

LES POTENTIELS D'ENERGIE FINIE

Par

JACQUES DENY

à STRASBOURG.

Introduction.

La théorie du potentiel newtonien a connu ces vingt dernières années un développement considérable. Etudiée d'abord en fonction du problème de Dirichlet, elle a fait ensuite l'objet de nombreux travaux autonomes, qui ont permis des généralisations de nature très variée, et montré en même temps le rôle essentiel joué par deux théorèmes : l'un relatif *au signe de l'intégrale d'énergie*, l'autre affirmant l'exactitude du *principe du maximum*.

Soit $h(r) = r^{2-p}$ le « noyau newtonien » de l'espace euclidien réel R^p à $p \geq 3$ dimensions. Selon une notation très commode de H. Cartan nous désignerons par $U^\mu(M) = \int h(\overline{MP}) d\mu(P)$ le potentiel newtonien engendré en M par la mesure positive μ (distribution de masses, ou fonction additive d'ensembles selon les auteurs). L'énergie de μ est la quantité :

$$(1) \quad \|\mu\|^2 = \int U^\mu(M) d\mu(M) = \iint h(\overline{MP}) d\mu(M) d\mu(P).$$

Le premier théorème fondamental est alors le suivant : *Si μ est la différence de deux mesures positives d'énergie finie, l'intégrale (1) est positive, et ne s'annule que si μ est identiquement nulle.*

Ce résultat est connu depuis longtemps dans le cas d'une distribution régulière de masses (réparties par exemple dans un domaine limité par un nombre fini de surfaces à courbure bornée, avec une densité spatiale continue). Le théorème classique de Green conduit alors dans R^3 à la relation suivante :

$$(2) \quad \|\mu\|^2 = \frac{1}{4\pi} \int (\text{grad } U^\mu)^2 d\tau,$$

où l'intégrale est étendue à tout l'espace R^3 , dont $d\tau$ représente l'élément de volume

(on sait que les hypothèses entraînent la continuité des dérivées partielles du premier ordre de U^μ).

Le cas général d'une mesure quelconque a été établi par des procédés différents par C. DE LA VALLÉE-POUSSIN [10], G. C. EVANS [12] et M. RIESZ [17]. Les deux premiers auteurs partent du résultat classique (2) et en déduisent le théorème général par des procédés de régularisation. G. C. EVANS démontre même que l'égalité (2) a lieu toujours, un potentiel newtonien admettant presque partout des dérivées partielles du premier ordre.

La démonstration de M. RIESZ repose sur une formule de composition vérifiée par le « noyau d'ordre α » : $r^{\alpha-p}$ ($0 < \alpha < p$) :

$$(3) \quad \overline{MP}^{\alpha+\beta-p} = k_{\alpha,\beta} \int \overline{MQ}^{\alpha-p} \overline{QP}^{\beta-p} d\tau$$

avec $0 < \alpha < p$, $0 < \beta < p$, $0 < \alpha + \beta < p$.

Cette formule est d'un grand intérêt¹; elle fait voir immédiatement que la fonction $r^{\alpha-p}$ est du *type positif*, ce qui est équivalent au théorème sur le signe de l'intégrale d'énergie. D'autre part, elle suggère diverses sortes de généralisations : H. CARTAN a montré [7] qu'à partir d'un noyau symétrique dépendant continûment d'un paramètre α , et vérifiant une relation telle que (3), on peut étendre dans une certaine mesure la théorie classique du balayage et de la capacité (dans l'espace euclidien et plus généralement dans les groupes topologiques localement compacts). Son étude est centrée sur le théorème suivant : *L'espace des mesures positives d'énergie finie portées par un compact fixe et normées par la racine carrée de l'énergie est complet.*

Ce théorème n'entraîne pas, dans le cas général, tous les résultats familiers dans le cas newtonien (par exemple le potentiel $U^{\mu'}$ résultant du balayage sur un compact de la mesure positive μ n'est pas nécessairement majoré partout par le potentiel U^μ). Par contre, O. FROSTMAN [13] et M. RIESZ [17] ont pu étendre la plupart de ceux-ci aux potentiels d'ordre α , avec $0 < \alpha \leq 2$ pour $p > 2$, $0 < \alpha < p$, pour $p \leq 2$. Pour de tels noyaux, O. Frostman démontre le théorème suivant, qu'il appelle *principe du maximum* : Si un potentiel U^μ est borné supérieurement par une constante k en tout point de l'ensemble fermé qui porte la distribution positive μ , il est borné par k dans tout l'espace.

Plus récemment, H. CARTAN a construit ([8], [9]) un exposé complet de la

¹ La vérification est aisée ; seule la détermination du coefficient demande un certain calcul, mais la valeur exacte de celui-ci importe peu pour le développement de la théorie ; il est évidemment positif. Un calcul explicite très simple sera d'ailleurs donné au début du chapitre III.

théorie du potentiel newtonien reposant à la fois sur le théorème relatif au signe de l'intégrale (1) et sur le suivant : Si λ est une mesure positive d'énergie finie et μ une mesure positive quelconque, et si l'on a $U^\lambda \leq U^\mu$ (respect. $U^\lambda \leq 1$) sauf sur un ensemble de mesure nulle par rapport à λ , la même inégalité a lieu dans tout l'espace. Cela résulte d'une propriété des fonctions surharmoniques, classique depuis F. Riesz, et de (1). Tout noyau qui satisfait à ce théorème possède donc des propriétés très voisines de celles du noyau newtonien; étendant quelque peu la définition de O. Frostman, H. CARTAN dit [7] d'un tel noyau qu'il vérifie le *principe du maximum* (resp. le *principe restreint du maximum*).

Dans un ordre d'idées différent, du moins en apparence, la méthode de Riemann pour résoudre le problème de Dirichlet a conduit à l'étude de certaines familles de fonctions définies dans un domaine. On peut remarquer, avec S. ZAREMBA [19], que si v est un prolongement continu dans un domaine borné ω de la donnée-frontière f , dont le gradient $\vec{V} = \overrightarrow{\text{grad}} v$ est de carré sommable¹, la solution F du problème de Dirichlet relatif à f et ω vérifie :

$$(4) \quad \int \overrightarrow{\text{grad}} H(\overrightarrow{\text{grad}} F - \vec{V}) d\tau = 0$$

pour toute fonction H harmonique dans ω et dont le gradient est de carré sommable dans ce domaine.

Plus généralement, si \vec{V} est un vecteur de carré sommable dans ω il existe une fonction F (et une seule à une constante additive près) harmonique dans ω , dont le gradient est de carré sommable dans ω , et telle que l'égalité (4) soit vérifiée pour toutes les fonctions harmoniques H du type précédent². O. NIKODYM en a donné [15] une démonstration qui repose sur des propriétés simples de l'espace de Hilbert; la relation (4) suggère d'ailleurs l'idée de projection dans un tel espace.

Ces considérations ont amené O. NIKODYM [16] à étudier plus généralement l'ensemble des *fonctions de la classe (BL) dans ω^3* , c'est-à-dire des fonctions F définies presque partout dans ω , et possédant les propriétés suivantes :

- a. Presque toute parallèle à l'axe Ox_j détermine dans ω des segments ouverts à l'intérieur desquels F est une fonction absolument continue de x_j ($j = 1, 2, \dots, p$).

¹ En supposant qu'un tel prolongement existe, ce qui n'est pas toujours le cas, comme on sait depuis J. Hadamard.

² Cette fonction n'est d'ailleurs pas en général uniforme.

³ Ces fonctions ont été envisagées par BEPPO-LEVI. (Sul principio di Dirichlet, *Rend. Palermo*, 22, 1906, p. 303).

- b. Les dérivées partielles du premier ordre $\partial F/\partial x_j$, qui sont définies presque partout dans ω , sont de carré sommable dans ce domaine ; en appelant $\overrightarrow{\text{grad } F}$ le vecteur, défini presque partout dans ω , dont les composantes sont $\partial F/\partial x_j$, on a donc :

$$D(F) = \int_{\omega} (\overrightarrow{\text{grad } F})^2 d\tau < \infty .$$

L'auteur démontre que l'espace de ces fonctions, normées par $\|F\| = \sqrt{D(F)}$ est *complet*. Le théorème de G. C. EVANS (relation (2)) établit aussitôt un rapprochement entre l'intégrale $D(F)$ et l'énergie $\|\mu\|^2$ d'une mesure positive, et par suite entre le théorème de O. NIKODYM et celui de H. CARTAN, rappelé plus haut.

Or l'espace des mesures μ qui sont différences de mesures positives d'énergie finie, normées par $\|\mu\|$, n'est pas complet, comme H. CARTAN l'a montré par un exemple¹. C'est cette remarque qui est à l'origine du présent travail : si on complète l'espace considéré et si on cherche à attribuer une signification aux êtres obtenus, on constate que ce ne sont pas des mesures, mais des « distributions généralisées », opérateurs introduits tout récemment par L. SCHWARTZ [18] ; ces distributions présentent d'ailleurs dans ce cas newtonien un caractère très simple, et on peut les interpréter d'une façon naturelle par des considérations empruntées à la Physique et relatives aux distributions de magnétisme².

Bien que cette interprétation permette d'éviter le « langage des distributions » en se plaçant du point de vue des potentiels plutôt que de celui des distributions qui engendrent ces potentiels, il paraît utile de considérer systématiquement les distributions généralisées : elles sont nécessaires pour obtenir la généralité et la clarté désirables ; de plus, elles constituent un précieux moyen de recherche.

C'est pourquoi nous introduirons les distributions dès le début de ce travail. Puisque le potentiel newtonien d'une mesure positive μ est le produit de composition de μ par la fonction r^{2-p} (noyau newtonien pour $p > 2$), une généralisation naturelle consiste à appeler potentiel de la distribution T par rapport au noyau K (où K est lui-même une distribution) le produit de composition :

$$(5) \quad U^T = K * T .^3$$

Le noyau K devra posséder au moins la propriété rappelée plus haut, relative au signe de l'intégrale d'énergie, qui est vérifiée par le noyau $r^{\alpha-p}$ ($0 < \alpha < p$) : K sera donc une distribution du type positif. D'autre part, il faut encore que le produit de

¹ H. CARTAN [8] p. 87.

² C. R. 222, p. 1374—1376, 1946.

³ Définition de L. SCHWARTZ [18].

composition (5) ait un sens, ce qui n'a pas lieu nécessairement pour des distributions K et T quelconques ; nous pourrions lui attribuer un sens en nous limitant aux distributions qui sont d'énergie finie par rapport au noyau K , et nous donnerons de ces distributions une définition qui se réduit à la notion bien connue lorsque K est un noyau classique et T une mesure positive.

Notre but sera l'étude de ces potentiels (5) engendrés par des distributions d'énergie finie : *les potentiels d'énergie finie*. Nous verrons dans quelle mesure il est possible d'étendre les résultats classiques brièvement rappelés plus haut. Ce point de vue peut sembler quelque peu artificiel ; il sera peut-être justifié par les applications que nous donnerons dans les trois derniers chapitres.

Nous commencerons par rappeler, dans un court chapitre de préliminaires, les définitions et propriétés relatives aux mesures de Radon et aux distributions de Schwartz utilisées constamment par la suite. Dans le chapitre I nous essayerons de construire une théorie du potentiel reposant sur des hypothèses aussi générales que possible ; le noyau K sera une distribution du type positif vérifiant en outre une condition de régularité assez simple qui exprime que K est inversible par rapport au produit de composition.

La transformée de Fourier (en un sens élargi) d'une telle distribution est une mesure positive d'après un théorème de L. Schwartz généralisant le célèbre théorème de Bochner, et cette propriété est caractéristique. Il est donc naturel d'introduire la transformation de Fourier en théorie du potentiel ; c'est d'ailleurs une idée exprimée par H. Cartan ([7]) dans le cas plus général des groupes commutatifs localement compacts.

Cette transformation nous permettra de donner une définition de l'énergie d'une distribution quelconque qui est en accord avec la définition (1) dans le cas classique. Il apparaîtra évident, grâce au théorème de Fischer-Riesz, que l'espace des distributions d'énergie finie, normées par la racine carrée de l'énergie, est complet. Le théorème de H. Cartan relatif aux mesures positives d'énergie finie s'en déduit aisément¹.

Nous pourrions alors en tirer des conséquences présentant une grande analogie

¹ Comme nous l'avons rappelé, H. Cartan établit dans son étude générale [7] que le sous-espace de mesures positives d'énergie finie *portées par un compact fixe* est complet. S'appuyant sur le principe du maximum, le même auteur démontre que l'espace de toutes les mesures positives d'énergie finie est complet dans le cas du noyau d'ordre α avec $0 < \alpha \leq 2$ et pose la question de savoir si le résultat est encore exact pour $\alpha > 2$ ([8], p. 91). Nous pourrions donc apporter une réponse affirmative, le noyau d'ordre α ($0 < \alpha < p$) satisfaisant à la condition de régularité que nous postulerons dans toute cette étude (la condition (A) ; voir débuts des chapitres I et III).

avec la théorie du balayage et de la capacité dans le cas newtonien. Mais ce qui, par exemple, généralisera le mieux la distribution capacitaire d'un compact ne sera plus nécessairement une mesure positive (même dans le cas très simple du noyau d'ordre α , avec $\alpha > 2$) : ce sera une distribution généralisée, que nous appellerons distribution d'équilibre. Le chapitre I sera complété par des exemples élémentaires et par l'étude, dans un cas simple, de questions généralisant le problème de Dirichlet et la théorie de la fonction de Green d'un domaine.

Le cas où le noyau est une fonction positive, ou plus généralement une mesure positive, est évidemment le plus intéressant dans la pratique et le chapitre II lui est consacré. Nous montrerons qu'un potentiel d'énergie finie est alors une fonction définie presque partout, et même plus précisément, définie à un ensemble de capacité extérieure nulle près. Lorsque le noyau vérifie en outre le principe du maximum, nous verrons que les extensions du balayage faites au chapitre I sont, dans le cas de mesures positives, identiques aux extensions faites par H. CARTAN [7] ; de même, si on admet le principe restreint du maximum, la distribution d'équilibre est une mesure positive. Ces théorèmes étendent un résultat récent d'Analyse harmonique donné par A. BEURLING [3] pour un noyau particulier, et qui se trouve vérifié pour tous les noyaux satisfaisant au principe du maximum. Enfin, sans attaquer de front le difficile problème de caractériser ces noyaux, nous donnerons un énoncé simple équivalent au principe.

Le chapitre III concerne les potentiels d'ordre α et spécialement les potentiels polyharmoniques ($\alpha = 2k$). Dans le cas newtonien, nous montrons l'identité, à une constante additive près, des potentiels d'énergie finie, et des fonctions qui sont de la classe (BL) dans l'espace tout entier : L'introduction des distributions d'énergie finie permet donc d'étendre le théorème de G. C. Evans et d'en donner une réciproque. Nous faisons en même temps, pour ces potentiels, l'interprétation physique dont il a été question plus haut. Le cas du potentiel logarithmique dans le plan, important pour les applications, ne rentre pas directement dans le théorie générale et doit faire l'objet d'une étude spéciale. Enfin nous établissons, pour les potentiels polyharmoniques, des résultats analogues au théorème de G. C. Evans et à sa réciproque.

Le dernier chapitre est consacré exclusivement au cas newtonien. Les fonctions de la classe (BL) dans un domaine ω possèdent « quasi-partout », c'est-à-dire sauf sur un ensemble de capacité extérieure nulle, une propriété de continuité remarquable : elles admettent une *pseudo limite*, notion mise en évidence par M. BRELOT [5] dans le cas des fonctions sousharmoniques. Lorsque ω est une boule, cette sorte de continuité peut être étendue aux points-frontière, ce qui généralise et en même temps précise un

théorème de A. BEURLING [2] et J. DUFRESNOY [11] relatif à la représentation conforme, la fonction $\zeta = f(z)$ qui effectue la représentation conforme d'un cercle ω sur un domaine-plan simplement connexe et borné étant de la classe (BL) dans ω .

Nous définissons enfin les potentiels de Green d'énergie finie dans un domaine ω . Ce sont des fonctions F de la classe (BL) dans ω , et nous montrons qu'ils constituent la variété linéaire orthogonale à la variété (\mathfrak{S}) des fonctions harmoniques uniformes de la classe (BL) dans ω , avec la norme $\sqrt{D(F)}$; ce fait se rattache aux résultats de S. ZAREMBA et O. NIKODYM rappelés ci-dessus¹ et, comme nous le verrons, à une étude plus récente de L. AHLFORS [1].

Ces quelques indications montrent clairement l'influence qu'ont eue les travaux de MM. Henri Cartan, Marcel Brelot et Laurent Schwartz sur mes propres recherches. Que ces auteurs veuillent bien trouver ici l'expression de ma reconnaissance pour les nombreux conseils qu'ils m'ont donnés personnellement; je remercie tout particulièrement M. Henri Cartan, qui s'est intéressé à mon travail, et m'a communiqué de notables améliorations, dont les plus importantes seront signalées dans le cours du texte.

Je remercie également M. Arnaud Denjoy, qui m'a fait l'honneur de présider mon jury de thèse, et M. Georges Bouligand qui a bien voulu, à l'occasion de la soutenance, se joindre à MM. Denjoy et Cartan.

Préliminaires.

On sait que la théorie de l'intégrale de Lebesgue-Stieltjes sur un espace topologique E localement compact (qui sera toujours l'espace euclidien R^p à $p \geq 1$ dimensions, ou un domaine ouvert de R^p) peut être avantageusement exposée à partir de la notion de mesure de Radon positive (forme linéaire positive $\mu(f)$ définie sur l'ensemble C^+ des fonctions f positives² continues sur E et nulles en dehors d'un compact). Nous renvoyons pour cela aux études de H. CARTAN en vue des applications à la théorie du potentiel ([7], [8]). Nous rappellerons seulement quelques définitions:

Une mesure complexe est une mesure de la forme $\mu = \mu_1 - \mu_2 + i(\mu_3 - \mu_4)$, où les μ_k sont des mesures positives. Une fonction $f = f_1 - f_2 + i(f_3 - f_4)$ (f_j positive) est sommable par rapport à μ si chacune des f_j est sommable par rapport à chacune des

¹ La fonction F vérifiant la relation (4) est la « partie harmonique » du prolongement v (supposé de la classe (BL) dans ω) de la donnée-frontière f , c'est à-dire la projection de v sur (\mathfrak{S}) . Deux prolongements tels que v ont donc même projection sur (\mathfrak{S}) . $v - F$ est un potentiel de Green d'énergie finie.

² Le terme « positif » est pris au sens large (positif ou nul).

μ_k ; l'intégrale correspondante est notée $\int f d\mu$. Le noyau fermé de μ (complémentaire du plus grand ouvert dans lequel μ est nulle) sera appelé, d'après L. Schwartz, *support* de μ (le terme « noyau » étant réservé à une autre notion).

Les mesures réelles sont ordonnées par la relation $\lambda \leq \mu$ (λ est majorée par μ) qui exprime que $\mu - \lambda$ est une mesure positive. Si λ et μ sont des mesures réelles il existe un élément maximum parmi les mesures réelles majorées par λ et μ ; on le désigne par $\inf(\lambda, \mu)$. Les mesures $\mu^+ = \sup(0, \mu)$, $\mu^- = -\inf(0, \mu)$, $|\mu| = \mu^+ + \mu^-$ sont appelées respectivement variations positive, négative et totale de la mesure réelle μ , et on a $\mu = \mu^+ - \mu^-$.

Une suite $\{\mu_n\}$ de mesures positives converge vaguement vers la mesure positive μ si $\mu_n(f)$ tend vers $\mu(f)$ pour toute $f \in C^+$.¹

Si λ et μ sont deux mesures positives dans R^p on peut écrire, avec des notations évidentes, pour toute $f \in C^+$:

$$\int d\lambda(M) \int f(M+P) d\mu(P) = \int d\mu(M) \int f(M+P) d\lambda(P)$$

(d'après le théorème de Fubini). Si ce nombre est fini pour toute $f \in C^+$, il définit une mesure positive ν sur R^p appelée *produit de composition* de λ et μ , notée $\nu = \lambda * \mu = \mu * \lambda$. Il en est ainsi lorsque l'une des mesures λ ou μ est à support compact. Si λ et μ sont des mesures complexes $\lambda = \lambda_1 - \lambda_2 + i(\lambda_3 - \lambda_4)$, $\mu = \mu_1 - \mu_2 + i(\mu_3 - \mu_4)$, $\lambda * \mu$ est défini si chacun des $\lambda_j * \mu_k$ est défini.

On sait que les fonctions additives d'ensembles² permettent de donner un sens précis à la notion physique de distribution de masse électrique. Le potentiel newtonien correspondant est donné par une intégrale de Stieltjes. Pour définir d'une manière analogue les potentiels engendrés par des distributions de magnétisme, et plus généralement d'autres potentiels qui n'ont plus d'interprétation physique simple, il est indispensable de faire appel à la notion de distribution généralisée de L. Schwartz. Nous allons rappeler aussi brièvement que possible les définitions et résultats de cet auteur ([18]) que nous aurons à utiliser par la suite :

Une distribution généralisée (dans R^p ou dans un domaine ouvert de R^p) est une

¹ Cf. [8]. Si les supports des μ_n appartiennent à un compact fixe K , cette définition est celle de la convergence faible des fonctionnelles linéaires sur l'espace des fonctions continues sur A . Si donc on donne une famille infinie de mesures positives portées par un même compact, et de masse totale bornée ($\int d\mu \leq A$) on peut en extraire une suite vaguement convergente : c'est le théorème du choix de Frostman—De la Vallée-Poussin.

² Si μ est une mesure de Radon et e un ensemble borélien borné, l'intégrale $\mu(e) = \int \psi_e d\mu$, où ψ_e est la fonction caractéristique de e , est bien définie. C'est une fonction complètement additive de e .

forme linéaire $T(\varphi)$ définie sur l'ensemble (\mathfrak{D}) des fonctions φ indéfiniment dérivables à support compact, astreinte à la condition de continuité suivante : $T(\varphi)$ tend vers 0 si φ est nulle hors d'un compact *fixe*, et tend uniformément vers 0 ainsi que chacune de ses dérivées partielles¹.

T est nulle dans un ouvert ω si $T(\varphi) = 0$ pour toute φ à support dans ω . Le support de T est le complémentaire du plus grand ouvert dans lequel T est nulle.

L'espace (\mathfrak{D}') des distributions peut être muni de la topologie suivante : on appelle *ensemble borné* de fonctions φ une famille $A(E, \{M_k\})$, telle que le support de φ appartienne au compact E , et que toute dérivée d'ordre k de φ soit bornée en module par le nombre positif M_k . Alors T_n tend vers 0 si $T_n(\varphi)$ tend vers 0 uniformément par rapport aux fonctions φ de tout ensemble borné.

Ces distributions forment une classe très étendue, qui comprend notamment les mesures et en particulier les fonctions localement sommables (dans cette théorie une telle fonction f doit être identifiée avec la mesure de densité f).² La convergence (au sens des distributions) des mesures positives entraîne la convergence vague.³

Soit $D = \partial^n / \partial x_1^{x_1} \dots \partial x_p^{x_p}$ un symbole de dérivation d'ordre n . La dérivée partielle DT de T est la distribution définie par $DT(\varphi) = (-1)^n T(D\varphi)$. La dérivation est une opération linéaire *continue* dans (\mathfrak{D}') . On peut donc dériver terme à terme les suites (ou séries) convergentes de distributions.

Le produit de multiplication d'une distribution T par une fonction indéfiniment dérivable α est la distribution αT définie par $\alpha T(\varphi) = T(\alpha\varphi)$.

Le produit de composition de deux distributions S et T (définies dans R^p) dont une au moins, soit T , est à support compact, est la distribution définie par

$$(S*T)(\varphi) = S_P[T_M(\varphi(M+P))] = T_M[S_P(\varphi(M+P))] .$$

Le produit de composition par une T à support compact est une opération linéaire continue dans (\mathfrak{D}') .

Si D est un symbole de dérivation, l'opération $T \rightarrow DT$ peut être considérée comme un produit de composition avec la dérivée $D\varepsilon$ (où ε est la mesure constituée par la masse +1 placée à l'origine O). On peut utiliser les notations : D pour $D\varepsilon$, $D*T$ pour DT .

Si on effectue le produit de composition d'une distribution T par une fonction φ

¹ Une telle condition était inutile dans la définition des mesures de Radon *positives*.

² La distribution T associée à la fonction f (supposée définie quasi-partout et sommable, au sens de Lebesgue, sur tout compact) est donc définie par $T(\varphi) = \int f\varphi d\tau$, où $d\tau$ est l'élément de volume de R^p .

³ Inversement si la suite $\{\mu_n\}$ de mesures positives converge vaguement, elle converge au sens des distributions.

indéfiniment dérivable à support compact, on obtient une fonction indéfiniment dérivable $T*\varphi$, qu'on peut appeler *régularisée* de T par φ .

On utilisera la relation suivante :

$$(1) \quad T(\varphi) = \text{Sp.} (T*\check{\varphi})$$

pour toute $\varphi \in (\mathfrak{D})$ et pour toute $T \in (\mathfrak{D}')$. Sp. f , *trace* de f , désigne la valeur à l'origine O de la fonction continue f , et $\check{\varphi}$ est la fonction symétrique de φ :

$$\check{\varphi}(x_1, x_2, \dots, x_p) = \varphi(-x_1, -x_2, \dots, -x_p).$$

La transformée de Fourier d'une fonction $f(M)$ sommable dans R^p est la fonction continue :

$$g(M) = \int e^{-2i\pi \vec{O}\vec{M}\vec{O}P} f(P) d\tau_P,$$

où $d\tau$ est l'élément de volume de R^p . On peut définir la transformée de Fourier d'une fonction de carré sommable dans R^p . Si f_1 et f_2 sont deux telles fonctions, et g_1 et g_2 leurs transformées, on a :

$$\int |g_1|^2 d\tau = \int |f_1|^2 d\tau \quad (\text{théorème de Plancherel})$$

$$\int g_1 \bar{g}_2 d\tau = \int f_1 \bar{f}_2 d\tau \quad (\text{relation de Parseval})$$

On ne peut attribuer à toute distribution T définie dans R^p une transformée de Fourier qui soit une distribution de même nature. Il est nécessaire de se borner à une classe plus restreinte de distributions, qui sont appelées *sphériques*.

A cet effet, on introduit l'espace (\mathfrak{E}) des fonctions θ indéfiniment dérivables à décroissance rapide à l'infini (c'est-à-dire telles que le produit de θ et de chacune de ses dérivées par un polynôme quelconque tend vers 0 à l'infini) muni de la topologie suivante : θ tend vers 0 dans (\mathfrak{E}) si θ et chacune de ses dérivées tend vers 0 uniformément dans R^p , même après multiplication par un polynôme quelconque. Les distributions sphériques sont les formes linéaires S continues sur (\mathfrak{E}) . L'espace des S muni de la topologie du dual de (\mathfrak{E}) , est appelé (\mathfrak{E}') . S tend vers 0 dans (\mathfrak{E}') si $S(\theta)$ tend vers 0 uniformément par rapport aux fonctions de tout ensemble *borné* dans (\mathfrak{E}) ; on appelle ainsi un ensemble de fonctions θ satisfaisant à $|D_n \theta| \leq M_{n,k}/(1+r^2)^k$, où $D_n \theta$ désigne une dérivée d'ordre n , r la quantité $(x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_p^2)^{1/2}$, et $\{M_{n,k}\}$ une suite de nombres positifs (définissant l'ensemble borné considéré).

(\mathfrak{E}') peut être identifié à un sous-espace vectoriel de (\mathfrak{D}') . Les mesures de (\mathfrak{E}') sont dites *mesures sphériques*. Toute mesure μ à *croissance lente*, c'est-à-dire telle que les variations totales α et β des parties réelle et imaginaire de μ vérifient des relations

de la forme $\int d\alpha/(1+r^2)^k < \infty$, avec k positif, est sphérique. Inversement, toute mesure sphérique positive est à croissance lente.

La transformation de Fourier classique définit un isomorphisme de (\mathfrak{S}) sur lui-même avec la topologie de (\mathfrak{S}) , et même avec celle de (\mathfrak{S}') . Or les fonctions θ sont denses dans (\mathfrak{S}') , ce qui permet de définir, par passage de la limite, la transformée de Fourier de toute $S \in (\mathfrak{S}')$; cette transformée est aussi un élément de (\mathfrak{S}') .

Dans la pratique, c'est la formule de Parseval qui permet de construire la distribution sphérique $V = \mathfrak{F}(U)$, transformée de Fourier de la distribution sphérique U . Si $v = \mathfrak{F}(u)$ désigne la transformée d'une fonction $u \in (\mathfrak{S})$, V est définie par

$$U(\bar{u}) = V(\bar{v}) \quad \text{pour toute } v \in (\mathfrak{S}),$$

ou, ce qui revient au même, par

$$U(\check{u}) = V(v).$$

On utilisera l'expression des transformées de Fourier de quelques distributions simples :

$$\mathfrak{F}(\varepsilon) = 1$$

$$\mathfrak{F}(\Delta) = -4\pi^2 r^2 \text{ }^1$$

$$\mathfrak{F}(\partial^n \varepsilon / \partial x_1^{x_1} \partial x_2^{x_2} \dots \partial x_p^{x_p}) = (2i\pi)^n x_1^{x_1} x_2^{x_2} \dots x_p^{x_p}.$$

Une propriété capitale de la transformation de Fourier est la suivante : Si U_1 est un multiplicateur universel (c'est-à-dire tel qu'on puisse définir le produit de multiplication de U_1 avec toute distribution sphérique), et si V_2 est un « compositeur » universel (définition analogue) on a, en posant $V_1 = \mathfrak{F}(U_1)$, $V_2 = \mathfrak{F}(U_2)$:

$$V_1 * V_2 = \mathfrak{F}(U_1 U_2).$$

La définition des fonctions et plus généralement des mesures du type positif se généralise ainsi : On appelle *distribution du type positif* une $T \in (\mathfrak{D}')$ telle que l'on ait :

$$T(\varphi * \check{\varphi}) \geq 0 \quad \text{pour toute } \varphi \in (\mathfrak{D})^2$$

Le théorème de Bochner³) étendu par L. Schwartz s'énonce : Pour qu'une distri-

¹ $\Delta = \Delta \varepsilon$ est le Laplacien de la distribution ε , c'est-à-dire la distribution $\Sigma \partial^2 \varepsilon / \partial x_j^2$.

² $\check{\varphi}$ représente la fonction imaginaire conjuguée de la fonction $\check{\varphi}$ symétrique de φ . Plus généralement \check{T} est définie par $\check{T}(\varphi) =$ imaginaire conjuguée de $T(\check{\varphi})$. Les distributions du type positif possèdent la « symétrie hermitienne » $T \equiv \check{T}$.

³ Pour qu'une fonction *continue* soit du type positif, il faut et il suffit qu'elle soit la transformée de Fourier d'une mesure positive de masse totale finie.

bution soit du type positif, il faut et il suffit qu'elle soit sphérique et que sa transformée de Fourier soit une mesure positive (à croissance lente).

CHAPITRE I

Sur la théorie générale du potentiel dans les espaces euclidiens.

1. A la base d'une théorie du potentiel dans R^p , nous nous donnons une distribution K du type positif (appelée *noyau*). K est donc une distribution sphérique dont la transformée de Fourier $\varkappa = \mathfrak{F}'(K)$ est une mesure positive à croissance lente.

Si T est une distribution à *support compact*, le produit de composition :

$$(1) \quad U_K^T = K * T,$$

qui est une distribution bien déterminée, sera appelé le *potentiel de la distribution T par rapport au noyau K* , ou K -potentiel de T .

On sait que la transformée de Fourier ψ d'une telle distribution est une fonction indéfiniment dérivable, à valeurs complexes. La quantité :

$$(2) \quad \|T\|^2 = \int |\psi|^2 d\varkappa$$

est donc bien définie : c'est un nombre non négatif qui peut être égal à $+\infty$; nous l'appellerons *énergie* de T .

Le produit de composition $K * T * \tilde{T}$ est bien défini, puisqu'on suppose T à support compact : C'est une distribution du type positif, et pour que ce soit une fonction continue, il faut et il suffit que la masse totale de sa transformée de Fourier $|\psi|^2 \varkappa$ soit finie. Cette masse totale est alors la valeur à l'origine 0 (la *trace*) de la fonction continue $K * T * \tilde{T}$, de sorte qu'on peut également écrire :

$$(2^{\text{bis}}) \quad \|T\|^2 = \text{Sp. } K * T * \tilde{T}$$

en convenant de dire que cette quantité est infinie lorsque la distribution $K * T * \tilde{T}$ n'est pas une fonction continue.

Comme application immédiate, remarquons que *toute fonction φ indéfiniment dérivable et à support compact* (ou plus exactement la distribution définie par la mesure de densité φ) *est d'énergie finie*. En effet le produit $K * \varphi * \tilde{\varphi}$ est alors continu (et même indéfiniment dérivable).

Supposons maintenant que le *support de la mesure \varkappa soit l'espace R^p tout entier*, restriction à laquelle nous nous limiterons par la suite. Il est clair qu'on peut étendre

de la façon suivante un théorème de O. FROSTMAN [13] et de C. DE LA VALLÉE-POUSSIN [10].

Pour qu'une distribution T à support compact soit identiquement nulle il faut et il suffit que son énergie soit nulle. L'intégrale d'énergie (2) ne peut en effet s'annuler que lorsque ψ est identiquement nulle.

2. *Hypothèses complémentaires relatives au noyau K .* Si T est une distribution quelconque, le produit de composition (1) et l'intégrale (2) n'ont plus de sens en général. Pour pouvoir étendre, au moins dans une certaine mesure, la théorie classique du potentiel, il est nécessaire de faire des hypothèses supplémentaires sur K . Nous supposons toujours vérifiée l'hypothèse suivante :

Hypothèse (A) : La transformée de Fourier de K est une fonction¹ positive \mathfrak{R} à croissance lente ainsi que son inverse $\mathfrak{D} = 1/\mathfrak{R}$; autrement dit il existe un entier $q \geq 0$ tel que l'on ait :

$$(3) \quad \int \frac{\mathfrak{R}}{(1+r^2)^q} d\tau < \infty, \quad \int \frac{d\tau}{\mathfrak{R}(1+r^2)^q} < \infty,$$

où r représente la distance à l'origine du point M de coordonnées x_1, x_2, \dots, x_p , et $d\tau$ l'élément de volume de R^p .

Si l'on pose $\mathfrak{S} = \mathfrak{R}^{1/2}$, \mathfrak{S} et $1/\mathfrak{S}$ sont des fonctions positives à croissance lente, car on a par exemple, en vertu de l'inégalité de Schwarz :

$$\left(\int \frac{\mathfrak{S} d\tau}{(1+r^2)^q} \right)^2 \leq \int \frac{\mathfrak{S}^2 d\tau}{(1+r^2)^q} \int \frac{d\tau}{(1+r^2)^q}$$

et la dernière intégrale converge pour $q > p/2$ (p étant le nombre de dimensions); le second membre est donc fini, d'après (3). Les fonctions \mathfrak{S} et $\mathfrak{L} = 1/\mathfrak{S}$ sont donc les transformées de Fourier de deux distributions H et L du type positif, et comme on a $\mathfrak{S}^2 = \mathfrak{R}$, $\mathfrak{S}\mathfrak{L} = 1$, on peut écrire symboliquement :

$$(4) \quad H * H = K, \quad H * L = \varepsilon,$$

la transformation de Fourier donnant un sens à ces deux produits de composition (bien qu'il s'agisse de distributions dont le support n'est pas compact en général).

Lemme 1. Toute fonction \mathfrak{L} vérifiant l'inégalité:

$$(5) \quad \int \mathfrak{S}^2 |\mathfrak{L}|^2 d\tau < \infty$$

est à croissance lente.

¹ Rappelons que par fonction on entend une fonction ordinaire localement sommable f , définie presque partout, qu'on identifie avec la mesure de densité f .

En effet, l'inégalité de Schwarz donne

$$\left(\int \frac{|\mathfrak{I}|d\tau}{(1+r^2)^q} \right)^2 \leq \int \mathfrak{H}^2 |\mathfrak{I}|^2 d\tau \int \frac{d\tau}{\mathfrak{H}^2 (1+r^2)^{2q}}$$

quantité finie en vertu de (3) et (5).

3. Extension d'un théorème de H. Cartan.

Définition : Nous dirons qu'une distribution sphérique T est d'énergie finie si sa transformée de Fourier est une fonction \mathfrak{I} vérifiant (5) et nous appellerons énergie la quantité :

$$(6) \quad \|T\|^2 = \int |\mathfrak{H}\mathfrak{I}|^2 d\tau.$$

Toute autre distribution peut être dite d'énergie infinie, en particulier celles dont la transformée de Fourier n'est pas une fonction, de même que les distributions non sphériques, dont nous ne nous occuperons pas ici. Il est alors facile d'étendre un important théorème de H. Cartan, rappelé dans l'introduction :

Théorème 1. *L'espace \mathfrak{B} des distributions d'énergie finie, normées par la racine carrée de l'énergie, est complet.*

Cela résulte aussitôt de la définition (6) et du lemme 1; si en effet $\{T_n\}$ est une suite de Cauchy pour la norme considérée, les fonctions $\mathfrak{H}\mathfrak{I}_n$ convergent en moyenne quadratique vers une fonction de carré sommable dont le produit par $1/\mathfrak{H}$ est une fonction \mathfrak{I} satisfaisant à (5). \mathfrak{I} est donc la transformée de Fourier d'une distribution sphérique T bien déterminée (puisqu'elle est à croissance lente) et on a :

$$\lim \|T - T_n\| = 0.$$

Suivant la terminologie de H. Cartan, nous dirons alors que T_n converge fortement vers T . Nous pouvons énoncer le

Théorème 2. *Si T_n converge fortement vers T , T_n converge vers T au sens des distributions (et même des distributions sphériques).*

En vertu des propriétés de la transformation de Fourier généralisée, il suffit de montrer que les fonctions $\mathfrak{I}_n = \mathfrak{F}(T_n)$ tendent vers $\mathfrak{I} = \mathfrak{F}(T)$ au sens des distributions sphériques, c'est-à-dire que $|\mathfrak{I}_n(\theta) - \mathfrak{I}(\theta)|$ tend vers 0 uniformément pour tout ensemble borné A de fonctions θ indéfiniment dérivables à décroissance rapide¹. Or en posant $\mathfrak{F}_n = \mathfrak{I}_n \mathfrak{H}$, $\mathfrak{F} = \mathfrak{I} \mathfrak{H}$ il vient :

¹ Voir le rappel des définitions dans le chapitre de préliminaires.

$$|\mathfrak{I}_n(\theta) - \mathfrak{I}(\theta)|^2 = \left| \int (\mathfrak{I}_n - \mathfrak{I})\theta d\tau \right|^2 = \left| \int (\mathfrak{F}_n - \mathfrak{F}) \frac{\theta}{\mathfrak{H}} d\tau \right|^2 \leq \int |\mathfrak{F}_n - \mathfrak{F}|^2 d\tau \int \frac{|\theta|^2}{\mathfrak{H}^2} d\tau.$$

Or par définition des ensembles bornés il existe une constante positive A_q telle que $|\theta|^2 < A_q/(1+r^2)^q$, où q est le nombre qui intervient dans la relation (3). Cette même relation montre que l'intégrale $\int |\theta|^2/\mathfrak{H}^2 d\tau$ est uniformément bornée pour les $\theta \in A$, d'où le résultat, car, par hypothèse, $\int |\mathfrak{F}_n - \mathfrak{F}|^2 d\tau$ tend vers 0.

Corollaires: a. *L'espace des mesures positives d'énergie finie est complet.* En effet, toute limite forte de mesures positives est une mesure positive car si une suite de telles mesures μ_n converge au sens des distributions, la distribution limite est une mesure positive μ (et d'ailleurs μ_n converge vaguement vers μ). L'espace des mesures positives d'énergie finie, qui est celui considéré par H. Cartan ([7], [8]) dans sa théorie, se présente donc comme un sous-ensemble convexe et complet de l'espace \mathfrak{B} des distributions d'énergie finie.

b. *L'espace \mathfrak{B}_E des distributions (resp. l'espace \mathfrak{E}_E des mesures positives) d'énergie finie portées par un ensemble fermé E est complet.* C'est également une conséquence des théorèmes 1 et 2.

Expression générale des distributions d'énergie finie.

D'après la définition (6), les distributions T d'énergie finie sont telles que $\mathfrak{I} = \mathfrak{F}/\mathfrak{H}$, où \mathfrak{F} est une fonction de carré sommable. Soit F la fonction dont la transformée de Fourier est \mathfrak{F} ; d'après le théorème de Plancherel, F est de carré sommable; on peut donc écrire, en faisant intervenir la distribution L (dont $1/\mathfrak{H}$ est la transformée de Fourier):

$$(7) \quad T = L * F$$

la transformation de Fourier donnant un sens à ce produit de composition.

Inversement toute distribution de la forme (7), où F est une fonction de carré sommable, est d'énergie finie, et on a même, d'après le théorème de Plancherel:

$$\|T\|_K^2 = \int |\mathfrak{F}|^2 d\tau = \int |F|^2 d\tau.$$

Expression générale des potentiels d'énergie finie.

La transformation de Fourier donne également un sens au produit de composition (1), même lorsque T n'est pas à support compact, pourvu qu'elle soit d'énergie finie: En effet le produit $\mathfrak{U} = \mathfrak{R}\mathfrak{I} = \mathfrak{H}\mathfrak{F}$ est une fonction sommable sur tout compact

(car F est de carré sommable, et \mathfrak{F} est de carré sommable sur tout compact), et il est à croissance lente, car on a, d'après (3) :

$$\left(\int \frac{|u|}{(1+r^2)^q} d\tau \right)^2 \leq \int |\mathfrak{F}|^2 d\tau \int \frac{d\tau}{\mathfrak{F}^2(1+r^2)^q} < \infty .$$

Il est donc une distribution sphérique. C'est la transformée de Fourier d'une distribution U qu'on appellera encore K -potentiel de T , et qu'on peut écrire :

$$(8) \quad U = U_K^T = K * T = H * F .$$

Cette formule importante est à la base des théories de M. Riesz, O. Frostman et H. Cartan. Tout K -potentiel d'énergie finie peut donc être considéré comme le H -potentiel engendré par une mesure dont la densité est de carré sommable dans tout l'espace, l'intégrale correspondante étant égale à l'énergie $\|T\|_K^2$. Dans le cas des potentiels d'ordre α considérés par ces auteurs ($K = r^{\alpha-p}$, $0 < \alpha < p$), on a $H = C_\alpha r^{\alpha/2-p}$ ($C_\alpha > 0$). Nous reviendrons au chapitre III sur ce cas important dans la pratique.

Produit scalaire de deux distributions d'énergie finie. Empruntant le langage de l'espace de Hilbert, auquel d'ailleurs l'espace \mathfrak{B} est isomorphe, nous appellerons *produit scalaire* de deux distributions T_1 et T_2 d'énergie finie la quantité :

$$(T_1, T_2) = (T_1, T_2)_K = \int \mathfrak{F}^2 \mathfrak{T}_1 \bar{\mathfrak{T}}_2 d\tau .$$

Il en résulte aussitôt les relations évidentes :

$$(9) \quad \begin{aligned} (T_1, T_2) &= \overline{(T_2, T_1)} & (T, T) &= \|T\|^2 \\ \|T_1 + T_2\|^2 &= \|T_1\|^2 + \|T_2\|^2 + 2\Re(T_1, T_2) \\ |(T_1, T_2)| &\leq \|T_1\| \|T_2\| . \end{aligned}$$

La relation (9) n'est autre que l'inégalité de Schwarz, dont H. Cartan a fait l'usage que l'on sait en théorie du potentiel.

La définition du produit scalaire (T_1, T_2) montre que cette expression n'est autre que la masse totale de la fonction sommable $\mathfrak{F}^2 \mathfrak{T}_1 \bar{\mathfrak{T}}_2$. Cette fonction est la transformée de Fourier d'une fonction continue qu'on peut écrire $K * T_1 * \tilde{T}_2$ (la transformation de Fourier donnera toujours un sens aux produits de composition envisagés) et on voit, en se reportant à la définition de la trace d'une fonction continue, qu'on a la relation :

$$(10) \quad (T_1, T_2) = \text{Sp. } K * T_1 * \tilde{T}_2$$

et plus particulièrement :

$$(11) \quad \|T\|^2 = \text{Sp. } K * T * \tilde{T} .$$

Remarque. La relation (11) se réduit à (2^{bis}) lorsque T est à support compact. Le produit de composition $K * T * \tilde{T}$ peut alors se définir directement.

De même si T_1 et T_2 sont à support compact, le produit de composition $K * T_1 * \tilde{T}_2$, qui figure dans (10) peut être défini sans faire usage de la transformation de Fourier. Plus généralement si T_1 et T_2 sont d'énergie finie, et si T_2 est à support compact, on a :

$$K * T_1 * \tilde{T}_2 = (K * T_1) * \tilde{T}_2 = U^{T_1} * \tilde{T}_2$$

et le dernier produit de composition peut se définir directement.

En particulier si T_2 est une fonction φ indéfiniment dérivable à support compact on peut écrire, en posant $T_1 = T$ et en utilisant la relation (1) du chapitre de préliminaires :

$$\text{Sp. } K * T * \tilde{\varphi} = \text{Sp. } (K * T) * \tilde{\varphi} = (K * T) (\varphi)$$

d'où :

$$(12) \quad (T, \varphi) = U^T(\tilde{\varphi}) .$$

Pour justifier l'associativité des produits de composition écrits on se reportera toujours aux transformées de Fourier.

Inverse de K par rapport au produit de composition. L'inverse $\mathfrak{D} = 1/\mathfrak{K}$ de la fonction \mathfrak{K} étant supposée sommable sur tout compact, et à croissance lente, c'est la transformée de Fourier d'une distribution D du type positif et on peut écrire :

$$D * K = \varepsilon .$$

Soit alors T une distribution d'énergie finie; posons $U = K * T$. On peut écrire : $T = D * U$ autrement dit T peut être considéré comme le D -potentiel de la distribution U ; on a d'ailleurs l'égalité :

$$\|T\|_K = \|U\|_D .$$

Comme application signalons que si T_n converge fortement (par rapport au noyau K) vers T , la suite $U_n = K * T_n$ converge fortement (par rapport au noyau D) vers U . Il résulte donc du théorème 2 que U_n converge vers U au sens des distributions sphériques, car le noyau D vérifie également l'hypothèse (A).

4. Nous utiliserons fréquemment les quelques remarques très simples qui suivent : Rappelons d'abord que toute fonction indéfiniment dérivable à support compact est d'énergie finie. De même :

Lemme 2. Une telle fonction φ est un potentiel d'énergie finie.

En effet c'est le potentiel de la distribution $T = D*\varphi$, qui est d'ailleurs une fonction indéfiniment dérivable (mais dont le support n'est pas en général compact). L'énergie correspondante est : $\text{Sp. } D*\varphi*\tilde{\varphi}$.

Toute fonction indéfiniment dérivable coïncide donc dans un ouvert quelconque avec un potentiel d'énergie finie.

Lemme 3. Soit $\{\mu_n\}$ une suite de mesures positives portées par un même compact E et convergeant vaguement vers la mesure ε . Leurs transformées de Fourier convergent vers la constante 1, et la convergence est uniforme sur tout compact.

En effet¹, les expressions $\mu_n(f)$ sont des formes linéaires continues sur l'espace des fonctions $f(x_1, \dots, x_p)$ continues sur E . D'après un théorème général, la convergence est uniforme sur toute famille compacte de fonctions f . Or les fonctions $e^{-2i\pi(x_1y_1 + \dots + x_p y_p)}$ forment une telle famille lorsque le point $P(y_1, \dots, y_p)$ décrit un compact, d'où le résultat.

Définition. On appellera *régularisée* d'une distribution T le produit de composition $T_n = T*h_n$, où h_n est une distribution positive de la masse unité dans la boule $B(O, 1/n)$ de centre O et de rayon $1/n$, avec une densité indéfiniment dérivable. On sait que T_n est une fonction indéfiniment dérivable.

Théorème 3. Toute distribution T d'énergie finie est limite forte de ses régularisées.

Il s'agit de montrer que $\|T_n - T\|$ tend vers 0 avec $1/n$. Or si η_n est la transformée de Fourier de h_n , on a :

$$\begin{aligned} \|T_n - T\|^2 &= \int \Re |\mathfrak{I} - \mathfrak{I}\eta_n|^2 d\tau \\ &= \int_{B_R} \Re |\mathfrak{I}|^2 |1 - \eta_n|^2 d\tau + \int_{CB_R} \Re |\mathfrak{I}|^2 |1 - \eta_n|^2 d\tau \end{aligned}$$

où B_R est la boule $B(O, R)$. La masse totale de h_n étant 1, on a $|\eta_n| \leq 1$. Il suffira donc de choisir R assez grand pour que l'intégrale $\int_{CB_R} \Re |\mathfrak{I}|^2 d\tau$ soit arbitrairement petite, puis n assez grand pour que $|1 - \eta_n|$ soit aussi petit qu'on veut sur B_R , ce qui est possible d'après le lemme 3.

¹ Je dois cette démonstration à l'obligeance de M. L. Schwartz.

Remarque. Le problème se pose de savoir si toute mesure d'énergie finie à support compact est combinaison linéaire de mesures positives d'énergie finie.

5. *Distributions d'énergie finie portées par un ensemble fermé.*

Si E est un ensemble fermé admettant un point intérieur, il est clair qu'il existe une distribution non nulle T (et même une mesure positive) d'énergie finie dont le support appartient à E ; en effet, il existe alors une fonction indéfiniment dérivable nulle hors d'un compact de E , et non identiquement nulle.

Nous avons désigné par \mathfrak{B}_E l'espace des distributions S d'énergie finie dont le support est contenu dans E . D'après un corollaire du théorème 2, \mathfrak{B}_E est une variété linéaire fermée de \mathfrak{B} . Réservant le terme « capacité » pour les questions qui concernent les mesures positives, nous dirons que E est de *mesure spectrale nulle* si \mathfrak{B}_E est réduite à la distribution nulle. Cette dénomination sera justifiée au chapitre II lorsque nous rattacherons la présente étude à une théorie de l'Analyse harmonique.

La projection (au sens des espaces de Hilbert) sur la variété \mathfrak{B}_E est une opération qui jouit de propriétés généralisant celles du balayage sur E lorsque T est une mesure positive et K le noyau newtonien¹. Soit T une distribution quelconque d'énergie finie; par définition sa projection T' sur \mathfrak{B}_E est la distribution S de \mathfrak{B}_E qui rend minimum l'expression $\|S - T\|$, ou encore, ce qui revient au même, celle qui minimise l'« intégrale de Gauss » $\|S\|^2 - 2\mathfrak{R}(T, S)$. Comme il est bien connu, T' est caractérisée par la relation :

$$(13) \quad (T' - T, S) = 0 \quad \text{pour toute } S \in \mathfrak{B}_E,$$

d'où l'on déduit la loi de réciprocité suivante : Si S' et T' sont les projections sur \mathfrak{B}_E de deux distributions d'énergie finie S et T , on a :

$$(13^{\text{bis}}) \quad (T, S') = (T', S) = (T', S').^2$$

Théorème 4. *Dans l'intérieur $\overset{\circ}{E}$ de E les distributions U^T et $U^{T'}$ coïncident.*

Soit en effet φ une fonction indéfiniment dérivable à support compact dans $\overset{\circ}{E}$. La mesure de densité φ appartient à \mathfrak{B}_E et la relation (13) entraîne :

¹ Mais lorsque K est un noyau positif quelconque, la projection sur \mathfrak{B}_E d'une mesure positive est une opération en général distincte de celle que H. Cartan ([7], § V) appelle balayage sur E . C'est pourquoi nous n'emploierons pas le terme balayage pour désigner la projection sur \mathfrak{B}_E , bien qu'à certains points de vue ce soit cette opération qui possède les propriétés généralisant le plus exactement celles du balayage dans le cas newtonien (cf par exemple le théorème 4 ci-après).

² Cette relation, classique dans les espaces de Hilbert, est utilisée systématiquement par H. CARTAN [9] en théorie du balayage newtonien.

$$(T', \varphi) = (T, \varphi)$$

ce qui peut s'écrire, d'après (12) :

$$U^{T'}(\bar{\varphi}) = U^T(\bar{\varphi})$$

d'où le résultat.

Application: Les distributions à support compact sont denses dans l'espace \mathfrak{B} .

En effet soit $\{B_n\}$ une suite de boules fermées concentriques dont le rayon augmente indéfiniment. Posons $\mathfrak{B}_n = \mathfrak{B}_{B_n}$, et désignons par \mathfrak{B}' l'adhérence forte de $\cup \mathfrak{B}_n$. Soit $T \in \mathfrak{B}$ une distribution quelconque d'énergie finie, T_n sa projection sur \mathfrak{B}_n . D'après un théorème connu sur les espaces de Hilbert, T_n converge fortement vers T' , projection de T sur \mathfrak{B}' . U^{T_n} converge donc vers $U^{T'}$ au sens des distributions (remarque finale du paragraphe 3), et, d'après le théorème 2, U^{T_n} converge vers U^T au sens des distributions (puisque U^{T_n} coïncide avec U^T dans l'intérieur de B_n). Il en résulte l'identité des distributions U^T et $U^{T'}$ d'où celle de T et T' . Les espaces \mathfrak{B} et \mathfrak{B}' sont donc identiques.

Il suffit alors de se rappeler que toute distribution est limite forte de ses régularisées (théorème 3) pour énoncer :

Théorème 5: *Les fonctions indéfiniment dérivables à support compact sont denses dans l'espace \mathfrak{B} .*

Caractérisation des potentiels d'énergie finie : Le théorème 5 permet d'établir : Pour qu'une distribution U soit un tel potentiel, il faut et il suffit qu'il existe une constante positive A telle qu'on ait :

$$|U(\varphi)| \leq A \|\varphi\|$$

pour toute fonction φ indéfiniment dérivable à support compact.

En effet cette relation exprime que $U(\bar{\varphi}) = \text{Sp. } U * \tilde{\varphi}$ est une fonctionnelle linéaire bornée sur l'espace des φ normées par la racine de l'énergie ; cet espace est dense dans \mathfrak{B} ; on peut alors prolonger d'une manière unique à l'espace \mathfrak{B} la fonctionnelle donnée, qui est donc un produit scalaire ; par conséquent il existe une T d'énergie finie avec :

$$U(\bar{\varphi}) = (T, \varphi) = \text{Sp. } U^T * \tilde{\varphi} = U^T(\bar{\varphi}),$$

d'où $U \equiv U^T$.

Distribution d'équilibre d'un compact. Nous supposons maintenant que l'ensemble fermé E est borné (E est un compact). Parmi les distributions S de \mathfrak{B}_E il en existe une et une seule, que nous appellerons *distribution d'équilibre* de E , qui rend minimum l'expression

$$\|S\|^2 - 2\Re S(1)$$

où la quantité $S(1)$, qui est définie pour toute distribution à support compact, peut être appelée *masse totale* d'une telle distribution.

L'existence et l'unicité de cette distribution d'équilibre Γ s'établit par un procédé classique dans les espaces de Hilbert (utilisation du « théorème de la médiane » de F. Riesz), en remarquant que l'expression à minimiser est bornée inférieurement. On peut d'ailleurs observer également que si U est une fonction indéfiniment dérivable à support compact et prenant la valeur 1 sur E , c'est, d'après le lemme 2, le potentiel d'une distribution T d'énergie finie. Le problème revient donc à minimiser l'expression $\|S\|^2 - 2\Re S(1) + \|T\|^2$ qui n'est autre que l'énergie $\|S - T\|^2$, car on a, d'après (10) : $(T, S) = \text{Sp. } U^T * \tilde{S} = \bar{S}(1)$. Γ est la projection de T sur \mathfrak{B}_E ; elle est caractérisée par la relation

$$(T, S) = (\Gamma, S) \text{ pour toute } S \in \mathfrak{B}_E,$$

c'est-à-dire

$$(14) \quad (\Gamma, S) = \bar{S}(1) \text{ pour toute } S \in \mathfrak{B}_E.$$

Théorème 6. *La distribution U^Γ est identique à 1 dans l'intérieur $\overset{\circ}{E}$ de E .*

En effet si φ est une fonction indéfiniment dérivable à support dans $\overset{\circ}{E}$, on a, d'après (14) :

$$\text{Sp. } K * \Gamma * \tilde{\varphi} = \bar{\varphi}(1),$$

ou encore :

$$K * \Gamma(\tilde{\varphi}) = \bar{\varphi}(1);$$

ce qui montre bien que $K * \Gamma$ est réelle et identique à la constante $+1$ dans $\overset{\circ}{E}$.

On peut également déduire ce résultat du théorème 4 en remarquant que dans $\overset{\circ}{E}$ on a : $U^\Gamma = U^T = 1$.

Remarques.

- a). La masse totale $m = \Gamma(1)$ de la distribution d'équilibre est, en vertu de (14), réelle et égale à l'énergie $\|\Gamma\|^2$; nous l'appellerons *mesure spectrale* de E .¹
- b). Parmi les distributions T de \mathfrak{B}_E telles que $\Re T(1) = 1$, il en existe une et une

¹ Si le compact E_1 est contenu dans le compact E_2 , la mesure spectrale de E_1 est au plus égale à celle de E_2 (cf. remarque c). On pourrait donc appeler mesure spectrale d'un ouvert ω la borne supérieure des mesures spectrales des compacts contenus dans ω . Pour un ensemble quelconque E on pourrait définir la mesure spectrale intérieure comme la borne supérieure des mesures spectrales des compacts contenus dans E , et la mesure spectrale extérieure comme la borne inférieure des mesures spectrales des ouverts contenant E .

seule, soit A , qui rend l'énergie $\|T\|^2$ minimum.¹ On a d'ailleurs $\Gamma \equiv mA$, où m est la mesure spectrale du compact E .

L'existence et l'unicité de A résultent de ce que l'ensemble des T est complet et convexe. On a d'autre part, pour toute $T \in \mathfrak{B}_E$, avec $\Re T(1) = 1$:

$$\|A(1-h) + hT\|^2 \geq \|A\|^2 \text{ pour tout } h,$$

d'où facilement :

$$\Re(A, T) = \|A\|^2, T \in \mathfrak{B}_E, \Re T(1) = 1.$$

En appliquant cette relation à $T = S/\Re S(1)$, où S est une distribution quelconque de \mathfrak{B}_E :

$$\Re(A, S) = \|A\|^2 \Re S(1) \text{ pour toute } S \in \mathfrak{B}_E.$$

D'où en remplaçant S par iS et en ajoutant :

$$(A, S) = \|A\|^2 \bar{S}(1) \text{ pour toute } S \in \mathfrak{B}_E.$$

En rapprochant de la relation caractéristique (14), on voit qu'on a identiquement :

$$A = \|A\|^2 \Gamma,$$

d'où l'on déduit :

$$\|A\|^2 = \frac{1}{\|\Gamma\|^2} = \frac{1}{m}.$$

- c). Cette dernière remarque montre que la *mesure spectrale d'un compact E est l'inverse de la borne inférieure de l'énergie des distributions S de \mathfrak{B}_E telles que $\Re S(1) = 1$* . Il en résulte aussitôt que les mesures spectrales m_1 et m_2 de deux compacts E_1 et E_2 tels que $E_1 \subset E_2$ sont liées par la relation $m_1 \leq m_2$.

6. Exemples. Avant de donner quelques exemples très simples de noyaux K satisfaisant à l'hypothèse (A), observons que la condition relative à la fonction $\mathfrak{D} = 1/\mathfrak{R}$, nécessaire pour la validité des résultats précédents, entraîne certaines restrictions sur le noyau, qui se traduisent par la présence d'une singularité en O .

D'une façon plus précise : *une fonction indéfiniment dérivable du type positif ne vérifie pas l'hypothèse (A)*. Supposons en effet que la transformée de Fourier \mathfrak{R} d'un tel noyau $K(M)$ soit une fonction sommable sur tout compact ainsi que son inverse \mathfrak{D} (sinon l'hypothèse (A) n'est pas vérifiée); alors \mathfrak{D} n'est pas à croissance lente, car la fonction $(\varepsilon - \Delta/4\pi^2)^{*n} * K$ étant continue et du type positif, sa transformée de Fourier $(1+r^2)^n \mathfrak{R}$ est sommable,² ce qui entraîne :

¹ En supposant que \mathfrak{B}_E ne se réduise pas à la distribution nulle.

² D'après le théorème de Bochner c'est une mesure positive de masse totale finie.

$$\int \mathfrak{D}(1+r^2)^{-n} d\tau = +\infty \text{ pour tout } n.$$

Par exemple la fonction $e^{-\pi r^2}$ ne vérifie pas l'hypothèse (A) ; elle est identique à sa transformée de Fourier, dont l'inverse $e^{\pi r^2}$ est à croissance rapide. Au contraire la fonction r^{2-p} (noyau newtonien dans R^p , avec $p > 2$) a pour transformée de Fourier $(p-2)s_p/4\pi^2 r^2$, où s_p est l'aire de la sphère-unité ; elle vérifie l'hypothèse (A) ; c'est une fonction indéfiniment dérivable sauf à l'origine.

Potentiels par rapport à la distribution ε . La distribution ε , masse +1 placée à l'origine, satisfait à l'hypothèse (A), puisque sa transformée de Fourier est la fonction identique à la constante +1. Les distributions d'énergie finie ont pour transformées des fonctions de carré sommable. Elles sont elles-mêmes des fonctions f de carré sommable (théorème de Plancherel), et l'énergie n'est autre que $\int |f|^2 d\tau$. Il y a donc identité entre l'espace des distributions d'énergie finie et l'espace (de Hilbert) des fonctions de carré sommable dans R^p .

Proposons-nous de déterminer la distribution d'équilibre d'un compact E . D'après le § 5, remarque c), on est conduit à rechercher parmi les fonctions f de carré sommable, nulles hors de E , et dont la masse totale a pour partie réelle +1 (c'est-à-dire $\Re \int_E f d\tau = 1$), celle qui rend minimum la quantité $\int |f|^2 d\tau$. Le minimum sera évidemment obtenu pour f réelle ; d'autre part, l'inégalité de Schwarz donne :

$$\left| \int_E f d\tau \right|^2 \leq \text{mes } E \int_E |f|^2 d\tau.$$

La valeur minimum de l'énergie est donc $1/\text{mes } E$. La mesure spectrale du compact E coïncide donc avec sa mesure de Lebesgue. D'autre part, la fonction qui réalise le minimum étant égale à $1/\text{mes } E$ presque partout sur E , la distribution d'équilibre n'est autre que la fonction caractéristique de E .

On peut observer également que la projection sur \mathfrak{B}_E d'une distribution d'énergie finie, c'est-à-dire d'une fonction f de carré sommable, n'est autre que la restriction de f à E . C'est une conséquence évidente de la définition du § 5.

Potentiels polyharmoniques. La « solution élémentaire » de certaines équations aux dérivées partielles peut vérifier l'hypothèse (A) ; c'est le cas de l'équation $\Delta U - a^2 U = 0$ (a réel > 0), ce qui conduit à considérer dans R^3 les potentiels par rapport au noyau e^{-ar}/r , qui possède des propriétés voisines de celles du noyau newtonien ;¹

¹ Il vérifie le principe du maximum (cf chapitre II). Dans le cas général ($p > 3$), le noyau correspondant s'exprime à l'aide des fonctions de Bessel modifiées : c'est, à un facteur près, la transformée de Fourier de la fonction $1/(a^2 + 4\pi^2 r^2)$.

c'est également le cas pour l'équation polyharmonique d'ordre k ($\Delta_k U = 0$) dans R^p , avec $0 < 2k < p$. Les potentiels par rapport au noyau r^{2k-p} seront appelés *potentiels polyharmoniques d'ordre k* .

Pour $k = 1$ ($p \geq 3$), il s'agit du cas classique des potentiels newtoniens. Dans ce cas il est facile de déterminer la distribution d'équilibre d'une boule de rayon R ; c'est une mesure positive qui coïncide avec la distribution capacitaire (répartition homogène de la masse R^{p-2} sur la surface de la sphère), et nous verrons au chapitre II que ce résultat s'étend à un compact quelconque, le noyau newtonien vérifiant, comme il est bien connu, le principe du maximum. Par contre, les résultats sont tout à fait différents dès que k dépasse l'unité.

Proposons-nous en effet de déterminer la distribution d'équilibre Γ de la boule $B(O, R)$, de centre O et de rayon R , dans le cas des potentiels biharmoniques ($k = 2$, $p \geq 5$). L'unicité de Γ ayant été démontrée, il en résulte évidemment que le potentiel $U^\Gamma = \Gamma * r^{4-p}$ est une fonction de r seul; admettons que ce soit une fonction continue dans tout l'espace ainsi que ses dérivées du premier ordre.¹ On a $U^\Gamma = 1$ dans $B(O, R)$ (théorème 6). A l'extérieur de la boule, U^Γ est biharmonique, donc de la forme $ar^{4-p} + br^{2-p}$. La continuité de cette fonction et de sa dérivée normale à la frontière de $B(O, R)$ permet de déterminer les constantes a et b ; il vient :

$$U(r) = \begin{cases} 1 & \text{pour } r < R \\ \frac{p-2}{2} \left(\frac{R}{r}\right)^{p-4} - \frac{p-4}{2} \left(\frac{R}{r}\right)^{p-2} & \text{pour } r > R. \end{cases}$$

On obtiendra la distribution Γ en utilisant la relation

$$\Delta * \Delta * r^{4-p} = 2(p-2)(p-4)s_p \varepsilon$$

qui étend au cas biharmonique une formule donnée par L. SCHWARTZ [18] pour le potentiel newtonien (Δ désignant l'opérateur « Laplacien », s_p la surface de la sphère-unité).² En composant les deux membres avec Γ il vient en effet :

$$\Gamma = \frac{\Delta * \Delta * U}{2(p-2)(p-4)s_p}$$

et un calcul simple montre que Γ est la somme de deux distributions portées par la

¹ Il résulte en effet du chapitre III (§ 2) qu'un potentiel d'énergie finie par rapport au noyau r^{4-p} est de la forme $f * r^{2-p}$, où f est de carré sommable. C'est donc un potentiel newtonien engendré par une mesure dont la densité f est de carré sommable, et ne dépend évidemment que de r . Le résultat admis s'en déduit aisément.

² Cf. chap. III, relations (4) et (5).

sphère $B(O, R)$: une mesure (ou simple couche) homogène de densité $(p-2)/2s_p R^2$, et une double couche homogène de densité $-1/2s_p R^2$.

La distribution d'équilibre n'est donc pas une mesure.¹ Quant à la mesure spectrale $\Gamma(1)$, c'est la masse totale de la simple couche (car la double couche est de masse totale nulle) :

$$m = \Gamma(1) = \frac{p-2}{2} R^{p-4}$$

On montrerait de même que dans le cas du potentiel polyharmonique d'ordre k ($K = r^{2k-p}$), la distribution d'équilibre de la boule $B(O, R)$ est la somme de k couches multiples homogènes portées par la frontière $B(O, R)$, d'ordre 1 (simple couche), 2, ..., k .²

8. *Sur un problème de prolongement.* On sait qu'en théorie du potentiel newtonien il est possible de faire le balayage d'une mesure positive μ qui n'est pas nécessairement d'énergie finie. Les démonstrations de H. CARTAN [9] reposent essentiellement sur le principe du maximum (cf. chapitre II). Si en particulier μ est la masse unité ε_M placée au point M , sa balayée ε'_M sur le compact E permet d'exprimer très simplement la solution du problème de Dirichlet généralisé³ pour le complémentaire CE , avec la donnée $f(P)$ continue⁴ sur E , sous forme d'intégrale de Stieltjes.

$$(15) \quad F(M) = \int f(P) d\varepsilon'_M(P).$$

La fonction $F(M)$ (fonction de Wiener) est définie dans tout l'espace. Si $f(M)$ désigne le potentiel U^μ d'une mesure positive, la relation précédente a encore un sens ; la fonction $F(M)$ représente alors le potentiel $U^{\mu'}$ engendré par la mesure balayée μ' . Ce résultat est encore valable pour les potentiels d'ordre α ($0 < \alpha \leq 2$) pour $p > 2$, ce qui a conduit M. RIESZ [17] à appeler la fonction F définie par (15) *prolongement* de f .

¹ O. Frostman avait d'ailleurs démontré [13] qu'il ne peut y avoir de mesure positive dont le potentiel soit constant dans un domaine, dans le cas des potentiels d'ordre α , avec $\alpha > 2$. Cette remarque, jointe au fait que le principe du maximum n'est plus vérifié dans ce cas l'a conduit à l'hypothèse (toujours ouverte) que ce principe, suffisant pour élaborer la théorie classique du balayage et de la capacité, est en quelque sorte nécessaire (cf. chapitre II).

² Selon L. Schwartz, nous appellerons simple couche sur une variété indéfiniment différentiable V une mesure μ ayant V pour support. Une couche multiple d'ordre k est la dérivée normale d'ordre $k-1$ d'une simple couche μ ; c'est la distribution T définie par $T(\varphi) = (-1)^{k-1} \int d^{k-1} \varphi / dn^{k-1} d\mu$. Si V est compacte la masse totale $T(1)$ est bien définie et évidemment nulle dès que k surpasse 1.

³ Cf. notamment M. BRELOT [4].

⁴ On peut considérer avec M. BreLOT, des fonctions plus générales (fonctions résolutives).

Le théorème suivant permet de résoudre pour des noyaux assez généraux un problème de prolongement analogue : connaissant le potentiel U^T sur un voisinage d'un compact E , déterminer le potentiel $U^{T'}$ sur CE , où T' est la projection sur \mathfrak{B}_E de la distribution d'énergie finie T . Nous supposons que le noyau K , vérifiant, comme toujours, l'hypothèse (A), est de plus une fonction $K(M)$ indéfiniment dérivable en $M \neq O$. Si T est à support compact, le potentiel U^T coïncide alors sur le complémentaire du support avec une fonction indéfiniment dérivable.

Théorème 7. *Sous ces hypothèses, à un compact E et à tout point M du complémentaire CE on peut associer une distribution d'énergie finie ε'_M , possédant la propriété suivante : Quelle que soit la distribution T d'énergie finie, on a :*

$$(16) \quad U^{T'}(M) = (T, \varepsilon'_M),$$

où T' est la projection de T sur \mathfrak{B}_E .

Cette distribution ε'_M n'est autre que l'unique distribution S de \mathfrak{B}_E qui minimise l'expression :

$$\|S\|^2 - 2\Re U^S(M).^1$$

Montrons d'abord l'existence et l'unicité d'une telle distribution ; il existe une distribution d'énergie finie A_M dont le potentiel coïncide sur un voisinage de E avec la fonction indéfiniment dérivable U^{ε_M} (lemme 2). Le problème revient donc à minimiser la quantité :

$$\|S - A_M\|^2 = \|S\|^2 + \|A_M\|^2 - 2\Re(S, A_M)$$

car on a $(S, A_M) = \text{Sp. } K * S * \tilde{A}_M$; d'autre part sur un voisinage du compact \tilde{E} symétrique de E par rapport à O on a, compte tenu de la symétrie hermitienne de K :² $K * \tilde{A}_M = K * \tilde{\varepsilon}_M$ (les distributions $K * A_M$ et $K * \varepsilon_M$ coïncidant par hypothèse sur un voisinage de E) ; d'où finalement :

$$(17) \quad (S, A_M) = \text{Sp. } K * S * \tilde{\varepsilon}_M = U^S(M),$$

ε'_M est donc la projection de A_M sur \mathfrak{B}_E . Si T est une distribution quelconque d'énergie finie, la loi de réciprocité (13^{bis}) donne :

$$(T', A_M) = (T, \varepsilon'_M)$$

c'est-à-dire, d'après (17), la relation à démontrer (16).

¹ Cette expression peut s'écrire $\|S\|^2 - 2\Re(S, \varepsilon_M)$, car, bien que ε_M ne soit pas nécessairement d'énergie finie, le produit scalaire (S, ε_M) a un sens et on peut écrire, d'après (10) : $(S, \varepsilon_M) = \text{Sp. } K * S * \tilde{\varepsilon}_M = U^S(M)$.

² La distribution K étant du type positif, on a $K = \tilde{K}$.

Dans le cas newtonien, il est clair que la relation (16) se réduit à (15) (avec $f = U^\mu$, $F = U^{\mu'}$, où μ est une mesure positive d'énergie finie), si l'on admet, comme nous le verrons au chapitre suivant, que la mesure μ' , balayée de μ sur E , n'est autre que la projection de μ sur \mathfrak{B}_E ; mais la relation (15) est alors valable pour tout point M de l'espace (et non pas seulement pour $M \in CE$); ce dernier résultat est complété par le théorème : Si M tend vers le point régulier M_0 de la frontière de E , la mesure positive ε'_M converge vaguement vers ε_{M_0} . On sait d'autre part que l'ensemble des points irréguliers est de capacité extérieure nulle.

Dans le cas général (où le principe du maximum n'est plus valable) il semble difficile d'étudier le comportement de la distribution ε'_M lorsque M tend vers un point-frontière de E . Notons toutefois que la relation (16) peut s'écrire :

$$U^{T'}(M) = \text{Sp. } K * T * \tilde{\varepsilon}'_M.$$

Si donc on remplace dans le second membre $K * T$ par une fonction indéfiniment dérivable f , on obtient la formule de prolongement suivante, qui généralise (15) (du moins pour $M \in CE$) :

$$F(M) = \text{Sp. } f * \tilde{\varepsilon}'_M = \tilde{\varepsilon}'_M(f).$$

Si la distribution ε'_M est d'ordre borné (indépendamment de M), on pourra prolonger des fonctions f admettant des dérivées continues jusqu'à un certain ordre. En particulier pour $K = r^{2k-p}$, $F(M)$ sera une fonction k -harmonique sur CE . On obtient ainsi une solution (purement formelle) du problème de Dirichlet pour l'équation $\Delta_k U = 0$ et l'extérieur d'un compact arbitraire E avec pour donnée frontière sur E la fonction f et les valeurs, supposées continues, de ses dérivées partielles des premiers ordres.¹

Remarque. Si M et P sont extérieurs au compact E , et si on appelle fonction de Green pour l'ouvert CE la fonction : $G(M, P) = U^{\varepsilon_M}(P) - U^{\varepsilon'_M}(P)$, on vérifie aisément la symétrie hermitienne

$$(18) \quad G(M, P) = \overline{G(P, M)}.$$

En effet on a, par définition

¹ Ce problème dont nous donnons une solution formelle est bien une extension du problème de Dirichlet classique pour les fonctions k -harmoniques; la donnée-frontière, sur une variété suffisamment différentiable, est alors la fonction et les dérivées normales d'ordre 1, 2, ..., $k-1$. Il faut encore vérifier dans le cas général que la distribution ε'_M a son support sur la frontière de E , ce qui résulte de ce que Δ_n est à support ponctuel.

$$U^{\varepsilon_M}(P) = K(P-M) = \overline{K}(M-P) = \overline{U^{\varepsilon_P}(M)}.$$

D'autre part la relation (16), appliquée à $T = \varepsilon'_p$, donne

$$U^{\varepsilon'_p}(M) = (\varepsilon'_P, \varepsilon'_M) = \overline{(\varepsilon'_M, \varepsilon'_P)} = \overline{U^{\varepsilon'_M}(P)}$$

d'où le résultat.

Cette fonction de Green $G(M, P)$, définie pour M et $P \in CE$, est indéfiniment dérivable en $M \neq P$ et en $P \neq M$. Elle est du *type positif* car on vérifie aisément qu'on a, pour toute fonction φ indéfiniment dérivable, nulle hors d'un compact de CE :

$$\iint G(M, P)\varphi(M)\overline{\varphi}(P)d\tau_M d\tau_P = \|\varphi\|^2 - \|\varphi'\|^2 \geq 0$$

où φ' est la projection de φ sur \mathfrak{B}_E .

Nous n'insisterons pas sur les conséquences qu'on peut en déduire telle que l'étude des « potentiels de Green » d'énergie finie, sur lesquels nous reviendrons au chapitre IV dans le cas newtonien. Nous ne chercherons pas non plus à étendre les considérations de ce paragraphe au cas où l'ensemble fermé E n'est pas compact, ni au cas où le noyau K vérifie seulement l'hypothèse (A).

CHAPITRE II

Cas d'un noyau positif. Principe du maximum.

1. Nous supposons à l'avenir que le noyau K est une mesure positive vérifiant toujours l'hypothèse (A) du chapitre I. Une telle mesure est donc symétrique ($K \equiv \check{K}$).

Le potentiel d'une mesure positive μ peut se définir directement (sans faire appel à la transformation de Fourier). C'est la mesure positive :

$$U^\mu = U_K^\mu = K * \mu,$$

qui existe dès que ce produit de composition a un sens.¹

Il en est ainsi en particulier lorsque μ est d'énergie finie (au sens du chap. I). L'énergie $\|\mu\|^2$ peut d'ailleurs se définir directement par l'expression :

¹ Lorsque K est une fonction positive $K(M)$, sommable sur tout compact et semi-continue inférieurement, cette définition conduit à l'expression bien connue : $U^\mu(M) = \int K(M-P)d\mu(P)$. Le potentiel est alors une fonction non négative, définie en tout point (pouvant éventuellement prendre les valeurs 0 et $+\infty$) et semi-continue inférieurement.

$$\|\mu\|^2 = \text{Sp. } K * \mu * \check{\mu},^1$$

et pour que μ soit d'énergie finie, il faut et il suffit que $K * \mu * \check{\mu}$ soit une fonction continue.

Comme application immédiate de cette remarque, signalons que toute mesure μ à support compact, définie par une fonction de carré sommable, est d'énergie finie : en effet $\mu * \check{\mu}$ est alors continue et à support compact ; $K * \mu * \check{\mu}$ est donc continue. En particulier la fonction caractéristique d'un compact est d'énergie finie. Si d'autre part la densité de μ est continue (et nulle hors d'un compact) le potentiel correspondant est lui-même continu.

On sait qu'une fonction du type positif bornée presque partout au voisinage de O est continue (plus exactement : elle est presque partout égale à une fonction continue).² On en déduit que si μ est une mesure positive d'énergie finie qui majore la mesure positive λ , ou plus généralement dont le potentiel $K * \mu$ majore la mesure $K * \lambda$, λ est d'énergie finie.

En effet $K * \lambda * \check{\lambda}$ est majorée par $K * \mu * \check{\mu}$, et comme $K * \check{\lambda}$ est majorée par $K * \check{\mu}$, on a $K * \lambda * \check{\lambda} \leq K * \mu * \check{\mu}$, ce qui montre bien que $K * \lambda * \check{\lambda}$ est continue ; on a de plus : $\|\lambda\|^2 \leq \|\mu\|^2$.

Rappelons à présent quelques résultats de H. Cartan ([7], [8], [9]). Si \mathfrak{E}_E est l'ensemble (convexe et fermé) des mesures positives d'énergie finie portées par un ensemble fermé E , et si λ est une mesure positive d'énergie finie, il existe une $\mu \in \mathfrak{E}_E$ et une seule, soit λ' , appelée balayée de λ sur E , qui minimise $\|\lambda - \mu\|$; elle est caractérisée par les relations :

$$(1) \quad \begin{cases} (\lambda, \mu) \leq (\lambda', \mu) \\ (\lambda, \lambda') = \|\lambda'\|^2 \end{cases} \text{ pour toute } \mu \in \mathfrak{E}_E^3$$

¹ Le sens attribué à cette expression au chapitre I (relation (10)) était donné par la transformation de Fourier. Il est facile de vérifier l'identité de ces deux définitions. Observons encore que si K est une fonction et si μ est à support compact et à densité continue l'énergie n'est autre que l'intégrale double $\|\mu\|^2 = \iint K(M-P) d\mu(M) d\mu(P)$.

² Cf. R. GODEMENT, Les fonctions du type positif et la théorie des groupes (Trans. Amer. Math. Soc. 63, 1948, p. 1—84). Dans le cas du groupe R^p , considéré dans tout ce travail, ce résultat peut s'obtenir très simplement à l'aide du théorème de L. Schwartz sur les distributions du type positif, rappelé dans l'introduction. Soit en effet f une fonction du type positif, avec $|f| < A$ presque partout sur un voisinage de O . Considérons une suite de mesures régularisantes du type positif, par exemple $\{h_n * h_n\}$, où h_n est la distribution uniforme de la masse $+1$ dans la boule $B(O, 1/n)$. f a pour transformée de Fourier une mesure positive à croissance lente $\mu = \mathfrak{F}(f)$ (L. Schwartz). $f_n = f * h_n * h_n$ est continue et du type positif ; d'après le théorème de Bochner, sa transformée de Fourier $\mu_n = \mathfrak{F}(f_n) = |\eta_n|^2 \mu$ (avec $\eta_n = \mathfrak{F}(h_n)$) a pour masse totale $\mu_n(1) = f_n(0)$, quantité positive qui est inférieure à A pour n assez grand. Comme η_n tend vers 1 uniformément sur tout compact (chap. I, lemme 3), la masse totale $\mu(1)$ est au plus égale à A . Donc f est presque partout égale à la fonction continue $\mathfrak{F}^{-1}(\mu)$.

³ Pour un ensemble quelconque E , on peut définir un balayage intérieur et un balayage extérieur

Si E est compact, parmi les $\mu \in \mathfrak{G}_E$, il en existe une et une seule, γ , appelée *distribution capacitaire de E* ,¹ qui minimise l'intégrale de Gauss

$$I(M) = \|\mu\|^2 - 2\mu(1).$$

Elle est caractérisée par les relations

$$(2) \quad \begin{cases} \mu(1) \leq (\gamma, \mu) \\ \gamma(1) = \|\gamma\|^2 \end{cases} \text{ pour toute } \mu \in \mathfrak{G}_E.$$

La valeur commune $\gamma(1) = \|\gamma\|^2 = C$ est la *capacité* du compact E . C'est aussi l'inverse de la borne inférieure de l'énergie des mesures positives portées par E et de masse totale unité.

La capacité intérieure $\mathfrak{G}_i(E)$ d'un ensemble quelconque E est la borne supérieure des capacités des compacts contenus dans E . Sa capacité extérieure $\mathfrak{G}_e(E)$ est la borne inférieure des capacités (intérieures) des ouverts contenant E . On a évidemment $\mathfrak{G}_i(E) \leq \mathfrak{G}_e(E)$; l'égalité a lieu si E est compact.

Si E_1 est contenu dans E_2 , on a évidemment $\mathfrak{G}_i(E_1) \leq \mathfrak{G}_i(E_2)$, et on a une relation analogue pour les capacités extérieures. D'une manière plus précise :²

(cf. [9]) en considérant les ensembles convexes et fermés \mathfrak{G}_E^i adhérence forte de la réunion des \mathfrak{G}_F relatifs aux compacts F contenus dans \mathfrak{G}_E^e , et \mathfrak{G}_E^e , intersection des \mathfrak{G}_G^i relatifs aux ouverts G contenant E . Ces ensembles coïncident lorsque E est compact. Nous n'aurons pas à utiliser ces notions. Observons que le résultat énoncé (existence et unicité de λ') est encore vrai dans le cas plus général considéré au chapitre I (où le noyau n'est pas nécessairement une mesure); les relations caractéristiques (1) doivent être remplacées par les suivantes: $\mathfrak{R}(\lambda, \mu) \leq \mathfrak{R}(\lambda', \mu)$, $\mathfrak{R}(\lambda, \lambda') = \|\lambda'\|^2$.

¹ Cette « distribution » est par définition une mesure positive.

² Les démonstrations données par les relations (3) et (4) utilisent le principe du maximum, dont il sera parlé plus loin (cf. par exemple O. FROSTMAN [14] pour la relation (3) dans le cas des potentiels d'ordre $\alpha \leq 2$). En réalité le résultat est indépendant de ce principe. Soit en effet $E = \bigcup E_n$, où les E_n sont boréliens. Soient $e \subset E$ un compact dont la capacité dépasse $\mathfrak{G}_i(E) - \varepsilon$, et γ sa distribution capacitaire. Les E_n étant boréliens, on peut écrire $\gamma = \sum \gamma_n$, où γ_n charge seulement E_n . Soit e_n un compact de E_n , tel que la masse totale de la restriction δ_n de γ_n à e_n dépasse $\gamma_n(1) - \varepsilon_n$. Par définition de γ on peut écrire:

$$-\mathfrak{G}_i(E) + \varepsilon \geq -\gamma(1) = \|\gamma\|^2 - 2\gamma(1) = \|\sum \gamma_n\|^2 - 2\sum \gamma_n(1) \geq \sum \|\gamma_n\|^2 - 2\sum \gamma_n(1) \geq \sum (\|\delta_n\|^2 - 2\delta_n(1) - 2\varepsilon_n).$$

Or la propriété de minimum de l'intégrale de Gauss entraîne:

$$\|\delta_n\|^2 - 2\delta_n(1) \geq -\mathfrak{G}(e_n) \geq -\mathfrak{G}_i(E_n).$$

Il vient donc:

$$-\mathfrak{G}_i(E) + \varepsilon \geq -\sum \mathfrak{G}_i(E_n) - 2\sum \varepsilon_n$$

d'où la relation (3), en faisant tendre ε et $\sum \varepsilon_n$ vers 0. La relation (4) s'obtient en appliquant (3) à des ouverts G_n contenant E_n (cf. [8], p. 93).

Observons que la méthode précédente ne s'applique pas aux mesures spectrales (chapitre I, § 5). En effet on a utilisé la relation $\|\sum \gamma_n\|^2 \geq \sum \|\gamma_n\|^2$ qui est vérifiée si les γ_n et le noyau K sont positifs.

$$(3) \quad \mathfrak{C}_i \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n \right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mathfrak{C}_i(E_n),$$

où les E_n sont des ensembles boréliens

$$(4) \quad \mathfrak{C}_\varepsilon \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n \right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mathfrak{C}_\varepsilon(E_n),$$

où les E_n sont des ensembles quelconques.

Une propriété a lieu à *peu près partout* (pour le noyau K), respectivement *quasi-partout* si elle a lieu partout sauf aux points d'un ensemble de capacité intérieure, respectivement extérieure, nulle. Une telle propriété a lieu presque partout en vertu de la proposition suivante :

Tout ensemble mesurable de capacité intérieure nulle est de mesure (de Lebesgue) nulle. Il suffit de montrer que tout ensemble mesurable E de mesure positive porte une mesure positive d'énergie finie : par exemple la mesure dont la densité est la fonction caractéristique d'un compact $e < E$ de mesure positive (distribution-mesure de e).

Le cas du noyau $K = \varepsilon$ se présente donc comme un cas extrême : la capacité coïncide avec la mesure de Lebesgue.¹

2. La « fonction » potentiel d'énergie finie.² Les potentiels d'énergie finie ont été définis au chapitre I (§ 3) pour un noyau K quelconque satisfaisant seulement à l'hypothèse (A). Un tel potentiel est une distribution $U^T = K * T$ (définie à l'aide de la transformation de Fourier lorsque T n'est pas à support compact), et il est facile de construire des exemples pour lesquels U^T n'est pas une « fonction ».³

¹ On a vu au chapitre I (§ 5) que la distribution d'équilibre d'un compact E est alors une mesure positive. C'est donc aussi une distribution capacitaire, et la capacité $\mathfrak{C}(E)$ coïncide avec la mesure spectrale $m(E)$. Dans le cas général on a évidemment $\mathfrak{C}(E) \leq m(E)$.

² Rappelons que toute fonction f sommable sur tout compact définit une mesure de Radon (la mesure de densité f), donc une distribution. On dit d'une distribution qu'elle est une fonction si elle est une mesure de cette nature. Une telle fonction n'est évidemment définie qu'à un ensemble de mesure nulle près (deux fonctions localement sommables égales presque partout engendrent la même distribution).

³ Prenons en effet dans R^p , avec $p \geq 5$: $K = A_2 = A * A$, où A est la distribution « Laplacien. » K vérifie l'hypothèse (A), car $\mathfrak{F}(K) = 16\pi^2 r^4$ (est sommable sur tout compact ainsi que son inverse $1/\mathfrak{F}$ pour $p \geq 5$). La distribution H associée à K (chap. I, § 2) est $H = -A$. La forme générale des potentiels d'énergie finie est (chap. I, § 3): $U = H * F = -AF$, où F est une fonction quelconque de carré sommable dans tout l'espace. Il est clair qu'on peut choisir F de façon que U ne soit pas une fonction.

Par contre, si on suppose de plus, comme dans tout ce chapitre, le noyau K positif, nous allons voir que tout potentiel d'énergie finie est une fonction ; on peut même définir quasi-partout la fonction associée à U^T . D'une manière précise on peut énoncer :

Théorème 1.¹ *Soit K un noyau positif vérifiant l'hypothèse (A) ; à toute distribution T d'énergie finie on peut associer une classe $\Phi(T)$ de fonctions mesurables possédant les propriétés suivantes :*

- a). *Deux fonctions de $\Phi(T)$ sont égales quasi-partout, et toute fonction égale quasi-partout à une fonction de $\Phi(T)$ appartient à $\Phi(T)$.*
- b). *$\Phi(T_1 + T_2)$ est constituée par les sommes d'une fonction de $\Phi(T_1)$ et d'une fonction de $\Phi(T_2)$.*
- c). *Soient $f^{T_n} \in \Phi(T_n)$ et $f^T \in \Phi(T)$; si la suite $\{T_n\}$ converge fortement vers T , on peut en extraire une suite partielle telle que les f^{T_n} correspondantes convergent quasi-partout vers f^T .*
- d). *Si λ est une mesure positive quelconque d'énergie finie, toute fonction f^T de $\Phi(T)$ est λ -sommable, et l'intégrale correspondante n'est autre que le produit scalaire :*

$$(5) \quad \int f^T d\lambda = (T, \lambda).$$

En particulier f^T est sommable (au sens de Lebesgue) sur tout compact.

La distribution U^T est alors la mesure ayant pour densité l'une quelconque des fonctions de $\Phi(T)$.

$\Phi(T)$ se présente donc comme une sous-classe de la classe des fonctions (deux à deux presque partout égales) définissant la mesure U^T . Si cette dernière classe contient une fonction continue U , on a : $U \in \Phi(T)$.

Il est à remarquer que si K est seulement une mesure positive, il n'existe pas en général de fonction privilégiée dans la classe $\Phi(T)$, même si T est positive, comme on peut s'en rendre compte sur l'exemple $K = \varepsilon$ (cf. chap. I, § 6).²

¹ J'avais d'abord établi ce théorème sous une forme moins générale. M. H. Cartan a bien voulu me signaler que les restrictions de mon énoncé étaient inutiles.

² Lorsque $K = K(M)$ est une fonction semi-continue inférieurement, et T une mesure positive μ , la fonction $f^\mu(M) = \int K(M - P) d\mu(P)$, définie partout, est presque partout égale aux fonctions de la classe $\Phi(\mu)$ qu'on va définir, mais il n'est pas évident qu'elle est dans cette classe.

Dans le cas du noyau d'ordre α ($0 < \alpha < p$) on a bien $f^\mu \in \Phi(\mu)$, car la valeur moyenne de f^μ sur la boule de centre M et de rayon r tend vers $f^\mu(M)$ lorsque r tend vers 0, et ceci quelle que soit la mesure positive μ ; cela résulte immédiatement de [13], p. 27.

Il importe d'observer également que pour ces noyaux la définition de l'énergie adoptée dans ce travail coïncide avec la définition classique $\int \int K(M - P) d\mu(M) d\mu(P)$ quelle que soit la mesure positive μ (et non pas seulement si μ est à densité continue) ; cela résulte immédiatement de ce que la formule de M. Riesz (cf. chap. III, § 1) est une relation entre fonctions définies partout (et non pas seulement une relation entre mesures).

— *Construction de la classe $\Phi(T)$.* Si la distribution U^T est une fonction continue U (c'est-à-dire si U^T coïncide avec la mesure de densité U), la classe $\Phi(T)$ sera par définition constituée par les fonctions égales quasi-partout à U . De telles fonctions sont mesurables, car un ensemble de capacité extérieure est de mesure lebesgienne nulle. Dans ce cas particulier on peut énoncer un résultat utilisé par H. Cartan :¹

Lemme: L'ouvert $E(U > \alpha > 0)$ est de capacité au plus égale à $\|T\|^2/\alpha^2$.

Soit alors T_n une distribution d'énergie finie dont le potentiel U^{T_n} est une fonction continue, et qui converge fortement vers T . On peut supposer, par extraction, que la série :

$$(6) \quad \sum 4^n \|T_{n+1} - T_n\|^2$$

est convergente. Alors la suite $\{U_n\}$ converge quasi-partout vers une fonction mesurable U , la convergence étant uniforme sauf sur un ouvert de capacité arbitrairement petite.

En effet, d'après le lemme, on a, en désignant par E_n l'ouvert $E(|U_{n+1} - U_n| > 1/2^n)$:

$$\mathfrak{C}(E_n) \leq 2 \cdot 4^n \|T_{n+1} - T_n\|^2.$$

Soit $E'_k = \bigcup_{n=k}^{\infty} E_n$; d'après la relation (3), on a :

$$\mathfrak{C}(E'_k) \leq \sum_{n=k}^{\infty} \mathfrak{C}(E_n) \leq 2 \sum_{n=k}^{\infty} 4^n \|T_{n+1} - T_n\|^2$$

quantité qui tend vers 0 avec $1/k$, puisque la série (6) est supposée convergente. Or sur le complémentaire CE'_k , on a, pour tout $n > k$: $|U_{n+1} - U_n| \leq \frac{1}{2^n}$. Par conséquent la série $U_1 + \sum_{n=1}^{\infty} (U_{n+1} - U_n)$ est uniformément convergente sur CE'_k (dont le complémentaire E'_k est un ouvert dont la capacité tend vers 0 avec $1/k$) et elle converge en tout point du complémentaire de l'ensemble $e = \bigcap_{k=1}^{\infty} E'_k$ qui est un G_δ de capacité extérieure nulle.

Le même raisonnement montre que si T est nulle, U_n tend vers 0 quasi-partout.

Considérons maintenant une distribution quelconque T d'énergie finie. Elle est limite forte d'une suite $\{T_n\}$ dont le potentiel est continu et pour laquelle la série (6)

¹ [8], p. 98, dans le cas newtonien, pour un potentiel engendré par la différence de deux mesures positives d'énergie finie (la continuité n'étant pas supposée). La démonstration de l'auteur s'adapte aisément, grâce à l'hypothèse faite sur la continuité de U (observer que si γ est une mesure positive d'énergie finie à support compact, on a : $(T, \gamma) = \text{Sp. } U^{T*}\gamma = \int U d\gamma$, et appliquer l'inégalité de Schwarz. On prendra pour γ la distribution capacitaire d'un compact de l'ouvert considéré).

est convergente (il suffit d'extraire une suite partielle convenable de la suite $\{T * h_n\}$, où les h_n sont les mesures régularisantes considérées au chapitre I, § 4). A chacune de ces suites correspond une fonction mesurable U , et deux fonctions telles que U sont égales quasi-partout (si $\{T'_n\}$ et $\{T''_n\}$ sont deux telles suites, il suffit de considérer les différences $T'_n - T''_n$). Par définition la classe $\Phi(T)$ sera constituée par l'ensemble des fonctions égales quasi-partout à l'une quelconque de ces fonctions U . Il est à observer que si la distribution U^T coïncide avec une fonction continue u , cette construction conduit à la classe des fonctions quasi-partout égales à u .

Cette classe $\Phi(T)$ possède par construction la propriété a) de l'énoncé, et la propriété b) est évidente.

Démonstration de c). Elle résulte aisément du lemme suivant : Soit f^T une fonction de la classe $\Phi(T)$. L'ensemble $E(f^T \geq \alpha > 0)$ est de capacité extérieure au plus égale à $\|T\|^2/\alpha^2$.¹

Si T_n tend fortement vers T de manière que la série (6) converge et si f^{T_n} appartient à $\Phi(T_n)$, ce lemme, qui avait déjà été utilisé lorsque les f^{T_n} étaient des fonctions continues, montre que f^{T_n} converge quasi-partout vers une fonction mesurable f , et on vérifie facilement que f appartient à $\Phi(T)$.

Démonstration de d). Soit f^T une fonction quelconque de $\Phi(T)$ et λ une mesure positive d'énergie finie. Sur le complémentaire d'un ensemble borélien de capacité extérieure nulle (donc de mesure nulle par rapport à λ) f^T est limite de potentiels continus U_n . Elle est donc λ -mesurable.

Pour établir la relation (5), on peut évidemment supposer T , donc f^T , réelle (toute distribution complexe étant de la forme $T = T_1 + iT_2$ où T_1 et T_2 sont réelles). Soit μ la restriction de λ à l'ensemble $E(f^T \geq 0)$, qui est λ -mesurable; μ est d'énergie finie (puisque'elle est majorée par λ); tout revient donc à montrer la relation :

$$\int f^T d\mu = (T, \mu).$$

¹ En effet, sur le complémentaire d'un ouvert ω_k de capacité inférieure à $1/k$, f^T est continue et limite uniforme de potentiels continus U^{T_n} , où T_n converge fortement vers T . L'ensemble $F_k = E(f^T \geq \alpha) \cap C\omega_k$ est fermé, sa capacité intérieure coïncide donc avec sa capacité extérieure. Soient e un compact de F_k , avec $\mathfrak{C}(e) > \mathfrak{C}(F_k) - \varepsilon$ (ε arbitrairement petit), et γ la distribution capacitaire de e . Les hypothèses entraînent :

$$\int f^T d\gamma = \lim \int U^{T_n} d\gamma = \lim (T_n, \gamma) = (T, \gamma) \leq \|T\| \|\gamma\|,$$

d'où : $\alpha(\mathfrak{C}(F_k) - \varepsilon) < \|T\| \sqrt{\mathfrak{C}(F_k)}$, et par conséquent : $\mathfrak{C}(F_k) \leq \|T\|^2/\alpha^2$. D'autre part $E(f^T \geq \alpha)$ est contenu dans la réunion de F_k et de ω_k , d'où le résultat en appliquant la relation (4).

Supposons d'abord μ à support compact. Sur le complémentaire d'un ouvert ω_k dont la capacité tend vers 0 avec $1/k$, f^T est limite uniforme des U_n . Si on désigne par μ_n la restriction de μ à ω_k , on peut écrire :

$$\left| \int U_n d\mu - \int_{C\omega_k} U_n d\mu \right| = \left| \int U_n d\mu_k \right| \leq \|T_n\| \|\mu_k\|.$$

Si on fait tendre n vers $+\infty$, il vient, en vertu de la convergence uniforme de U_n et de la convergence forte de T_n :

$$\left| (T, \mu) - \int_{C\omega_k} f^T d\mu \right| \leq \|T\| \|\mu_k\|.$$

Lorsque k augmente indéfiniment, la capacité de l'ouvert ω_k tend vers 0 ; il en résulte que la masse totale de μ_k tend vers 0, et par suite que $\|\mu_k\|$ tend vers 0.¹ Comme f^T est négative seulement sur un ensemble de μ -mesure nulle, on en déduit bien que f^T est μ -sommable et qu'on a : $\int f^T d\mu = (T, \mu)$.

Si μ n'est pas à support compact, il suffit de considérer sa restriction μ_j à la boule $B(O, j)$. On a : $\int f^T d\mu_j = (T, \mu_j)$, d'où le résultat, car μ_j tend fortement vers μ lorsque j augmente indéfiniment.²

Une mesure ayant pour densité la fonction caractéristique d'un compact est d'énergie finie : on voit donc que f^T est sommable (au sens de Lebesgue) sur tout compact. Enfin si λ est une mesure complexe à support compact et à densité φ indéfiniment dérivable, elle est combinaison linéaire de 4 mesures réelles positives de cette nature et la relation (5) donne facilement :

$$\int f^T \bar{\varphi} d\tau = (T, \varphi) = \text{Sp. } U^T * \tilde{\varphi} = U^T(\bar{\varphi});$$

la distribution U^T est donc identique à la mesure de densité f^T .

La démonstration du théorème I est donc achevée. Par la suite nous désignerons par U^T l'une quelconque des fonctions de la classe $\Phi(T)$.

Remarque. Si T est limite forte de distributions d'énergie finie T_n , et si les potentiels U^{T_n} ont quasi-partout une limite, celle-ci est quasi-partout égale à U^T .

¹ D'après une remarque utilisée par H. Cartan en théorie du potentiel newtonien, les μ_k sont décroissants, donc aussi les mesures $K * \mu_k = U\mu_k$. Les quantités $\|\mu_k\|^2 = \text{Sp. } U\mu_k * \check{\mu}_k$ tendent en décroissant vers une limite et on a, pour tout h positif :

$$\|\mu_{k+h} - \mu_k\|^2 = \|\mu_{k+h}\|^2 + \|\mu_k\|^2 - 2 \text{Sp. } U\mu_{k+h} * \check{\mu}_k \leq \|\mu_k\|^2 - \|\mu_{k+h}\|^2.$$

$\{\mu_h\}$ est donc une suite de Cauchy. La limite forte de μ_k est la mesure identiquement nulle puisque μ_k converge vaguement vers 0. On a donc bien : $\lim \|\mu_k\| = 0$.

² La démonstration est toute semblable à celle de la note précédente.

On en déduit aussitôt : la limite d'une suite décroissante de potentiels de mesures positives d'énergie finie est quasi-partout égale au potentiel d'une mesure positive d'énergie finie.¹

3. *Sur le principe du maximum.* Le théorème 1 nous permet d'étendre les définitions rappelées dans l'introduction au cas d'un noyau positif qui n'est plus nécessairement une fonction semi-continue, mais seulement une mesure positive satisfaisant à l'hypothèse (A).

Principe du maximum : Si λ et μ sont des mesures positives d'énergie finie, et si on a $U^\lambda \leq U^\mu$ sauf sur un ensemble de mesure nulle par rapport à λ ,² on a quasi-partout $U^\lambda \leq U^\mu$.

Principe restreint du maximum : Si λ est une mesure positive d'énergie finie et si on a $U^\lambda \leq 1$ sauf sur un ensemble de mesure nulle par rapport à λ , on a quasi-partout $U^\lambda \leq 1$.

Ces propriétés sont vérifiées lorsque K est le noyau newtonien r^{2-p} ($p > 2$), ou plus généralement le « noyau d'ordre α » $r^{\alpha-p}$ avec $0 < \alpha \leq 2$ si $p > 2$, $0 < \alpha < p$ si $p \leq 2$. Elles le sont aussi dans le cas trivial $K = \varepsilon$. Par contre elles ne le sont pas dans le cas du noyau d'ordre α pour $2 < \alpha < p$.³

Nous renvoyons aux travaux de H. Cartan pour les conséquences qu'on peut en déduire et les démonstrations. Rappelons seulement que le principe du maximum entraîne que les relations (1) sont des égalités, c'est-à-dire que la balayée λ' sur un ensemble fermé E d'une mesure positive λ d'énergie finie vérifie les relations caractéristiques :

$$(7) \quad (\lambda, \mu) = (\lambda', \mu) \text{ pour toute } \mu \in \mathfrak{E}_E.$$

De même le principe restreint du maximum entraîne, pour la distribution capacitaire γ d'un compact E , les relations caractéristiques.

$$(8) \quad \mu(1) = (\gamma, \mu) \text{ pour toute } \mu \in \mathfrak{E}_E.$$

¹ Il est intéressant d'observer que cette propriété, déjà connue dans le cas newtonien (cf. [8], p. 99 ; l'hypothèse que les mesures sont d'énergie finie n'est alors pas nécessaire), se trouve démontrée indépendamment de tout principe du maximum.

La remarque du texte m'a été signalée par M. H. Cartan, qui a bien voulu me communiquer également le théorème suivant : Si T' est la projection de T sur la variété linéaire \mathfrak{B}_E des distributions d'énergie finie dont le support est contenu dans un ensemble fermé E , on a $U^T = U^{T'}$ quasi-partout sur E .

² Rappelons que les fonctions U^λ et U^μ sont définies seulement quasi-partout et qu'un ensemble de capacité extérieure nulle est de λ -mesure nulle.

³ Cf. O. FROSTMAN [13].

La relation (7) exprime que λ' est la projection de λ sur la variété linéaire \mathfrak{A}_E engendrée par \mathfrak{E}_E . En effet, si S est une distribution de \mathfrak{A}_E , c'est par définition une limite forte de mesures μ de la forme $\mu = \mu_1 - \mu_2 + i(\mu_3 - \mu_4)$, où μ_k ($k = 1, 2, 3, 4$) est une mesure positive d'énergie finie; d'où, en vertu de la continuité du produit scalaire :

$$(9) \quad (\lambda, S) = (\lambda', S) \text{ pour toute } S \in \mathfrak{A}_E.$$

On montre de même que la relation (8) entraîne pour un compact E :

$$(10) \quad (\gamma, S) = S(1) \text{ pour toute } S \in \mathfrak{A}_E.$$

Ces remarques permettent d'établir les théorèmes suivants.

Théorème 2. *Le principe du maximum entraîne l'identité des variétés \mathfrak{A}_E et \mathfrak{B}_E pour tout ensemble fermé E ; autrement dit toute distribution T d'énergie finie dont le support appartient à un ensemble fermé E est limite forte de combinaisons linéaires de mesures positives d'énergie finie portées par E .*

Montrons d'abord que si λ est une mesure positive d'énergie finie, sa balayée λ' sur un ensemble fermé E est identique à sa projection sur la variété linéaire \mathfrak{B}_E des distributions d'énergie finie dont le support est contenu dans E .

Soit en effet T une distribution de \mathfrak{B}_E ; considérons les distributions régularisées $T_n = T * h_n$ introduites au chapitre I, § 4; T_n est une fonction indéfiniment dérivable, nulle hors de l'ensemble fermé E_n réunion des boules de rayon $1/n$ centrées sur E ; elle est donc combinaison linéaire de fonctions positives indéfiniment dérivables, nulles hors de l'ensemble fermé E'_n , réunion des boules de rayon $2/n$ centrées sur E ; on a donc : $T_n \in \mathfrak{A}_{E'_n}$, et si λ_n est la balayée de λ sur E'_n la relation (9) permet d'écrire :

$$(\lambda_n, T_n) = (\lambda, T_n).$$

Or on sait que T_n converge fortement vers T . D'autre part λ_n converge fortement vers λ' , en vertu d'un théorème relatif au balayage d'une mesure positive sur une suite d'ensembles fermés décroissants.¹ La relation précédente donne donc par passage à la limite (en vertu de la continuité du produit scalaire) :

$$(\lambda', T) = (\lambda, T)$$

et ceci ayant lieu pour toute $T \in \mathfrak{B}_E$, il en résulte que λ' est la projection de λ sur \mathfrak{B}_E .

Le théorème 2 s'en déduit aisément. Soit en effet $T \in \mathfrak{B}_E$. D'après le théorème 3 du chapitre I, T est limite forte de mesures de la forme $\lambda = \lambda_1 - \lambda_2 + i(\lambda_3 - \lambda_4)$, où

¹ H. CARTAN [9], p. 240.

$\lambda_k (k = 1, 2, 3, 4)$ est une mesure positive d'énergie finie. Or $\lambda' = \lambda'_1 - \lambda'_2 + i(\lambda'_3 - \lambda'_4)$, où λ'_k est la balayée de λ_k , est, d'après ce qui précède, la projection de λ sur \mathfrak{B}_E . On a donc $\|T - \lambda'\| \leq \|T - \lambda\|$, ce qui montre que λ' , qui est portée par E , converge fortement vers T .

Remarque. Il résulte en particulier du théorème 2 que lorsque le principe du maximum s'applique, toute distribution de \mathfrak{B}_E est limite (au sens des distributions) de mesures portées par E . Or ceci n'est évidemment pas vrai pour toute distribution dont le support est porté par E . Si, par exemple dans R^1 , E est réduit au seul point O , la distribution $d\varepsilon/dx$ n'est pas limite des mesures portées par E . Or cette distribution est d'énergie finie par rapport à tout noyau $K = K(x)$ admettant une dérivée continue du second ordre, l'énergie étant alors $-K''(0)$.¹ Il en résulte qu'un tel noyau ne saurait vérifier le principe du maximum.

Théorème 3. *Le principe restreint du maximum entraîne l'identité de la distribution capacitaire et de la distribution d'équilibre d'un compact quelconque E , et en particulier l'égalité de la capacité et de la mesure spectrale de E .*

La démonstration est analogue à celle du théorème 2. Soit $T \in \mathfrak{B}_E$; considérons la distribution régularisée $T_n = T * h_n$, qui appartient à $\mathfrak{A}_{E'_n}$, où E'_n est le compact réunion des boules de rayon $2/n$ centrées sur E . Soit γ_n la distribution capacitaire de E'_n ; on peut écrire, d'après (10):

$$(\gamma_n, T_n) = T_n(1).$$

Or γ_n tend fortement vers γ , distribution capacitaire de E ; T_n tend fortement vers T , et comme elle appartient à un compact fixe, $T_n(1)$ tend vers $T(1)$. La continuité du produit scalaire donne alors:

$$(\gamma, T) = T(1) \text{ pour toute } T \in \mathfrak{B}_E$$

Ce qui est bien la relation caractéristique de la distribution d'équilibre Γ (cf. chapitre I, § 5).

Le fait que la distribution d'équilibre soit une mesure positive est donc une condition nécessaire pour la validité du principe restreint.

4. *Sur un théorème de A. Beurling.* Les théorèmes 2 et 3 ont été énoncés par A. BEURLING [3] dans le cas particulier où le noyau K est la fonction (définie sur

¹ La fonction $K(x)$ étant du type positif, elle admet un maximum à l'origine; la quantité $-K''(0)$ est donc positive ou nulle.

R^1) qui est la transformée de Fourier de la fonction $\mathfrak{R}(x) = (1+|x|)^{-\alpha}$ ($0 < \alpha \leq 1$). Rappelons à ce sujet un problème d'Analyse harmonique posé par cet auteur :

A une classe très générale de fonctions $f(x)$ définie sur R^1 , on associe, au moyen d'une « transformation harmonique, » un spectre qui est un ensemble fermé¹; le problème de la représentation spectrale est le suivant : $f(x)$ décrivant un espace de Banach \mathfrak{B} , muni d'une norme $\|f\|$, et E étant un ensemble fermé donné, toute fonction f de \mathfrak{B} , dont le spectre appartient à E peut-elle être approchée autant qu'on veut au sens de la norme par une fonction dont la transformée de Fourier est une mesure portée par E ? Le problème est étudié et résolu par l'affirmative dans le cas où \mathfrak{B} est l'espace (hilbertien) des fonctions de carré sommable par rapport à la mesure de densité $(1+|x|)^{-\alpha}$ ($0 < \alpha \leq 1$), avec la norme $\|f\| = \left(\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|^2 (1+|x|)^{-\alpha} dx \right)^{1/2}$.

Si l'on prend pour définition du spectre d'une fonction $f(M)$ (définie sur R^p) le support de la distribution T dont f est la transformée de Fourier au sens de L. Schwartz (dans le cas où celle-ci existe) on voit aisément que le théorème 2 résout par l'affirmative le problème de la représentation spectrale des fonctions $f(M)$ de carré sommable par rapport à la mesure positive de densité \mathfrak{R} lorsque celle-ci est la transformée de Fourier d'une mesure positive K satisfaisant au principe du maximum. Les fonctions $f(M)$ jouent le rôle des \mathfrak{T} , transformées de Fourier des distributions T d'énergie finie par rapport au noyau K .

La notion de mesure spectrale a été introduite par A. Beurling dans le cas du noyau $\mathfrak{R} = (1+|x|)^{-\alpha}$. L'auteur démontre alors l'identité entre la mesure spectrale et la capacité. Notre théorème 3 met en évidence un cas très général pour lequel le résultat est encore vrai.

Les considérations précédentes montrent l'intérêt qu'il y aurait à caractériser les noyaux positifs satisfaisant au principe du maximum, ou tout au moins à trouver un système de conditions suffisantes assez étendues. Les résultats obtenus dans ce sens sont peu nombreux. Nous n'aborderons pas ici ce problème, qui semble assez délicat. Nous nous bornerons à signaler un énoncé équivalent du principe (théorème 4), qui aura l'avantage de se présenter sous une forme plus symétrique et mieux appropriée à l'extension éventuelle au cas de mesures positives qui ne sont pas nécessairement d'énergie finie.

Pour y parvenir, nous allons faire une courte étude préliminaire.

¹ La transformée harmonique d'une fonction $f(x)$ telle que $f(x)e^{-\sigma|x|}$ soit sommable pour tout $\sigma > 0$ est la fonction $U_j(\sigma, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{-itx-\sigma|x|} dx$, c'est-à-dire la transformée de Fourier de $f(x)e^{-\sigma|x|}$. Le spectre de f est l'ensemble des nombres réels a tels que $\lim_{\sigma \rightarrow 0} \int_{a-\varepsilon}^{a+\varepsilon} |U_j(\sigma, t)| dt > 0$ pour tout $\varepsilon > 0$.

5. *Fonctions continues surharmoniques par rapport au noyau K .* K est toujours supposé positif et vérifiant l'hypothèse (A). Soient E un compact, \mathfrak{E}_E l'ensemble (convexe et fermé) des mesures positives d'énergie finie portées par E . Si f est une fonction réelle continue non négative dans R^p , il existe une mesure μ de \mathfrak{E}_E et une seule qui minimise l'intégrale de Gauss :

$$I(\mu) = \|\mu\|^2 - 2 \int f d\mu.$$

Il suffit d'observer que les hypothèses faites sur E et f entraînent que $I(\mu)$ est bornée inférieurement.¹

Cette mesure minimisante $\mu_f^E = \mu_f$ possède les propriétés suivantes, qui sont caractéristiques :

$$(11) \quad \begin{aligned} (\mu_f, \mu) &\geq \int f d\mu \text{ pour toute } \mu \in \mathfrak{E}_E, \\ \|\mu_f\|^2 &= \int f d\mu_f. \end{aligned}$$

Ces relations se réduisent aux relations (2) pour $f \equiv 1$; μ_f est alors la distribution capacitaire de E . Des relations (11) on déduit aisément :²

$$(12) \quad U^{\mu_f} \geq f \text{ à peu près partout sur } E^3$$

$$(13) \quad U^{\mu_f} = f \text{ presque partout-}\mu_f.^4$$

Ceci posé la fonction f sera dite *K-surharmonique* (ou simplement *surharmonique*) si on a la relation :

$$U^{\mu_f^E} \leq f \text{ quasi-partout dans } R^p,$$

et ceci quel que soit le compact E .⁵

¹ La démonstration est alors identique à celle donnée dans [7] pour l'existence de la distribution capacitaire d'un compact, à laquelle μ_f se réduit pour $f \equiv 1$.

² Comme dans [8], p. 92.

³ Rappelons que si μ est une mesure positive d'énergie finie, U^μ désigne l'une quelconque des fonctions de la classe $\Phi(\mu)$ associée à μ , comme il a été montré dans le théorème 1. Rappelons également que « à peu près partout » signifie « sauf sur un ensemble de capacité intérieure nulle. »

⁴ C'est-à-dire « sauf sur un ensemble de mesure nulle par rapport à μ_f . »

⁵ Cette définition est inspirée de celle de M. Riesz et O. Frostman (cf. notamment O. FROSTMAN [14]). La définition de ces auteurs suppose au préalable qu'on sache effectuer le balayage (en un sens convenable) de la mesure ε_M (masse +1 placée au point M), problème qu'on sait résoudre dans le cas newtonien et plus généralement dans le cas des potentiels d'ordre α , avec $0 < \alpha \leq 2$ si $p > 2$, $0 < \alpha < p$ si $p \leq 2$. Une fonction f positive et semi-continue inférieurement est dite surharmonique si elle est partout au moins égale à son prolongement $F(M) = \int f(P) d\varepsilon'_M(P)$ (voir à ce propos le chapitre I, § 7). Il semble malaisé de définir ε'_M dans le cas général (à moins toutefois que le noyau K ne soit continu à l'origine. ε_M est alors d'énergie finie).

Pour une telle fonction f , la relation (12) entraîne aussitôt :

$$(14) \quad U^{\mu_f^E} = f \text{ à peu près partout sur } E.$$

Cette notion ne présente d'intérêt que dans le cas où le noyau satisfait au principe du maximum. On a alors les résultats suivants :

a. *Tout potentiel continu engendré par une mesure positive μ d'énergie finie est surharmonique.* En effet si on pose $f = U^\mu$, μ_f^E n'est autre que la balayée μ' de μ sur E , et on a : $U^{\mu'} \leq U^\mu$ quasi-partout d'après le principe du maximum (l'égalité ayant lieu presque partout- μ').

b. *Toute fonction surharmonique continue non négative majorée par le potentiel d'une mesure positive d'énergie finie est un potentiel de cette nature.* En effet soit f une telle fonction ; posons $\mu_f^{B_n} = \mu_n$, où B_n est la boule fermée $B(O, n)$. D'après (14) on a $U^{\mu_n} = f$ à peu près partout sur B_n . Or $\{U^{\mu_n}\}$ est une suite croissante (quasi-partout) d'après le principe du maximum, car $U^{\mu_n} = U^{\mu_{n+k}} (= f)$ à peu près partout sur B_n pour tout $k \geq 0$. Par hypothèse $\|\mu_n\|$ est bornée uniformément, donc μ_n converge fortement vers une certaine mesure μ et on a : $\lim U^{\mu_n} = U^\mu$ quasi-partout (remarque finale du § 2). D'où $f = U^\mu$ à peu près partout, et même quasi-partout puisque f est continue.

c. *La borne inférieure de deux fonctions surharmoniques non négatives continues est surharmonique.*

Soient en effet f et g deux telles fonctions ; $h = \inf(f, g)$ est continue et non négative. Si E est un compact quelconque, la mesure $\mu_h^E = \mu_h$ associée à h et E est, d'après (13), telle que $U^{\mu_h} = h$ sauf sur un ensemble de mesure nulle par rapport à μ_h .

Sauf sur un tel ensemble on a donc, d'après (14) :

$$U^{\mu_h} \leq f = U^{\mu_f} \quad , \quad U^{\mu_h} \leq g = U^{\mu_g}.$$

Le principe du maximum entraîne que ces inégalités ont lieu quasi-partout. D'où :

$$U^{\mu_h} \leq \inf(U^{\mu_f}, U^{\mu_g}) \leq \inf(f, g) = h$$

quasi-partout, ce qui établit la propriété c.

Remarque. Si K vérifie le principe restreint du maximum, toute constante positive est surharmonique. En effet si f est la constante 1, μ_f n'est autre que la mesure capacitaire γ de E , et le principe restreint du maximum entraîne $U^\gamma \leq 1$ quasi-partout.

6. Autre forme du principe du maximum.

Théorème 4: *Pour qu'un noyau positif K satisfasse au principe du maximum il faut et il suffit qu'on ait, pour tout couple de mesures positives λ et μ d'énergie finie :*

$$(15) \quad \inf (K*\lambda, K*\mu) = K*\nu$$

où ν est une mesure positive (nécessairement d'énergie finie).

La suffisance de la relation (15) a été démontrée par H. Cartan ([7]), lorsque le noyau K est semi-continu inférieurement. Dans le cas newtonien cette relation (15) exprime une propriété bien connue des fonctions surharmoniques ordinaires, classique depuis F. Riesz ; cela permet d'établir que le noyau newtonien satisfait au principe du maximum.¹

La relation (15) fait intervenir seulement des mesures telles que $K*\mu$, c'est-à-dire des classes de fonctions localement sommables définies presque partout, et non les fonctions U^μ des classes plus restreintes $\Phi(\mu)$.

La démonstration du théorème 4 résultera aisément des lemmes suivants :

Lemme 1: Si K est un noyau positif vérifiant soit le principe du maximum soit la relation (15) pour tout couple λ et μ , et si U^ν et U^μ sont deux potentiels continus engendrés par des mesures positives d'énergie finie, la fonction continue $U = \inf (U^\lambda, U^\mu)$ est un potentiel de cette nature.

Si en effet K vérifie le principe du maximum, les fonctions U^λ et U^μ sont surharmoniques (§ 5, a), donc U est surharmonique (§ 5, c) et c'est même le potentiel d'une mesure positive d'énergie finie (§ 5, b).

Si K vérifie la relation (15), la mesure de densité U coïncide avec la mesure $K*\nu$. On a donc $U^\nu = U$ presque partout, et l'égalité a même lieu quasi-partout puisque U est continue.

Lemme 2: Soit K un noyau positif vérifiant l'une quelconque des deux hypothèses envisagées dans l'énoncé du lemme 1. Si $\{U^{\alpha_n}\}$ est une suite de potentiels continus engendrés par des mesures positives α_n avec $\|\alpha_n\| \leq A < \infty$, il existe une mesure positive α_n d'énergie finie telle que l'on ait:

$$\lim \inf U^{\alpha_n} = U^\alpha \text{ quasi-partout.}$$

En effet on peut poser, d'après le lemme 1:

$$U^{\alpha_n, k} = \inf (U^{\alpha_n}, U^{\alpha_{n+1}}, \dots, U^{\alpha_{n+k}}).$$

¹ Cf. H. CARTAN [8] p. 87.

Lorsque k augmente indéfiniment, la suite $\{U^{\alpha_{n+k}}\}$ est décroissante ; il existe donc une mesure positive β_n d'énergie finie telle qu'on ait :

$$\lim_k U^{\alpha_{n,k}} = U^{\beta_n} \text{ quasi-partout}$$

(remarque finale du paragraphe 2). Ces U^{β_n} sont croissants (quasi-partout) et les $\|\beta_n\|$ sont bornées uniformément par A . Il en résulte que β_n converge fortement vers une certaine mesure positive α , et que U^{β_n} converge quasi-partout vers U^α . Mais on a d'autre part :

$$\liminf U^{\alpha_n} = \lim_n (\lim_k U^{\alpha_{n,k}}) = U^\alpha \text{ quasi-partout ;}$$

le lemme 2 est donc établi.

Démonstration de la suffisance. Supposons que la relation (15) ait lieu pour tout couple λ et μ ; soient U^λ, U^μ, U^ν des fonctions particulières de classes $\Phi(\lambda), \Phi(\mu), \Phi(\nu)$. Posons :

$$U = \inf (U^\lambda, U^\mu).$$

On va montrer que la relation $U = U^\nu$, qui a évidemment lieu presque partout, est vérifiée quasi-partout.

Ce point a été établi lorsque U^λ et U^μ sont continus (lemme 1). Dans le cas général, il suffit de considérer une suite de mesures régularisantes h_n telles que, si on pose $\lambda_n = \lambda * h_n, \mu_n = \mu * h_n$, les fonctions continues U^{λ_n} et U^{μ_n} convergent quasi-partout vers U^λ et U^μ .

Soit alors $U^{\nu_n} = \inf (U^{\lambda_n}, U^{\mu_n})$. Il est clair que le potentiel continu U^{ν_n} converge quasi-partout vers U . On a d'autre part : $\|\nu_n\| \leq \|\lambda_n\|$, quantité uniformément bornée. Le lemme 2 entraîne alors l'existence d'une mesure positive ν telle qu'on ait :

$$U^\nu = \liminf U^{\nu_n} = U \text{ quasi-partout.}$$

Ceci fait, la démonstration de H. Cartan¹ s'applique sans modification : Soient λ et μ deux mesures positives d'énergie finie, avec $U^\lambda \leq U^\mu$ sauf sur un ensemble de (mesure nulle par rapport à λ). La remarque précédente permet de poser : $U^\nu = \inf (U^\lambda, U^\mu)$ et on a, d'après le théorème 1. c :

$$\|\lambda - \nu\|^2 = \|\lambda\|^2 + \|\nu\|^2 - 2 \int U^\nu d\lambda = \|\nu\|^2 - \|\lambda\|^2 \leq 0$$

d'où : $\|\lambda - \nu\| = 0$, ce qui entraîne $\nu = \lambda$. On a donc quasi-partout :

$$U^\lambda = U^\nu \leq U^\mu.$$

¹ [7], § VI.

Démonstration de la nécessité. Soit K un noyau satisfaisant au principe du maximum. Si λ et μ sont deux mesures positives d'énergie finie, il s'agit d'établir l'existence d'une mesure positive ν satisfaisant à (15).

Ceci a été établi lorsque les potentiels U^λ et U^μ sont continus (lemme 1). Dans le cas général il suffit de considérer des mesures régularisées λ_n et μ_n telles que les potentiels continus U^{λ_n} et U^{μ_n} convergent quasi-partout vers deux fonctions U^λ et U^μ des classes $\Phi(\lambda)$ et $\Phi(\mu)$. On pose alors $U^{\nu_n} = \inf(U^{\lambda_n}, U^{\mu_n})$; cette fonction converge quasi-partout vers $U = \inf(U^\lambda, U^\mu)$; le lemme 2 montre donc l'existence d'une mesure positive ν d'énergie finie telle qu'on ait $U = U^\nu$ quasi-partout, d'où l'on déduit la relation (15).

Remarques. a. On a démontré incidemment que le lemme 1 est encore vrai si les potentiels considérés ne sont pas continus. Il en est donc de même du lemme 2, et on peut énoncer :

Soit K un noyau positif satisfaisant au principe du maximum. Si $\{\mu_n\}$ est une suite de mesures positives d'énergie uniformément bornée, il existe une mesure positive μ d'énergie finie telle qu'on ait :

$$\liminf U^{\mu_n} = U^\mu \quad \text{quasi-partout.}$$

C'est, dans le cas newtonien, un théorème bien connu de M. Brelot et H. Cartan.¹

b. On peut établir que si un noyau positif K est tel que, pour toute mesure positive λ d'énergie finie, on a la relation :

$$(16) \quad \inf(K*\lambda, 1) = K*\nu,$$

où ν est une mesure positive d'énergie finie, K vérifie le principe restreint du maximum².

Inversement il est facile de voir que le principe restreint, joint au principe du maximum, entraîne la relation (16) pour toute mesure positive λ d'énergie finie. Il suffit d'utiliser le fait que toute constante positive est alors surharmonique.

¹ M. BRELOT C. R. 207, 1938, p. 836. H. CARTAN [8], p. 103.

² Posons à cet effet $U = \inf(U^\lambda, 1)$, où $U^\lambda \in \Phi(\lambda)$. Il suffit de montrer que la relation $U = U^\nu$, qui a lieu presque partout d'après (16), est vérifiée à peu près partout.

C'est évident si U^λ est continu. Sinon on considère les potentiels continus U^{λ_n} obtenus par régularisation, et on pose $U^{\nu_n} = \inf(U^{\lambda_n}, 1)$. On a : $\|\nu_n\| \leq \|\lambda_n\|$, quantité uniformément bornée. D'autre part, pour toute mesure positive α d'énergie finie et à support compact la quantité $(\nu_n, \alpha) = \int U^{\nu_n} dx$ tend vers $\int U dx$ (car U^{ν_n} est uniformément bornée par la constante 1, qui est α -sommable, et converge vers U presque partout- x). ν_n converge donc faiblement vers une certaine mesure ν , et on a $U^\nu = U$ à peu près partout, puisqu'on a : $\int U^\nu dx = \int U dx$ pour toute mesure α du type considéré.

On achève alors comme pour la démonstration du théorème 4 (suffisance).

CHAPITRE III.

Potentiels d'ordre α .

1. Sur la formule de composition de M. Riesz.

La formule de M. Riesz rappelée dans l'introduction, peut s'écrire :

$$(1) \quad r^{\alpha-p} * r^{\beta-p} = k_{\alpha, \beta} r^{\alpha+\beta-p}$$

avec

$$k_{\alpha, \beta} = \pi^{\frac{p}{2}} \frac{\Gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right) \Gamma\left(\frac{\beta}{2}\right) \Gamma\left(\frac{p-\alpha-\beta}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{p-\alpha}{2}\right) \Gamma\left(\frac{p-\beta}{2}\right) \Gamma\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)}.$$

Elle est valable quel que soit le nombre p de dimensions de l'espace euclidien R^p ($p \geq 1$), pour $0 < \alpha < p$, $0 < \beta < p$, $0 < \alpha + \beta < p$.

On en déduit aisément, comme le fait observer L. Schwartz ([18]) l'expression de la transformée de Fourier du noyau $r^{\alpha-p}$:

$$(2) \quad \mathfrak{F}(r^{\alpha-p}) = C_{\alpha} r^{-\alpha} \quad \text{avec} \quad C_{\alpha} = \pi^{\frac{p}{2}-\alpha} \frac{\Gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{p-\alpha}{2}\right)}$$

($0 < \alpha < p$).

On peut d'ailleurs établir directement la relation (2), et en déduire inversement la valeur du coefficient de M. Riesz. De simples considérations d'homogénéité montrent en effet que la transformée de Fourier de $r^{\alpha-p}$ est de la forme $C_{\alpha} r^{-\alpha}$. Pour déterminer C_{α} , il suffit d'observer que la fonction $e^{-\pi r^2}$ est sa propre transformée de Fourier et d'appliquer la formule de Parseval. Il vient :

$$\int e^{-\pi r^2} r^{\alpha-p} d\tau = C_{\alpha} \int e^{-\pi r^2} r^{-\alpha} d\tau$$

d'où

$$\int_0^{\infty} e^{-\pi r^2} r^{\alpha-1} dr = C_{\alpha} \int_0^{\infty} e^{-\pi r^2} r^{p-\alpha-1} dr.$$

Posant alors $\pi r^2 = t$, il vient :

$$\pi^{-\alpha/2} \int_0^{\infty} e^{-t} t^{\alpha/2-1} dt = C_{\alpha} \pi^{\frac{\alpha-p}{2}} \int_0^{\infty} e^{-t} t^{\frac{p-\alpha}{2}-1} dt$$

d'où la valeur déjà donnée du coefficient C_{α} .

Pour en déduire le coefficient $k_{\alpha, \beta}$, il suffit de considérer la transformée de Fourier du produit de composition $r^{\alpha-p} * r^{\beta-p}$; cette transformée est un produit ordinaire:

$$\mathfrak{F}(r^{\alpha-p} * r^{\beta-p}) = C_{\alpha} C_{\beta} r^{-(\alpha+\beta)} = \frac{C_{\alpha} C_{\beta}}{C_{\alpha+\beta}} \mathfrak{F}(r^{\alpha+\beta-p})$$

d'où finalement:

$$k_{\alpha, \beta} = \frac{C_{\alpha} C_{\beta}}{C_{\alpha+\beta}} \text{ ce qui est bien la valeur (1).}$$

2. *Potentiels d'ordre α d'énergie finie.* Comme au chapitre I, nous envisagerons non seulement des mesures, mais des distributions T qui sont d'énergie finie pour le noyau $r^{\alpha-p}$ ($0 < \alpha < p$), c'est-à-dire dont la transformée de Fourier \mathfrak{T} est de carré sommable par rapport à la mesure de densité $r^{-\alpha}$. L'énergie correspondante sera :

$$(3) \quad \|T\|_{\alpha}^2 = C_{\alpha} \int \frac{|\mathfrak{T}|^2}{r^{\alpha}} d\tau.$$

Les fonctions \mathfrak{S} et \mathfrak{L} définies au chapitre I (§ 2) sont ici :

$$\mathfrak{S}_{\alpha} = \sqrt{C_{\alpha}} r^{-\alpha/2} \quad \mathfrak{L}_{\alpha} = \frac{1}{\sqrt{C_{\alpha}}} r^{\alpha/2}.$$

\mathfrak{S}_{α} est, d'après (2), la transformée de Fourier de la fonction

$$H_{\alpha} = \sqrt{C_{\alpha}} C_{p-\alpha/2} r^{\alpha/2-p}.$$

Il résulte donc de la formule (9) du chapitre I que l'expression générale des potentiels d'ordre α d'énergie finie est :

$$U_{\alpha}^T = H_{\alpha} * S = \sqrt{C_{\alpha}} C_{p-\alpha/2} U_{\alpha/2}^S$$

où F est une fonction quelconque de carré sommable. L'énergie correspondante n'est autre que $\int |S|^2 d\tau$. Ces potentiels sont donc des fonctions sommables sur tout compact, définies presque partout. Le théorème 1 du chapitre II donne d'ailleurs un résultat plus précis, et permet de définir U_{α}^T sauf sur un ensemble de capacité extérieure (d'ordre α) nulle.

La distribution L_{α} dont \mathfrak{L}_{α} est la transformée de Fourier peut s'exprimer, ainsi que L. Schwartz l'a fait observer¹ à l'aide des *parties finies d'intégrales*, notion

¹ L. SCHWARTZ [18]. La formule (2) est valable quel que soit le nombre réel α pourvu que α et $p-\alpha$ soient différents d'un entier négatif pair, mais à condition de remplacer éventuellement les fonctions $r^{\alpha-p}$ et $r^{-\alpha}$ par les « pseudo-fonctions » $\overline{r^{\alpha-p}}$, $\overline{r^{-\alpha}}$. Pour $\alpha > p$, $\alpha \neq p-2k$ (k entier > 0) on désigne par $\overline{r^{-\alpha}}$ la distribution définie par $\overline{r^{-\alpha}}(\varphi) = \int \overline{\varphi r^{-\alpha}} d\tau$, partie finie de l'intégrale $\int \varphi r^{-\alpha} d\tau$. Pour la définition et les

introduite par J. Hadamard. La formule (8) du chapitre I donne alors l'expression générale des distributions T d'énergie finie par rapport au noyau $r^{\alpha-p}$. Observons également que ces distributions sont caractérisées par le fait que $U_{\alpha/2}^T$ est de carré sommable. Cette remarque, souvent utilisée dans le cas d'une mesure,¹ est une conséquence de l'expression (3) d'où l'on tire, compte tenu de (2) et du théorème de Plancherel :

$$\|T\|_{\alpha}^2 = \frac{C_{\alpha}}{(C_{\alpha/2})^2} \int |U_{\alpha/2}^T|^2 d\tau.$$

Enfin le noyau $r^{\alpha-p}$ est une distribution inversible par rapport au produit de composition, c'est-à-dire qu'il existe une distribution D_{α} telle que $D_{\alpha} * r^{\alpha-p} = \varepsilon$. Dans le cas newtonien ($\alpha = 2, p \geq 3$), ce résultat n'est autre qu'une élégante formulation du théorème de Poisson donnée par L. Schwartz :

$$(4) \quad \Delta * r^{2-p} = -(p-2)s_p \varepsilon,$$

où s_p est la surface de la sphère-unité et $\Delta = \Delta \varepsilon$ la « distribution-Laplacien ».

D_{α} prend également une forme très simple dans le cas des potentiels polyharmoniques ($\alpha = 2k, p \geq 2k+1, k$ entier > 0)². La transformée de Fourier de D_{2k} est r^{2k}/C_{2k} , d'où $D_{2k} = \Delta_k / (-4\pi^2)^k C_{2k}$ où Δ_k est le Laplacien itéré k fois. Tenant compte de la valeur de C_{2k} donnée par (2), et de celle de $s_p = 2\pi^{p/2}/\Gamma(p/2)$, il vient facilement

$$(5) \quad D_{2k} = \frac{(-1)^k}{a_k} \Delta_k,$$

avec

$$a_k = 2^{k-1}(k-1)!(p-2)(p-4)\dots(p-2k)s_p$$

d'où la généralisation de (4) :

$$(5\text{bis}) \quad \Delta_k * r^{2k-p} = (-1)^k a_k \varepsilon.$$

Bien entendu cette relation peut s'établir sans faire usage de la transformation de Fourier.

propriétés de ces parties finies d'intégrales, voir J. HADAMARD, Le problème de Cauchy et les équations aux dérivées partielles linéaires hyperboliques (Paris, 1932, p. 184—217).

Dans le cas qui nous occupe à présent ($0 < \alpha < p$), on a donc : $L = \frac{C_{\frac{\alpha}{2}+p}}{\sqrt{C_{\alpha}}} \sqrt{\frac{1}{r^{p+\frac{\alpha}{2}}}}$.

¹ M. RIESZ [17], O. FROSTMAN [13], H. CARTAN [7].

² Dans le cas général, $\alpha \neq 2k$, on a : $D_{\alpha} = C_{\alpha+p} \sqrt{r^{-(\alpha+p)}}$. Cette distribution (ainsi que L_{α}) possède des propriétés analogues à celles de la distribution « dérivée d'ordre fractionnaire. » Ce dernier point de vue est développé, au langage près, par M. RIESZ [17].

3. *Etude du cas newtonien ; extension d'un théorème de G. C. Evans.*

Le cas newtonien correspond à $\alpha = 2$; nous supposons donc le nombre de dimensions p au moins égal à 3. Le cas du potentiel logarithmique dans le plan sera étudié au § 5.

Si U^T est un potentiel newtonien d'énergie finie, la dérivée partielle $\frac{\partial}{\partial x_j} U^T$, définie pour l'instant comme une distribution, est une *fonction de carré sommable*. En effet, si on désigne d'une façon générale par $\mathfrak{F}(A)$ la transformée de Fourier d'une distribution A , on a, en vertu des relations rappelées au début du § 2 :

$$\mathfrak{F}\left(\frac{\partial}{\partial x_j} * U^T\right) = 2i\pi x_j \mathfrak{F}(U^T) = 2i\pi x_j \mathfrak{F}\mathfrak{S} = 2i\pi \sqrt{C_2} \frac{x_j}{r} \mathfrak{S},$$

où \mathfrak{S} est une fonction de carré sommable¹ ; le résultat est donc une conséquence immédiate du théorème de Plancherel (car $|x_j/r| \leq 1$) ; ce théorème donne de plus :

$$\int \left| \frac{\partial}{\partial x_j} U^T \right|^2 d\tau = 4\pi^2 C_2 \int \frac{x_j^2}{r^2} |\mathfrak{S}|^2 d\tau.$$

Ajoutant les relations analogues pour $j = 1, 2, \dots, p$, et tenant compte de ce que l'énergie de T est $\int |\mathfrak{S}|^2 d\tau$, il vient :

$$\|T\|^2 = \frac{1}{4\pi^2 C_2} \sum_{j=1}^p \int \left| \frac{\partial}{\partial x_j} U^T \right|^2 d\tau.$$

Désignons par $\overrightarrow{\text{grad}} U^T$ le vecteur dont les composantes sont les fonctions de carré sommable $\frac{\partial}{\partial x_j} U^T$; le coefficient C_2 est donné par (2), et peut d'ailleurs se déduire très facilement de (4). Il vient finalement :

$$(6) \quad \|T\|^2 = \frac{1}{(p-2)s_p} \int |\overrightarrow{\text{grad}} U^T|^2 d\tau,$$

où s_p est l'aire de la sphère unité.

Les dérivées partielles $\frac{\partial}{\partial x_j} U^T$ (au sens des distributions) de la fonction U^T étant des fonctions sommables sur tout compact, il en résulte facilement que U^T est presque partout égale à une fonction F absolument continue en x_j sur presque toute parallèle à Ox_j et dont la dérivée partielle (au sens ordinaire) $\partial F / \partial x_j$ est presque

¹ $\frac{\partial}{\partial x_j} U^T$ peut être considéré comme le produit de composition de U^T par la distribution $\partial / \partial x_j$, qui a pour transformée de Fourier $2i\pi x_j$ (cf. le chapitre de préliminaires).

partout égale à $\frac{\partial}{\partial x_j} U^T$ ($j = 1, 2, \dots, p$). D'autre part le procédé de régularisation du chapitre II (§ 2) permet de définir une fonction U presque partout égale à U^T , donc à F , et dont la restriction au complémentaire d'un ouvert de capacité aussi faible qu'on veut est continue. La projection de cet ouvert sur un des hyperplans de coordonnées est de capacité¹, et par suite de mesure $(p-1)$ -dimensionnelle arbitrairement petite. U est donc continue sur presque toute parallèle à Ox_j ($j = 1, 2, \dots, p$) donc égale à F sur presque toutes ces droites.

Désignant alors par U^T une fonction telle que U , c'est-à-dire l'une quelconque des fonctions de la classe $\Phi(T)$ associée à T (chap. II, § 2), on voit qu'on peut énoncer, en se reportant à la définition des fonctions de la classe (BL) rappelée dans l'introduction :

Théorème : *Tout potentiel newtonien d'énergie finie U^T est une fonction de la classe (BL) dans tout l'espace. L'énergie correspondante est :*

$$\|T\|^2 = \frac{1}{(p-2)s_p} \int \overrightarrow{|\text{grad } U^T|^2} d\tau.$$

Le produit scalaire de deux distributions T_1, T_2 d'énergie finie s'exprime à l'aide du produit scalaire des vecteurs gradients :

$$(T_1, T_2) = \frac{1}{(p-2)s_p} \int (\overrightarrow{\text{grad } U^{T_1}} \times \overrightarrow{\text{grad } U^{T_2}}) d\tau.$$

Comme nous l'avons rappelé dans l'introduction, ces résultats ont été donnés par G. C. EVANS [12] dans le cas des mesures positives d'énergie finie dans R^3 ; les potentiels correspondants sont alors des fonctions positives définies partout, et le coefficient $(p-2)s_p$ est égal à 4π .

Théorème : *Réciproquement toute fonction de la classe (BL) dans tout l'espace est, à une constante additive près, un potentiel newtonien d'énergie finie.*

Soit en effet F une telle fonction; considérons la distribution $T = -\Delta F / (p-2)s_p$. Si on pose $f_j = \partial F / \partial x_j$, on a $\Delta F = \sum_{j=1}^p \frac{\partial}{\partial x_j} f_j$; la transformée de Fourier de ΔF est donc $2i\pi \sum_{j=1}^p x_j \mathfrak{F}(f_j)$; comme $\mathfrak{F}(f_j)$ est de carré sommable (théorème de Plancherel), l'expression précédente est de carré sommable par rapport à la mesure de densité $1/r^2$; la relation (3) montre que T est d'énergie finie.

¹ La capacité extérieure de la projection d'un ensemble A est inférieure ou égale à la capacité extérieure de A (cf. M. BRELOT [5]).

On a d'autre part, d'après (4) :

$$\Delta U^T = \Delta F .$$

La fonction F est donc égale à la distribution U^T augmentée d'une distribution, donc d'une fonction harmonique dont les dérivées du premier ordre sont de carré sommable ; or on sait qu'une telle fonction se réduit à une constante, d'où le résultat¹.

Remarque: Les fonctions F de la classe (BL) qui sont des potentiels d'énergie finie sont caractérisées par le fait que leur valeur moyenne sur les boules de centre O et de rayon R tend vers 0 lorsque R tend vers $+\infty$.

$$(7) \quad \lim_{R \rightarrow \infty} \frac{1}{v_R} \int_{B_R} F d\tau = 0 ,$$

où v_R est le volume de la boule B_R de centre O et de rayon R .

En effet, si h_R désigne la mesure constituée par la masse $+1$ répartie uniformément dans la boule B_R , on a, pour une distribution T d'énergie finie :

$$\frac{1}{v_R} \int_{B_R} U^T d\tau = \int U^T dh_R = \text{Sp. } U^T * h_R = (T, h_R) .$$

L'inégalité de Schwarz (chapitre I, relation (10)) donne alors :

$$\left| \frac{1}{v_R} \int_{B_R} U^T d\tau \right| \leq \|T\| \|h_R\| .$$

Or un calcul élémentaire donne pour l'énergie de h_R :

$$\|h_R\|^2 = \frac{2p}{(p+2)R^{p-2}}$$

donc $\|h_R\|$ tend vers 0 avec $1/R$, et il en est de même de la moyenne de U^T sur $B(O, R)$.

Inversement toute fonction F de la classe (BL) étant de la forme $F = U^T + C$, où U^T est un potentiel d'énergie finie et C une constante, il est évident que la condition (7) entraîne $C = 0$.

4. *Interprétation des potentiels newtoniens d'énergie finie comme potentiels magnétiques.*

¹ Ce résultat est d'ailleurs une conséquence évidente de la théorie des distributions : si en effet H a des dérivées du premier ordre qui sont de carré sommable, elle admet une transformée de Fourier ; elle se réduit donc à un polynôme harmonique [18] et par conséquent à une constante.

Nous appellerons *distribution magnétique* toute distribution qui est somme de dérivées du premier ordre de mesures de Radon :

$$T = - \sum_{j=1}^p \frac{\partial}{\partial x_j} \mu_j^1.$$

Le support d'une telle distribution n'est pas nécessairement la réunion des supports des mesures μ_j (il peut être contenu dans cette réunion). Lorsque T est à support compact, le potentiel newtonien $U^T = r^{2-p} * T$ est bien défini ; nous l'appellerons *potentiel magnétique*.

Si les mesures μ_j sont elles-mêmes à support compact, on peut écrire :

$$U^T = - \sum_{j=1}^p \frac{\partial}{\partial x_j} * \mu_j * r^{2-p} = (p-2) \sum_{j=1}^p \mu_j * \frac{x_j}{r^p}$$

$$U^T(M) = (p-2) \int \sum_{j=1}^p \frac{x_j - t_j}{MP^p} d\mu_j(P)$$

où x_1, x_2, \dots, x_p sont les coordonnées de M , t_1, t_2, \dots, t_p celles de P . U^T est donc une fonction (localement sommable) définie presque partout².

Lorsque les mesures μ_j sont des fonctions de densité A_j , on peut écrire :

$$(8) \quad U^T(M) = (p-2) \int \sum_{j=1}^p \frac{(x_j - t_j) A_j(P)}{MP^p} d\tau_P.$$

Le vecteur \vec{I} de coordonnées A_j est le vecteur *intensité d'aimantation*. La distribution correspondante est :

$$(9) \quad T = -\operatorname{div} \vec{I} = - \sum_{j=1}^p \frac{\partial}{\partial x_j} A_j.$$

Dans le cas classique (théorie élémentaire du magnétisme dans l'espace ordinaire R^3), on considère un domaine borné ω limité par un nombre fini de surfaces régulières S ; le vecteur \vec{I} est nul sur le complémentaire $C\omega$; ses composantes admettent dans ω

¹ Une « double couche » sur une surface est un exemple simple de distribution magnétique.

² On peut même préciser davantage : les quantités $|x_j - t_j|/MP^p$ étant majorées par MP^{1-p} , les intégrales correspondantes sont majorées par le potentiel d'ordre $\alpha = 1$: $(p-2)U_1^p$, où v_j est la mesure « variation totale de μ_j . » Cette remarque montre que U^T est définie sauf sur un ensemble de capacité d'ordre 1 (c'est-à-dire correspondant aux potentiels d'ordre $\alpha = 1$) nulle, les points de cet ensemble exceptionnel étant ceux où les potentiels d'ordre 1 engendrés par les variations positives et négatives d'une des mesures μ_j sont tous deux infinis (en supposant les μ_j réelles).

des dérivées partielles du premier ordre qui sont continues sur la fermeture $\bar{\omega}$. La formule de Green montre alors que le potentiel magnétique (8) est identique à la somme de deux potentiels, engendrés l'un par une distribution régulière de densité $-\operatorname{div} \vec{I}$ dans ω , l'autre par une simple couche portée par S , dont la densité superficielle est la composante normale de \vec{I} . Ce résultat est en accord avec la relation (9), dans laquelle il faut entendre la divergence au sens des distributions¹.

L'intégrale (8) peut encore avoir un sens pour presque tout point M lorsque \vec{I} n'est pas à support compact. Nous allons voir qu'il en est ainsi lorsque les composantes de \vec{I} sont de carré sommable. Nous emploierons encore le terme « potentiel magnétique ».

Théorème: *Toute distribution d'énergie finie (par rapport au noyau newtonien) est une distribution magnétique, définie par le vecteur intensité d'aimantation :*

$$(10) \quad \vec{I} = \frac{1}{(p-2)s_p} \overrightarrow{\operatorname{grad} U^T},$$

dont les composantes sont de carré sommable.

En effet la relation (4) permet d'écrire :

$$\begin{aligned} T &= -\frac{1}{(p-2)s_p} \Delta U^T \\ &= \frac{-1}{(p-2)s_p} \operatorname{div} (\overrightarrow{\operatorname{grad} U^T}). \end{aligned}$$

Le vecteur $\overrightarrow{\operatorname{grad} U^T}$ est de carré sommable (§ 3); il en est donc de même du vecteur \vec{I} défini par (10), et on a $T = -\operatorname{div} \vec{I}$; c'est la définition d'une distribution magnétique, dont \vec{I} est le vecteur intensité d'aimantation.

Théorème: *Toute distribution magnétique engendrée par un vecteur intensité d'aimantation \vec{I} de carré sommable est d'énergie finie:*

$$(11) \quad \|T\|^2 \leq (p-2)s_p \int |\vec{I}|^2 d\tau$$

l'égalité ayant lieu dans le seul cas où \vec{I} est un vecteur gradient.

¹ La couche superficielle provient de la discontinuité du vecteur \vec{I} à la frontière.

Soit en effet $T = -\operatorname{div} \vec{I} = -\sum_{j=1}^p \frac{\partial}{\partial x_j} A_j$ une telle distribution (les composantes A_j de \vec{I} sont de carré sommable). Elle admet pour transformée de Fourier la fonction $\mathfrak{F} = 2i\pi \sum_{j=1}^p x_j \mathfrak{F}(A_j)$; on a donc en vertu de (3) :

$$\|T\|^2 = 4\pi^2 C_2 \int \left| \sum_{j=1}^p \frac{x_j}{r} \mathfrak{F}(A_j) \right|^2 d\tau$$

ce qui s'écrit, en utilisant l'identité de Lagrange¹, et en remplaçant le coefficient $4\pi^2 C_2$ par sa valeur déjà calculée $(p-2)s_p$:

$$\|T\|^2 = (p-2)s_p \int \sum_{j=1}^p |\mathfrak{F}(A_j)|^2 d\tau - (p-2)s_p \int \frac{1}{r^2} \sum_{j,k} |x_j \mathfrak{F}(A_k) - x_k \mathfrak{F}(A_j)|^2 d\tau$$

d'où l'inégalité (11), en appliquant le théorème de Plancherel. L'égalité aura lieu seulement si les fonctions $x_j \mathfrak{F}(A_k) - x_k \mathfrak{F}(A_j)$ sont nulles presque partout, c'est-à-dire si l'on a, au sens des distributions : $\frac{\partial}{\partial x_j} A_k = \frac{\partial}{\partial x_k} A_j$ ce qui exprime que \vec{I} est un vecteur gradient ([18]).

Remarques: a). Les théorèmes précédents montrent qu'il y a identité entre la classe des potentiels magnétiques engendrés par un vecteur \vec{I} de carré sommable, et celle des potentiels newtoniens d'énergie finie. D'autre part toute distribution d'énergie finie est limite forte de combinaisons linéaires de mesures positives d'énergie finie (chapitre I, théorème 5). L'introduction des distributions magnétiques d'énergie finie résout donc le problème de complétion de l'espace constitué par les combinaisons linéaires de mesures positives d'énergie finie considéré par H. Cartan, et que l'auteur a démontré par un exemple n'être pas complet (voir l'introduction). La représentation à l'aide du potentiel magnétique nous donne de plus une interprétation physique simple des êtres introduits par complétion.

b). *Induction magnétique.* Nous appellerons ainsi les vecteurs :

$$\vec{B} = \vec{H} + (p-2)s_p \vec{I}$$

où \vec{I} est le vecteur intensité d'aimantation, et $\vec{H} = -\overrightarrow{\operatorname{grad}} U^T$ le *champ magnétique* produit par la distribution magnétique d'énergie finie $T = -\operatorname{div} \vec{I}$.

¹ L'identité de Lagrange s'applique pour des nombres a_1, a_2, \dots, a_p , complexes et des nombres b_1, b_2, \dots, b_p réels : $|\sum_j a_j b_j|^2 + \sum_{j,k} |a_j b_k - a_k b_j|^2 \equiv (\sum_j |a_j|^2)(\sum_j b_j^2)$.

Ce vecteur \vec{B} est de carré sommable et vérifie $\operatorname{div} \vec{B} = 0^1$; on a en effet :

$$\operatorname{div} \vec{B} = \operatorname{div} \vec{H} + (p-2)s_p \operatorname{div} \vec{I}$$

avec :

$$\operatorname{div} \vec{H} = -\operatorname{div} (\overrightarrow{\operatorname{grad}} U^T) = -\Delta U^T = (p-2)s_p T,$$

d'où le résultat, qui exprime un fait bien connu dans la théorie élémentaire du magnétisme dans l'espace ordinaire, et qu'on traduit en disant que *le flux de l'induction magnétique est conservatif*.

c). Il est bien évident que le vecteur \vec{I} n'est pas unique. Il résulte de la définition qu'on peut lui ajouter tout vecteur dont la divergence est nulle (au sens des distributions). La remarque précédente montre que, parmi les vecteurs intensité d'aimantation qui engendrent un potentiel donné U^T (d'énergie finie), il en existe un et un seul qui est tel que l'induction magnétique soit nulle : c'est le vecteur $-\frac{1}{(p-2)s_p} \overrightarrow{\operatorname{grad}} U^T$.²

5. Potentiel logarithmique dans le plan.

Le théorème de Poisson sous la forme donnée par L. Schwartz se traduit par la relation :

$$\Delta \log \frac{1}{r} = -2\pi\varepsilon.$$

La transformée de Fourier du noyau $K = -\log r$ est donc une distribution \mathfrak{K} telle que :

$$2\pi r^2 \mathfrak{K} = 1.$$

Ce n'est donc pas une mesure, car $1/r^2$ n'est pas sommable au voisinage de l'origine³. Le noyau $-\log r$ n'est pas à proprement parler du type positif.

¹ Cette propriété peut s'exprimer sans faire usage du langage des distributions de la façon suivante :

$\int B \operatorname{grad} \varphi \, d\tau = 0$ pour toute fonction φ à support compact indéfiniment dérivable (ou même seulement douée de dérivées du premier ordre continues).

² Contrairement au cas d'un potentiel électrique où une seule distribution de masses engendre un potentiel donné, il existe une infinité de répartitions de magnétisme donnant naissance à un même potentiel; l'exemple classique rappelé plus haut montre d'ailleurs l'équivalence d'une distribution magnétique régulière avec une mesure simple. La théorie des distributions permet cependant d'énoncer un théorème d'unicité en considérant non pas le vecteur aimantation \vec{I} , mais la distribution magnétique $-\operatorname{div} \vec{I}$.

³ On détermine aisément la distribution $\mathfrak{K} = \mathfrak{F}(\log(1/r))$ dans R^p en observant que, lorsque α tend vers 0, la fonction $K_\alpha = (r^{-\alpha} - 1)/\alpha$ converge vers $\log(1/r)$ au sens des distributions sphériques.

Nous dirons encore d'une distribution T qu'elle est d'énergie finie si sa transformée de Fourier est une fonction \mathfrak{X} pour laquelle l'intégrale d'énergie

$$(12) \quad \|T\|^2 = \frac{1}{2\pi} \int \frac{|\mathfrak{X}|^2}{r^2} d\sigma$$

a un sens¹. \mathfrak{X} est donc de la forme :

\mathfrak{R} est donc la limite, au sens des distributions sphériques, de $\mathfrak{R}_\alpha = \mathfrak{F}(K_\alpha) = (F(r^{-\alpha}) - \varepsilon)/\alpha$. Or $\mathfrak{F}(r^{-\alpha})$ est donné par la formule (2); un calcul élémentaire conduit alors au résultat suivant :

$$\mathfrak{R} = \mathfrak{F}\left(\log \frac{1}{r}\right) = \frac{1}{s_p} \overline{\frac{1}{r^p}} + a_p \varepsilon,$$

où ε est la masse +1 placée à l'origine, $\overline{r^{-p}}$ est la distribution définie par :

$$\overline{\frac{1}{r^p}}(\varphi) = \lim_{t \rightarrow 0} \left\{ \int_{CB(O,t)} \frac{\varphi}{r^p} d\tau - s_p \varphi(0) \log \frac{1}{t} \right\},$$

$s_p = 2\pi^{p/2}/\Gamma(p/2)$ est l'aire de la sphère-unité (pour $p = 1$, on pose $s_p = 2$) enfin a_p est le nombre réel

$\log \pi - \frac{1}{2} \frac{\Gamma'(\frac{p}{2})}{\Gamma(\frac{p}{2})} - \frac{1}{2} \Gamma'(1)$; on a donc, en désignant par C la constante d'Euler : $a_1 = C + \log 2\pi$, $a_2 =$

$C + \log \pi$, et d'une manière générale : $a_{2m} = C + \log \pi - \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{m-1} \right)$, $a_{2m+1} = C + \log 2\pi - \left(1 + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{2m-1} \right)$

¹ $d\sigma$ représente ici l'élément d'aire du plan rapporté à deux axes rectangulaires Ox, Oy , et on a posé : $r^2 = x^2 + y^2$.

Plus généralement, on peut envisager le potentiel logarithmique dans R^p ($p \geq 1$) et appeler distributions d'énergie finie les distributions T dont la transformée de Fourier $\mathfrak{X} = \mathfrak{F}(T)$ satisfait à :

$$\|T\|^2 = \frac{1}{s} \int \frac{|\mathfrak{X}|^2}{r^p} d\tau < \infty;$$

l'espace de ces distributions, normées par $\|T\|$, est complet.

Observons qu'en vertu de la note précédente, si T est à support compact, et de masse totale nulle ($T(1) = 0$), on a : $\mathfrak{F}[\log(1/r) * T * \tilde{T}] = |\mathfrak{X}|^2 / s_p r^p$, car \mathfrak{X} est alors une fonction indéfiniment dérivable nulle à l'origine, d'où il résulte que le produit $\mathfrak{X}\varepsilon$ est nul, et que le produit $\mathfrak{X} \overline{r^{-p}}$ est égal à la fonction (localement sommable) \mathfrak{X}/r^p .

Pour que l'énergie d'une telle distribution soit finie, il faut et il suffit que la distribution $\log(1/r) * T * \tilde{T}$ soit une fonction continue, et on a alors :

$$\|T\|^2 = \text{Sp.} \log \frac{1}{r} * T * \tilde{T} = \text{Sp.} U^T * \tilde{T},$$

où $U^T = \log(1/r) * T$ est le potentiel logarithmique de T ; c'est une distribution bien déterminée, car T est à support compact.

Remarquons encore que $r^{-p/2}$ est, d'après (2), identique à sa transformée de Fourier. Il en résulte

$$(13) \quad \mathfrak{T} = \sqrt{2\pi r} \mathfrak{S}$$

où \mathfrak{S} est de carré sommable ; l'énergie correspondante est $\int |\mathfrak{S}|^2 d\sigma$. L'espace \mathfrak{B} des distributions d'énergie finie, normées par la racine carrée de l'énergie, est donc complet (même démonstration qu'au chapitre I, dont le lemme 1 s'applique encore).

Si T est à support compact, la définition (12) entraîne que la fonction analytique \mathfrak{T} est nulle à l'origine ; la masse totale $T(1)$ est donc nulle. Le potentiel correspondant $U^T = -\log r * T$, qui est bien déterminé, est une fonction harmonique hors du support et s'annule par continuité à l'infini.¹

Dans le cas général, il y a quelque difficulté à définir U^T à l'aide de la transformation de Fourier, car le produit $\mathfrak{T}/2\pi r^2 = \mathfrak{S}/\sqrt{2\pi r}$ (d'après (13)) n'est pas nécessairement sommable au voisinage de l'origine. Nous pouvons cependant adapter les résultats des paragraphes précédents de la façon suivante :

Toute distribution de la forme $T = -\operatorname{div} \vec{I}$, où \vec{I} est un vecteur dont les composantes sont de carré sommable, est d'énergie finie :

$$(14) \quad \|T\|^2 \leq 2\pi \int |\vec{I}|^2 d\sigma$$

l'égalité ayant lieu dans le seul cas où \vec{I} est un vecteur gradient. Inversement toute distribution d'énergie finie est de la forme

$$T = -\frac{1}{2\pi} \Delta G = -\operatorname{div} \left(\frac{1}{2\pi} \overrightarrow{\operatorname{grad} G} \right),$$

où G est une fonction de la classe (BL) dans tout le plan, et on a :

$$(15) \quad \|T\|^2 = \frac{1}{2\pi} \int |\overrightarrow{\operatorname{grad} G}|^2 d\sigma.$$

La première partie se démontre par la méthode du § 4 (application de l'identité

que si T est une distribution du type considéré, (à support compact, et $T(1) = 0$), on peut écrire, d'après le théorème de Plancherel :

$$\|T\|^2 = \frac{1}{s_p} \int \left| \frac{\mathfrak{T}}{r^{p/2}} \right|^2 d\tau = \frac{1}{s_p} \int |U_{p,2}^T|^2 d\tau.$$

Cette relation a été donnée par M. RIESZ [17] dans le cas où T est une mesure.

¹ En effet si T est une distribution quelconque à support compact, le développement de la fonction harmonique $U^T(M)$ au voisinage de l'infini est, en désignant par r et θ les coordonnées polaires de M :

$$U^T(M) = \alpha_0 \log \frac{1}{r} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha_n \cos n\theta + \beta_n \sin n\theta}{nr^n}$$

avec $\alpha_0 = T(1)$, $\alpha_n = T(r^n \cos n\theta)$, $\beta_n = T(r^n \sin n\theta)$. Dans le cas considéré, α_0 est nul.

de Lagrange à l'intégrale d'énergie). Pour établir la seconde, il suffit d'observer que, d'après (13), \mathfrak{I} peut s'écrire :

$$\mathfrak{I} = \sqrt{2\pi}r\mathfrak{S} = \sqrt{2\pi}\left(x\frac{\mathfrak{S}}{r} + y\frac{\mathfrak{S}}{r}\right).$$

Les fonctions $\mathfrak{A} = x\mathfrak{S}/r$ et $\mathfrak{B} = y\mathfrak{S}/r$ sont de carré sommable et vérifient $\mathfrak{A}y = \mathfrak{B}x$; le résultat s'en déduit aussitôt.

Lorsque T est à support compact, le potentiel U^T est presque partout égal à une fonction de la classe (BL) ; l'énoncé précédent est valable en faisant $G = U^T$, $\vec{I} = \overrightarrow{\text{grad}} U^T/2\pi$. En particulier la relation (15) donne alors :

$$(16) \quad \|T\|^2 = \frac{1}{2\pi} \int \overrightarrow{\text{grad}} U^T|^2 d\sigma$$

et le potentiel U^T peut être représenté comme potentiel magnétique.

Ces distributions d'énergie finie à support compact sont denses dans l'espace \mathfrak{B} : Soit en effet $T \in \mathfrak{B}$; elle est de la forme $T = -\text{div}(\overrightarrow{\text{grad}} G/2\pi)$, où G est de la classe (BL) dans tout le plan. Posons $\vec{I} = \overrightarrow{\text{grad}} G/2\pi$, et désignons par \vec{I}_n la restriction de \vec{I} au cercle $C_n = C(O, n)$, de centre O et de rayon n . La distribution $T_n = -\text{div} \vec{I}_n$ est à support compact, et converge fortement vers T , car on a : $T - T_n = -\text{div} \vec{I} + \text{div} \vec{I}_n = -\text{div}(\vec{I} - \vec{I}_n)$, d'où, d'après (14) :

$$\|T - T_n\|^2 \leq 2\pi \int |\vec{I} - \vec{I}_n|^2 d\sigma = 2\pi \int_{R^2 - C_n} |\vec{I}|^2 d\sigma$$

expression qui tend vers 0 avec $1/n^1$.

La variété linéaire \mathfrak{B}_E des distributions d'énergie finie dont le support appartient à un ensemble fermé E est *complète* (la démonstration du théorème 2 du chapitre I s'étend sans difficulté). On peut encore définir la projection T' sur \mathfrak{B}_E d'une distribution quelconque T de \mathfrak{B} : elle est caractérisée par $(T, S) = (T', S)$ pour toute $S \in \mathfrak{B}_E$. Mais les potentiels U^T et $U^{T'}$ ne coïncident plus nécessairement dans l'intérieur \dot{E} de E (en supposant que le support de T et l'ensemble fermé E sont des compacts, de façon que ces potentiels soient bien définis). On a seulement : $U^T \equiv U^{T'} + cte$ dans \dot{E}^2 .

¹ Cette démonstration est valable pour les potentiels newtoniens dans R^p avec $p \geq 3$, mais le résultat avait alors été établi autrement dans un cas plus général (chap. I, théorème 5).

² Le produit scalaire (T, S) de deux distributions de \mathfrak{B} est défini par : $(T, S) = \int x\bar{x}r^{-2}d\sigma$. Si T et S sont à support compact, on a $(T, S) = -\text{Sp. log } r * T * \hat{S}$. Si φ est une fonction indéfiniment dérivable à support compact dans \dot{E} et de moyenne nulle ($\int \varphi d\sigma = 0$), c'est une distribution de \mathfrak{B}_E . La relation $(T, \varphi) = (T', \varphi)$ s'écrit : $U^T(\bar{\varphi}) = U^{T'}(\bar{\varphi})$, d'où $U^T \equiv U^{T'} + cte$ dans \dot{E} .

De même il ne saurait être question d'étendre sans convention supplémentaire la notion de distribution d'équilibre d'un compact quelconque E , puisque les distributions de \mathfrak{S} sont de masse totale nulle. C'est pourquoi il sera utile de modifier quelque peu la définition de l'énergie de façon qu'elle s'applique à des distributions de masse totale non nulle ; par contre nous renoncerons à envisager l'ensemble des distributions du plan.

Distributions portées par un compact du cercle-unité. Soient μ une mesure positive de masse totale m portée par le cercle-unité, et λ_0 la distribution homogène de la masse-unité sur la circonférence-unité. La mesure $\mu - m\lambda_0$ est de masse totale nulle ; avec la définition (12) son énergie est :

$$\begin{aligned} \|\mu - m\lambda_0\|^2 &= -\text{Sp. log } r^*(\mu - m\lambda_0)^*(\check{\mu} - m\check{\lambda}_0) = \int U^{\mu - m\lambda_0}(d\check{\mu} - m d\check{\lambda}_0) \\ &= \int U^\mu d\mu - 2m \int U^{\lambda_0} d\mu + m^2 \int U^{\lambda_0} d\lambda_0. \end{aligned}$$

Les deux dernières intégrales sont nulles, car il est bien connu que le potentiel U^{λ_0} est nul sur le cercle-unité. La relation précédente montre donc que la quantité $\int U^\mu d\mu$ est nulle dans le seul cas où μ est de la forme $m\lambda_0$; dans tous les autres cas elle est positive ($\leq \infty$) ; nous l'appellerons encore *énergie* de la mesure μ .

On sait qu'on peut développer une théorie du potentiel logarithmique des mesures positives portées par le cercle-unité à partir de cette notion ; on est conduit ainsi à attribuer une capacité infinie à la circonférence-unité ; d'autre part les distributions qui ont pour support le cercle-unité font intervenir des fonctions définies au voisinage de ce cercle. Nous envisagerons donc seulement les distributions dont le support appartient à un compact E_0 fixe intérieur au cercle-unité ; l'énergie d'une telle distribution est la quantité :

$$\text{Sp. } U^T * \check{T} = \|T - T(1)\lambda_0\|^2$$

expression qui est nulle seulement pour $T = 0$, car T ne peut être de la forme $a\lambda_0$. On pourra encore la noter $\|T\|^2$, les deux définitions coïncidant lorsque T est de masse totale nulle.

Avec cette définition l'espace des distributions d'énergie finie portées par E_0 , et normées par la racine carrée de l'énergie, est *complet* et les résultats du chapitre I s'étendent aisément.

La distribution d'équilibre d'un compact E de diamètre inférieur à 2 est une mesure positive¹. La capacité de Wiener de E est l'inverse de la borne inférieure de

¹ La méthode de H. CARTAN [8] s'applique à la recherche de la mesure positive portée par E qui minimise l'intégrale $\int (U^\mu - 2)d\mu$. Cette mesure γ vérifie $\int (U^\gamma - 1)d\mu = 0$ pour toutes les mesures positives μ d'énergie finie portées par E . Ceci entraîne que γ coïncide avec la distribution d'équilibre (cf. chap. II, § 3).

l'intégrale d'énergie $\int U^\mu d\mu$ pour toutes les mesures positives μ d'énergie finie portées par E . D'où la définition des capacités intérieure et extérieure d'un ensemble quelconque de diamètre inférieur à 2.

Remarques. a. Lorsque le noyau $-\log r$ reste positif, c'est-à-dire lorsqu'on se borne à un compact fixe E_0 de diamètre inférieur à l'unité, on peut adapter la théorie du balayage et de la capacité de H. Cartan ([8], [9]). En particulier si les E_n sont des sous-ensembles de E_0 , on a, entre les capacités (de Wiener) extérieures, la relation :

$$\mathfrak{C}_e(\cup E_n) \leq \sum \mathfrak{C}_e(E_n).^1$$

On peut alors appliquer au potentiel logarithmique d'une distribution T d'énergie finie portée par E_0 la construction du chapitre II (§ 2) ce qui permet de déterminer U^T quasi-partout.²

b. On peut étendre les résultats précédents au cas d'un compact fixe E_0 quelconque, à condition de remplacer le noyau $\log(1/r)$ par $\log(a/r)$ où a est supérieur au diamètre de E_0 . Si \mathfrak{C}_a désigne la capacité de Wiener correspondante (intérieure ou extérieure) d'un ensemble E de diamètre inférieur à a , la capacité logarithmique de E est par définition $a e^{-1/\mathfrak{C}_a}$: il est bien connu qu'elle est indépendante de a .

On peut donc attribuer une capacité logarithmique extérieure finie à tout ensemble borné du plan, ce qui est impossible avec la capacité de Wiener. Nous utiliserons cependant cette dernière notion,³ pour démontrer qu'un ensemble du plan est de capacité logarithmique nulle, il suffit de vérifier que son intersection avec tout compact de diamètre inférieur à 1 est de capacité de Wiener nulle.

6. Extension du théorème de G. C. Evans au cas polyharmonique.

Pour ne pas alourdir outre mesure l'exposé, nous nous bornerons ici à l'étude des potentiels d'ordre $\alpha = 2k$, avec $0 < 2k < p$ (potentiels polyharmoniques d'ordre k). Généralisant la définition de O. Nikodym nous dirons qu'une fonction F est de la classe (BL) d'ordre k dans un domaine ω si :

a. presque toute parallèle à Ox_j découpe sur ω des segments ouverts sur lesquels F et chacune de ses dérivées partielles des $k-1$ premiers ordres sont absolument continues ($j = 1, 2, \dots, p$).

¹ Cette relation est évidemment fautive si le diamètre de E_0 est voisin de 2.

² On utilisera encore le lemme : si U^T est continu, l'ensemble des points de E_0 pour lesquels on a : $U^T > \alpha > 0$ est de capacité $\leq \|T\|^2/\alpha^2$.

³ Elle s'introduit plus naturellement dans diverses questions : par exemple dans le lemme rappelé à la note précédente, et aussi dans les critères d'effilement (cf. chap. IV).

b. Les dérivées partielles d'ordre k , définies presque partout dans ω , sont de carré sommable dans ce domaine.

Théorème : *Un potentiel polyharmonique d'ordre k d'énergie finie est une fonction U de la classe (BL) d'ordre k dans R^p tout entier. L'énergie correspondante est :*

$$\begin{aligned} \|T\|^2 &= \frac{1}{a_k} \int |\Delta_h U|^2 d\tau \quad \text{pour } k = 2h \\ \|T\|^2 &= \frac{1}{a_k} \int |\overrightarrow{\text{grad}} \Delta_h U|^2 d\tau \quad \text{pour } k = 2h + 1 \end{aligned}$$

où Δ_h est le Laplacien itéré h fois, et a_k le coefficient positif donné par (5)

$$a_k = 2^{k-1}(k-1)!(p-2)(p-4)\dots(p-2k)s_p$$

Réciproquement toute fonction de la classe (BL) d'ordre k est un potentiel polyharmonique d'ordre k d'énergie finie, augmenté d'un polynôme d'ordre $k-1$.

Soit en effet $U^T = U_{2k}^T = H_{2k} * S = \sqrt{C_{2k}C_{p-2k}} U_k^S$ un tel potentiel. Une dérivée partielle (au sens des distributions) d'ordre k de U^T a pour transformée de Fourier

$$\mathfrak{F} \left(\frac{\partial^k}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \dots \partial x_p^{\alpha_p}} * U^T \right) = \sqrt{C_{2k}} \frac{\mathfrak{S}}{r^k} (2i\pi)^k x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \dots x_p^{\alpha_p},$$

où \mathfrak{S} est de carré sommable, et $\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_p = k$. Elle est donc de carré sommable (théorème de Plancherel). On en déduit de proche en proche que U^T et chacune de ses dérivées partielles au sens des distributions sont presque partout égales à des fonctions absolument continues en x_j sur presque toute parallèle à Ox_j . Il en résulte qu'une fonction U définie quasi-partout par le procédé de régularisation du chapitre II est de la classe (BL) d'ordre k . La démonstration est toute semblable à celle esquissée pour le cas newtonien; il suffit de s'appuyer sur le fait qu'un ensemble de capacité nulle pour un noyau polyharmonique d'ordre quelconque est de mesure $p-1$ dimensionnelle nulle (puisqu'il est de capacité nulle pour le noyau newtonien).

Un calcul simple donne l'expression de l'énergie $\|T\|^2 = \int |S|^2 d\tau$, avec $S = D_k * U^T / \sqrt{C_{2k}C_{p-2k}}$.

Pour $k = 2h$, on a : $\Delta_h = (-4\pi^2)^h C_{2h}$, d'où, d'après (5) et la relation $C_{p-\alpha} = C_\alpha$:

$$\|T\|_{4h}^2 = \frac{1}{(4\pi^2)^{2h} C_{4h}} \int |\Delta_h U^T|^2 d\tau = \frac{1}{a_k} \int |\Delta_h U^T|^2 d\tau.$$

Pour $k = 2h + 1$, on a de même :

$$\|T\|_{4h+2}^2 = \frac{1}{C_{4h+2}(C_{p-2h-1})^2} \int |D_{2h+1} U^T|^2 d\tau.$$

En passant aux transformées de Fourier, on a, d'après $\mathfrak{D}_{2h+1} = \mathfrak{F}(D_{2h+1}) = r^{2h+1}/C_{2h+1}$:

$$\|T\|_{4h+2}^2 = \frac{1}{C_{4h+2}} \int |r^{2h+1} U^T|^2 d\tau .$$

Il suffit alors d'écrire: $\mathfrak{F}(\partial/\partial x_j * \Delta_h * U) = (-4\pi^2)^h (2i\pi x_j) r^{2h} \mathfrak{U}$ et d'appliquer le théorème de Plancherel qui donne:

$$\|T\|_{4h+2}^2 = \frac{1}{(4\pi^2)^{2h+1} C_{4h+2}} \int |\overrightarrow{\text{grad}} \Delta_h U^T|^2 d\tau = \frac{1}{a_k} \int |\overrightarrow{\text{grad}} \Delta_h U^T|^2 d\tau .$$

Réciproquement soient F une fonction de la classe (BL) d'ordre k dans R^p , et T la distribution $D_{2k} * F = (-1)^k \Delta_k F / a_k$. On peut écrire

$$\Delta_h F = \sum A_{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p} \frac{\partial^k}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \dots \partial x_p^{\alpha_p}} f_{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p} ,$$

avec $\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_p = k$; $A_{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p}$ est un coefficient positif, et $f_{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p}$ la dérivée $\frac{\partial^k F}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \dots \partial x_p^{\alpha_p}}$, qui est de carré sommable. Le théorème de Plancherel montre que la transformée

$$\mathfrak{T} = \mathfrak{F}(T) = \frac{(-1)^k}{a_h} \sum A_{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p} (2i\pi)^k x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \dots x_p^{\alpha_p} \mathfrak{F}(f_{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p})$$

est de carré sommable par rapport à la mesure de densité $1/r^{2k}$; T est donc par définition d'énergie finie, et U^T est de la classe (BL) d'ordre k .

La fonction $F - U^T$ a son Laplacien itéré Δ_k nul. Elle est donc presque partout égale à une fonction polyharmonique d'ordre k , qui se réduit d'ailleurs à un polynôme d'ordre $k-1$, car ses dérivées partielles d'ordre k sont de carré sommable dans tout l'espace.

Remarque. Pour α réel quelconque on peut appeler distributions d'énergie finie celles dont la transformée de Fourier \mathfrak{T} vérifie $\int |\mathfrak{T}|^2 r^{-\alpha} d\tau < \infty$. Pour $\alpha \geq p$, la définition des potentiels correspondants présente des difficultés analogues à celles qui ont été rencontrées dans le cas du potentiel logarithmique dans le plan.

D'autre part, si α n'est pas de la forme $\alpha = 2k$ (k entier positif) les théorèmes du type de G. C. Evans font intervenir des dérivées d'ordre fractionnaire qui entraînent de nouvelles complications. C'est pourquoi nous ne traiterons pas ce cas général, bien qu'il ne présente pas de sérieuses difficultés. Les « pseudo-fonctions » y jouent un rôle essentiel.

CHAPITRE IV.

Propriétés des fonctions de la classe (BL). Applications.

1. Nous avons donné dans l'introduction la définition des fonctions de la classe (BL) dans un domaine ω . Parmi les résultats de O. NIKODYM [16] nous utiliserons les suivants :

Une fonction de la classe (BL) dans ω est de carré sommable sur tout compact de ω , et même sur toute boule fermée de $\bar{\omega}$.¹

Une fonction de la classe (BL) dans un domaine dont la frontière comprend une portion bornée de surface régulière S d'équation $x_p = f(x_1, x_2, \dots, x_{p-1})$ admet des valeurs-limite sur S le long de presque tout segment parallèle à l'axe Ox_p .² La fonction limite ainsi définie est de carré sommable sur S .

Enfin l'espace des fonctions de la classe (BL) dans un domaine borné est complet pour la norme $(\int |\overrightarrow{\text{grad}} F|^2 d\tau)^{1/2} = (D(F))^{1/2}$.

Nous avons vu au chapitre III qu'une fonction de la classe (BL) dans tout l'espace R^p ($p \geq 2$) est presque partout égale à un potentiel newtonien d'énergie finie, à une constante additive près.³ Soit plus généralement F une fonction de la classe (BL) dans un domaine quelconque ω , et soit B une boule dont l'adhérence est contenue dans ω . Il est facile de construire une fonction G de la classe (BL) dans R^p tout entier qui coïncide avec F dans B et qui soit à support compact : il suffit de prendre $G = Ff$, où f est une fonction continûment différentiable, égale à 1 sur \bar{B} , nulle hors d'une boule B' telle que $\bar{B} \subset B' \subset \bar{B}' \subset \omega$; les dérivées partielles $\partial G / \partial x_j = F \partial f / \partial x_j + f \partial F / \partial x_j$ sont de carré sommable, car F est de carré sommable dans B' en vertu d'un résultat de O. Nikodym rappelé ci-dessus.

F coïncide donc presque partout dans B avec le potentiel newtonien d'une distribution d'énergie finie à support compact. Cette interprétation nous conduira à de nouvelles propriétés des fonctions de la classe (BL). Pour cela nous rappellerons quelques définitions et établirons quelques lemmes.

¹ Ainsi une fonction de la classe (BL) dans une boule ouverte est de carré sommable dans cette boule ; mais le résultat n'est pas toujours vrai pour un domaine quelconque, ainsi que l'auteur le démontre [16] par un contre-exemple très simple (cas d'un domaine plan simplement connexe).

² Dans le cas d'une boule, on définit ainsi p fonctions-limite (correspondant à chacune des directions d'axe) ; l'auteur démontre qu'elles sont égales presque partout sur S .

³ Pour $p = 2$, ce résultat a été démontré seulement dans le cas où la fonction est harmonique hors d'un compact.

2. Un ensemble E de R^p est dit *effilé*¹ en un point O s'il existe une mesure positive μ dont le potentiel U^μ ² vérifie :

$$U^\mu(O) < 1$$

$U^\mu(M) \geq 1$ pour $M \neq O$, $M \in E \cap V(O)$, où $V(O)$ est un voisinage de O .

Le point O est dit *irrégulier* (d'une façon plus précise : extérieurement irrégulier) pour E si E est effilé en O .³ Les points intérieurs de E sont réguliers, les points extérieurs irréguliers.

M. BRELOT [5] a donné un critère d'effilement analogue au critère de Wiener : Pour que E soit effilé en O , il faut et il suffit que la série de Wiener $\sum c_k s^k$ soit convergente ; c_k désigne ici la *capacité extérieure* de l'ensemble $E \cap E(s^k < h(OM) \leq s^{k+1})$, où s est un nombre supérieur à 1, et $h(r)$ la « fonction harmonique fondamentale » (r^{2-p} pour $p > 2$, $\log(1/r)$ pour $p = 2$). On peut d'ailleurs, dans l'énoncé précédent, remplacer les « intersphères » $E(s^k < h(OM) \leq s^{k+1})$ par les boules ouvertes $E(s^k < h(OM))$.

Nous utiliserons également une forme intégrale du critère, donnée par O. Kellog et F. Vasilescu dans le cas d'un ensemble fermé⁴ : Pour que E soit effilé en O , il faut et il suffit qu'on ait :

$$(1) \quad \int_0^\infty \mathfrak{C}(r) r^{1-p} dr < \infty$$

où $\mathfrak{C}(r)$ est la capacité extérieure de $E \cap B(O, r)$.⁵

Une fonction F est dite admettre une *pseudo-limite* ou *limite fine*⁶ l finie en O si l'ensemble $E(|F(M) - l| \geq \alpha)$ est effilé en O pour tout $\alpha > 0$.

La rareté métrique au voisinage de O d'un ensemble E effilé en ce point est mise en évidence, d'une façon d'ailleurs très imparfaite, par le lemme suivant :⁷

¹ M. BRELOT [5].

² Dans tout ce chapitre, il est seulement question de potentiel newtonien (logarithmique si $p = 2$). On sait que le potentiel d'une mesure positive est alors une fonction définie partout, semi-continue inférieurement.

³ H. CARTAN [9].

⁴ O. KELLOG and F. VASILESCO, A contribution to the theory of the capacity (*Amer. Jour. of Math.* 51, p. 515—526, 1929).

⁵ Cette forme est encore valable pour $p = 2$, \mathfrak{C} désignant la capacité de Wiener, et non la capacité logarithmique.

⁶ M. BRELOT [6], H. CARTAN [9].

⁷ Pour $p > 3$, ce lemme revient à dire que la fonction caractéristique de E admet en O une sorte de « presque-limite » nulle. On sait également que l'intersection de E avec la sphère $S(O, r)$ a pour mesure $(p-1)$ -dimensionnelle $o(r^{p-1})$. La notion de limite correspondante a été considérée avant la notion plus forte de pseudo-limite par M. BRELOT (sur le problème de Dirichlet, C. R. 196, p. 737—739, 1933), dans une étude précisant un théorème de G. BOULIGAND (Sur le problème de Dirichlet, *Ann. de la Soc. polonaise de Math.* 4, 1925, p. 92).

Lemme 1: Soit E un ensemble mesurable effilé en O ; $m(r)$ la mesure (p -dimensionnelle) de $E \cap B(O, r)$; on a :

$$(2) \quad \begin{aligned} m(r) &= o(r^p) \quad \text{pour } p \geq 3 \\ m(r) &= o(r^q) \quad \text{quel que soit } q > 0, \text{ pour } p = 2. \end{aligned}$$

En effet la capacité extérieure $\mathfrak{C}(r)$ de $E \cap B(O, r)$ est une fonction croissante de r . Il résulte alors aisément de (1) qu'on a, pour $p \geq 3$: $\mathfrak{C}(r) = o(r^{p-2})$.¹ Or entre la mesure m et la capacité extérieure (ou même intérieure) \mathfrak{C} d'un ensemble mesurable quelconque, on a la relation : $m^{p-2} \leq A_p \mathfrak{C}^p$, où A_p est une constante,² d'où le résultat.

Pour $p = 2$, la relation (1) entraîne $\mathfrak{C}(r) = o(1/\log 1/r)$; d'autre part, la mesure m et la capacité de Wiener (extérieure ou intérieure) \mathfrak{C} d'un ensemble mesurable et de diamètre inférieur à 2 sont liées par $m \leq \pi e^{-2/\mathfrak{C}}$; pour r assez petit on a donc : $m(r) \leq \pi e^{-\frac{2}{\alpha} \log \frac{1}{r}} = \pi r^{2/\alpha}$ d'où le résultat.

Lemme 2: Si $\{G_n\}$ est une suite d'ouverts décroissants dont la capacité tend vers 0, tous les points de l'espace R^p , sauf ceux d'un ensemble de capacité extérieure nulle, sont irréguliers pour G_n à partir d'une certaine valeur de n .

Soit en effet U^{μ_n} le potentiel capacitair de G_n ; la suite $\{U^{\mu_n}\}$ est décroissante, et comme μ_n converge vaguement vers 0, on a : $\lim U^{\mu_n} = 0$ quasi-partout,³ c'est-à-dire sauf sur un ensemble E de capacité extérieure nulle. En tout point M du complémentaire CE , on a donc $U^{\mu_n}(M) < 1$ pour n assez grand, et comme d'autre part

¹ Il suffit de poser $r^{2-p} = u$, $\mathfrak{C}(r) = f(u)$; l'intégrale $\int_0^\infty f(u) du$ est convergente, d'après (1), et comme $f(u)$ est monotone on en déduit $\lim_{u \rightarrow \infty} uf(u) = 0$ (démonstration facile par l'absurde), d'où le résultat.

Pour $p = 2$, on pose $\log 1/r = u$.

² La valeur exacte de A_p ($A_p = b_p^{p-2}$ pour $p \geq 3$, où b_p est le volume de la boule-unité) se retrouve facilement en appliquant le théorème : parmi les compacts de mesure m , la boule est celui dont la capacité est minimum (pour les inégalités concernant la capacité et différentes mesures, voir notamment le mémoire récent : G. POLYA et G. SZEGÖ, Inequalities for the capacity of a condenser, *Amer. Jour. of Math.* 67, p. 1-32, 1945).

Voici une démonstration élémentaire de l'existence du coefficient A_p (qui donne seulement une majoration) : Soit e un compact de E de mesure supérieure à $m - \alpha$ ($\alpha > 0$) ; il est évident que le potentiel-mesure de e (potentiel engendré par la mesure μ dont la densité est la fonction caractéristique de e), est majoré par la valeur en O du potentiel-mesure de la boule de centre O et de volume $m - \alpha$, c'est-à-dire par $pb_p R^{2/2}$, où R est le rayon de cette boule ; Soit alors γ la distribution capacitair de e ; on a $\int U^\gamma d\mu = \int U^\mu d\gamma$, d'où $m - \alpha \leq pb_p R^2 \mathfrak{C}/2$, où \mathfrak{C} est la capacité intérieure de E ; il suffit de tenir compte de ce que $m - \alpha = b_p R^p$, puis de faire tendre α vers 0 ; il vient $m^{p-2} \leq (p/2)^p b_p^{p-2} \mathfrak{C}^p$.

Des considérations analogues s'appliquent au cas du plan, pour des ensembles de diamètre inférieur à 2. La limitation exacte : $m \leq \pi e^{-2/\mathfrak{C}}$ fait intervenir la capacité logarithmique $e^{-1/\mathfrak{C}}$.

³ H. CARTAN [8], p. 99.

$U^{\mu_n} = 1$ partout sur G_n , il en résulte que G_n est effilé en M , c'est-à-dire que M est irrégulier pour G_n .

Ce résultat est encore vrai dans le cas du plan en supposant que la capacité de $G_n \cap \omega$, où ω est un ouvert quelconque de diamètre inférieur à 1, tend vers 0.¹

Lemme 3. Pour qu'une fonction f , définie quasi-partout dans un ouvert Ω , admette une pseudo-limite finie l en un point O de Ω , il faut et il suffit qu'il existe un ouvert ω effilé en O et tel que la restriction de f à $\Omega \cap C\omega$ admette en O la limite l .²

La condition exprimée est évidemment suffisante. Supposons inversement que la fonction donnée f admette la pseudo-limite l en O . L'ensemble des points où f n'est pas définie est de capacité extérieure nulle; il est donc contenu dans un ouvert ω_0 effilé en O .

Par hypothèse l'ensemble $E[|f(M) - l| > \varepsilon_n > 0]$ est effilé en O ; il est donc contenu dans un ouvert G_n effilé en O . Si s est un nombre supérieur à 1, et $h(r)$ la fonction harmonique fondamentale, nous désignerons par B_k la boule ouverte $E(h(OM) > s^k)$ et par $c_k^{(n)}$ la capacité de l'ouvert $G_n \cap B_k$. On supposera k assez grand pour que B_k soit contenue dans Ω .

Puisque G_n est effilé en O , la série de Wiener $\sum_k s^k c_k^{(n)}$ est convergente; on peut donc trouver un nombre $k(n)$ assez grand pour avoir :

$$\sum_{k=k(n)}^{\infty} s^k c_k^{(n)} < \varepsilon_n.$$

Posons alors $\omega_n = G_n \cap B_{k(n)}$. Si la série $\sum \varepsilon_n$ est convergente, l'ouvert $\omega = \bigcup_{n=0}^{\infty} \omega_n$ est effilé en O (la série de Wiener relative à ω étant convergente). Mais dans $C\omega \cap B_{k(n)}$ on a : $|f(M) - l| \leq \varepsilon_n$, ce qui démontre le résultat.

3. Théorème 1 : Toute fonction de la classe (BL) dans un domaine ω est presque partout égale à une fonction qui possède une pseudo-limite finie en tous les points de ω , sauf ceux d'un ensemble exceptionnel de capacité extérieure nulle.

Il suffit évidemment de considérer la restriction de la fonction donnée F à l'intérieur d'une boule ouverte B dont on supposera le diamètre inférieur à l'unité afin que la démonstration soit valable dans le cas du plan. D'après la remarque faite

¹ Rappelons qu'un ensemble du plan est de capacité logarithmique extérieure nulle s'il est réunion dénombrable d'ensembles de diamètre inférieur à 1 et de capacité (de Wiener) extérieure nulle (chap. 3, § 5).

² C'est M. H. Cartan qui a bien voulu me signaler que la notion de pseudo-limite entraîne la propriété de l'énoncé qui est donc plus fine seulement en apparence.

au paragraphe 1, F peut être identifiée presque partout dans B avec le potentiel U^T d'une distribution d'énergie finie dont le support est un compact de diamètre inférieur à 1.

Revenons alors à la construction du chapitre II (§ 2), qui s'applique au cas du potentiel logarithmique dans le plan (cf. chap. III, § 5). On a vu qu'il existe une suite de fonctions continues U_n convergeant quasi-partout dans B vers U^T , la convergence étant uniforme sur le complémentaire d'un ouvert E'_k de capacité aussi petite qu'on veut.

Or en vertu du lemme 2, tout point M de B , à l'exception des points d'un ensemble de capacité extérieure nulle, est irrégulier pour l'ouvert E'_k à partir d'une certaine valeur k_0 (dépendant de M). Puisque la fonction limite U^T est continue sur le complémentaire CE'_k , il existe un ouvert effilé en M tel que la restriction de U^T au complémentaire de cet ouvert admette une limite finie en M .

D'après le lemme 3, cette propriété est équivalente à l'existence d'une pseudo-limite finie au point M . Le théorème 1 est donc établi.

Remarque. Soit F une fonction de la classe (BL) ou, ce qui revient au même un potentiel U^T d'énergie finie. Il est intéressant d'observer que le théorème 1 permet d'attribuer à F une valeur finie en tout point d'un ensemble *bien déterminé* dont le complémentaire est de capacité extérieure nulle.

En effet si une fonction particulière de la classe $\Phi(T)$ (chap. II, § 2) admet la pseudo-limite m en un point M , il en est de même de toute fonction de la classe $\Phi(T)$, puisque deux fonctions quelconques de cette classe ne diffèrent que sur un ensemble de capacité extérieure nulle.

Nous allons maintenant étudier les *limites par médiation spatiale* d'une fonction F de la classe (BL) . Remarquons d'abord que si F est bornée, sa valeur moyenne $F_r(M)$ sur la boule $B(M, r)$ converge quasi-partout vers une limite finie. Cela résulte de ce que F est presque partout égale à une fonction ayant quasi-partout une pseudo-limite finie et le lemme 1 permet de conclure facilement, compte tenu de ce que F est bornée.

Dans le cas général la conclusion est moins immédiate. Nous pourrions cependant l'étendre au cas de l'espace à deux dimensions, qui se distingue des autres :

Théorème 2. *Soit F une fonction de la classe (BL) dans un domaine-plan ; sa valeur moyenne $F_r(M)$ sur le cercle de centre M et de rayon r tend vers une limite finie quand r tend vers 0, sauf pour les points M d'un ensemble de capacité extérieure nulle.*

Nous considérons toujours la restriction de F à un cercle de diamètre inférieur à l'unité. Soit $U = U^T$ un potentiel d'énergie finie, presque partout égal à F dans un

tel cercle ; soit $E'(M)$ un ouvert effilé en M , tel que U soit continu en M sur le complémentaire $CE'(M)$. Désignons respectivement par $F_r(M)$ et $U_r(M)$ les moyennes de F et U sur le cercle $C_r = C(M, r)$; pour r assez petit ces quantités sont égales. Posons enfin : $A_r = C_r \cap CE'(M)$; $B_r = C_r \cap E'(M)$. On a :

$$U_r(M) = \frac{1}{\pi r^2} \int_{C_r} U d\sigma = \frac{1}{\pi r^2} \int U d\lambda + \frac{1}{\pi r^2} \int U d\mu,$$

où λ et μ sont les distributions-mesures des ensembles A_r et B_r .

B_r étant effilé en M , on déduit du lemme 1 et de la continuité en M de la fonction U sur A_r :

$$\lim \frac{1}{\pi r^2} \int U d\lambda = U(M).$$

D'autre part, l'inégalité de Schwarz permet d'écrire :

$$\frac{1}{\pi r^2} \left| \int U d\mu \right| \leq \frac{1}{\pi r^2} \|T\| \|\mu\|,$$

où $\|T\|^2$ est l'énergie de la distribution qui engendre le potentiel U . Pour r assez petit la masse totale $m(r)$ de la mesure μ est, d'après le lemme 1 inférieure à πr^q , le nombre $q > 0$ étant choisi arbitrairement. Soit ρ le rayon du cercle de surface $m(r) = \pi r^q (\rho^2 = r^q)$. Le potentiel-mesure U^μ est évidemment majoré par la valeur du potentiel-mesure de ce cercle en son centre, c'est-à-dire, comme le montre un calcul élémentaire :

$$U^\mu \leq \pi \rho^2 \left(\log \frac{1}{\rho} + \frac{1}{2} \right)$$

d'où la borne supérieure :

$$\|\mu\|^2 = \int U^\mu d\mu \leq \pi \rho^2 \left(\log \frac{1}{\rho} + \frac{1}{2} \right) \pi \rho^2 = \frac{\pi^2}{2} r^{2q} \left(q \log \frac{1}{r} + 1 \right).$$

Il suffit de prendre $q > 2$ pour voir que le rapport $\|\mu\|/\pi r^2$ tend vers 0 avec r ; par conséquent la valeur moyenne $F_r(M) = U_r(M)$ tend vers $U(M)$ lorsque r tend vers 0, sauf peut-être lorsque M appartient à l'ensemble exceptionnel (de capacité extérieure nulle) des points où U n'admet pas une pseudo-limite finie.

Remarque. La démonstration précédente ne peut s'étendre aux espaces à plus de deux dimensions, car la majoration pour $m(r)$ donnée au lemme 1 ne permet plus de conclure que le rapport $\|\mu\|/r^p$ tend vers 0.

Nous pouvons d'ailleurs mettre en évidence la différence entre les deux cas en

construisant dans R^3 un exemple de potentiel d'énergie finie U qui admet la pseudo-limite 0 en un point M , et tel que l'on ait :

$$(3) \quad \overline{\lim}_{r \rightarrow 0} \frac{1}{r^3} \int_{B_r} U d\tau = +\infty,$$

où B_r est la boule $B(M, r)$.

A cet effet, observons d'abord que le potentiel engendré par la mesure μ constituée par une masse $+m$ et une masse $-m$ réparties uniformément sur deux sphères concentriques de rayons respectifs ρ et 2ρ est nul à l'extérieur de la grande sphère, positif entre les deux, et vaut $m/2\rho$ à l'intérieur de la plus petite. L'énergie correspondante est : $\|\mu\|^2 = m^2/2\rho$.

Considérons les intersphères $E(s^n < 1/r \leq s^{n+1})$ centrés en M (où s est un nombre supérieur à 1). Pour n suffisamment grand, on peut placer dans chacun de ces intersphères un couple de sphères concentriques de rayons respectifs $\rho_n = \frac{1}{4}^n$ et $2\rho_n$, pourvu que l'on ait $s < 4$. Sur chacun de ces couples, on place la distribution μ_n définie comme ci-dessus, avec $m_n = \frac{1}{3}^n$.

La distribution λ , obtenue en superposant les μ_n , est d'énergie finie ; en effet, on a :

$$\|\lambda\| \leq \sum_{n=1}^{\infty} \|\mu_n\| = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{m_n}{\sqrt{\rho_n}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n < \infty.$$

L'ensemble réunion des boules de rayon $2\rho_n$ est effilé en O ; en effet la capacité c_n d'une telle boule est $2\rho_n$, et la série de Wiener $\sum s^n c_n = 2 \sum (s/4)^n$ est convergente pour $s < 4$.

Il reste à montrer que l'on peut choisir $s < 4$ de façon que (3) soit vérifiée. Or si on prend $r = 1/s^k$, il vient :

$$\frac{1}{r^3} \int_{B_r} U^\mu d\tau > s^{3k} \sum_{n=k}^{\infty} \frac{m_n}{2\rho_n} \frac{4}{3} \pi \rho_n^3 = \frac{2\pi}{3} s^{3k} \sum_{n=k}^{\infty} \left(\frac{1}{48}\right)^n > A \frac{s^{3k}}{48^k} (A = cte).$$

Il suffira donc de choisir s compris entre $\sqrt[3]{48}$ et 4 (par exemple $s = 3,9$) pour obtenir l'exemple cherché.

4. Fonctions de la classe (BL) continues dans une boule.

Lemme 4. Une fonction $F(M)$ de la classe (BL) dans une boule peut être prolongée par une fonction de la classe (BL) dans R^p tout entier.

Soit $F(M)$ une fonction de la classe (BL) dans la boule-unité B_0 de R^p . On définit F à l'extérieur de B_0 en la prolongeant à l'aide de la transformation de Kelvin ;

autrement dit on pose $F(P) = OM^{p-2}F(M)$ ($p \geq 2$) si P est l'inverse de M dans l'inversion de centre O et de puissance 1.

F ainsi prolongée est presque partout égale à une fonction de la classe (BL) dans R^p . Nous omettrons les détails de la démonstration qui se déduit aisément des résultats de O. Nikodym rappelés au § 1.

Théorème 3. *Une fonction F de la classe (BL) continue dans une boule ouverte B admet une limite à la frontière le long de tout rayon, sauf pour des rayons exceptionnels découpant sur la frontière un ensemble de capacité extérieure nulle. F , prolongée par ces limites radiales, admet une pseudo-limite finie quasi-partout sur la boule fermée \bar{B} .*

Soit en effet $F(M)$ continue et de la classe (BL) dans la boule-unité B_0 de centre O , de frontière S_0 . On peut prolonger F par une fonction de la classe (BL) dans tout l'espace (lemme 4). Dans une boule ouverte ω centrée sur S_0 , F coïncide avec un potentiel d'énergie finie; par médiations spatiales on peut déterminer une suite de fonctions F_n convergeant quasi-partout, dans ω , vers une fonction $U(M)$ qui y possède quasi-partout une pseudo-limite finie (théorème 1).

U est continue dans ω , abstraction faite d'un ouvert G_k de capacité aussi faible qu'on veut (dans le cas du plan on peut supposer le diamètre de ω inférieur à l'unité); il en résulte aisément qu'elle admet la limite finie $U(m)$ sur S_0 le long de tout rayon Om , sauf pour un ensemble de points m de S_0 de capacité extérieure nulle.¹ Il en est de même de F , qui est identique à U dans B_0 , en vertu de la continuité. Prolongée par ces valeurs-limite, F coïncide quasi-partout sur la fermeture \bar{B}_0 avec U et admet donc une pseudo-limite finie quasi-partout sur \bar{B}_0 , puisque U possède cette propriété quasi-partout dans ω .

Applications. Disons d'une homéomorphie entre la boule-unité ouverte B_0 et un domaine ω qu'elle est de la classe (BL) si les coordonnées d'un point P de ω sont des fonctions des coordonnées d'un point M de B_0 qui sont de la classe (BL) dans cette boule. Le théorème 3 montre que dans une telle homéomorphie l'image de tout rayon Om de B_0 est un arc de Jordan aboutissant en un point $p(m)$ bien déterminé de la frontière $\bar{\omega}$, sauf pour un ensemble de points m de la sphère-unité S_0 qui est de capacité extérieure nulle.

¹ Soient en effet O et R le centre et le rayon de B_0 . La trace e sur S des rayons sur lesquels U n'est pas continue appartient à la projection (de centre O) de l'ouvert G_k qui, pour k assez grand, est situé dans l'intersphère $E(R(1-\varepsilon) < OM < R(1+\varepsilon))$, car F est supposée continue dans l'intérieur de B_0 . Si m et m' sont les projections de deux points M et M' de G_k , le rapport mm'/MM' est borné. Il résulte alors d'un théorème connu de M. BRELOT [5] sur les transformations continues minorant les distances que la capacité extérieure de la projection de G_k tend vers 0 avec $1/k$; e est donc de capacité extérieure nulle.

La représentation conforme sur le cercle-unité d'un domaine plan simplement connexe et borné est, comme il est bien connu, un exemple d'une telle homéomorphie. L'existence de limites radiales quasi-partout a été établie par A. BEURLING [2].¹ Ce résultat a été retrouvé par J. DUFRESNOY [11] poursuivant des travaux de M^{lle} Ferrand.²

Le théorème 1, complété par le lemme 3, donne un résultat plus précis que l'existence des limites radiales quasi-partout ;³ il met en évidence *une sorte de continuité de la correspondance entre les points-frontière m et $p(m)$ eux mêmes* : $p(m)$ est une fonction continue de m en tout point m_0 non exceptionnel, abstraction faite d'un ensemble effilé en m_0 .

Observons également qu'en vertu du théorème 2, l'affixe de $p(m)$ est la limite vers laquelle tend la valeur moyenne de $f(z)$ sur un cercle de centre m_0 lorsque le rayon de ce cercle tend vers 0, $f(z)$ étant la fonction qui réalise la représentation conforme du cercle C_0 sur ω , prolongée à l'extérieur de C_0 en lui attribuant la même valeur en deux points inverses.

Ces propriétés sont possédées également par les représentations quasi-conformes du plan, c'est-à-dire les homéomorphies continûment différentiables dont la transformation linéaire tangente admet pour directrice une ellipse d'excentricité bornée.

Dans l'espace R^p ($p > 2$) on peut appeler homéomorphie quasi-conforme toute homéomorphie continûment différentiable dont la transformation linéaire tangente a pour « directrice » une ellipsoïde dont les ellipses principales sont d'excentricité bornée. Si $P = F(M)$ est une homéomorphie quasi-conforme entre la boule B_0 et un domaine borné ω , il est aisé de voir que les coordonnées de P sont des fonctions de la classe (BL) dans B_0 , car les dérivées partielles sont de puissance p -ième sommable, donc a fortiori de carré sommable.⁴

¹ Ces auteurs considèrent également des fonctions harmoniques de la classe (BL) dans le cercle-unité. Signalons que c'est pour obtenir ce résultat que A. Beurling a introduit la notion de capacité extérieure.

² J. FERRAND, Etude de la représentation conforme au voisinage de la frontière (*Ann. E. N. S.*, 59, 1942, p. 43—106).

³ La propriété exprimée par le lemme 3 entraîne en particulier l'existence d'une « limite angulaire » de la fonction $\zeta = f(z)$ qui réalise la représentation conforme, lorsque z tend vers le point-frontière non exceptionnel m_0 . Signalons également sans démonstration qu'elle entraîne qu'une fonction harmonique $U(M)$ de la classe (BL) et bornée dans une boule B de R^3 admet en tout point-frontière m_0 non exceptionnel une « limite conique » ($U(M)$ tend vers $U(m_0)$ lorsque M tend vers m_0 en restant dans un cône de révolution d'axe Om_0 , de sommet m et d'angle au sommet inférieur à π). On sait que si on suppose seulement U harmonique et bornée dans B on peut affirmer l'existence d'une limite conique presque-partout (mais non quasi-partout) sur la frontière.

⁴ Observons d'ailleurs que l'existence d'une représentation quasi-conforme de B_0 sur un domaine homéomorphe donné n'est pas évidente dès que le nombre de dimensions surpasse deux.

5. *Potentiels de Green d'énergie finie. Fonctions de la classe (BL) dans un domaine.*

Soit ω un domaine quelconque de R^p ($p \geq 2$), dont le complémentaire est de capacité positive. Pour $p = 2$, on supposera de plus ω borné (par homothétie, son diamètre peut être choisi inférieur à l'unité). Si μ est une mesure positive dans ω , le potentiel de μ par rapport à la fonction de Green $G(M, P) = U^{\varepsilon_M}(P) - U^{\varepsilon'_M}(P)$ est par définition :¹

$$U_{\omega}^{\mu}(M) = \int G(M, P) d\mu(P).$$

L'énergie de μ par rapport à la fonction de Green est :

$$\|\mu\|_{\omega}^2 = \int U_{\omega}^{\mu} d\mu.$$

Lorsque μ est à support compact dans ω , le potentiel de Green s'écrit :

$$(4) \quad U_{\omega}^{\mu}(M) = U^{\mu}(M) - U^{\mu'}(M),$$

où μ' est la balayée de μ sur le complémentaire $C\omega$ ou, ce qui revient au même dans le cas newtonien considéré, sur la frontière $\overset{*}{\omega}$. Par définition on a donc :

$$\|\mu\|_{\omega}^2 = \int U_{\omega}^{\mu} d\mu = \int (U^{\mu} - U^{\mu'}) d\mu = \|\mu\|^2 - \int U^{\mu'} d\mu,$$

où $\|\mu\|^2$ désigne l'énergie par rapport au noyau newtonien. Or l'intégrale $\int U^{\mu'} d\mu$ est finie, puisque le support de μ est à distance positive de $\overset{*}{\omega}$. Donc pour qu'une telle mesure soit d'énergie finie par rapport à la fonction de Green, il faut et il suffit qu'elle soit d'énergie finie par rapport au noyau newtonien. La relation $\int U^{\mu'} d\mu = \|\mu'\|^2$ permet d'ailleurs d'écrire

$$(5) \quad \|\mu\|_{\omega}^2 = \|\mu\|^2 - \|\mu'\|^2 = \|\mu - \mu'\|^2.$$

Lemme 5. L'énergie par rapport à la fonction de Green d'une mesure μ à support compact dans ω a pour expression :

$$(6) \quad \|\mu\|_{\omega}^2 = \frac{1}{(p-2)s_p} \int \overrightarrow{|\text{grad } U_{\omega}^{\mu}|^2} d\tau$$

(pour $p = 2$, on a posé : $(p-2)s_p = 2\pi$).

¹ ε'_M est la balayée sur $\overset{*}{\omega}$ de ε_M , masse +1 placée au point M de ω . On peut définir cette mesure dans le cas d'un domaine non borné de R^2 (Cf. M. BRELOT, Sur le rôle du point à l'infini dans la théorie des fonctions harmoniques, *Ann. E. N. S.*, 61, 1944, p. 301–332), cas que nous n'envisagerons pas pour éviter les difficultés signalées au chapitre précédent.

La théorie du potentiel par rapport à la fonction de Green est développée systématiquement par O. FROSTMAN [14], dans le cas plus général du noyau d'ordre α ($0 < \alpha \leq 2$).

La relation (5) montre en effet que $\|\mu\|_{\omega}^2$ n'est autre que l'énergie (par rapport au potentiel newtonien) de la mesure $\mu - \mu'$, définie dans R^p . Le potentiel $U^{\mu - \mu'}$ est de la classe (BL) dans R^p , et on peut écrire, (chap. III, relation (6)) :

$$\|\mu\|_{\omega}^2 = \|\mu - \mu'\|_{\omega}^2 = \frac{1}{(p-2)s_p} \int \overrightarrow{\text{grad}} U^{\mu - \mu'}|^2 d\tau .^1$$

Or $U^{\mu - \mu'}$ est nul quasi-partout sur le complémentaire $C\omega$, et vaut U_{ω}^{μ} dans ω , d'après (4), d'où le résultat.

Distributions d'énergie finie par rapport à la fonction de Green. Considérons l'espace des mesures μ qui sont des combinaisons linéaires (à coefficients complexes) de quatre mesures positives d'énergie finie à support dans ω , normées par $\|\mu\|_{\omega}$. Si $\{\mu_n\}$ est une suite de Cauchy pour cette norme, μ_n tend (au sens des distributions) vers une distribution T dans ω .

Soit en effet φ une fonction indéfiniment dérivable nulle hors d'un compact de ω ; elle est de la forme $\varphi = U_{\omega}^{\psi}$, avec $\psi = -\Delta\varphi/(p-2)s_p$ (car $U_{\omega}^{\psi} - \varphi$ est harmonique dans ω , bornée et quasi-partout nulle à la frontière, donc identiquement nulle). On a donc :

$$|\mu_{n+k}(\varphi) - \mu_n(\varphi)| = \left| \int U_{\omega}^{\psi} (d\mu_{n+k} - d\mu_n) \right| \leq \|\psi\|_{\omega} \|\mu_{n+k} - \mu_n\|_{\omega} .$$

Les nombres $\mu_n(\varphi)$ convergent donc uniformément par rapport aux fonctions φ d'un ensemble borné de fonctions indéfiniment dérivables à support dans ω , car les quantités $\|\psi\|_{\omega}$ sont alors bornées uniformément.

Les distributions ainsi obtenues sont dites d'énergie finie par rapport à la fonction de Green; l'énergie correspondante est :

$$\|T\|_{\omega}^2 = \lim \|\mu_n\|_{\omega}^2 .$$

L'espace de ces distributions, normées par $\|T\|_{\omega}$, est évidemment complet.

Potentiels de Green d'énergie finie. Lorsque T est une distribution d'énergie finie (par rapport au noyau newtonien) à support compact dans ω , elle est d'énergie finie par rapport à la fonction de Green (avec la définition précédente) et on a :

$$(7) \quad \|T\|_{\omega}^2 = \|T\|^2 - \|T'\|^2$$

où T' est la balayée de T sur $\bar{\omega}^*$. En effet si $\{\mu_n\}$ est une suite de combinaisons linéaires

¹ Cette relation est valable dans le cas du plan, car les hypothèses faites alors entraînent que $\mu - \mu'$ est de masse totale nulle.

de mesures positives portées par un compact fixe de ω et tendant fortement (par rapport au noyau newtonien), vers T , μ'_n tend fortement vers T' , donc $\{\mu_n\}$ est une suite de Cauchy pour la norme $\|\mu_n\|_\omega = \|\mu_n - \mu'_n\|$, d'où le résultat.

Le potentiel de Green $U_\omega^T = U^T - U^{T'}$ est alors bien défini, et c'est une fonction de la classe (BL) dans ω . On peut également donner un sens à U_ω^T dans le cas général d'une distribution T dans ω , définie par une suite de Cauchy $\{\mu_n\}$ pour la norme $\|\mu_n\|_\omega$. En effet les fonctions $U_\omega^{\mu_n}$ convergent au sens des distributions dans ω vers une distribution bien déterminée U , car les nombres $\int U_\omega^{\mu_n} \varphi d\tau$ convergent uniformément pour tout ensemble borné de fonctions φ indéfiniment dérivables à support compact dans ω , d'après :

$$\left| \int U_\omega^{\mu_{n+k}} \varphi d\tau - \int U_\omega^{\mu_n} \varphi d\tau \right| \leq \|\varphi\|_\omega \|\mu_{n+k} - \mu_n\|_\omega.$$

Pour $j = 1, 2, \dots, p$, les distributions $\partial U_\omega^{\mu_n} / \partial x_j$ convergent vers $\partial U / \partial x_j$ ([18]). Mais d'autre part, les $U_\omega^{\mu_n}$ forment une suite de Cauchy pour la norme $(D(U_\omega^{\mu_n}))^{1/2}$ (lemme 5), donc les fonctions $\partial U_\omega^{\mu_n} / \partial x_j$ convergent en moyenne quadratique dans ω (donc au sens des distributions dans ω) vers les dérivées partielles $\partial F / \partial x_j$ d'une fonction F de la classe (BL) dans ω (d'après le théorème de O. Nikodym rappelé au § 1). Ceci entraîne $U = F + cte$ dans ω . La distribution U est donc identique à une fonction U_ω^T de la classe (BL) dans ω , qu'on appellera *potentiel de Green de la distribution T* . Le théorème 1 permet d'ailleurs de définir U_ω^T à un ensemble de capacité extérieure nulle près. On a d'autre part :

$$\|T\|_\omega^2 = \frac{1}{(p-2)s_p} \int \overrightarrow{\text{grad}} U_\omega^T|^2 d\tau.$$

Le potentiel U_ω^T et la distribution T sont liés par la relation :

$$(8) \quad \Delta U_\omega^T = -(p-2)s_p T$$

qui se démontre immédiatement par passage à la limite (rappelons qu'il s'agit de distributions dans ω). Il en résulte que T est de la forme $T = -\text{div } \vec{I}$, où \vec{I} est un vecteur de carré sommable dans ω . La réciproque est établie par le lemme suivant :

Lemme 6. Si I est un vecteur de carré sommable dans ω , la distribution $T = -\text{div } \vec{I}$, définie dans l'ouvert ω ,¹ est d'énergie finie par rapport à la fonction de Green, et on a :

¹ Il faut bien distinguer ici $-\text{div } \vec{I}$ en tant que distribution dans tout l'espace, et en tant que distribution dans ω ; cette dernière n'est pas, en général, la restriction à ω d'une distribution définie dans tout l'espace.

$$(9) \quad \|T\|_{\omega}^2 \leq (p-2)s_p \int_{\omega} |\vec{I}|^2 d\tau.$$

Soit en effet \vec{I}_n la restriction de \vec{I} à un compact E_n de ω ; posons $T_n = -\operatorname{div} \vec{I}_n$; T_n est d'énergie finie pour le noyau newtonien (chapitre III, § 4); $U_{\omega}^{T_n}$ est donc un potentiel de Green d'énergie finie, et on a, d'après (7) et le chapitre III, (11):

$$\|T_n\|_{\omega}^2 = \|T_n\|^2 - \|T_n'\|^2 \leq \|T_n\|^2 \leq (p-2)s_p \int_{\omega} |\vec{I}_n|^2 d\tau$$

d'où :

$$\|T_{n+k} - T_n\|_{\omega}^2 \leq (p-2)s_p \int_{\omega} |\vec{I}_{n+k} - \vec{I}_n|^2 d\tau$$

ce qui montre que $\{T_n\}$ est une suite de Cauchy pour la norme $\|T_n\|_{\omega}$ lorsque le compact E_n tend en croissant vers ω . $T = -\operatorname{div} \vec{I}$ est bien une distribution d'énergie finie, par rapport à la fonction de Green, puisque c'est la limite (au sens des distributions dans ω) des $T_n = -\operatorname{div} \vec{I}_n$, distributions d'énergie finie formant une suite de Cauchy.

Cette remarque va nous conduire à une décomposition canonique des fonctions de la classe (BL) dans un domaine :

Théorème 4. *Toute fonction F de la classe (BL) dans un domaine ω peut s'écrire sous la forme*

$$(10) \quad F = U_{\omega}^T + H,$$

où U_{ω}^T est un potentiel d'énergie finie par rapport à la fonction de Green de ω , et H une fonction harmonique dont le gradient est de carré sommable dans ω .

En effet le vecteur $\vec{I} = \overrightarrow{\operatorname{grad} F} / (p-2)s_p$ est par définition de carré sommable dans ω . La distribution $T = -\operatorname{div} \vec{I}$ est donc d'énergie finie par rapport à la fonction de Green (lemme 6). La fonction $H = F - U_{\omega}^T$ est de la classe (BL) dans ω ; montrons qu'elle est harmonique dans ce domaine; on a en effet: $\Delta H = \Delta F - \Delta U_{\omega}^T$, d'où $\Delta H = 0$, en vertu de (8) et de la relation $T = -\operatorname{div} \vec{I} = -\Delta F / (p-2)s_p$. Un théorème de L. SCHWARTZ [18] conduit alors au résultat.¹ L'unicité de la décomposition (10) résultera du théorème 5.

6. *Variétés linéaires dans l'espace des fonctions de la classe (BL) dans un domaine.*
Désignons par $(\mathfrak{B}\mathfrak{L})$ l'espace des fonctions F de la classe (BL) dans un domaine

¹ Toute distribution harmonique ($\Delta H = 0$) est une fonction harmonique au sens ordinaire.

ω , normées par $(D(F))^{1/2}$. C'est un espace hilbertien (théorème de O. Nikodym). Le produit scalaire de deux fonctions F et G est défini par :

$$D(F, G) = \int \overrightarrow{\text{grad}} F \cdot \overrightarrow{\text{grad}} \bar{G} d\omega.$$

L'espace (\mathfrak{H}) des fonctions harmoniques uniformes de la classe (BL) dans ω est complet, comme il est bien connu, et constitue donc une variété linéaire fermée de $(\mathfrak{B}\mathfrak{L})$.

L'espace (\mathfrak{U}) des potentiels de Green U_ω^T d'énergie finie, normés par $(D(U_\omega^T))^{1/2} = ((p-2)s_p)^{1/2} \|T\|_\omega$ constitue également, d'après le paragraphe précédent, une variété linéaire fermée de $(\mathfrak{B}\mathfrak{L})$. (\mathfrak{U}) est d'ailleurs isomorphe à l'espace $\mathfrak{B}^{(\omega)}$ des distributions dans ω d'énergie finie par rapport à la fonction de Green, normées par $\|T\|_\omega$.

Nous dirons qu'une distribution N de $\mathfrak{B}^{(\omega)}$ est *normale* si le potentiel de Green U_ω^N est nul hors d'un compact de ω .¹ Nous pouvons énoncer :

Lemme 7. Les distributions normales sont denses dans $\mathfrak{B}^{(\omega)}$.

Soit en effet $\{\omega_n\}$ une suite de domaines croissants vers ω , avec $\bar{\omega}_n \subset \omega$; désignons par \mathfrak{B}_n la variété linéaire fermée constituée par les distributions de $\mathfrak{B}^{(\omega)}$ dont le support appartient à $C\omega_n$. Soit enfin T une distribution quelconque de $\mathfrak{B}^{(\omega)}$, T_n sa projection sur \mathfrak{B}_n .

T_n peut être appelée balayée de T sur $C\omega_n$ au sens de la fonction de Green. On a facilement : $U_\omega^T = U_\omega^{T_n}$ quasi-partout sur $C\omega_n$, donc $T - T_n$ est une distribution normale. Or $\|T_n\|_\omega$ tend vers 0, car les \mathfrak{B}_n sont décroissantes, et leur intersection se réduit à la distribution nulle. T est donc limite forte des distributions normales $T - T_n$.

Théorème 5. (\mathfrak{U}) et (\mathfrak{H}) constituent deux variétés linéaires orthogonales complémentaires de $(\mathfrak{B}\mathfrak{L})$.

Soient en effet $H \in (\mathfrak{H})$ et $U_\omega^T \in (\mathfrak{U})$. D'après le théorème 4, tout revient à montrer la nullité du produit scalaire

$$D(U_\omega^T, H) = \int_\omega \overrightarrow{\text{grad}} U_\omega^T \cdot \overrightarrow{\text{grad}} \bar{H} d\tau.$$

Or le lemme 7 exprime que les potentiels engendrés par les distributions normales sont denses dans (\mathfrak{U}) ; on peut donc supposer que T est normale, ce qui entraîne d'ailleurs $U_\omega^T = U^T$. Soient E le support de cette fonction, et D un domaine régulier

¹ Cf. G. CHOQUET et J. DENY : Sur une propriété de moyenne caractéristique des fonctions harmoniques et polyharmoniques (*Bull. Soc. Math. de France*, 52, 1944, p. 118—140).

(limité par exemple par un nombre fini de surfaces à courbure bornée), tel que $E \subset D \subset \bar{D} \subset \omega$. H coïncide dans \bar{D} avec le potentiel U^μ d'une mesure d'énergie finie portée par D .¹ On peut donc écrire, d'après le chapitre III (§ 3) :

$$D(U^T, H) = \int \overrightarrow{\text{grad}} U^T \cdot \overrightarrow{\text{grad}} \bar{H} d\tau = (p-2)s_p \int U^T d\bar{\mu} = 0.$$

Les potentiels de Green d'énergie finie jouent donc le rôle de fonctions « antiharmoniques » pour la norme $D(F)$.

Sur un théorème de L. Ahlfors. Soit F une fonction particulière de l'espace $(\mathfrak{B}\Omega)$; elle est, d'après le théorème 4, de la forme $F = U_\omega^T + H$. Désignons par \mathfrak{E} la variété linéaire (évidemment non fermée) des fonctions $G \in (\mathfrak{B}\Omega)$ telles que $F - G$ soient nulles hors d'un compact de ω .

Cherchons l'expression générale de cette fonction G . Comme $G - F \in (\mathfrak{B}\Omega)$ on a, d'après (10) : $G - F = U_\omega^N + K$, avec $K \in (\mathfrak{H})$, et N a pour support un compact de ω (cela résulte par exemple de (8)). U_ω^N est donc nulle au points réguliers de la frontière ω , et bornée sur cette frontière, ce qui entraîne que la fonction harmonique K est identiquement nulle dans ω , et par suite que N est normale. L'expression cherchée est donc :

$$G = F + U_\omega^N, \text{ où } N \text{ est normale.}$$

Les distributions normales étant denses dans $\mathfrak{B}^{(\omega)}$ (lemme 7), la variété linéaire fermée $\bar{\mathfrak{E}}$ engendrée par \mathfrak{E} est évidemment constituée par les fonctions G de la forme $G = H + U_\omega^S$, où S est une distribution quelconque de $\mathfrak{B}^{(\omega)}$, et on peut écrire, d'après le théorème 5 :

$$D(G) = D(H) + (p-2)s_p \|S\|_\omega^2.$$

Le minimum de cette expression est obtenu pour $S = 0$; on peut donc énoncer :

Soient $F \in (\mathfrak{B}\Omega)$, et \mathfrak{E} la variété linéaire précédemment définie à partir de F . Il existe une fonction harmonique H et une seule (à une constante additive près) dans ω qui est telle que :

$$\inf_{G \in \mathfrak{E}} D(G - H) = 0.$$

C'est la fonction H de la décomposition $F = U_\omega^T + H$ (c'est-à-dire la projection de F sur (\mathfrak{H})), et on a de plus :

¹ Représentation potentielle des fonctions harmoniques de C. de la Vallée-Poussin. Pour $p = 2$, on a seulement $H = U^\mu + cte$, ce qui est sans importance puisqu'on considère seulement $\text{grad } H$.

$$D(H) = \inf_{G \in \mathfrak{E}} D(G).$$

Ces résultats ont été donnés par L. AHLFORS [1] dans le cas des fonctions de la classe (BL) continûment différentiables dans un domaine-plan. Ajoutons que si $\{G_n\}$ est une suite de fonctions de \mathfrak{E} pour lesquelles on a $\lim_n D(G_n) = \inf_{G \in \mathfrak{E}} D(G)$, G_n tend fortement vers H .

BIBLIOGRAPHIE

- [1] L. AHLFORS. Das Dirichletsche Prinzip (*Math. Annalen*, 1947, p. 36—42).
- [2] A. BEURLING. Ensembles exceptionnels (*Acta Math.* 72, 1940, p. 1—13).
- [3] A. BEURLING. Sur les spectres des fonctions (Conférence faite au Colloque sur l'Analyse harmonique, tenu à Nancy en juin 1947).
- [4] M. BRELOT. Familles de Perron et Problème de Dirichlet (*Acta de Szeged*, 9, 1939, p. 43—63).
- [5] M. BRELOT. Points irréguliers et transformations continues en théorie du potentiel (*Journ. de Math.* 19, 1940, p. 319—337).
- [6] M. BRELOT. Sur les ensembles effilés (*Bull. Sciences Math.* 68, 1944, p. 1—32).
- [7] H. CARTAN. Sur les fondements de la théorie du potentiel (*Bull. Soc. Math. de France*, 69, 1941, p. 71—96).
- [8] H. CARTAN. Théorie du potentiel newtonien : Energie, capacité, suites de potentiels (*Bull. Soc. Math. de France*, 73, 1945, p. 74—106).
- [9] H. CARTAN. Théorie générale du balayage en potentiel newtonien (*Ann. Univ. Grenoble*, 22, 1946, p. 221—280).
- [10] C. DE LA VALLÉE-POUSSIN. Les nouvelles méthodes de la théorie du potentiel (*Actualités Scient. et Ind.*, n° 578, 1937).
- [11] J. DUFRESNOY. Sur les fonctions méromorphes et univalentes dans le cercle-unité (*Bull. Sciences Math.*, 69, 1945, p. 21—37).
Remarques complémentaires sur deux propriétés de la représentation conforme (Idem, p. 117—120).
- [12] G. C. EVANS. On potentials of positive mass (*Trans. Amer. Math. Soc.* 37, 1935, p. 226—253).
- [13] O. FROSTMAN. Potentiels d'équilibre et capacité des ensembles (*Lund*, 1935).
- [14] O. FROSTMAN. Sur les fonctions surharmoniques d'ordre fractionnaire (*Ark. för Math. Astr. och Fysik*, 1939).
- [15] O. NIKODYM. Sur un théorème de M. Zaremba concernant les fonctions harmoniques (*Journ. de Math.* 9 série, 12, 1933, p. 95—108).
- [16] O. NIKODYM. Sur une classe de fonctions considérées dans l'étude du problème de Dirichlet (*Fund. Math.* 21, 1933, p. 129—150).
- [17] M. RIESZ. Intégrales de Riemann-Liouville et potentiels (*Acta de Szeged*, 9, 1938, p. 1—42).
- [18] L. SCHWARTZ. Théorie des distributions et transformation de Fourier (en préparation aux *Actualités Scient. Ind.* ; cette théorie a été exposée au cours Peccot 1946, et résumée dans deux articles des *Annales Univ. Grenoble* : 21, 1945, p. 57—74, et 23, 1948, p. 1—24).
- [19] S. ZAREMBA. Sur un problème toujours possible, comprenant à titre de cas particulier, le problème de Dirichlet et celui de Neumann (*Journ. de Math.*, 9 série, 6, 1927, p. 127—163).