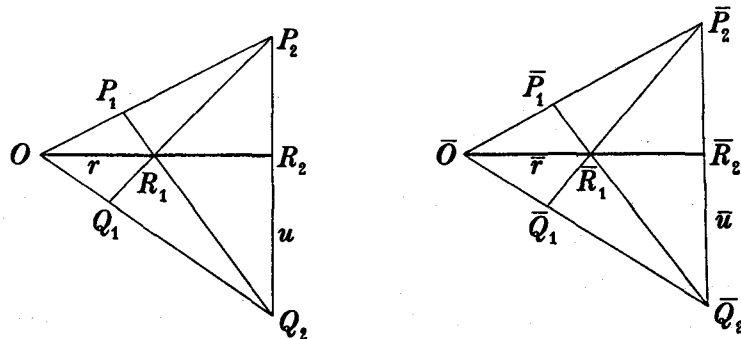


Fig. 20.

Was die Beziehung zwischen den abgeleiteten Elementen OR_1R_2 und $\bar{O}\bar{R}_1\bar{R}_2$ angeht, bemerken wir folgendes. Wir haben die Referenzgeraden u und \bar{u} frei in ω bzw. $\bar{\omega}$ gewählt. Dadurch sind P_2, Q_2, \bar{P}_2 und \bar{Q}_2 festgelegt. Wählen wir danach in ω ein Element OR_1R_2 , wo R_2 auf r liegt, so erhalten wir die Punkte P_1 und Q_1 , die durch die Abbildung von k_1

und k_2 in \bar{P}_1 bzw. \bar{Q}_1 übergeführt werden. In der Ebene $\bar{\omega}$ finden wir dann \bar{R}_1 als Schnittpunkt von $\bar{P}_1\bar{Q}_2$ und $\bar{Q}_1\bar{P}_2$, wodurch die Gerade \bar{r} und der Punkt \bar{R}_2 bestimmt ist. Da zusammengehörige Punkte P_1 und \bar{P}_1 (Q_1 und \bar{Q}_1) projektive Punktreihen auf p und \bar{p} (q und \bar{q}) durchlaufen (s. S. 115), entsprechen sich offenbar OR_1R_2 und $\bar{O}\bar{R}_1\bar{R}_2$ in der *Kollineation zwischen den Ebenen ω und $\bar{\omega}$* , die durch Vorgabe eines Systems zusammengehöriger Elemente OP_1P_2 , OQ_1Q_2 und $\bar{O}\bar{P}_1\bar{P}_2$, $\bar{O}\bar{Q}_1\bar{Q}_2$ oder nur durch entsprechende Vierecke $P_1P_2Q_2Q_1$ und $\bar{P}_1\bar{P}_2\bar{Q}_2\bar{Q}_1$ bestimmt ist.

Die Geraden r und \bar{r} durchlaufen *projektive Geradenbüschel*. Durchläuft R_1 einen Kegelschnitt in ω , in bezug auf welchen u die Polare des Punktes O ist, so durchläuft \bar{R}_1 den entsprechenden Kegelschnitt in $\bar{\omega}$. Sind ω und $\bar{\omega}$ speziell affine Ebenen mit den unendlich fernen Geraden u und \bar{u} , so findet man die gewöhnliche affine Beziehung zwischen den von O und \bar{O} ausgehenden abgeleiteten Vektoren in den Ebenen ω und $\bar{\omega}$.

11.4. Bilden wir die Parameterfläche Φ durch die Funktionen $\bar{R}' = \varphi(R')$ und $R^* = \varphi^*(R')$ auf *zwei Flächen $\bar{\Phi}$ und Φ^** ab, wobei O in die Punkte \bar{O} und O^* mit den Tangentialebenen $\bar{\omega}$ und ω^* übergeht, so kann man die Geradenkongruenz, die aus den Geraden $\bar{R}'R^*$ besteht, untersuchen. Entscheidend für die Eigenschaften dieser Kongruenz in der Umgebung der Geraden $\bar{O}O^*$ ist die Projektivität, die zwischen den Ebenenbüscheln mit der Achse $\bar{O}O^*$ besteht und die durch die projektiven Geradenbüschel, die die Geraden \bar{r} und r^* durchlaufen, bestimmt ist. Mit Hilfe der Resultate des vorigen Paragraphen über geradlinige Flächen könnten wir Sätze über die Geradenkongruenz aufstellen. Wir wollen jedoch nicht näher auf diese Untersuchungen eingehen.

11.5. Der oben betrachteten Fläche Φ entspricht dual ein System von ∞^2 Ebenen, die zu den in 11.1 genannten dualen Eigenschaften haben. Im allgemeinen sind diese Ebenen wieder Tangentialebenen einer Fläche $\bar{\Phi}$. Der Tangentialebene ω an Φ im Punkte O entspricht nun der Charakteristikpunkt \bar{O} in der „Tangentialebene“ $\bar{\omega}$ an die Fläche $\bar{\Phi}$. Dual zu der oben betrachteten infinitesimal projektiven Abbildung kann man hier einen gegen O konvergierenden Punkt R' auf eine gegen $\bar{\omega}$ konvergierende Ebene $\bar{\varrho}'$ abbilden. Einem Element OR_1R_2 auf einer Geraden r entspricht dann ein Element $\bar{\omega}\bar{\varrho}_1\bar{\varrho}_2$, das aus drei Ebenen besteht, die die r entsprechende Gerade \bar{r} enthalten. Wählt man in ω eine beliebige Referenzgerade u und eine entsprechende Gerade \bar{u} durch \bar{O} , so sind die Punkte in ω und die Ebenen durch \bar{O} einander in einer Korrelation zugeordnet, bei der u der Geraden \bar{u} entspricht.

Im nächsten Paragraphen werden wir uns mit dem Spezialfall beschäftigen, wo die Flächen Φ und $\bar{\Phi}$ zusammenfallen.

§ 12. Krümmung in einem Punkt einer beliebigen Fläche

12.1. Für eine ebene Kurve haben wir oben die Begriffe Punkt- und Geradenkrümmung eingeführt; wir wollen noch einen Krümmungsbegriff, nämlich die sogenannte *Incidenzkrümmung* definieren. Wir setzen voraus, dass die Kurve k in dem betrachteten Punkt P die Tangente p , in einem gegen P konvergierenden Punkt P' eine gegen p konvergierende Tangente p' hat, und dass ferner der Schnittpunkt von p mit p' für $P' \rightarrow P$ gegen P konvergiert. Man kann dann in der Umgebung von P die Abbildung der Kurve auf sich betrachten, indem man dem Punkt P' die Tangente p' zuordnet. Nehmen wir an, dass die Abbildung im Punkte P infinitesimal projektiv ist, so entstehen Krümmungselemente der Form PP_1P_2 , pp_1p_2 , und man spricht von der Incidenzkrümmung im Punkte P . Führen wir euklidische Metrik ein, so ist das zugehörige Grenzverhältnis zwischen dem Winkel (pp') und dem Abstand PP' identisch mit der gewöhnlichen Krümmung der Kurve in P .

Was die Beziehungen zwischen den drei Krümmungsbegriffen angeht, erwähnen wir, dass für konvexe Kurven die Existenz einer beliebigen der drei Krümmungen die Existenz der beiden anderen mit sich führt [13].

12.2. Wir wollen nun eine analoge Abbildung der Fläche Φ auf sich untersuchen, wobei wir voraussetzen, dass diese sowohl die in 11.1 genannten als auch die dazu dualen Eigenschaften hat. Es sei O ein Punkt der Fläche, ω die Tangentialebene in O . Wir wollen nun in der Umgebung von O einen Punkt R' auf die Tangentialebene ω' in diesem Punkt abbilden; wir nehmen an, dass diese Abbildung $\varrho' = \varphi(R')$ im Punkte O infinitesimal projektiv und ordinär ist (vgl. 11.5). Die Fläche heisst in diesem Fall im Punkte O *ordinär gekrümmt*.

Konvergiert nun R' längs einer Kurve k (mit der Tangente r in O) gegen O , so konvergiert ϱ' gegen ω , und es gibt eine r entsprechende Charakteristikgerade \bar{r} durch O . Die Kurve k zusammen mit den zugehörigen Tangentialebenen an Φ heisst ein *Flächenstreifen*. Zu diesem Flächenstreifen gehört dann ein abgeleitetes Element OR_1R_2 des infinitesimalen Abstandes OR' und ein abgeleitetes Element $\omega \varrho_1 \varrho_2$ des Winkels $(\omega \varrho')$. Das Element OR_1R_2 ist ordinär und liegt auf r , das Element $\omega \varrho_1 \varrho_2$, das nach Satz 11.1 ebenfalls ordinär ist, hat die Gerade \bar{r} zur Achse. Das System OR_1R_2 , $\omega \varrho_1 \varrho_2$ heisst ein *Flexionselement* des Flächenstreifens Punkte im O (vgl. [7], S. 9).

Wenn r und damit \bar{r} variiert, entsprechen die Elemente OR_1R_2 und $\omega \varrho_1 \varrho_2$ einander in einer *Korrelation*, in der die Punkte in ω den Ebenen durch O zugeordnet sind. Die Referenzpunkte R_2 werden auf einer beliebigen Geraden u in ω und die Referenzebenen ϱ_2 durch eine beliebige Gerade \bar{u} durch O gewählt. Die Korrelation ist durch Vorgabe der Flexions-

elemente für die Richtungen der Tangenten p und q an die Parameterkurven k_1 und k_2 durch O festgelegt.

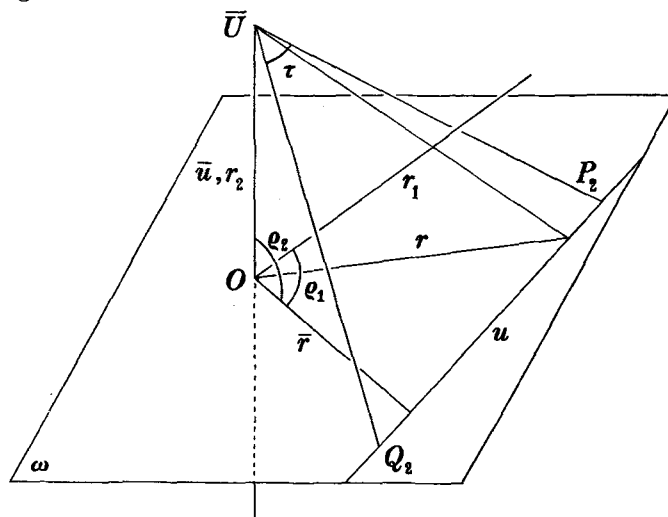


Fig. 21.

Die Korrelation kann analytisch dargestellt werden, wenn man homogene Punkt- und Ebenenkoordinaten (x, y, z, t) und (X, Y, Z, T) im Raume einführt. Als Ecken des Fundamentaltetraeders wählen wir die Punkte $O(0, 0, 0, 1)$, $P_2(1, 0, 0, 0)$ und $Q_2(0, 1, 0, 0)$ auf der Geraden u sowie einen beliebigen Punkt $\bar{U}(0, 0, 1, 0)$ auf der Geraden \bar{u} . Die Geraden u und \bar{u} sind somit gegenüberliegende Kanten des Tetraeders, und die Ebene ω hat die Gleichung $z = 0$. Die Korrelation erhält demnach die Form

$$\begin{aligned} X &= a_{11}x + a_{12}y \\ Y &= a_{21}x + a_{22}y \\ Z &= a_{33}t. \end{aligned} \tag{12.1}$$

Einem Punkt in ω mit den Koordinaten $(x, \beta, 0, \gamma)$ entspricht dann eine Ebene durch O mit der Gleichung

$$(a_{11}\alpha + a_{12}\beta)x + (a_{21}\alpha + a_{22}\beta)y + a_{33}\gamma z = 0. \tag{12.2}$$

12.3. Wir wollen die *Krümmung ebener Schnitte* von Φ untersuchen und nehmen also an, dass die Kurve k in einer Ebene μ durch \bar{u} (und r) liegt. Diese Ebene schneidet die Tangentialebene ρ' in R' in der Tangente r' von k in R' . Dann ist klar, dass die Kurve k in O eine *bestimmte Krümmung* (Incidenzkrümmung) mit dem Krümmungselement OR_1R_2 , rr_1r_2 haben muss, wo r_1 und r_2 die Spuren der Ebene μ in ρ_1 und ρ_2 bezeichnen. Speziell fällt also die Gerade r_2 in die Gerade \bar{u} . Sind r und \bar{r} von einander verschieden, so ist die Krümmung ordinär, im entgegengesetzten Fall erhält man ein Nullelement.

Da r eine beliebige Tangente an Φ und \bar{u} eine beliebige Gerade durch O ist, hat offenbar jeder durch O gehende Schnitt der Fläche eine bestimmte Krümmung in O .

Um die dem Punkte $R_1(\alpha, \beta, 0, 1)$ entsprechende Gerade r_1 zu bestimmen, findet man zunächst die Gleichung der Ebene ϱ_1 indem man $\gamma = 1$ in (12.2) einsetzt. Danach schneidet man diese Ebene mit der Ebene $\mu = \bar{u}, r$ wodurch man für r_1 die Parameterdarstellung

$$x = p\alpha, \quad y = p\beta, \quad a_{33}z = -p(a_{11}\alpha^2 + (a_{12} + a_{21})\alpha\beta + a_{22}\beta^2) \quad (12.3)$$

erhält. Hieraus geht hervor, dass sich das Krümmungselement $O R_1 R_2, r r_1 r_2$ nicht ändert, wenn man in (12.1) die Koeffizienten a_{12} und a_{21} durch ihren Mittelwert $\frac{1}{2}(a_{12} + a_{21})$ ersetzt. Die Korrelation (12.1) geht hierbei in eine Polarität über, da die Ebene (12.2) dann die Polarebene des Punktes $(\alpha, \beta, 0, \gamma)$ in bezug auf die Fläche

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + (a_{12} + a_{21})xy + 2a_{33}zt = 0 \quad (12.4)$$

ist.

Diese Fläche zweiter Ordnung Ψ_2 hat dann die Eigenschaft, dass sie jede Ebene durch die Gerade \bar{u} in einem Kegelschnitt schneidet, der in O dieselbe Krümmung hat wie die Schnittkurve mit Φ .

Die Fläche Ψ_2 kann dann als eine Meusniersche Fläche für jede Tangentenrichtung durch O aufgefasst werden, und man kann sagen, dass sie Φ im Punkte O oskuliert. Die Fläche geht durch den Punkt \bar{U} und hat in diesem Punkt die Koordinatenebene $\tau = \bar{U}, u$ zur Tangentialebene. Da \bar{U} ein beliebiger Punkt der beliebig gewählten Geraden \bar{u} durch O , und u eine beliebige Gerade in ω ist, so ist also das Element (\bar{U}, τ) ein beliebiges Element im Raum, wo nur \bar{U} nicht auf ω liegen und τ den Punkt O nicht enthalten darf.

Wir haben also gezeigt:

SATZ 12.1. *Hat die Fläche Φ ordinäre Krümmung im Punkte O , so kann man durch ein beliebiges Element (\bar{U}, τ) eine und nur eine Fläche zweiter Ordnung Ψ_2 legen, die Φ im Punkte O oskuliert.*

12.4. Wir haben oben erwähnt, dass die Tangente r der Kurve k im Punkte O und die entsprechende Charakteristikgerade \bar{r} durch die Korrelation (12.1) projektiv auf einander bezogen sind. Die Doppelstrahlen dieser Projektivität sind gleichzeitig *Doppelstrahlen der von der Polarität in ω erzeugten Involution*, nämlich die Geraden, in der die Fläche Ψ_2 die Tangentialebene ω schneidet. Es scheint nicht leicht zu sein, einen geometrischen Beweis dafür zu führen, dass die Projektivität faktisch mit der Involution übereinstimmt, d. h. dass *r und \bar{r} konjugierte Geraden sind*. Mit analytischen Hilfsmitteln kann man indessen diese Behauptung beweisen (vgl. [7], S. 35).

Wir führen im Raum eine euklidische Metrik und ein rechtwinkliges Koordinaten-

system ein, dessen XY -Ebene die Ebene ω und dessen Nullpunkt O ist. In diesem System kann Φ durch eine Gleichung der Form $z = F(x, y)$ dargestellt werden, wo gemäss den Voraussetzungen über Φ in einer Umgebung von O stetig variierende partielle Ableitungen F_x und F_y existieren. Es sei k_1 die in der XY -Ebene gelegene Parameterkurve, und ferner OP_1P_2 , $\omega \pi_1 \pi_2$ das zugehörige Flexionselement, wenn der Punkt P' längs k_1 gegen O konvergiert. Die XZ -Ebene schneidet dieses Element in einem Krümmungselement von k_1 in O ; infolgedessen existiert die zweite Ableitung F_{xx} in diesem Punkt. Entsprechend schneidet die YZ -Ebene $\omega \pi_1 \pi_2$ in einem Element $q_1 q_2$. Dieses Element repräsentiert den infinitesimalen Winkel zwischen der Y -Achse und der Geraden, in der die YZ -Ebene die Tangentialebene π' in P' schneidet. Es existiert dann ein bestimmtes Grenzverhältnis zwischen diesem Winkel und dem Abstand OP' , wenn P' längs k_1 gegen O konvergiert. Dies ist gleichbedeutend damit, dass im Punkte O die zweite Ableitung F_{yx} existiert. In entsprechender Weise sieht man, dass im Punkte O Ableitungen F_{yy} und F_{xy} existieren. Aber nach einem Satz der Analysis gilt dann $F_{xy} = F_{yx}$ (s. z. B. Haupt-Aumann-Pauc, *Differential- und Integralrechnung*, 2. Bd., S. 152, Berlin 1950).

Mit Hilfe dieser Relation zeigt man leicht in bekannter Weise, dass einander entsprechende Tangentenrichtungen r und \bar{r} konjugiert sind. In den Gleichungen (12.1) gilt somit $a_{12} = a_{21}$ d. h. die betrachtete Korrelation ist in der Tat die oben genannte Polarität. Abgesehen davon, dass es von Interesse ist, dass man die Existenz der Fläche Ψ_2 ohne Kenntnis des involutorischen Zusammenhangs zwischen den Richtungen r und \bar{r} beweisen kann, sind die Ausführungen in 12.3 also als überflüssig anzusehen.

12.5. Ist die betrachtete Abbildung der Punkte R' auf die Tangentialebenen ϱ' in der Umgebung von O eineindeutig, so kann man *umgekehrt* die Abbildung der Tangentialebenen ϱ' auf die Punkte R' betrachten. Man findet dann für Φ Resultate, die den oben angegebenen *dual* entsprechen. Ein Flächenstreifen ist selbstdual, und einem Flexionselement entspricht wieder ein Flexionselement, wobei man jedoch Punkte und Ebenen zu vertauschen hat. Die Polarität (12.1) bleibt dieselbe, und auch die Meusniersche Fläche bleibt ungeändert, nämlich die Fläche (12.4).

Wählt man also in der Tangentialebene ω einer solchen Fläche Φ einen beliebigen Punkt C (ausserhalb der eventuellen Doppelstrahlen der Involution des Tangentenbüschels durch O), so hat die Kegelfläche mit dem Scheitel C , die Φ umschrieben ist, den entsprechenden Ψ_2 umschriebenen Kegel Γ_2 zum Krümmungskegel. Der Scheitel C und die Ebene γ , die den Berührungskegelschnitt mit Ψ_2 enthält, sind Pol und Polare in bezug auf Ψ_2 , entsprechen also einander in der Polarität (12.1), und die Richtungen der Schnittgeraden r von γ mit ω und der Erzeugenden $CO = \bar{r}$ sind konjugiert. Endlich schneidet γ die Fläche Ψ_2 in einem Krümmungskegelschnitt ihrer Schnittkurve mit Φ .

Literaturverzeichnis

- [1]. G. BOL, *Projektive Differentialgeometrie*, 1. Teil. Göttingen 1950.
- [2]. E. BOMPIANI, Invariante d'intersezione di due curve sghembe. *Atti d. Accad. dei Lincei*, (6), 14 (1931), 456–461.
- [3]. JOHS. HJELMSLEV, *Grundprincipperne for den infinitesimale Descriptivgeometri*. København 1897.
- [4]. —, Contribution à la géométrie infinitésimale de la courbe réelle. *Oversigt o.d. Kgl. Danske Vidensk. Selsk. Forh.*, 1911. N° 5.
- [5]. —, *Darstellende Geometrie*. Leipzig 1914.
- [6]. —, Introduction à la théorie des suites monotones. *Oversigt o. d. Kgl. Danske Vidensk. Selsk. Forh.*, 1914. N° 1.
- [7]. —, Grundlag for Fladernes Geometrie. *Kgl. Danske Vidensk. Selsk. Skr.* 7, XII, I (1914).
- [8]. —, Infinitesimale Elemente im projektiven Raum. *9. skand. Mat. kongres, beretn.*, Helsingfors 1938.
- [9]. —, Om Kurverne i et Nulsystem. *Norsk Mat. Tidsskr.*, 1941.
- [10]. —, *Grundlag for den projektive Geometri*. København 1943.
- [11]. —, Eksempler på geometriske Undersøgelser over Integrankurver i Rummet. *Festskr. til J. F. Steffensen*, København 1943.
- [12]. —, Die Geometrie der schwachen Figuren. *D. Kgl. Danske Vidensk. Selsk. mat.-fys. Medd.* XX, 21 (1943).
- [13]. B. JESSEN, Om konvekse Kurvers Krumning. *Mat. Tidsskr. B*, 1929, S. 50.
- [14]. E. KRUPPA, Über die dualen Gegenstücke zum Meusnierschen und Eulerschen Satz der Flächentheorie. *Rendiconti d. circ. mat. Palermo*, II, b. 1 (1952).