ZUR REKURSIVEN FUNKTIONENTHEORIE

VON

HERBERT MESCHKOWSKI

Berlin-Dahlem

I. Einleitung

In den letzten Jahren sind Versuche unternommen worden, einen konstruktiven Aufbau der Analysis zu gewinnen durch Benutzung der Theorie der rekursiven Funktionen. R. L. Goodstein (Literaturverzeichnis [3], [4], [5]) hat eine Reihe von Sätzen aufgestellt, die als Analoga gelten können für bekannte Aussagen der klassischen Analysis. Er beschränkt sich dabei auf rationale Zahlen als Argument. Der Gedanke liegt nahe, diese Ergebnisse zu erweitern und auch „berechenbare" irrationale Zahlen zuzulassen. Wie aus einer Arbeit von Specker [2] hervorgeht, stehen einem solchen Verfahren aber erhebliche Schwierigkeiten entgegen. Er zeigt u. a. folgendes:

Es sei $\mathfrak{R}_1$ die Klasse der primitiv rekursiven reellen Zahlen[1], $\mathfrak{R}_2$ die Klasse der primitiv rekursiven Dezimalbrüche, $\mathfrak{R}_3$ die der primitiv rekursiven Schnitte. Dann gilt $\mathfrak{R}_1 \supset \mathfrak{R}_2 \supset \mathfrak{R}_3$, wobei die auftretenden Inklusionen echt sind. Damit hängt es zusammen, dass eine Reihe von Sätzen der klassischen Analysis nicht ohne weiteres in der „rekursiven" gelten.

Im Kapitel III der vorliegenden Arbeit sollen einige weitere Aussagen über (allgemein) rekursive Zahlen gemacht werden. Es wird insbesondere gezeigt, dass die Klasse $\mathfrak{R}$ der rekursiven reellen Zahlen eine wohlbestimmte Art von „Intervallschachtelung" zulässt. Damit ist die Voraussetzung geschaffen zur Erweiterung einiger Sätze der Theorie von Goodstein (Kap. IV). Es handelt sich dabei um Aussagen über stetige Funktionen. Die Goodsteinsche Theorie enthält eine Reihe von Sätzen über differentiierbare Funktionen, kann aber durch eine saubere Fassung des Stetigkeitsbegriffes noch ergänzt werden durch Sätze, die als Analoga zu bekannten klassischen Theoremen gelten können.

---

[1] Die Definitionen dieser Begriffe folgen im Kapitel II dieser Arbeit.

II. Definitionen

Erklärung I. Eine Folge $\Phi(n)$ rationaler Zahlen heisst rekursiv[1] (bzw. primitiv rekursiv), wenn

$$\Phi(n) = \frac{\varphi(n) - \psi(n)}{\chi(n)},$$

und die Folgen $\varphi(n)$, $\psi(n)$ und $\chi(n)$ (primitiv) rekursive Funktionen sind.

Erklärung II. Eine (primitiv) rekursive Folge rationaler Zahlen heisst (primitiv) rekursiv konvergent, wenn es eine (primitiv) rekursive Funktion $N(n)$ gibt, so dass[2]

$$\Phi(\mu) - \Phi(\nu) = 0\,(m)$$

gilt für

$$\mu, \nu \geq N(m).$$

$\Phi(n)$ heisst eine rekursive Nullfolge, wenn es eine rekursive Funktion $N(m)$ gibt, so dass $\Phi(n) = 0\,(m)$ für $n \geq N(m)$.

Erklärung III. Eine (primitiv) rekursive und (primitiv) rekursiv konvergente Folge rationaler Zahlen heisst ein (primitiv) rekursiver Schnitt, wenn es eine (primitiv) rekursive Beziehung (in m und n) gibt, die dem Prädikat

$$\frac{m}{n} > \Phi(\nu) \quad \text{für } \nu \geq N(n) \tag{1}$$

äquivalent ist.

Es ist bekannt, dass die „Faktoriellenentwicklungen" diese Eigenschaft haben ([1] S. 78 ff): Ist nämlich $\chi(\nu)$ primitiv rekursiv und

$$\Psi(n) = \sum_{\nu=0}^{n} \frac{\chi(\nu)}{\nu!}, \qquad \chi(\nu) \leq \nu \dot{-} 1,$$

so ist

$$[\Psi(n^*) \cdot n] = \left[\frac{S_n}{(n \dot{-} 1)!}\right] \quad \text{für } n^* \geq n,$$

wobei

$$S_n = \sum_{\nu=0}^{n} \frac{\chi(\nu)\, n!}{\nu!}.$$

(1) ist dann der primitiv rekursiven Beziehung

[1] „Rekursiv" ohne den Zusatz „primitiv" bedeutet in dieser Arbeit stets „allgemein rekursiv".

[2] Für $|a| < \frac{1}{10^m}$ sagen wir auch nach Goodstein: $a = 0\,(m)$.

$$m \geq \left[\frac{S_n}{(n \dot{-} 1)\,!}\right] + 1$$

äquivalent.

Umgekehrt entspricht jedem „primitiv rekursiven Schnitt" eine primitiv rekursive „Faktoriellenentwicklung" ([1] S. 190 ff.). Diese Aussagen bleiben sinngemäss gültig, wenn man überall die primitive Rekursivität durch „allgemeine Rekursivität" ersetzt.

Es liegt der Gedanke nahe, eine konstruktive Analysis aufzubauen für die Klasse der primitiv rekursiven (oder der allgemein rekursiven) Schnitte. Das ist aber deshalb nicht gut möglich, weil bereits die Summenbildung aus dieser Klasse herausführt. Das folgt (bei der Voraussetzung der Rekursivität) aus Satz 2 und 3 von Specker [2] und ergibt sich auch aus einem sehr einfachen Beispiel in Kapitel III.

Es wird sich aber zeigen, dass jede rekursive und rekursiv konvergente Folge rationaler Zahlen zwar nicht für alle, aber doch für gewisse beliebig grosse Nenner eine Art „Schnitteigenschaft" aufweist.

Notieren wir vorher noch die Definition des (primitiv) rekursiven Dezimalbruchs:

Erklärung IV. Eine Folge

$$\Phi(n) = \sum_{\nu=0}^{n} \frac{\varphi(\nu)}{10^\nu}$$

heisst ein (primitiv) rekursiver Dezimalbruch, wenn die Funktion $\varphi(\nu)$ (primitiv) rekursiv ist und $\varphi(\nu) \leq 9$ gilt.

III. Berechenbare Zahlen

Es sei $\Phi(\nu)$ eine rekursive und rekursiv konvergente Folge. Es ist also

$$\Phi(\nu) = \frac{\varphi(\nu) - \psi(\nu)}{\chi(\nu)},$$

wobei $\varphi(\nu)$, $\psi(\nu)$ und $\chi(\nu)$ rekursive Funktionen sind. Es gibt ferner eine rekursive Funktion $N(k)$, so dass aus $n, m \geq N(k)$ folgt $\Phi(n) - \Phi(m) = 0(k)$. Also gilt

$$k \cdot \Phi(\nu) = k \cdot \Phi(N(k)) + k \cdot 0(k)$$

für $\nu \geq N(k)$, und $k \cdot 0(k) < \frac{1}{10}$ für $k \geq 1$. Falls nun die erste Dezimale von $k \cdot \Phi(N(k))$ von 0 und 9 verschieden ist,

$$\alpha(k) = [10 \cdot k \cdot \Phi(N(k))] - [k\,\Phi(N(k))] \neq 0, \neq 9, \tag{2}$$

so gilt wegen $k \cdot 0(k) < \frac{1}{10}$:

$$l = [k \cdot \Phi(N(k))] = [k\,\Phi(\nu)]$$

für $\nu \geq N(k)$, also

$$\frac{l}{k} \leq \Phi(\nu) < \frac{l+1}{k}. \tag{3}$$

Falls $\alpha(k) = 0$ oder 9, so führen wir die primitiv rekursive Funktion

$$2\left\langle \frac{p}{q} \right\rangle = \operatorname{Max} \eta\,[\eta\, q \leq 2\,p \wedge \eta \text{ ungerade}]$$

ein; $\left\langle \frac{p}{q} \right\rangle$ ist also der Abstand der Zahl $\frac{p}{q}$ von der nächstkleineren Zahl von der Form $g + \frac{1}{2}$, wo g ganz.

Dann wird:

$$\langle k \cdot \Phi(\nu) \rangle = \langle k \cdot \Phi(N(k)) \rangle = \lambda.$$

Es wird also:

$$\lambda \leq k \cdot \Phi(\nu) < \lambda + 1 \quad \text{für } \nu \geq N(k),$$

und wenn wir setzen

$$\lambda = \frac{2\mu + 1}{2},$$

so haben wir

$$\frac{2\mu+1}{2k} \leq \Phi(\nu) < \frac{2\mu+3}{2k}. \tag{4}$$

Beschränken wir uns auf den Nenner von der Form 10^{ϱ}, so erhalten wir

Satz 1 (Über die Intervallschachtelung). *Es sei $\Phi(\nu)$ eine rekursive Folge rationaler Zahlen, $N(k)$ eine rekursive Funktion und*

$$\Phi(\nu) - \Phi(\mu) = 0(k) \text{ für } \nu \geq N(k), \quad \mu \geq N(k).$$

Ferner sei[1]

$$\beta_1(\varrho) = \begin{cases} 1, & \text{falls } \alpha(10^{\varrho}) = 0 \text{ oder } 9, \\ 0 & \text{sonst,} \end{cases} \qquad \beta_2(\varrho) = \overline{sg}\,\beta_1(\varrho),$$

wobei $\alpha(k)$ die durch (2) *definierte rekursive Funktion ist, und*

$$\begin{aligned} a_{\varrho} &= \beta_2(\varrho)\frac{[10^{\varrho} \cdot \Phi(N(10^{\varrho}))]}{10^{\varrho}} + \beta_1(\varrho)\frac{\langle 10^{\varrho} \cdot \Phi(N(10^{\varrho}))\rangle}{10^{\varrho}}, \\ b_{\varrho} &= \beta_2(\varrho)\frac{[10^{\varrho}\,\Phi(N(10^{\varrho}))] + 1}{10^{\varrho}} + \beta_1(\varrho)\frac{\langle 10^{\varrho}\,\Phi(N(10^{\varrho}))\rangle + 1}{10^{\varrho}}. \end{aligned} \tag{5}$$

[1] $\overline{sg}\,f(n) = 1 - sg\,f(n)$; also $\overline{sg}\,f(n) = 1$, falls $f(n) = 0$,
$= 0$ sonst.

Dann gilt

$$a_\varrho \leq a_{\varrho+1} < b_{\varrho+1} \leq b_\varrho$$

und

$$a_\varrho \leq \Phi(\sigma) < b_\varrho \quad \text{für } \sigma \geq N(10^\varrho). \tag{6}$$

Es ist zu beachten, dass der im Nenner des zweiten Bruches von (5) stehende Ausdruck $\langle 10^\varrho \cdot \Phi(N(10^\varrho)) \rangle$ keine ganze Zahl ist, sondern ein Bruch mit dem Nenner 2.

Die durch die Definition von β_1 und β_2 getroffene Fallunterscheidung und die Beschränkung auf ungerade Zähler $2\mu+1$ bzw. $2\mu+3$ in (4) ist nicht zu vermeiden. Man denke etwa an eine Folge, die von beiden Seiten gegen 1 konvergiert. Man kann dann kein Intervall $[1, 1+10^{-\nu}]$ angeben, in dem „fast alle"[1] Zahlen der Folge liegen.

Um die Eigenschaften der rekursiven und rekursiv konvergenten Folgen gegen die mit der vollen Schnitteigenschaft abzugrenzen, sollen einige Beispiele untersucht werden.

Dazu betrachten wir die bei Peter ([1] S. 152 bzw. 187) definierte primitiv rekursive Funktion

$$\varrho(m, n) = \tau(m, m, n).$$

Es wird dort gezeigt, dass das Prädikat

$$(Ex)\,[\varrho(m, x) = 0]$$

nicht entscheidbar ist.[2] Definieren wir nun die Funktionen

$$\psi(m, n) = \begin{cases} 0, & \text{falls } (x)\,[x \leq n \rightarrow \varrho(m, x) \neq 0] \\ 1 & \text{sonst} \end{cases} \tag{7}$$

und

$$\chi(m, n) = \overline{sg}\,\psi(m, n). \tag{8}$$

Aus der Definition folgen die Ungleichungen

$$\psi(m, n+1) \geq \psi(m, n); \qquad \chi(m, n+1) \leq \chi(m, n). \tag{9}$$

Mit Hilfe dieser Funktionen definieren wir die Folgen

---

[1] „fast alle" nach der bekannten Definition von Kowalewski: „alle mit Ausnahme von höchstens endlich vielen".

[2] Dieses Prädikat ist nämlich der Aussage gleichwertig: m ist die Gödel-Nummer einer allgemein rekursiven Funktion, und n ist die Gödel-Nummer der „Ableitung" dieser Funktion für den Argumentwert m.

Mit Hilfe von $\varrho(m, n)$ wird bei Peter ([1] S. 187) eine primitiv rekursive Folge rationaler Zahlen definiert, die monoton und beschränkt, aber *nicht* rekursiv konvergent ist.

$$u_n^{(m)} = \sum_{\nu=0}^{n} \frac{\chi(m, \nu)}{\nu!} \qquad t_n^{(m)} = \sum_{\nu=1}^{n} \frac{\chi(m, \nu)}{\nu!}, \tag{10}$$

$$v_n^{(m)} = \sum_{\nu=0}^{n} \frac{\psi(m, \nu)}{10^\nu} \qquad w_n^{(m)} = 1 - v_n^{(m)}. \tag{11}$$

Für jedes feste m ist $u_n^{(m)}$ und $w_n^{(m)}$ primitiv rekursiv und primitiv rekursiv konvergent.

Die Folgen $u_n^{(m)}$ und $t_n^{(m)}$ haben darüber hinaus als „Faktoriellenfolgen" die volle Schnitteigenschaft. Es ist aber nicht entscheidbar, für welches m $u_n^{(m)}$ gegen eine rationale Zahl konvergiert.

Das ist bei einer Faktoriellenentwicklung dann und nur dann der Fall, wenn von einer gewissen Nummer an der Koeffizient 0 wird. Das heisst hier: $u_n^{(m)}$ konvergiert genau dann gegen eine rationale Zahl, wenn m die Gödel-Nummer einer allgemein rekursiven Zahl ist. Das ist aber nicht entscheidbar ([1] S. 177). Ebenso -st es mit dem Prädikat $(E\,n)\, w_n^{(m)} < 1$. Es gilt also:

S a t z 2. *Es seien* $u_n^{(m)}$ *und* $w_n^{(m)}$ *die durch* (10) *und* (11) *definierten Folgen rationaler Zahlen. Dann sind die Prädikate*

$$(E\,n)\,(E\,p)\,(E\,q)\,[p = q \cdot u_n^{(m)} \rightarrow p = q \cdot u_{n+1}^{(m)}]$$

und

$$(E\,n)\,[w_n^{(m)} < 1]$$

nicht allgemein rekursiv in m.

Daraus folgt, dass es kein allgemeines Rechenverfahren geben kann, durch das entschieden werden könnte, ob eine vorgegebene rekursive und rekursiv konvergente Folge rationaler Zahlen gegen eine rationale Zahl konvergiert.

Dieses Beispiel der Folge $w_n^{(m)}$ zeigt, dass es rekursive und rekursiv konvergente Folgen gibt, denen kein rekursiver Dezimalbruch zugeordnet werden kann: Es ist ja nicht entscheidbar, ob die Stelle vor dem Komma 0 oder 1 ist. — Für primitiv rekursive Folgen finden sich ähnliche, auf anderem Wege gewonnene Ergebnisse bereits bei Specker [2].

Fassen wir zusammen: Die rekursiven und rekursiv konvergenten Faktoriellenentwicklungen haben zwar vor der allgemeineren Klasse der rekursiven und rekursiv konvergenten Folgen die Schnitteigenschaft und die Möglichkeit der Entwicklung eines äquivalenten Dezimalbruches voraus. Die Frage, ob ein rationaler Grenzwert existiert, ist auch bei diesen Folgen nicht generell zu entscheiden. Die Summe zweier rekursiver Schnitte (Faktoriellenentwicklungen) ist nicht unbedingt wieder ein rekursiver Schnitt, aber (wie man sich leicht überzeugt) die Summe zweier rekursiver und rekursiv konvergenter Folgen ist wieder eine Folge dieser Art.

Da diese Folgen wenigstens die Eigenschaft der Intervallschachtelung zulassen (Satz 1), erscheint es sinnvoll, diese Folgen zur Fundierung einer konstruktiv begründeten Analysis heranzuziehen.

ERKLÄRUNG V. Eine rekursive und rekursiv konvergente Folge rationaler Zahlen heisst eine rekursive reelle Zahl. Zwei reelle Zahlen heissen äquivalent:

$$\{\psi(\nu)\} \approx \{\varphi(\nu)\},$$

wenn $\{\varphi(\nu) - \psi(\nu)\}$ eine rekursive Nullfolge ist.[1]

Die Äquivalenz rekursiver reeller Zahlen ist offenbar eine symmetrische, transitive und reflexive Beziehung.

Falls $\{\psi(\nu)\} \approx \left\{\frac{p}{q}\right\}$, wobei $\left\{\frac{p}{q}\right\}$ eine Folge ist, deren sämtliche Glieder gleich der rationalen Zahl $\frac{p}{q}$ sind, so sagen wir auch: $\{\psi(\nu)\}$ konvergiert rekursiv gegen $\frac{p}{q}$.

IV. Relative und absolute Stetigkeit

Goodstein hat in mehreren Arbeiten die Grundzüge einer rekursiven Funktionentheorie für Funktionen mit rationalem Argument entwickelt. Wegen der Grundbegriffe sei auf die Arbeiten [3], [4], [5] verwiesen. Wir wollen hier nur zwei der wichtigsten Definitionen wiederholen[2]:

ERKLÄRUNG VI. Eine rekursive Funktion $f(n,x)$ einer positiven ganzen Variablen n und einer rationalen Variablen x heisst rekursiv konvergent in n, für ein Intervall $a \leq x \leq b$, wenn es eine rekursive Funktion $N(k,x)$ gibt, so dass $N(k+1,x) \geq \geq N(k,x) \geq k$ und für $n_1 \geq n_2 \geq N(k,x)$ und $a \leq x \leq b$

$$f(n_1, x) - f(n_2, x) = 0\,(k)$$

gilt.

[1] Man könnte daran denken, nicht die einzelne rekursive Folge, sondern die Klasse der äquivalenten Folgen als rekursive reelle Zahl zu definieren. Es bestehen aber Bedenken, den Begriff der reellen Zahl auf eine solche Mengendefinition zu begründen, weil es nicht immer entscheidbar ist, ob zwei vorgegebene rekursive und rekursiv konvergente Folgen äquivalent sind: $w_n^{(m)}$ und $\{1\}$ z. B.

[2] Wir setzen rekursiv (= allgemein rekursiv) an Stelle von primitiv rekursiv. Im übrigen gelten sinngemäss die Bezeichnungen von [4] S. 172.

ERKLÄRUNG VII.[1] $f(n, x)$ heisst relativ stetig in $[a, b]$, wenn es eine rekursive, Funktion $M(k; x_1, x_2)$ und eine rekursive, streng monotone Funktion $c(k)$ gibt, so dass für alle x_1, x_2, für die $a \leq x_1 \leq x_2 \leq b$ und $x_1 - x_2 = o(c(k))$ gilt und für alle $n \geq M(k, x_1, x_2)$ folgt

$$f(n, x_1) - f(n, x_2) = 0\,(k).$$

SATZ 3. *Es gibt relativ stetige Funktionen, die nicht beschränkt sind.*

Zum Beweis geben wir ein Beispiel an, bei dem wir die Dezimalbruchentwicklung der Zahl e heranziehen. Wir definieren die primitiv rekursiven Folgen[2]

$$a_n = \frac{[e \cdot 10^{n-1}]}{10^{n-1}}, \qquad b_n = \frac{[e \cdot 10^{n-1}] + 1}{10^{n-1}}.$$

Jetzt wird im Intervall $2 \leq x \leq 3$ $f(n, x)$ durch Streckenzüge erklärt:

$$f(1, x) = \begin{cases} \dfrac{x - a_1}{a_2 - a_1} & \text{für } a_1 \leq x \leq a_2 \\ 1 & \text{für } a_2 \leq x \leq b_2 \\ \dfrac{x - b_1}{b_2 - b_1} & \text{für } b_2 \leq x \leq b \end{cases}$$

und

$$f(n, x) = \begin{cases} = f(n-1, x) & \text{für } a_1 \leq x \leq a_n \text{ und } b_n \leq x \leq b_1 \\ \dfrac{x - a_n}{a_{n+1} - a_n} + (n-1) & \text{für } a_n \leq x \leq a_{n+1} \\ n & \text{für } a_{n+1} \leq x \leq b_{n+1} \\ \dfrac{x - b_n}{b_{n+1} - b_n} + (n-1) & \text{für } b_{n+1} \leq x \leq b_n. \end{cases}$$

Diese definierte Funktion $f(n, x)$ ist primitiv rekursiv und primitiv rekursiv konvergent[3] und relativ stetig. Das erkennt man sofort, wenn man beachtet, dass

$$f(n + m, x) = f(n, x)$$

gilt für

$$x \leq \frac{[e \cdot 10^{n-1}]}{10^{n-1}} \quad \text{oder } x \geq \frac{[e \cdot 10^{n-1}] + 1}{10^{n-1}}.$$

---

[1] Bei GOODSTEIN [4] S. 174 wird die Funktion $M(n, x_1, x_2)$ nicht erwähnt. Es heisst: „for majorant n". Aus der Definition dieses Begriffes [4] S. 173 geht aber hervor, dass diese Schranke auch von x_1, x_2 abhängen kann. Es ist deshalb zur Vermeidung von Missverständnissen angebracht, diese Abhängigkeit der Stetigkeit zum Ausdruck zu bringen.

[2] Wegen der primitiven Rekursivität vgl. [1] S. 78.

[3] Die Definition der rekursiven Konvergenz erhält man aus Erklärung 6, wenn man das Wort „rekursiv" jedesmal durch „primitiv rekursiv" ersetzt.

Für jede rationale Zahl ist also rekursive Konvergenz und relative Stetigkeit gesichert. Dabei ist allerdings die rekursive Konvergenz nicht gleichmässig, und auch bei der Stetigkeit hängt das „majorante" n, für das

$$f(n, x) - f(n, y) = 0\ (k)$$

gilt, von x, y ab. Das ist aber bei der Definition der relativen Stetigkeit ausdrücklich zugelassen. Es ist deshalb angebracht, den Begriff der relativen Stetigkeit durch einen schärferen zu ersetzen.

ERKLÄRUNG VIII. Eine relativ stetige Funktion heisst absolut stetig, wenn die rekursive Konvergenz gleichmässig ist.[1]

SATZ 4. *Ist $f(n,x)$ absolut stetig, so gibt es rekursive Funktionen $N_1(k)$ und $c_1(k)$, so dass*

$$f(n, x) - f(n, y) = 0\ (k)$$

gilt für

$$n \geq N_1(k)$$

und

$$x - y = 0\ (c_1(k)).$$

BEWEIS: Nach Voraussetzung ist $f(n, x)$ rekursiv konvergent, d. h. es gibt eine rekursive Funktion $N(k)$, so dass

$$f(n_1 x) - f(n_2, x) = 0\ (k)$$

gilt für $n_\nu \geq N(k)$. Ferner gilt wegen der relativen Stetigkeit

$$f(x, n) - f(n, y) = 0\ (k)$$

für

$$x - y = 0\ (k)$$

und

$$n \geq M(k; x, y).$$

Wir haben zu zeigen, dass es unter den gemachten Voraussetzungen eine von x, y, unabhängige Schranke für n gibt. Falls $M(k; x, y) \leq N(k+1)$ gilt für alle x, y des Intervalls, kann man

$$N_1(k) = N(k+1)$$

setzen und

$$c(k) = c_1(k).$$

Ist

$$M(k, x, y) > N(k+1), \tag{12}$$

so setzen wir

[1] Wenn also $N(k, x)$ in Erklärung 6 nur von k, nicht aber von x abhängt. — Beispiele für „absolut stetige" Funktionen sind z. B. $E(n, x)$ und sin (n, x) in [4].

$$f(n, x) - f(n, y) = (f(n, x) - f(M(x, y), x)) + (f(M(x, y), x) - f(M(x, y), y)) + \\ + (f(M(x, y), y) - f(n, y)).$$

Wegen (12) sind der erste und der dritte Summand gleich $0(k+1)$, und, wenn $x - y = 0(c(k+1))$, gilt das auch für den zweiten Summanden. Also wird:

$$f(n, x) - f(n, y) = 3.0(k+1) = 0(k). \tag{13}$$

(13) gilt für

$$n \geq N_1(k) = N(k+1)$$

und

$$x - y = 0(c(k+1)) = 0(c_1(k)), \qquad \text{q.e.d.}$$

Satz 5. *Ist $f(n, x)$ absolut stetig, so ist für jede rekursive und rekursiv konvergente Folge x_n die Folge $f(n, x_n)$ rekursiv konvergent.*

Beweis. Die Folge x_n ist rekursiv konvergent, d.h. es gibt eine rekursive Funktion $N_2(k)$, so dass

$$x_n - x_m = 0(k) \text{ für } n \geq N_2(k), m \geq N_2(k).$$

Sei jetzt

$$N_3(k) = \text{Max}(N_1(k+1), N_2(c_1(k+1))).$$

Dann gilt für $n \geq N_3(k), m \geq N_3(k)$:

$$x_n - x_m = 0(c_1(k+1))$$

und

$$f(n, x_n) - f(m, x_n) = (f(n, x_n) - f(n, x_m)) + (f(n, x_m) - f(m, x_m)) = 2.0(k+1) = 0(k), \quad \text{q.e.d.}$$

Satz 6. *Sind $\{x_n\}$ und $\{y_n\}$ äquivalente rekursive reelle Zahlen aus dem Intervall $[a, b]$, so sind auch die rekursiven reellen Zahlen $\{f(n, x_n\}$ und $\{f(n, y_n)\}$ äquivalent*[1].

Beweis. Nach Voraussetzung gibt es eine rekursive Funktion $T(k)$, so dass

$$x_n - y_n = 0(k)$$

gilt für

$$n \geq T(k).$$

Also ist

$$x_n - y_n = 0(c(k)) \text{ für } n \geq T(c(k)) = T_1(k),$$

und es wird

$$f(n, x_n) - f(n, y_n) = 0(k)$$

für

$$n \geq \text{Max}(T_1(k), N_1(k)) = T_2(k), \qquad \text{q.e.d.}$$

[1] Vgl. Erklärung V.

Unter Benutzung der Erklärung V kann dem Satz 6 auch folgende Fassung gegeben werden:

SATZ 6a. *Jeder absolut stetigen rekursiven Funktion $f(n, x)$ entspricht eine Funktion $\mathfrak{z} = F(\mathfrak{x})$, die äquivalenten rekursiven reellen Zahlen $\mathfrak{x}$ äquivalente rekursive reelle Zahlen $\mathfrak{z}$ zuordnet. Ist*

$$\mathfrak{x} = \{x_n\}, \quad \mathfrak{x}' = \{x_n'\} \approx \mathfrak{x},$$

so ist

$$\mathfrak{z} = F(\mathfrak{x}) = \{f(n, x_n)\} \approx \mathfrak{z}_1 = F(\mathfrak{x}') = \{f(n, x_n')\}.$$

Um die Stetigkeitseigenschaft der so definierten Funktion formulieren zu können, erklären wir:

ERKLÄRUNG IX: $\mathfrak{x} - \mathfrak{y} = 0\,(l)$ heisst: Es gibt eine natürliche Zahl N, so dass

$$x_n - y_n = 0\,(l+1) \qquad \text{für } n \geq N.$$

Dann kann (nach Satz 4 und Erklärung IX) die Stetigkeitseigenschaft von $F(\mathfrak{x})$ so formuliert werden:

Es gibt eine rekursive Funktion

$$c_2(k) = c_1(k+1) \dot{-} 1,$$

so dass aus

$$\mathfrak{x} - \mathfrak{y} = 0\,(c_2(k))$$

folgt

$$F(\mathfrak{x}) - F(\mathfrak{y}) = 0\,(k).$$

SATZ 7. *$f(n, x)$ sei in $[a, b]$ absolut stetig, $f(n, a) > 0$, $f(n, b) < 0$ für alle n. Dann gibt es mindestens eine rekursive reelle Zaht $\mathfrak{x} = \{x_n\}$, $a \leq x_n \leq b$, für die $F(\mathfrak{x}) \approx \{0\}$ gilt.*

BEWEIS. Wir definieren:

$$\varrho_n = \text{Max } y\,[y \leq 10^n \wedge f(n, a + (b-a)\,y\,10^{-n} > 0].$$

Diese Folge ist rekursiv. Das gleiche gilt für

$$u_n = a + (b-a)\,\varrho_n \cdot 10^{-n}.$$

Diese Folge ist aber auch rekursiv konvergent, denn offenbar ist

$$u_{n+1} - u_n = (b-a)\;0\,(n).$$

Also ist nach Satz 6 auch $f(n, u_n)$ rekursiv und rekursiv konvergent. Die entsprechenden Aussagen gelten für

$$v_n = a + (b-a)\,(\varrho_n + 1)\,10^{-n}$$

und $f(n, v_n)$. Die Differenz konvergiert gleichfalls rekursiv gegen 0. Die aus u_n und v_n zusammengesetzte Folge

$$w_{2n-1} = u_n$$

$$w_{2n} \quad = v_n$$

ist dann auch rekursiv konvergent, und ebenso die Folge $f(u, w_n)$. Da die Funktionswerte $f(n, w_n)$ abwechselnd positiv und negativ sind, muss die Folge rekursiv gegen 0 konvergieren, q. e. d.

Satz 8 (von der oberen Grenze). *$f(n, x)$ sei absolut stetig in $[a, b]$. Dann existiert eine rekursive und rekursiv konvergente Folge b_n von rationalen Zahlen und eine rekursive Funktion $L(k)$ von folgender Eigenschaft: Es gilt*[1]

$$f(n, x) \leq b_n + 0(k) \quad \text{für} \quad n \geq L(k).$$

Beweis. Es sei $b - a < 10^{\lambda}$. Dann wird definiert:

$$a_{\nu}^{(n)} = a + (b-a) \cdot \nu \cdot 10^{-c_1(n) - \lambda}$$

und

$$\operatorname{Max}\, (f(n, a_{\nu}^{(n)})) = f(n, a_{*}^{(n)}) = b_n .$$

Offenbar gilt bei dieser Intervalleinteilung

$$a_{\nu+1}^{(n)} - a_{\nu}^{(n)} = 0\,(c_1(n)).$$

Wir betrachten jetzt die Differenz

$$b_{n+m} - b_n = f(n+m,\, a_{*}^{(n+m)}) - f(n,\, a_{*}^{(n)}). \tag{14}$$

Nehmen wir zuerst an, dass $b_{n+m} - b_n \geq 0$ sei. Dann schreiben wir für (14):

$$b_{n+m} - b_n = f(n+m,\; a_{*}^{(n+m)}) - f(n, a_{*}^{(n+m)}) + f(n,\; a_{*}^{(n+m)}) - f(n, a_{*}^{(n)}).$$

Nun gilt für $n \geq N_1(k+1)$ nach Satz 4:

$$f(n, a_{*}^{(n+m)}) - f(n, a_{\sigma}^{(n)}) = 0\,(k+1),$$

wobei die Zahl $a_{\sigma}^{(n)}$ bestimmt ist durch die Vorschrift:

$$a_{\sigma}^{(n)} \leq a_{*}^{(n+m)} < a_{\sigma+1}^{(n)} .$$

[1] Bei „vernünftiger" Definition des <-Zeichens für rekursive reelle Zahlen kann man den Satz auch so formulieren:

$$F(\mathfrak{x}) \lesssim \mathfrak{b} = \{b_n\}.$$

Setzt man das ein, so wird

$$b_{n+m} - b_n = 2.0\,(k+1) + f(n, a_\sigma^{(n)}) - f(n, a_*^{(m)}).$$

Nun ist aber nach Definition von $a_*^{(n)}$:

$$f(n, a_\sigma^{(n)}) \leq f(n, a_*^{(n)}).$$

Also wird:

$$b_{n+m} - b_n \leqq 2.0\,(k+1) < 0\,(k).$$

Ist umgekehrt

$$b_{n+m} - b_n < 0,$$

so schreibt man für (14):

$$b_n - b_{n+m} = (-f(n+m, a_*^{(n+m)}) + f(n+m, a_*^{(n)})) + (-f(n+m, a_*^{(n)}) + f(n, a_*^{(n)})).$$

Hier ist der erste Summand negativ, denn die Zahl $a_*^{(n)}$ ist ja auch gleich irgendeiner der Zahlen $a_\nu^{(n+m)}$, und $a_*^{(n+m)}$ ist die Zahl, für die $f(n+m, a_\nu^{(n+m)}$ das) Maximum annimmt. Also gilt in jedem Fall

$$|\,b_{n+m} - b_n\,| > 0\,(k) \quad \text{für } n \geq N_1(k+1).$$

Damit ist gezeigt, dass die Folge b_n rekursiv konvergiert. Sei jetzt x eine rationale Zahl des Intervalls $a_\nu^{(n)} \leq x \leq a_{\nu+1}^{(n)}$. Dann gilt

$$f(n, x) - f(n, a_\nu^{(n)}) = 0\,(k),$$

falls $n \geq N_1(k)$ und

$$a_\nu^{(n)} \leq x < a_{\nu+1}^{(n)}.$$

Also erhalten wir

$$f(n, x) \leq b_n + 0\,(k) \quad \text{für } n \geq N_1(k) = L(k), \qquad \text{q. e. d.}$$

Nennen wir die durch die rekursive und rekursiv konvergente Folge b_n definierte rekursive reelle Zahl $\mathfrak{y} = \{b_n\}$ die obere Grenze der „zugeordneten" Funktion $F(\mathfrak{x})$, so liegt die Frage nahe, ob für diese Funktionen auch der Satz vom Maximum gilt. Das heisst: Gibt es zu jeder Folge von extremalen Funktionswerten

$$b_n = \text{Max}\,(f(n),\, a_\nu^{(n)}) = f(n, a_*^{(n)})$$

einer absolut stetigen Funktion $f(n, x)$ eine rekursive Teilfolge b_n', so dass die Folge der Originalwerte[1] $a_*^{(n)}$ rekursiv konvergiert und damit eine rekursive reelle Zahl definiert, für die $\mathfrak{y} \approx F(\mathfrak{x})$ gilt?

Um das zu untersuchen, definieren wir:

[1] Sie sei im Folgenden „Extremalfolge" genannt.

$$\alpha(m,n) = \text{Max}\ \nu \left[\nu \leq n \wedge \prod_{\sigma=1}^{\nu} \varrho(m,\sigma) \neq 0\right].$$

Dabei ist $\varrho(m,\nu)$ die in Kapitel III definierte primitiv rekursive Funktion, die bei der Definition von $\psi(m,n)$ und $\chi(m,n)$ in Kapitel III (7) und (8) bereits benutzt wurde.

Es gilt dann $\alpha(m,n) \leqq n$. $\alpha(m,n)$ ist primitiv rekursiv, aber es ist nicht entscheidbar, für welche Zahlen m $(En)[\alpha(m,n) < n]$ gilt. Diese Aussage ist ja dem nicht entscheidbaren Prädikat

$$(Ex)\,[\varrho(m,x) = 0] \tag{15}$$

gleichwertig. Mit Hilfe von $\alpha(m,n)$ wird nun definiert

$$f^{(m)}(n,x) = \begin{cases} (1 - 2^{-\alpha(m,n)})\,x & \text{für } 0 \leq x \leq 1, \\ -(1 - 2^{-n+1})\,x & \text{für } -1 \leq x \leq 0. \end{cases} \tag{16}$$

Für jedes feste m ist $f^{(m)}(n,x)$ primitiv rekursiv und absolut stetig. Nehmen wir zunächst an, dass für gegebenes m das Prädikat (15) nicht zutrifft. Dann ist $\alpha(m,n) = n$ für alle n, und die „Extremalfolge" $a(m,n)$ (die der Folge $a_*^{(n)}$ im Beweis von Satz 8 entspricht), besteht aus lauter Einsen. Ist dagegen (15) richtig für das gegebene m, so bleibt $f^{(m)}(n,x)$ konstant für festes x und m im Intervall $[0,1]$ von einer gewissen Nummer $n = n_0$ an. Die Extremalfolge $a(m,n)$ springt dann auf -1 für $n > n_0 + 1$.

Natürlich kann man im Sinne der klassischen Analysis sagen, dass die Folge *entweder* gegen $+1$ *oder* gegen -1 konvergiert. Es handelt sich hier aber um die Frage, ob dieses „Entweder-Oder" „entscheidbar" ist.

Wäre für jedes m die Folge $a(m,n)$ rekursiv konvergent, so müsste es rekursive Funktionen $S^{(m)}(k)$ geben, so dass

$$a(m,n_1) - a(m,n_2) < \tfrac{1}{10}$$

für $\begin{Bmatrix} n_1 \\ n_2 \end{Bmatrix} \geqq S_{(1)}^{(m)}$. $a(m,n)$ wäre dann für $n \geqq S_{(1)}^{(m)}$ konstant. Das Prädikat (15) müsste dann dem berechenbaren Prädikat

$$(Ex)\,[x \leq S^{(m)}(1) \wedge (\varrho(m,x) = 0)] \tag{17}$$

äquivalent sein. Wir sagen hier „berechenbar" und nicht „(allgemein) rekursiv", weil ja nicht bewiesen wurde, dass $S^{(m)}(1)$ allgemein rekursiv in m sein müsste. Nun ist es ein „Erfahrungssatz" ([1] S. 153, [6] S. 48), dass jede berechenbare Funktion (und entsprechend jedes berechenbare Prädikat) auch allgemein rekursiv ist. Da (17) und (15) äquivalent sind, kann es also — nach dem Erfahrungssatz! — keine Funktionen $S^{(m)}(k)$ mit den erwähnten Eigenschaften geben. Es ist also nicht zu erwarten, dass der Satz vom Maximum ein Analogon in der „rekursiven Funktionentheorie" hat.

Literatur

[1]. ROZSA PETER, *Rekursive Funktionen.* Budapest, 1951.

[2]. ERNST SPECKER, Nicht konstruktiv beweisbare Sätze der Analysis. *Journal of symb. Logic*, 14, Nr. 3 (September 1945).

[3]. R. L. GOODSTEIN, Mean value theorems in recursive function theory. Part 1. *Proceedings of the London Math. Soc.*, Ser. 2, 52 (1950).

[4]. ——, The relatively exponential, logarithmic and circular functions in recursive function theory. *Acta Mathematica*, 92 (1954).

[5]. ——, The recursive irrationality of π. *Journal of symb. Logic*, 19, Nr. 4 (1954).

[6]. H. HERMES, *Vorlesung über Entscheidungsprobleme in Mathematik und Logik.* Münster, 1955.