

# LES COURBES DANS L'ESPACE ANALLAGMATIQUE

par

RENÉ LAGRANGE

à DIJON.

## Introduction.

Les éléments différentiels conformes d'une courbe de l'espace à  $n$  dimensions se définissent le plus simplement à l'aide d'un système de référence mobile lié au point courant de cette courbe, et choisi de manière que son déplacement ne fasse intervenir que  $n - 1$  coefficients variables, et cela sous la forme la plus simple possible. Ce système de référence, de forme anallagmatiquement invariante, est un  $(n + 2)$ -sphère orthogonal qui, chez E. Cartan, à qui l'on doit l'exposé systématique de cette méthode générale, est effectivement constitué par  $n$  sphères à  $n - 1$  dimensions et 2 points.

On peut également définir les courbures conformes comme étant des invariants formés avec les courbures de la courbe  $\Gamma$  dans un sous-espace de l'espace conforme  $E_c$ . Soit en effet  $\Sigma$  une sphère à  $n - 1$  dimensions de l'espace euclidien  $E$  à  $n$  dimensions. Le sous-groupe anallagmatique qui conserve la sphère  $\Sigma$  définit une géométrie riemannienne, autrement dit un espace riemannien  $E_\Sigma$  dans lequel on peut définir les  $n - 1$  courbures  $\gamma_i$  de la courbe  $\Gamma$  à l'aide d'un  $n$ -èdre de Frenet. L'espace euclidien lui-même est l'espace  $E_\Sigma$  pour lequel  $\Sigma$  est le plan de l'infini. Le  $n$ -èdre de Frenet se définit toujours à partir du vecteur unitaire tangent au point courant  $A$ , mais les autres vecteurs ne sont pas les mêmes suivant que le déplacement s'étudie à l'aide de l'équipollence dans  $E$  ou de l'équipollence dans  $E_\Sigma$ . La comparaison des deux équipollences situe le  $n$ -èdre de Frenet dans  $E_\Sigma$  par rapport au  $n$ -èdre euclidien, et fournit les expressions des courbures anallagmatiques  $\gamma_i$  dans  $E_\Sigma$  en fonction de

l'absolu  $\Sigma$  et des courbures euclidiennes  $c_i$ . C'est de ces expressions que découlent les invariants cherchés, ce qui permet en même temps d'obtenir les expressions des courbures conformes  $\Gamma_i$  en fonction des courbures euclidiennes  $c_i$ , ou des courbures anallagmatiques  $\gamma_i$ . Cette méthode a été exposée dans deux notes<sup>1</sup> aux C. R. A. S. et permet également de construire le  $(n+2)$ -sphère de Cartan.

Ce mémoire n'est pas le développement de cette méthode, qui me paraît esquissée avec assez de précision dans les notes citées pour qu'un exposé détaillé des calculs soit inutile. On développe ici une nouvelle méthode, dont l'esprit est le même, et qui a été suggérée par la forme même des résultats obtenus dans le travail rappelé. Soit, d'une manière précise,  $ds$  l'élément d'arc euclidien, et  $c_1, c_2, \dots, c_{n-1}$  les courbures dans  $E$ ; soit  $d\sigma, \gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_{n-1}$  les éléments homologues dans  $E_\Sigma$ . Dans  $E_c$ , l'élément d'arc conforme  $dS$  et  $n-2$  des courbures  $\Gamma_2, \Gamma_3, \dots, \Gamma_n$  s'expriment en fonction des  $c_i$  et de leurs dérivées par rapport à  $s$  sous la même forme qu'en fonction des  $\gamma_i$  et de leurs dérivées par rapport à  $\sigma$ . Par contre, une différence de forme y apparaît pour les deux expressions de  $\Gamma_1$ ; en posant

$$(1) \quad \lambda = (\gamma_1'^2 + \gamma_1^2 \gamma_2^2)^{\frac{1}{2}}, \quad l = (c_1'^2 + c_1^2 c_2^2)^{\frac{1}{2}},$$

l'invariant du cinquième ordre<sup>2</sup> correspond à l'égalité

$$(2) \quad \frac{1}{\lambda^2} \left\{ \left( \frac{\lambda'}{\lambda} \right)' - \frac{1}{2} \left( \frac{\lambda'}{\lambda} \right)^2 - \frac{\gamma_1^2 - 1}{2} \right\} = \frac{1}{l^2} \left\{ \left( \frac{l'}{l} \right)' - \frac{1}{2} \left( \frac{l'}{l} \right)^2 - \frac{c_1^2}{2} \right\},$$

où les dérivées  $\gamma_1', \lambda', \lambda''$  sont prises par rapport à  $\sigma$ , tandis que  $c_1', l', l''$  le sont par rapport à  $s$ . Cette différence de forme s'explique à l'aide d'une observation intéressante autant qu'elle est simple. La courbure euclidienne  $c_1$  est susceptible de deux définitions corrélatives; c'est d'une part la vitesse du vecteur unitaire tangent; c'est aussi l'inverse de la distance du point courant  $A$  de la courbe à la variété caractéristique de l'hyperplan normal. Dans l'espace  $E_\Sigma$ ,  $\gamma_1$  représente la vitesse du même vecteur  $\vec{e}_1$ , mesurée dans cet espace; mais la deuxième définition doit être modifiée pour prendre une forme invariante. L'hyperplan normal doit être remplacé par la sphère  $U_1$  à  $n-1$  dimensions, normale à  $\Gamma$  en  $A$ , et aussi à  $\Sigma$ ; il revient au même d'associer à  $A$  son inverse  $A'$  par rapport à  $\Sigma$ , et de considérer la bicourbe  $(\Gamma\Gamma')$

<sup>1</sup> Cf. René Lagrange: « Sur les invariants conformes d'une courbe », C. R. A. S., t. 212, 1941, p. 1123—26; et « Propriétés différentielles des courbes de l'espace conforme à  $n$  dimensions », C. R. A. S., t. 213, 1941, p. 551—553.

<sup>2</sup> C'est ce que j'appelle  $k$  dans la première note citée, p. 1126.

décrite par le bipoint  $(AA')$ .  $U_1$  est la sphère normale à  $(\Gamma\Gamma')$  en  $(AA')$ , et la distance à considérer est la distance, anallagmatiquement invariante, de ce bipoint  $(AA')$  à la variété sphérique caractéristique de  $U_1$ . En utilisant les définitions métriques exposées dans un article antérieur<sup>1</sup>, l'inverse du carré de cette distance est justement  $\gamma_1^2 - 1$ , et l'analogie entre les deux membres de (2) est rétablie. On pourrait craindre que disparaisse par contre la similitude de forme des expressions de  $\lambda$  et  $l$ , mais il n'en est rien, car la définition de  $\gamma_2$  doit également être modifiée, et l'on constate que  $\gamma_1'^2 + \gamma_1^2 \gamma_2^2$  ne change pas de valeur.

On est ainsi conduit à l'idée que, dans l'espace  $E_\Sigma$ , le  $n$ -vecteur de Frenet n'est pas la généralisation la plus naturelle du  $n$ -èdre euclidien, et qu'au lieu d'utiliser des déplacements de vecteurs, il est plus avantageux de définir les courbures d'une courbe par l'étude de déplacements de plans dans l'espace euclidien  $E$ , et de sphères dans  $E_\Sigma$ , ces dernières étant naturellement astreintes à rester orthogonales à  $\Sigma$ . C'est ce qui est fait dans ce mémoire, avec le double avantage de lever l'objection qui vient d'être exposée, et de supprimer l'emploi toujours délicat des déplacements par équipollence riemannienne.

J'ai dû cependant modifier le  $n$ -plan de référence utilisé dans l'espace euclidien, qui n'est pas formé ici par les faces du  $n$ -èdre de Frenet, mais par les dérivés successifs du plan normal; son sommet n'est pas sur  $\Gamma$ , mais au centre de la sphère osculatrice, et les formules du déplacement font intervenir le plan de l'infini, qui joue le rôle, non pas de  $\Sigma$  dans  $E_\Sigma$ , mais de la sphère qui, dans  $E_\Sigma$ , est orthogonale à  $\Sigma$  et aux  $n$  sphères qui généralisent les faces du  $n$ -èdre euclidien.

C'est dans le premier chapitre que sont établies les formules du déplacement de ce  $n$ -èdre euclidien, qui font intervenir, outre les courbures habituelles  $c_1, c_2, \dots, c_{n-1}$ , un coefficient  $c_n$ , qui s'exprime aisément en fonction de ces courbures et de leurs dérivées. Le deuxième chapitre est consacré au même problème, dans l'espace  $E_\Sigma$ . Dans le troisième chapitre, l'étude comparée des deux repères mobiles relatifs à  $E$  et  $E_\Sigma$  met en évidence, non pas des sphères invariantes dans l'espace conforme  $E_c$ , mais des familles linéaires invariantes de sphères, et permet en même temps de définir les courbures conformes. Enfin le chapitre IV montre comment on peut déduire de ces familles invariantes de sphères le repère de Cartan et les formules de son déplacement.

L'algorithme et les notations utilisés à partir du deuxième chapitre sont exposés en

---

<sup>1</sup> Cf. René Lagrange, « Définitions et théorèmes de métrique anallagmatique », Ann. Ec. Norm. t. 59, 1942, p. 1—42.

détail dans le premier chapitre du mémoire précédent « Sur les produits d'inversions, » et que les renvois utiles désigneront par la notation « P. I. ». Je prie le lecteur de vouloir bien s'y reporter au besoin.

## CHAPITRE I

### Courbes de l'espace euclidien $E$ à $n$ dimensions.

1. Si  $\vec{e}_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) sont les  $n$  vecteurs orthonormaux du  $n$ -èdre de Frenet de la courbe  $C$  décrite par le point  $A$ , on a les formules classiques

$$(1) \quad \left\{ \begin{array}{l} \vec{dA} = \vec{e}_1 ds, \\ \frac{d\vec{e}_1}{ds} = c_1 \vec{e}_2, \\ \frac{d\vec{e}_2}{ds} = -c_1 \vec{e}_1 + c_2 \vec{e}_3, \\ \dots\dots\dots \\ \frac{d\vec{e}_{n-1}}{ds} = -c_{n-2} \vec{e}_{n-2} + c_{n-1} \vec{e}_n, \\ \frac{d\vec{e}_n}{ds} = -c_{n-1} \vec{e}_{n-1}, \end{array} \right.$$

où les  $c_i$  sont les  $n-1$  courbures euclidiennes de  $C$ . Au lieu des vecteurs  $\vec{e}_i$ , considérons les faces du  $n$ -èdre, c'est à dire les plans unitaires<sup>1</sup>

$$p_i = \vec{e}_i \vec{AP},$$

et au lieu du vecteur  $\vec{OA}$  ( $O$  étant un point fixe quelconque), le point unitaire

$$A = -\frac{\vec{AP}^2}{2}.$$

Au lieu de (1), on a le système

---

<sup>1</sup> Cf. P. I. § 1, pour l'explication des notations qui suivent.

$$(2) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{dA}{ds} = p_1, \\ \frac{dp_1}{ds} = c_1 p_2 + p_0, \\ \frac{dp_2}{ds} = -c_1 p_1 + c_2 p_3, \\ \dots\dots\dots \\ \frac{dp_{n-1}}{ds} = -c_{n-2} p_{n-2} + c_{n-1} p_n, \\ \frac{dp_n}{ds} = -c_{n-1} p_{n-1}, \end{array} \right.$$

où  $p_0$  désigne le plan de l'infini

$$p_0 = 0 \times \overrightarrow{AP} - 1 = -1.$$

Posons encore  $\varpi_1 = p_1$ , et dérivons la première équation (2); on obtient la deuxième équation (2) que nous écrivons

$$\frac{d\varpi_1}{ds} = c_1 \overrightarrow{e_2 AP} - 1 = c_1 \left( \overrightarrow{e_2 AP} - \frac{1}{c_1} \right), \text{ si } c_1 \neq 0.$$

Posons

$$\varpi_2 = p_2 - \frac{1}{c_1} = \overrightarrow{e_2 AP} + \frac{1}{c_1} \varpi_0, \quad \varpi_0 = p_0 = -1;$$

$\varpi_2$  est un plan unitaire orthogonal à  $\varpi_1$ . On écrit ainsi

$$\frac{d\varpi_1}{ds} = c_1 \varpi_2.$$

Toujours à l'aide de (2), une nouvelle dérivation donne

$$\frac{d\varpi_2}{ds} = -c_1 p_1 + c_2 p_3 + \frac{d}{ds} \frac{1}{c_1} \varpi_0 = -c_1 \varpi_1 + c_2 \varpi_3,$$

où

$$\varpi_3 = p_3 + \frac{1}{c_2} \frac{d}{ds} \frac{1}{c_1} \varpi_0, \text{ si } c_2 \neq 0.$$

$\varpi_3$  est unitaire et orthogonal à  $\varpi_1$  et  $\varpi_2$ . On a ensuite

$$\frac{d\varpi_3}{ds} = -c_2 p_2 + c_3 p_4 + \frac{d}{ds} \left( \frac{1}{c_2} \frac{d}{ds} \frac{1}{c_1} \right) \varpi_0 = -c_2 \varpi_2 + c_3 \varpi_4,$$

où

$$\varpi_4 = p_4 + \left[ \frac{c_2}{c_1 c_3} + \frac{1}{c_3} \frac{d}{ds} \left( \frac{1}{c_2} \frac{d}{ds} \frac{1}{c_1} \right) \right] \varpi_0, \quad \text{si } c_3 \neq 0.$$

Posons donc

$$r_2 = \frac{1}{c_1}, \quad r_3 = \frac{1}{c_2} \frac{dr_2}{ds}, \quad r_4 = \frac{1}{c_3} \left( \frac{dr_3}{ds} + c_2 r_2 \right).$$

Si l'on a, d'une manière générale,

$$(3) \quad \varpi_i = p_i + r_i \varpi_0 \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

la dérivation donne, pour  $i < n$ ,

$$(4) \quad \frac{d\varpi_i}{ds} = -c_{i-1} p_{i-1} + c_i p_{i+1} + \frac{dr_i}{ds} \varpi_0 = -c_{i-1} \varpi_{i-1} + c_i \varpi_{i+1},$$

avec, pour  $r_{i+1}$ , l'expression qui résulte de

$$(5) \quad r_i = \frac{1}{c_{i-1}} \left( \frac{dr_{i-1}}{ds} + c_{i-2} r_{i-2} \right)$$

lorsqu'on remplace  $i$  par  $i+1$ . (5) vaut pour  $i = 3, 4, \dots, n$ , avec  $r_1 = 0$ . Enfin

$$\frac{d\varpi_n}{ds} = -c_{n-1} p_{n-1} + \frac{dr_n}{ds} \varpi_0 = -c_{n-1} \varpi_{n-1} + \left( \frac{dr_n}{ds} + c_{n-1} r_{n-1} \right) \varpi_0,$$

que l'on peut écrire

$$(6) \quad \frac{d\varpi_n}{ds} = -c_{n-1} \varpi_{n-1} + c_n \varpi_0,$$

avec

$$(7) \quad c_n = \frac{dr_n}{ds} + c_{n-1} r_{n-1}.$$

(7) a la forme (5) où l'on fait  $i = n+1$  et  $r_{n+1} = 1$ . Ainsi, au lieu du système (2), on obtient ici les formules

$$(8) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{dA}{ds} = \varpi_1, \\ \frac{d\varpi_1}{ds} = c_1\varpi_2, \\ \dots\dots\dots \\ \frac{d\varpi_i}{ds} = -c_{i-1}\varpi_{i-1} + c_i\varpi_{i+1}, \\ \dots\dots\dots \\ \frac{d\varpi_{n-1}}{ds} = -c_{n-2}\varpi_{n-2} + c_{n-1}\varpi_n, \\ \frac{d\varpi_n}{ds} = -c_{n-1}\varpi_{n-1} + c_n\varpi_0, \end{array} \right.$$

avec

$$(9) \quad \left\{ \begin{array}{l} r_1 = 0, r_2 = \frac{1}{c_1}, r_{i+1} = \frac{1}{c_i} \left( \frac{dr_i}{ds} + c_{i-1}r_{i-1} \right) \quad i = 2, 3, \dots, n, \quad r_{n+1} = 1, \\ \varpi_i = \vec{e}_i \overrightarrow{AP} - r_i \quad i = 1, 2, \dots, n, \\ \varpi_0 = 0 \times \overrightarrow{AP} - 1 = -1. \end{array} \right.$$

On a  $\varpi_i A = -r_i$ , de sorte que ces quantités  $r_i$  ( $i = 2, 3, \dots, n$ ) mesurent les distances de  $A$  aux plans  $\varpi_i$ ; elles vérifient des équations semblables à celles des  $\varpi_i$ .

2. Les  $n$  plans  $\varpi_i$  forment un  $n$ -èdre orthonormal, parallèle au  $n$ -èdre de Frenet, dont le sommet est le point

$$(10) \quad B = A + \sum_{i=1}^n r_i \vec{e}_i.$$

Il en résulte que

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{B}}{ds} &= \vec{e}_1 + \sum_{i=2}^{n-1} r_i (-c_{i-1} \vec{e}_{i-1} + c_i \vec{e}_{i+1}) + r_n (-c_{n-1} \vec{e}_{n-1}) + \sum_{i=2}^n \frac{dr_i}{ds} \vec{e}_i \\ &= \sum_{i=2}^{n-1} \left( \frac{dr_i}{ds} + c_{i-1} r_{i-1} - c_i r_{i+1} \right) \vec{e}_i + \left( \frac{dr_n}{ds} + c_{n-1} r_{n-1} \right) \vec{e}_n \end{aligned}$$

c'est à dire

$$(11) \quad \frac{d\vec{B}}{ds} = c_n \vec{e}_n.$$

$B$  est le centre de la sphère osculatrice, d'après la façon même dont les plans  $\varpi_i$  ont

été obtenus. D'ailleurs, la dérivée de la sphère

$$S = \frac{1}{2}(\overrightarrow{BP}^2 - \overrightarrow{BA}^2)$$

est

$$\frac{dS}{ds} = -c_n \overrightarrow{e_n} \overrightarrow{BP} - \overrightarrow{AB} (c_n \overrightarrow{e_n} - \overrightarrow{e_1}) = -c_n \overrightarrow{e_n} \overrightarrow{AP} = -c_n p_n;$$

donc  $\frac{dS}{ds} = 0$  équivaut à  $p_n = 0$ , si  $c_n \neq 0$ . Ensuite  $\frac{dp_n}{ds} = 0$  équivaut à  $p_{n-1} = 0$ , si  $c_{n-1} \neq 0$ , et ainsi de suite, de sorte que le système

$$(12) \quad S = \frac{dS}{ds} = \dots = \frac{d^n S}{ds^n} = 0$$

équivaut en général à

$$(13) \quad S = p_n = p_{n-1} = \dots = p_1 = 0.$$

Toutes ces équations sont vérifiées par  $A$ . Par contre, l'adjonction à (12) de  $\frac{d^{n+1}S}{ds^{n+1}} = 0$  équivaut à celle de  $\frac{dp_1}{ds} \equiv c_1 p_2 - 1 = 0$ , qui n'est pas satisfaite par  $A$ .  $S$  a donc un contact d'ordre  $n$  avec  $C$  au point  $A$ , tout au moins si aucun des  $c_i$  n'est nul, et est bien la sphère osculatrice. Le carré de son rayon est  $\sum_{i=2}^n r_i^2$ .  $S$  est la  $V_{n-1}$  sphérique osculatrice<sup>1</sup>. Les mêmes calculs montrent que, d'une manière plus générale, la  $V_{k-1}$  sphérique osculatrice est l'intersection de  $S$  par la  $V_k$  plane, elle-même osculatrice, définie par les équations

$$p_n = p_{n-1} = \dots = p_{k+1} = 0.$$

Son centre est la projection de  $B$  sur cette  $V_k$ , c'est à dire le point

$$(14) \quad Q = A + \sum_{i=2}^k r_i \overrightarrow{e_i},$$

et le carré de son rayon est  $\sum_{i=2}^k r_i^2$ . On voit immédiatement, comme pour  $B$ , que

$$(15) \quad \frac{dQ}{ds} = c_k (r_{k+1} \overrightarrow{e_k} + r_k \overrightarrow{e_{k+1}}).$$

Il y a une certaine réciprocité entre  $A$  et  $B$ . Il résulte en effet de (11) que

$$\overrightarrow{dB} = \overrightarrow{e_1} ds',$$

<sup>1</sup> Une  $V_k$  représente une variété à  $k$  dimensions.



avec

$$\vec{e}'_1 = \vec{e}_n, \quad ds' = c_n ds.$$

Il suffit donc de remonter les équations (1) à partir de la dernière pour voir que les vecteurs et les courbures du lieu de  $B$  sont

$$(16) \quad \begin{cases} \vec{e}'_i = \vec{e}_{n+1-i} & i = 1, 2, \dots, n, \\ c'_i = -\frac{c_{n-i}}{c_n} & i = 1, 2, \dots, n-1. \end{cases}$$

Pour que  $C$  soit sphérique, il faut et il suffit que  $B$  soit fixe, c'est à dire que  $c_n = 0$ .  $c_n$  est le numérateur de la fraction qui représente la torsion conforme de  $C$ .

3. Le système (8) fait intervenir  $n$  coefficients, au lieu des seules  $n-1$  courbures  $c_1, c_2, \dots, c_{n-1}$  qui interviennent dans les formules de Serret-Frenet. Cependant  $c_n$  n'est pas indépendant de ces courbures, et s'exprime, d'après les équations (9), en fonction de  $c_1, c_2, \dots, c_{n-1}$  et de leurs dérivées. Les  $n$  dernières équations (8), où les  $c_i$  sont supposés connus, forment un système d'équations différentielles linéaires du premier ordre, dont les inconnues sont  $\varpi_1, \varpi_2, \dots, \varpi_n$ , qu'on peut résoudre comme un système de Serret. Rapportons les  $\varpi_i$  à un système de  $n$  plans unitaires fixes  $q_i$ , orthogonaux, associés au plan de l'infini  $\varpi_0 = q_0 = -1$ . On a

$$(17) \quad \varpi_i = \sum_{k=1}^n \lambda_{ik} q_k + \lambda_{i0} q_0 \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

avec les conditions d'orthogonalité

$$\varpi_i \varpi_j = \sum_{k=1}^n \lambda_{ik} \lambda_{jk} = \delta_{ij} \quad i, j = 1, 2, \dots, n.$$

Pour chaque indice  $k$ , les  $n$  coefficients  $\lambda_{ik}$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) vérifient le système d'équations

$$(18) \quad \begin{cases} \frac{d\lambda_1}{ds} = c_1 \lambda_2, \\ \frac{d\lambda_i}{ds} = -c_{i-1} \lambda_{i-1} + c_i \lambda_{i+1} & i = 2, 3, \dots, n-1, \\ \frac{d\lambda_n}{ds} = -c_{n-1} \lambda_{n-1}, \end{cases}$$

tandis que les  $\lambda_{i0}$  vérifient les équations

$$(19) \quad \begin{cases} \frac{d\lambda_1}{ds} = c_1\lambda_2, \\ \frac{d\lambda_i}{ds} = -c_{i-1}\lambda_{i-1} + c_i\lambda_{i+1} & i = 2, 3, \dots, n-1, \\ \frac{d\lambda_n}{ds} = -c_{n-1}\lambda_{n-1} + c_n. \end{cases}$$

Les vecteurs

$$\vec{e}_i = \sum_{k=1}^n \lambda_{ik} \vec{E}_k,$$

où les  $\vec{E}_k$  sont les vecteurs unitaires normaux aux  $q_k$ , sont alors connus.  $B$  étant le point commun aux  $n$  plans  $\omega_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ),  $A$  est donné par (10), sans quadrature nouvelle.

## CHAPITRE II

### Courbes de l'espace euclidien à $n$ dimensions, doté d'une sphère absolue.

4. L'espace euclidien  $E$  peut être doté d'une sphère absolue  $\Sigma$ , fixe, et peut alors être assimilé à un espace riemannien, que nous appelons  $E_\Sigma$ .  $E$  peut être considéré comme le cas limite de  $E_\Sigma$ , lorsque  $\Sigma$  devient le plan  $\omega_0$  de l'infini. Soit maintenant une vraie sphère  $\Sigma$ , représentée par exemple par la sphère unitaire

$$U_0 = \frac{\overrightarrow{OP}^2 - \rho^2}{2\rho},$$

de centre  $O$  et de rayon  $\rho$ . Dotons le point courant (ou sphère-point)  $A$  de la courbe  $C$  d'une masse  $\lambda$ , et posons

$$A_0 = \lambda A = -\frac{\lambda}{2} \overrightarrow{AP}^2.$$

Avec les notations du premier chapitre, posons

$$(1) \quad \begin{cases} \overrightarrow{OA} = \sum_{i=1}^n x_i \vec{e}_i, \\ a = U_0 A = \frac{\overrightarrow{OA}^2 - \rho^2}{2\rho}. \end{cases}$$

La dérivation le long de  $C$  donne alors

$$\frac{\vec{dA}}{ds} = \vec{e}_1 = \sum_{i=1}^n \frac{dx_i}{ds} \vec{e}_i + \sum_{i=1}^n x_i (-c_{i-1} \vec{e}_{i-1} + c_i \vec{e}_{i+1}),$$

où  $c_0 = 0$ , ainsi que  $c_n$  qui n'a pas ici la même signification que dans (7; I); on a donc

$$(2) \quad \begin{cases} \frac{dx_1}{ds} = 1 + c_1 x_2, \\ \frac{dx_i}{ds} = -c_{i-1} x_{i-1} + c_i x_{i+1} \quad i = 2, 3, \dots, n, \quad c_n = 0, \end{cases}$$

avec

$$(3) \quad \frac{da}{ds} = \frac{1}{\rho} \vec{OA} \frac{dA}{ds} = \frac{x_1}{\rho}.$$

Ceci posé, la dérivée de  $A_0$  est

$$\frac{dA_0}{ds} = -\frac{1}{2} \frac{d\lambda}{ds} \vec{AP} + \lambda \vec{e}_1 \vec{AP};$$

c'est une sphère si  $\lambda$  n'est pas constant, et l'on peut choisir ce facteur de manière que  $\frac{dA_0}{ds}$  soit orthogonal à  $U_0$ . Il résulte de (20; P. I.) que le centre  $A_1$  de  $\frac{dA_0}{ds}$  est

donné par

$$\vec{AA}_1 = \lambda \frac{\vec{dA}}{d\lambda} = \lambda \frac{ds}{d\lambda} \vec{e}_1,$$

et que le carré de son rayon est  $\left(\frac{\lambda ds}{d\lambda}\right)^2$ . C'est une sphère normale à  $C$  au point  $A$ .

L'orthogonalité à  $U_0$  s'écrit

$$U_0 \frac{dA_0}{ds} = \frac{d}{ds} (U_0 A_0) = \frac{d}{ds} (\lambda U_0 A) = \frac{d}{ds} (\lambda a) = 0,$$

donc il faut et il suffit que  $\lambda a$  soit une constante. Nous prendrons simplement  $\lambda = \frac{1}{a}$ , en supposant bien entendu  $a \neq 0$ , c'est à dire  $A$  hors de  $U_0$ . Dans ces conditions,

$$(4) \quad A_0 = \frac{1}{a} A,$$

$$\frac{1}{\lambda} \frac{d\lambda}{ds} = \frac{1}{a} \frac{da}{ds} = -\frac{x_1}{a\rho},$$

donc

$$(5) \quad \frac{dA_0}{ds} = \frac{v_1}{2a} \left( \overrightarrow{A_1P} - \frac{1}{v_1^2} \right),$$

où

$$(6) \quad v_1 = -\frac{1}{\lambda} \frac{d\lambda}{ds} = \frac{1}{a} \frac{da}{ds} = \frac{x_1}{a\rho}.$$

Observons aussi que  $U_0A_0 = 1$ . La sphère unitaire correspondant à (5) est

$$(7) \quad U_1 = \frac{v_1}{2} \left( \overrightarrow{A_1P} - \frac{1}{v_1^2} \right),$$

de sorte que (5) s'écrit

$$(8) \quad \frac{dA_0}{d\sigma} = U_1,$$

où  $d\sigma = \frac{ds}{a}$  est la différentielle de la mesure anallagmatique de l'arc dans  $E_{\Sigma}$ . La dérivation de (7), où l'on utilise les formules (24—27; P. I.), donne

$$(9) \quad \frac{dU_1}{d\sigma} = \frac{a}{2} \frac{dv_1}{ds} \left( \overrightarrow{A_2P} - \frac{1}{v_2^2} \right),$$

où

$$(10) \quad \begin{cases} A_2 = A_1 + v_1 \frac{\overrightarrow{dA_1}}{dv_1}, \\ \frac{1}{v_2^2} = \left( v_1 \frac{\overrightarrow{dA_1}}{dv_1} \right)^2 - \frac{1}{v_1^2}, \end{cases}$$

en admettant que  $dv_1$  ne soit pas nul. La masse de la sphère (9) est

$$(11) \quad \gamma_1 = \frac{a}{v_2} \frac{dv_1}{ds} = \frac{1}{v_2} \frac{dv_1}{d\sigma},$$

et l'on peut écrire

$$(12) \quad \frac{dU_1}{d\sigma} = \gamma_1 U_2,$$

avec

$$(13) \quad U_2 = \frac{v_2}{2} \left( \overrightarrow{A_2P} - \frac{1}{v_2^2} \right).$$

$\gamma_1$  est par définition la première courbure de  $C$  dans  $E_{\Sigma}$ .  $U_0U_1 = 0$  donne  $U_0U_2 = 0$ , donc  $U_2$  est orthogonale à  $U_0$  et  $U_1$ . Cette sphère ne passe pas par  $A$ , et l'on a

$$U_2 A_0 = \frac{1}{\gamma_1} \frac{dU_1}{d\sigma} A_0 = \frac{1}{\gamma_1} \left[ \frac{d}{d\sigma} (U_1 A_0) - U_1 \frac{dA_0}{d\sigma} \right] = -\frac{1}{\gamma_1}.$$

Par analogie avec le chapitre I, nous poserons  $\varrho_2 = \frac{1}{\gamma_1}$ .

5. Avant de poursuivre, donnons une interprétation métrique intéressante de  $U_2 A_0$ . D'une manière générale, soit

$$U = \frac{\nu}{2} \left( \overrightarrow{BP} - \frac{1}{\nu^2} \right)$$

une sphère unitaire orthogonale à  $U_0$ . Associons au point  $A$  son inverse  $A'$  par rapport à  $U_0$ , et évaluons la distance anallagmatique du bipoint  $(AA')$  à  $U$ , telle que nous l'avons définie dans un mémoire antérieur<sup>1</sup>. Cette distance  $(AA')U$  est définie par

$$\overline{(AA')U}^2 = 4 \frac{(UA)(UA')}{\overline{AA'}^2}.$$

Or la covariance de la puissance réduite  $UA$  dans l'inversion par rapport à  $U_0$ , qui conserve  $U$ , donne

$$\frac{UA'}{UA} = \frac{\varrho^2}{OA^2};$$

donc

$$\overline{(AA')U}^2 = \frac{4\varrho^2(UA)^2}{OA^2 \overline{AA'}^2};$$

enfin

$$\overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{OA'} - \overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OA} \left( \frac{\varrho^2}{OA^2} - 1 \right) = -\frac{2a\varrho}{OA^2} \overrightarrow{OA},$$

et, par conséquent,

$$\overline{(AA')U}^2 = \frac{1}{a^2} (UA)^2 = (UA_0)^2.$$

Ainsi  $UA_0$  mesure la distance du bipoint  $(AA')$  à la sphère  $U$ . En particulier,  $-\varrho_2$  mesure la distance de  $(AA')$  à la sphère  $U_2$ , de même que, dans la géométrie de l'espace euclidien  $E$ ,  $r_2$  mesure la distance du point  $A$  au plan  $\varpi_2$ .

<sup>1</sup> Cf. René Lagrange: « Définitions et théorèmes de métrique anallagmatique », Ann. Ec. Norm. (3) t. LIX, fasc. 1, 1942, p. 8.

6. Poursuivons maintenant la dérivation.  $\frac{dU_2}{d\sigma}$  est orthogonale à  $U_0$  et  $U_2$ , donc, grâce à (12),  $\frac{dU_2}{d\sigma} + \gamma_1 U_1$  est orthogonale à  $U_0$ ,  $U_2$  et  $U_1$ . C'est généralement une sphère, de centre  $A_3$ , de courbure  $\nu_3$  et de masse  $\gamma_2$ . On peut donc écrire

$$(14) \quad \frac{dU_2}{d\sigma} + \gamma_1 U_1 = \gamma_2 U_3 = \frac{\gamma_2 \nu_3}{2} \left( \overrightarrow{A_3 P}^2 - \frac{1}{\nu_3^2} \right),$$

avec

$$(15) \quad \gamma_2 \nu_3 = \frac{d\nu_2}{d\sigma} + \gamma_1 \nu_1,$$

qui se déduit tout de suite de (14) par l'identification des termes du second degré. Il résulte en outre de (14) que

$$U_3 A_0 = \frac{1}{\gamma_2} \frac{dU_2}{d\sigma} A_0 = \frac{1}{\gamma_2} \frac{d}{d\sigma} (U_2 A_0) - \frac{1}{\gamma_2} U_2 U_1 = -\frac{1}{\gamma_2} \frac{d\varrho_2}{d\sigma}.$$

On posera donc  $\varrho_3 = \frac{1}{\gamma_2} \frac{d\varrho_2}{d\sigma}$ , de sorte que  $-\varrho_3$  mesure la distance anallagmatique de  $(AA')$  à la sphère  $U_3$ . Et ainsi de suite; on obtient en général un  $n$ -sphère ortho-normal et orthogonal à  $U_0$ , avec

$$(16) \quad \frac{dU_i}{d\sigma} = -\gamma_{i-1} U_{i-1} + \gamma_i U_{i+1} \quad i = 2, 3, \dots, n-1,$$

où

$$(17) \quad U_i = \frac{\nu_i}{2} \left( \overrightarrow{A_i P}^2 - \frac{1}{\nu_i^2} \right) \quad i = 1, 2, \dots, n;$$

un calcul analogue à celui fait à partir de (14) donne en outre

$$(18) \quad \overline{(AA')U_{i+1}} = U_{i+1} A_0 = -\varrho_{i+1},$$

avec

$$(19) \quad \varrho_{i+1} = \frac{1}{\gamma_i} \left( \frac{d\varrho_i}{d\sigma} + \gamma_{i-1} \varrho_{i-1} \right) \quad i = 2, 3, \dots, n-1.$$

Enfin  $\frac{dU_n}{d\sigma} + \gamma_{n-1} U_{n-1}$  est généralement une sphère, orthogonale à  $U_0, U_1, \dots, U_n$ ; elle est centrée au centre radical de ces  $n+1$  sphères. En appelant  $\gamma_n$  sa masse et  $U_{n+1}$  la sphère unitaire correspondante, on a

$$(20) \quad \frac{dU_n}{d\sigma} = -\gamma_{n-1} U_{n-1} + \gamma_n U_{n+1},$$

avec

$$(21) \quad U_{n+1}A_0 = -\varrho_{n+1} = -\frac{1}{\gamma_n} \left( \frac{d\varrho_n}{d\sigma} + \gamma_{n-1}\varrho_{n-1} \right).$$

Cependant  $\varrho_{n+1}$ , donc  $\gamma_n$ , n'est pas indépendant de  $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_{n-1}$ ; la somme des carrés des distances anallagmatiques d'un point  $A$  à un  $(n+2)$ -sphère orthogonal étant nul, on a en effet<sup>1</sup>

$$(U_0A_0)^2 + (U_1A_0)^2 + \dots + (U_{n+1}A_0)^2 = 0,$$

donc, en ajoutant le terme  $\varrho_1 = 0$ ,

$$(22) \quad 1 + \sum_{i=1}^{n+1} \varrho_i^2 = 0,$$

qui définit  $\varrho_{n+1}$  en fonction des autres  $\varrho_i$ , donc de  $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_{n-1}$ . Ces  $n-1$  quantités-ci sont les  $n-1$  courbures de  $C$  dans  $E_\Sigma$ . Pour conclure, il est clair que l'on a

$$(23) \quad \frac{dU_{n+1}}{d\sigma} = -\gamma_n U_n,$$

car  $\frac{dU_{n+1}}{d\sigma} + \gamma_n U_n$  doit être orthogonal à  $U_0, U_1, \dots, U_{n+1}$ .

Dans  $E_\Sigma$ , le système (8) relatif à  $E$  est ainsi remplacé par

$$(24) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{dA_0}{d\sigma} = U_1, \\ \frac{dU_1}{d\sigma} = \gamma_1 U_2, \\ \dots\dots\dots \\ \frac{dU_i}{d\sigma} = -\gamma_{i-1} U_{i-1} + \gamma_i U_{i+1}, \\ \dots\dots\dots \\ \frac{dU_n}{d\sigma} = -\gamma_{n-1} U_{n-1} + \gamma_n U_{n+1}, \\ \frac{dU_{n+1}}{d\sigma} = -\gamma_n U_n. \end{array} \right.$$

<sup>1</sup> C'est une propriété élémentaire des coordonnées polysphériques. D'ailleurs, il suffit, pour le démontrer, d'utiliser la covariance de la distance anallagmatique dans l'inversion qui transforme le  $(n+2)$ -sphère en le système formé par  $n$  hyperplans rectangulaires passant par  $O$ , associés aux deux sphères de centre  $O$  et de rayons respectifs  $R$  et  $iR$ .

## CHAPITRE III

## Courbes dans l'espace conforme.

7. L'espace  $E_\Sigma$  est l'espace du sous-groupe anallagmatique qui conserve une sphère  $\Sigma$ , alors que l'espace conforme  $E_c$  est l'espace du groupe anallagmatique lui-même. Les mesures conformes d'une courbe sont les invariants déduits des mesures dans  $E_\Sigma$ , lorsque  $\Sigma$  varie arbitrairement. On peut les obtenir en comparant les mesures dans  $E_\Sigma$  aux courbures euclidiennes. Le point de départ est naturellement (4; II), soit

$$(1) \quad A_0 = \frac{1}{a} A.$$

Compte tenu de (8; I) et (24; II), sa différentiation donne

$$U_1 d\sigma = \varpi_1 \frac{ds}{a} - A \frac{da}{a^2},$$

ou, grâce à (6; II),

$$(2) \quad U_1 = \varpi_1 - \nu_1 A,$$

avec  $\nu_1 = \frac{x_1}{a\varrho}$ . Une nouvelle différentiation donne

$$(3) \quad \gamma_1 U_2 = a \left( c_1 \varpi_2 - \nu_1 \varpi_1 - \frac{d\nu_1}{ds} A \right),$$

avec

$$\frac{d\nu_1}{ds} = \frac{1 - \nu_1 x_1 + c_1 x_2}{a\varrho}.$$

Le carré des deux membres de (3) fournit l'expression de  $\gamma_1$  à l'aide des éléments euclidiens, soit<sup>1</sup>

$$(4) \quad \gamma_1^2 = a^2 \left( c_1^2 + \nu_1^2 + 2 \frac{d\nu_1}{ds} \right),$$

car  $\varpi_2 A = -r_2 = -\frac{1}{c_1}$ .

---

<sup>1</sup> Lorsqu'on définit la première courbure à l'aide du  $n$ -vecteur principal que permet de construire la connexion affine associée à  $E_\Sigma$ , le carré de cette courbure vaut  $\gamma_1^2 + 1$ , d'où résulte une anomalie dans les expressions des invariants conformes en fonction des courbures dans  $E_\Sigma$ , par rapport à ces expressions en fonction des courbures euclidiennes; c'est la différence dont il est parlé dans l'introduction.



8. Pour poursuivre aisément les dérivations, observons que l'on peut écrire

$$U_0 = -\frac{O}{\rho} + \frac{\rho}{2}\omega_0,$$

où  $O$  est le centre de la sphère, donc  $p_i = \vec{e}_i \overrightarrow{AP}$  est tel que le produit<sup>1</sup>

$$(5) \quad U_0 p_i = -\frac{1}{\rho} p_i O = -\frac{\vec{e}_i \overrightarrow{AO}}{\rho} = \frac{x_i}{\rho} \quad i = 1, 2, \dots, n;$$

on en déduit

$$(6) \quad U_0 \omega_i = U_0(p_i + r_i \omega_0) = \frac{x_i + r_i}{\rho}.$$

On voit en particulier que  $p_i - \frac{x_i}{a\rho} A$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) est la sphère tangente en  $A$  à  $p_i$  et orthogonale à  $U_0$ . Ces sphères joueront un rôle essentiel dans la suite.

Dérivons maintenant l'équation (3), en posant

$$c'_1 = \frac{dc_1}{ds}, \quad \gamma'_1 = \frac{d\gamma_1}{d\sigma}.$$

Il vient

$$\begin{aligned} & \frac{1}{a} [\gamma'_1 U_2 + \gamma_1 (-\gamma_1 U_1 + \gamma_2 U_3)] \\ &= a(c'_1 \omega_2 + c_1 c_2 \omega_3) - a \left( c_1^2 + \gamma_1^2 + 2 \frac{d\gamma_1}{ds} \right) \omega_1 - \frac{d}{ds} \left( a \frac{d\gamma_1}{ds} \right) A. \end{aligned}$$

En ajoutant membre à membre avec

$$\frac{\gamma_1^2}{a} U_1 = \frac{\gamma_1^2}{a} (\omega_1 - \gamma_1 A),$$

il vient, grâce à (4), et à  $ds = a d\sigma$ ,

$$(7) \quad \frac{1}{a^2} \left( \gamma'_1 U_2 + \gamma_1 \gamma_2 U_3 \right) = c'_1 \omega_2 + c_1 c_2 \omega_3 - \frac{1}{a^2} \left( \frac{d^2 \gamma_1}{d\sigma^2} + \gamma_1^2 \gamma_1 \right) A.$$

La multiplication par  $U_0$  donne, à l'aide de (6),

$$\frac{1}{a^2} \left( \frac{d^2 \gamma_1}{d\sigma^2} + \gamma_1^2 \gamma_1 \right) = \frac{1}{a} (c'_1 U_0 \omega_2 + c_1 c_2 U_0 \omega_3) = \frac{c'_1 x_2 + c_1 c_2 x_3}{a\rho} + \frac{c'_1 r_2 + c_1 c_2 r_3}{a\rho},$$

où, grâce à  $c_1 = \frac{1}{r_2}$ ,

<sup>2</sup> On utilise des formules (17; P. I.) et (18; P. I.) du produit du plan de l'infini par un plan ou une sphère.

$$(8) \quad c_1' r_2 + c_1 c_2 r_3 = c_1 \left( -\frac{dr_2}{ds} + c_2 r_3 \right) = 0;$$

ainsi (7) s'écrit encore

$$(9) \quad \frac{1}{a^2} (\gamma_1' U_2 + \gamma_1 \gamma_2' U_3) = c_1' \varpi_2 + c_1 c_2' \varpi_3 - \frac{c_1' x_2 + c_1 c_2' x_3}{a \rho} A.$$

Il résulte également de (8) que le produit du second membre par  $A$  est nul, ce qu'on vérifie aussi directement sur le premier membre; d'autre part, l'élevation au carré des deux membres donne

$$\frac{1}{a^4} (\gamma_1'^2 + \gamma_1^2 \gamma_2'^2) = c_1'^2 + c_1^2 c_2'^2,$$

ce qui met en évidence la relation covariante

$$(10) \quad \lambda = \frac{l}{a},$$

entre

$$(11) \quad l = (c_1'^2 + c_1^2 c_2'^2)^{-\frac{1}{2}} \quad \text{et} \quad \lambda = (\gamma_1'^2 + \gamma_1^2 \gamma_2'^2)^{-\frac{1}{2}}.$$

La comparaison de (10) avec  $ds = a d\sigma$  fournit l'invariant différentiel

$$(12) \quad dS = \frac{d\sigma}{\lambda} = \frac{ds}{l},$$

que l'on choisit comme *élément de l'arc conforme*; c'est le pseudo-arc conforme de Delens. On a également obtenu le point invariant

$$(13) \quad \Phi_0 = \frac{A_0}{\lambda} = \frac{A}{l},$$

qui représente le point  $A$  de la courbe  $C$  dans l'espace  $E_c$ .

9. En posant  $\lambda' = \frac{d\lambda}{d\sigma}$ ,  $l' = \frac{dl}{ds}$ , la dérivation de (13) donne alors

$$\frac{d\Phi_0}{dS} = \lambda \left( \frac{1}{\lambda} \frac{dA_0}{d\sigma} - \frac{\lambda'}{\lambda^2} A_0 \right) = l \left( \frac{1}{l} \frac{dA}{ds} - \frac{l'}{l^2} A \right),$$

c'est à dire

$$(14) \quad \frac{d\Phi_0}{dS} = U_1 - \frac{\lambda'}{\lambda} A_0 = \varpi_1 - \frac{l'}{l} A.$$

C'est une sphère unitaire normale à  $C$  en  $A$ , que nous appelons  $\Phi_1$ , de sorte que

$$(15) \quad \frac{d\Phi_0}{dS} = \Phi_1.$$

Une nouvelle dérivation fournit la sphère invariante

$$(16) \quad \frac{d\Phi_1}{dS} = \lambda \left[ \gamma_1 U_2 - \frac{\lambda'}{\lambda} U_1 - \left( \frac{\lambda'}{\lambda} \right)' A_0 \right] = l \left[ c_1 \varpi_2 - \frac{l'}{l} \varpi_1 - \left( \frac{l'}{l} \right)' A \right],$$

où il est bien entendu que les éléments relatifs à  $E_\Sigma$  sont dérivés par rapport à  $\sigma$ , et les éléments euclidiens par rapport à  $s$ . Le carré de la masse de (16) est un invariant  $2\Gamma_1$ , où  $\Gamma_1$  n'est rien autre que la *torsion conforme* de Delens,

$$\begin{aligned} 2\Gamma_1 &= \lambda^2 \left[ \gamma_1^2 + \left( \frac{\lambda'}{\lambda} \right)^2 - 2\gamma_1 \left( \frac{\lambda'}{\lambda} \right)' U_2 A_0 \right] = l^2 \left[ c_1^2 + \left( \frac{l'}{l} \right)^2 - 2c_1 \left( \frac{l'}{l} \right)' \varpi_2 A \right] \\ &= \lambda^2 \left[ \gamma_1^2 + \left( \frac{\lambda'}{\lambda} \right)^2 + 2 \left( \frac{\lambda'}{\lambda} \right)' \right] = l^2 \left[ c_1^2 + \left( \frac{l'}{l} \right)^2 + 2 \left( \frac{l'}{l} \right)' \right] \end{aligned}$$

ou enfin

$$(17) \quad 2\Gamma_1 = 2\lambda\lambda'' - \lambda'^2 + \gamma_1^2\lambda^2 = 2ll'' - l'^2 + c_1^2 l^2.$$

C'est un invariant du cinquième ordre.

10. Ceci obtenu, revenons à la sphère (9), et posons

$$(18) \quad \begin{aligned} V_2 &= \lambda^2 (\gamma_1' U_2 + \gamma_1 \gamma_2' U_3) = l^2 \left[ c_1' \left( \varpi_2 - \frac{x_2}{a\rho} A \right) + c_1 c_2 \left( \varpi_3 - \frac{x_3}{a\rho} A \right) \right] \\ &= l^2 \left[ c_1' \left( p_2 - \frac{x_2}{a\rho} A \right) + c_1 c_2 \left( p_3 - \frac{x_3}{a\rho} A \right) \right], \end{aligned}$$

l'égalité des deux derniers membres résultant de ce que  $V_2$  passe par  $A$ , comme nous l'avons observé au sujet de (9). C'est une sphère unitaire, tangente à  $C$  en  $A$ . En posant aussi

$$(19) \quad \begin{cases} \theta_2^2 = \lambda^2 \gamma_1', & \theta_3^2 = \lambda^2 \gamma_1 \gamma_2', \\ t_2^2 = l^2 c_1', & t_2^2 = l^2 c_1 c_2, \end{cases}$$

on peut encore écrire

$$(20) \quad V_2 = \sum_{i=2}^3 \theta_2^i U_i = \sum_{i=2}^3 t_2^i \left( p_i - \frac{x_i}{a\rho} A \right),$$

et les coefficients  $\theta_2^i$  s'expriment en fonction de  $\gamma_1, \gamma_2, \sigma$  comme les  $t_2^i$  en fonction de  $c_1, c_2, s$ . D'après la forme du dernier membre,  $V_2$  dépend de l'absolu  $\Sigma$ , mais la famille linéaire de sphères définie par  $V_2$  et  $A$  est une famille invariante. En par-

ticulier, le plan tangent en  $A$  est invariant. Observons aussi que  $V_2$  diffère de  $U_2$  sauf si  $\lambda^2\gamma_1\gamma_2 = 0$ .

La dérivation de (20) donne ensuite une relation de la forme

$$(21) \quad \frac{dV_2}{dS} = -\lambda\gamma_1\theta_2^3 U_1 + \sum_{i=2}^4 \bar{\theta}_3^i U_i = -lc_1 t_2^2 p_1 + \sum_{i=2}^4 \bar{t}_3^i \left( p_i - \frac{x_i}{a\rho} A \right) + \alpha p_1 + \beta A,$$

où  $\alpha, \beta$  sont des coefficients qu'il est inutile d'expliciter, et où

$$(22) \quad \begin{cases} \bar{\theta}_3^i = \lambda \left( \frac{d\theta_2^i}{d\sigma} + \gamma_{i-1} \theta_2^{i-1} - \gamma_i \theta_2^{i+1} \right), \\ \bar{t}_3^i = l \left( \frac{dt_2^i}{ds} + c_{i-1} t_2^{i-1} - c_i t_2^{i+1} \right) \quad i = 2, 3, 4, \end{cases}$$

s'expriment respectivement de la même façon par rapport à  $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \sigma$  et  $c_1, c_2, c_3, s$ . Bien entendu, on ne conserve aux seconds membres de (22) que les termes qui ont un sens. On déduit de (21) une égalité de la forme

$$\sum_{i=2}^4 \bar{\theta}_3^i U_i = \sum_{i=2}^4 \bar{t}_3^i \left( p_i - \frac{x_i}{a\rho} A \right) + \alpha_1 p_1 + \beta_1 A,$$

où  $\alpha_1, \beta_1$  sont deux certains coefficients. Chaque sphère  $p_i - \frac{x_i}{a\rho} A$  ( $i = 2, 3, 4$ ) étant normale à  $U_1$  en  $A$ , la multiplication des deux membres par  $U_1 = p_1 - \nu_1 A$  donne tout de suite  $\alpha_1 = 0$ ; compte tenu de (5), la multiplication par  $U_0$  donne ensuite  $\beta_1 = 0$ , et il reste

$$(23) \quad \sum_{i=2}^4 \bar{\theta}_3^i U_i = \sum_{i=2}^4 \bar{t}_3^i \left( p_i - \frac{x_i}{a\rho} A \right).$$

La sphère ainsi mise en évidence au premier membre est tangente à  $C$  en  $A$ , son plan tangent en ce point étant  $\sum_{i=2}^4 \bar{t}_3^i p_i$ , donc indépendant de  $\Sigma$ . Sa masse

$$(24) \quad \Gamma_2 = \left[ \sum_{i=2}^4 (\bar{\theta}_3^i)^2 \right]^{\frac{1}{2}} = \left[ \sum_{i=2}^4 (\bar{t}_3^i)^2 \right]^{\frac{1}{2}}$$

est un invariant conforme du quatrième ordre qu'on appelle la *première courbure conforme*. Il s'exprime en fonction de  $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \sigma$  de la même façon qu'avec  $c_1, c_2, c_3, s$ . Cette sphère appartient à la famille linéaire définie par  $U_2, U_3, U_4$ , mais pas, en général, au faisceau de  $U_2, U_3$ , car

$$\bar{\theta}_3^4 = \lambda\gamma_3\theta_2^3 = \lambda^3\gamma_1\gamma_2\gamma_3$$

diffère généralement de zéro. Si  $\Gamma_2 \neq 0$ , désignons par  $V_3$  la sphère unitaire correspondante, c'est à dire

$$(25) \quad V_3 = \sum_{i=2}^4 \theta_3^i U_i = \sum_{i=2}^4 t_3^i \left( p_i - \frac{x_i}{a\rho} A \right),$$

avec

$$\theta_3^i = \frac{\bar{\theta}_3^i}{\Gamma_2}, \quad t_3^i = \frac{\bar{t}_3^i}{\Gamma_2};$$

les  $\theta_3^i$  s'expriment encore en fonction de  $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \sigma$ , comme les  $t_3^i$  en fonction de  $c_1, c_2, c_3, s$ . (21) s'écrit alors

$$(26) \quad \frac{dV_2}{dS} = -\lambda\gamma_1\theta_2^2 U_1 + \Gamma_2 V_3,$$

et  $U_1, V_2, V_3$  sont unitaires et orthogonales. On peut poursuivre à partir de (25), dont la dérivation donne

$$(27) \quad \frac{dV_3}{dS} = -\lambda\gamma_1\theta_3^2 U_1 + \sum_{i=2}^5 \bar{\theta}_4^i U_i = \sum_{i=2}^5 \bar{t}_4^i \left( p_i - \frac{x_i}{a\rho} A \right) + \alpha U_1 + \beta A,$$

où  $\alpha, \beta$  sont deux certains coefficients, et

$$\begin{aligned} \bar{\theta}_4^i &= \lambda \left( \frac{d\theta_3^i}{d\sigma} + \gamma_{i-1}\theta_3^{i-1} - \gamma_i\theta_3^{i+1} \right), \\ \bar{t}_4^i &= l \left( \frac{dt_3^i}{ds} + c_{i-1}t_3^{i-1} - c_i t_3^{i+1} \right), \quad i = 2, 3, 4, 5. \end{aligned}$$

La multiplication de (27) par  $U_1 = p_1 - \nu_1 A$  donne tout de suite  $\alpha = -\lambda\gamma_1\theta_3^2$ , et la multiplication par  $U_0$  donne  $\beta = 0$ . On met ainsi en évidence la sphère

$$(28) \quad \sum_{i=2}^5 \bar{\theta}_4^i U_i = \sum_{i=2}^5 \bar{t}_4^i \left( p_i - \frac{x_i}{a\rho} A \right),$$

tangente à  $C$  en  $A$ , et dont le plan tangent en ce point est indépendant de  $\Sigma$ , bien que cette sphère varie elle-même avec  $\Sigma$ . Elle appartient à la famille linéaire définie par  $U_2, U_3, U_4, U_5$ , mais pas en général à la famille de  $U_2, U_3, U_4$ , car

$$\bar{\theta}_4^5 = \lambda\gamma_4\theta_3^4 = \frac{\lambda^4\gamma_1\gamma_2\gamma_3\gamma_4}{\Gamma_2}$$

n'est nul qu'exceptionnellement. Cette sphère est orthogonale à  $V_3$ , puisque  $U_1$  et  $\frac{dV_3}{dS}$  le sont, mais non à  $V_2$ . D'ailleurs

$$V_2 \frac{dV_3}{dS} = -V_3 \frac{dV_2}{dS} = -\Gamma_2$$

montre que  $\Gamma_2 V_2 + \sum_{i=2}^5 \bar{\theta}_4^i U_i$  est orthogonale à  $U_1, V_2$  et  $V_3$ ; elle passe au point  $A$ , et, si  $\Gamma_3$  désigne sa masse, supposée différente de zéro, et  $V_4$  la sphère unitaire correspondante, on peut écrire

$$(29) \quad \frac{dV_3}{dS} = -\lambda \gamma_1 \theta_3^2 U_1 - \Gamma_2 V_2 + \Gamma_3 V_4,$$

avec

$$(30) \quad V_4 = \sum_{i=2}^5 \theta_4^i U_i = \sum_{i=2}^5 t_4^i \left( p_i - \frac{x_i}{a\rho} A \right),$$

où

$$(31) \quad \begin{cases} \theta_4^i = \frac{1}{\Gamma_3} (\bar{\theta}_4^i + \Gamma_2 \theta_2^i), \\ t_4^i = \frac{1}{\Gamma_3} (\bar{t}_4^i + \Gamma_2 t_2^i), \quad i = 2, 3, 4, 5; \end{cases}$$

il est toujours entendu que ne sont conservés aux seconds membres que les termes qui ont un sens. L'invariant du cinquième ordre

$$\Gamma_3 = \left[ \sum_{i=2}^5 (\theta_4^i)^2 \right]^{\frac{1}{2}} = \left[ \sum_{i=2}^5 (t_4^i)^2 \right]^{\frac{1}{2}}$$

est la *deuxième courbure conforme*. Il s'exprime de la même façon avec  $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4, \sigma$  et  $c_1, \dots, c_4, s$ . Observons encore que  $V_4$  fait partie de la famille  $U_2, U_3, U_4, U_5$ , et définit en  $A$  un plan tangent invariant.

11. Le même procédé fournit, d'une manière générale, une sphère unitaire

$$(32) \quad V_k = \sum_{i=2}^{k+1} \theta_k^i U_i = \sum_{i=2}^{k+1} t_k^i \left( p_i - \frac{x_i}{a\rho} A \right) \quad k \leq n,$$

tangente à  $\Gamma$  en  $A$ , orthogonale à  $U_1, V_2, \dots, V_{k-1}$ , et dont les coefficients  $\theta_k^i$  s'expriment en fonction de  $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_k$  et de leurs dérivées par rapport à  $\sigma$  comme les  $t_k^i$  en fonction de  $c_1, c_2, \dots, c_k$  et de leurs dérivées par rapport à  $s$ . Elle appartient à la famille linéaire de  $U_2, U_3, \dots, U_{k-1}$ , avec

$$\theta_k^{k+1} = \frac{\lambda^k \gamma_1 \gamma_2 \dots \gamma_k}{\Gamma_2 \Gamma_3 \dots \Gamma_{k-1}},$$

non nul en général. Son plan tangent en  $A$  est indépendant de  $\Sigma$ . D'autre part, pour  $3 \leq h \leq k-1$ , on a

$$(33) \quad \frac{dV_h}{dS} = -\lambda\gamma_1\theta_h^2 U_1 - \Gamma_{h-1} V_{h-1} + \Gamma_h V_{h+1}.$$

En posant

$$(34) \quad \begin{cases} \bar{\theta}_{k+1}^i = \lambda \left( \frac{d\theta_k^i}{d\sigma} + \gamma_{i-1}\theta_k^{i-1} - \gamma_i\theta_k^{i+1} \right), \\ \bar{t}_{k+1}^i = l \left( \frac{dt_k^i}{d\sigma} + c_{i-1}t_k^{i-1} - c_i t_k^{i+1} \right), \end{cases}$$

la dérivation de (32) donne une relation de la forme

$$(35) \quad \frac{dV_k}{dS} = -\lambda\gamma_1\theta_k^2 U_1 + \sum_{i=2}^{k+2} \bar{\theta}_{k+1}^i U_i = \sum_{i=2}^{k+2} \bar{t}_{k+1}^i \left( p_i - \frac{x_i}{a\rho} A \right) + \alpha U_1 + \beta A,$$

dont la multiplication par  $U_1 = p_1 - \nu_1 A$  et  $U_0$  montre que  $\alpha = -\lambda\gamma_1\theta_k^2$  et  $\beta = 0$ . On introduit ainsi la nouvelle sphère

$$\sum_{i=2}^{k+2} \bar{\theta}_{k+1}^i U_i = \sum_{i=2}^{k+2} \bar{t}_{k+1}^i \left( p_i - \frac{x_i}{a\rho} A \right),$$

tangente à  $C$  en  $A$ , avec un plan tangent invariant en ce point. Elle est orthogonale à  $U_1, V_2, V_3, \dots, V_{k-2}$  et  $V_k$ , car, pour  $2 \leq h \leq k-2$ ,

$$V_h \frac{dV_k}{dS} = -V_k \frac{dV_h}{dS} = -V_k (-\lambda\gamma_1\theta_h^2 U_1 - \Gamma_{h-1} V_{h-1} + \Gamma_h V_{h+1}) = 0,$$

et

$$V_k \sum_{i=2}^{k+2} \bar{\theta}_{k+1}^i U_i = V_k \frac{dV_k}{dS} = 0.$$

Par contre

$$V_{k-1} \frac{dV_k}{dS} = -V_k \frac{dV_{k-1}}{dS} = -V_k (-\lambda\gamma_1\theta_{k-1}^2 U_1 - \Gamma_{k-2} V_{k-2} + \Gamma_{k-1} V_k) = -\Gamma_{k-1},$$

donc la sphère  $\Gamma_{k-1} V_{k-1} + \sum_{i=2}^{k+2} \bar{\theta}_{k+1}^i U_i$  est orthogonale à  $U_1, V_2, V_3, \dots, V_k$ . Si sa masse  $\Gamma_k$  diffère de zéro, et si  $V_{k+1}$  désigne la sphère unitaire correspondante, on a

$$(36) \quad \frac{dV_k}{dS} = -\lambda\gamma_1\theta_k^2 U_1 - \Gamma_{k-1} V_{k-1} + \Gamma_k V_{k+1},$$

avec

$$(37) \quad \Gamma_k V_{k+1} = \sum_{i=2}^{k+2} \bar{\theta}_{k+1}^i U_i = \sum_{i=2}^{k+2} \bar{t}_{k+1}^i \left( p_i - \frac{x_i}{a\rho} A \right),$$

où

$$(38) \quad \begin{cases} \theta_{k+1}^i = \frac{1}{\Gamma_k} (\bar{\theta}_{k+1}^i + \Gamma_{k-1} \theta_{k-1}^i), \\ t_{k+1}^i = \frac{1}{\Gamma_k} (\bar{t}_{k+1}^i + \Gamma_{k-1} t_{k-1}^i). \end{cases}$$

L'invariant d'ordre  $k+2$

$$(39) \quad \Gamma_k = \left[ \sum_{i=2}^{k+2} (\theta_{k+1}^i)^2 \right]^{\frac{1}{2}} = \left[ \sum_{i=2}^{k+2} (t_{k+1}^i)^2 \right]^{\frac{1}{2}}$$

est la  $(k-1)$ -ème courbure conforme. Les  $\theta_{k+1}^i$  s'expriment en fonction de  $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_{k+1}$  et de leurs dérivées par rapport à  $\sigma$  comme les  $t_{k+1}^i$  en fonction de  $c_1, c_2, \dots, c_{k+1}$  et de leurs dérivées par rapport à  $s$ , de sorte que  $\Gamma_k$  s'exprime de la même façon à l'aide des mesures faites dans  $E_\Sigma$  et de celles faites dans  $E$ . Enfin  $V_{k+1}$  appartient à la famille linéaire que définissent  $U_2, U_3, \dots, U_{k+2}$ , mais pas en général à celle de  $U_2, U_3, \dots, U_{k+1}$ , car

$$(40) \quad \theta_{k+1}^{k+2} = \frac{1}{\Gamma_k} \bar{\theta}_{k+1}^{k+2} = \frac{\lambda^{k+1} \gamma_1 \gamma_2 \dots \gamma_{k+1}}{\Gamma_2 \Gamma_3 \dots \Gamma_k}$$

n'est nul qu'exceptionnellement. La récurrence est ainsi établie jusqu'à la sphère unitaire

$$(41) \quad V_n = \sum_{i=2}^{n+1} \theta_n^i U_i = \sum_{i=2}^{n+1} t_n^i \left( p_i - \frac{x_i}{a\rho} A \right),$$

tangente en  $A$  à  $C$ , avec en ce point un plan tangent indépendant de  $\Sigma$ , et orthogonale à  $U_1, V_2, V_3, \dots, V_{n-1}$ . Sa dérivée  $\frac{dV_n}{dS}$  est orthogonale à  $V_2, V_3, \dots, V_{n-2}, V_n$ , et se met encore sous la forme

$$\frac{dV_n}{dS} = -\lambda \gamma_1 \theta_n^2 U_1 + \sum_{i=2}^{n+1} \bar{\theta}_{n+1}^i U_i = \sum_{i=2}^{n+1} \bar{t}_{n+1}^i \left( p_i - \frac{x_i}{a\rho} A \right) - \lambda \gamma_1 \theta_n^2 U_1;$$

la sphère

$$(42) \quad \sum_{i=2}^{n+1} \bar{\theta}_{n+1}^i U_i = \sum_{i=2}^{n+1} \bar{t}_{n+1}^i \left( p_i - \frac{x_i}{a\rho} A \right)$$

ainsi mise en évidence, et dont les coefficients s'expriment par des formules du type (34), est orthogonale à  $U_1, V_2, V_3, \dots, V_{n-2}, V_n$ , ainsi qu'à  $U_0$  et  $A$ , c'est à dire à  $n+1$  sphères ou point, linéairement distincts en général, comme on peut le vérifier immédiatement.  $V_{n-1}$  ayant les mêmes qualités, (42) est cette sphère elle-même, à la masse près; d'ailleurs,



$$V_{n-1} \frac{dV_n}{dS} = -V_n \frac{dV_{n-1}}{dS} = -V_n (-\lambda\gamma_1\theta_{n-1}^2 U_1 - \Gamma_{n-2} V_{n-2} + \Gamma_{n-1} V_n) = -\Gamma_{n-1},$$

donc

$$(43) \quad \frac{dV_n}{dS} = -\lambda\gamma_1\theta_n^2 U_1 - \Gamma_{n-1} V_{n-1}.$$

On voit en particulier que, pour  $k = n$ , les formules (38) deviennent

$$(44) \quad \begin{cases} \bar{\theta}_{n+1}^i + \Gamma_{n-1} \theta_{n-1}^i = 0 \\ \bar{t}_{n+1}^i + \Gamma_{n-1} t_{n-1}^i = 0 \end{cases} \quad i = 2, 3, \dots, n+1,$$

c'est à dire

$$(44') \quad \begin{cases} \lambda \left( \frac{d\theta_n^i}{d\sigma} + \gamma_{i-1} \theta_n^{i-1} - \gamma_i \theta_n^{i+1} \right) = -\Gamma_{n-1} \theta_{n-1}^i \\ l \left( \frac{dt_n^i}{ds} + c_{i-1} t_n^{i-1} - c_i t_n^{i+1} \right) = -c_{n-1} t_{n-1}^i \end{cases} \quad i = 2, 3, \dots, n+1,$$

les seconds membres étant eux-mêmes nuls pour  $i = n+1$ .

En résumé, nous avons le système d'équations

$$(45) \quad \begin{cases} \frac{dV_2}{dS} = -\lambda\gamma_1\theta_2^2 U_1 + \Gamma_2 V_3, \\ \dots\dots\dots \\ \frac{dV_k}{dS} = -\lambda\gamma_1\theta_k^2 U_1 - \Gamma_{k-1} V_{k-1} + \Gamma_k V_{k+1}, \\ \dots\dots\dots \\ \frac{dV_n}{dS} = -\lambda\gamma_1\theta_n^2 U_1 - \Gamma_{n-1} V_{n-1}. \end{cases}$$

### CHAPITRE IV

#### Le $(n+2)$ -sphère de Cartan.

12. Le système (45; III) définit les courbures conformes de la courbe  $C$ , mais en utilisant pour repère mobile un système de sphères qui n'est pas conformément invariant. On peut choisir avec beaucoup d'arbitraires un  $(n+2)$ -sphère associé à chaque point  $A$  de  $C$ , mais cette détermination se précise si l'on veut que ses rotations soient les courbures définies plus haut. Ce  $(n+2)$ -sphère comprendra déjà le point

géométrique  $A$ , représenté par (13; III), et  $n$  sphères orthonormales que l'on construira à l'aide de  $U_1, V_2, V_3, \dots, V_n$ . Il faudra donc le compléter avec une sphère ou un point. Le repère de Cartan comprend un deuxième point.

Reprenons (13; III), (15; III) et (16; III), soit

$$(1) \quad \Phi_0 = \frac{A_0}{\lambda} = \frac{A}{l},$$

$$(2) \quad \frac{d\Phi_0}{dS} = \Phi_1 = U_1 - \frac{\lambda'}{\lambda} A_0 = p_1 - \frac{l'}{l} A,$$

et enfin

$$(3) \quad \frac{d\Phi_1}{dS} = \lambda \left[ \gamma_1 U_2 - \frac{\lambda'}{\lambda} U_1 - \left( \frac{\lambda'}{\lambda} \right)' A_0 \right] = l \left[ c_1 \varpi_2 - \frac{l'}{l} \varpi_1 - \left( \frac{l'}{l} \right)' A \right],$$

de masse  $\sqrt{2\Gamma_1}$ . Il résulte de la valeur de cette masse et de  $\Phi_0 \Phi_1 = 0$  que

$$\left( \frac{d\Phi_1}{dS} + \Gamma_1 \Phi_0 \right)^2 = 2\Gamma_1 \left( 1 + \Phi_0 \frac{d\Phi_1}{dS} \right) = 2\Gamma_1 \left( 1 - \Phi_1 \frac{d\Phi_0}{dS} \right) = 0,$$

donc on peut écrire

$$(4) \quad \frac{d\Phi_1}{dS} = -\Gamma_1 \Phi_0 + \Psi_0,$$

où  $\Psi_0$  est un point  $B$  invariant, situé sur  $\Phi_1$ . En outre,

$$(5) \quad \Phi_0 \Psi_0 = \Phi_0 \frac{d\Phi_1}{dS} = -\Phi_1 \frac{d\Phi_0}{dS} = -1.$$

(3) donne

$$(6) \quad \Psi_0 = \lambda \gamma_1 U_2 - \lambda' U_1 + \left[ \frac{\Gamma_1}{\lambda} - \lambda \left( \frac{\lambda'}{\lambda} \right)' \right] A_0,$$

donc

$$V_2 \Psi_0 = \lambda \gamma_1 V_2 U_2 = \lambda \gamma_1 \theta_2^2 = \lambda^3 \gamma_1 \gamma_1'.$$

Grâce à ce point invariant, nous pouvons définir une sphère invariante dans chaque famille linéaire invariante définie par  $V_k$  et  $A_0$  ( $k = 2, 3, \dots, n$ ), savoir celle qui passe par le point  $B$ . Cette sphère unitaire  $\Phi_k$  est de la forme

$$\Phi_k = V_k + \mu \Phi_0,$$

avec

$$\Phi_k \Psi_0 = V_k \Psi_0 - \mu = 0,$$

c'est à dire, puisque  $V_k$  est orthogonale à  $U_1$  et  $A_0$ ,

$$\mu = \lambda\gamma_1 U_2 \sum_{i=2}^{k+1} \theta_k^i U_i = \lambda\gamma_1 \theta_k^2;$$

ainsi

$$(7) \quad \Phi_k = V_k + \lambda\gamma_1 \theta_k^2 \Phi_0 \quad k = 2, 3, \dots, n.$$

Ces  $n-1$  sphères  $\Phi_k$  sont orthogonales entre elles, ainsi qu'à  $\Phi_1$  et  $\Phi_0$ , comme le sont les  $V_k$ . Le  $(n+2)$ -sphère de Cartan est constitué par  $\Phi_1, \Phi_2, \dots, \Phi_n$  et les deux points  $\Phi_0, \Psi_0$ .

La détermination des rotations de ce  $(n+2)$ -sphère fait d'abord intervenir les équations (2) et (4), puis  $\frac{d\Psi_0}{ds}$ . La dérivation de (6) donne une expression de la forme

$$\begin{aligned} \frac{d\Psi_0}{dS} &= \lambda(\lambda\gamma_1' U_2 + \lambda\gamma_1 \gamma_2 U_3) + \alpha U_1 + \beta A_0 \\ &= V_2 + \alpha U_1 + \beta A_0 = \Phi_2 + \alpha \Phi_1 + \beta_1 \Phi_0, \end{aligned}$$

où  $\alpha, \beta, \beta_1$  sont certains coefficients. En outre,

$$\alpha = \Phi_1 \frac{d\Psi_0}{dS} = -\Psi_0 \frac{d\Phi_1}{dS} = -\Gamma_1,$$

$$\beta_1 = -\Psi_0 \frac{d\Psi_0}{dS} = 0,$$

donc

$$(8) \quad \frac{d\Psi_0}{dS} = -\Gamma_1 \Phi_1 + \Phi_2.$$

Grâce à (45; III), la dérivation de (7) donne, pour  $k = 2$ ,

$$\frac{d\Phi_2}{dS} = \Gamma_2 V_3 + \alpha \Phi_1 + \beta \Phi_0 = \Gamma_2 \Phi_3 + \alpha \Phi_1 + \beta_1 \Phi_0,$$

où  $\alpha, \beta, \beta_1$  sont certains coefficients, avec

$$\alpha = \Phi_1 \frac{d\Phi_2}{dS} = -\Phi_2 \frac{d\Phi_1}{dS} = 0,$$

$$\beta_1 = -\Psi_0 \frac{d\Phi_2}{dS} = \Phi_2 \frac{d\Psi_0}{dS} = 1,$$

donc

$$(9) \quad \frac{d\Phi_2}{dS} = \Gamma_2 \Phi_3 + \Phi_0.$$

Pour les valeurs de  $k$  supérieures à 2, il vient de même

$$\frac{d\Phi_k}{dS} = -\Gamma_{k-1}V_{k-1} + \Gamma_k V_{k+1} + \alpha\Phi_1 + \beta\Phi_0 = -\Gamma_{k-1}\Phi_{k-1} + \Gamma_k\Phi_{k+1} + \alpha\Phi_1 + \beta_1\Phi_0,$$

où l'on fait  $\Gamma_n = 0$ , avec

$$\alpha = \Phi_1 \frac{d\Phi_k}{dS} = -\Phi_k \frac{d\Phi_1}{dS} = 0,$$

$$\beta_1 = -\Psi_0 \frac{d\Phi_k}{dS} = \Phi_k \frac{d\Psi_0}{dS} = 0,$$

donc

$$\frac{d\Phi_k}{dS} = -\Gamma_{k-1}\Phi_{k-1} + \Gamma_k\Phi_{k+1}, \quad k = 3, 4, \dots, n-1,$$

$$\frac{d\Phi_n}{dS} = -\Gamma_{n-1}\Phi_{n-1}.$$

Les formules du déplacement du  $(n+2)$ -sphère de Cartan sont ainsi

$$(10) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{d\Phi_0}{dS} = \Phi_1, \\ \frac{d\Phi_1}{dS} = -\Gamma_1\Phi_0 + \Psi_0, \\ \frac{d\Psi_0}{dS} = -\Gamma_1\Phi_1 + \Phi_2, \\ \frac{d\Phi_2}{dS} = \Gamma_2\Phi_3 + \Phi_0, \\ \frac{d\Phi_k}{dS} = -\Gamma_{k-1}\Phi_{k-1} + \Gamma_k\Phi_{k+1}, \quad k = 3, 4, \dots, n-1, \\ \frac{d\Phi_n}{dS} = -\Gamma_{n-1}\Phi_{n-1}. \end{array} \right.$$

$\Phi_n$  est la sphère osculatrice à  $\Gamma$  en  $A$  puisque,  $\Phi_n$  étant orthogonale à  $\Phi_0, \Psi_0, \Phi_1, \dots, \Phi_{n-1}$ , on a

$$\Phi_n \Phi_0 = \Phi_n \frac{d\Phi_0}{dS} = \Phi_n \frac{d^2\Phi_0}{dS^2} = \dots = \Phi_n \frac{d^n\Phi_0}{dS^n} = 0,$$

donc  $\Phi_n$  a un contact d'ordre  $\geq n$  avec  $C$  au point  $A$ . On voit de même que la variété sphérique d'ordre  $k-1$ , osculatrice à  $C$  en  $A$ , est l'intersection de  $\Phi_n, \Phi_{n-1}, \dots, \Phi_k$  ( $k = n, n-1, \dots, 2$ ), et que son contact avec  $C$  est généralement d'ordre  $k$ .