SUR LES PRODUITS D'INVERSIONS.

Par

RENÉ LAGRANGE

à DIJON.

Introduction.

L'objet de cet article est l'étude de la transformation anallagmatique résultant des inversions faites successivement par rapport à n sphères données. Les résultats sont de forme simple et intéressante[1], et le problème se prête de manière remarquable à l'emploi de l'algorithme des points, plans et sphères, classique en géométrie différentielle anallagmatique. Le premier chapitre précise les notations et les résultats essentiels dont nous aurons besoin ici; il m'a paru intéressant de faire un exposé synthétique de cet algorithme indépendant de la définition des coordonnées polysphériques, de même que le calcul vectoriel permet de se libérer des coordonnées cartésiennes[2]. Le deuxième chapitre établit la formule qui représente le transformé anallagmatique d'un point ou d'une sphère par les inversions effectuées, dans l'ordre, par rapport à n sphères $U_1, U_2, \ldots U_n$, de masses égales à 1. La transformation de la distance anallagmatique de deux points, ou de celle d'un point à une sphère, résulte de la transformation de la masse d'un point. Si h est la masse d'un point M, h_n celle de son transformé M_n, le rapport $\frac{h_n}{h}$ est une fonction du second degré du point M, dont les coefficients s'expriment de manière remarquable à l'aide des rayons des sphères et des vecteurs joignant les centres des sphères consécutives. Ce résultat a pu être obtenu grâce à l'usage d'une multiplication symbolique dont le principe est le suivant: étant donné des vecteurs numérotés, un monôme avec de tels vecteurs représente ce que l'on obtient en accouplant ces vecteurs, écrits dans l'ordre des numéros, de manière à former des carrés ou produits scalaires; il n'y a pas d'ambi-

---

[1] Un aperçu en a été publié aux C. R. A. S., T. 226 (1948), p. 625—27 et p. 866—68.

[2] Le rapprochement avec la géométrie analytique se fera naturellement.

guïté avec un nombre pair de vecteurs; pour un nombre impair, on obtient un vecteur, mais il convient de préciser si c'est le premier ou le demier des vecteurs qui reste isolé; dans l'opération actuelle, ce sera le premier.

Si $\overline{U_n \ldots U_2 U_1}$ représente la transformation anallagmatique étudiée, le transformé $M_n = \overline{U_n \ldots U_2 U_1} M$ est donné par la formule

$$M_n = M - 2 \sum_{i=1}^{n} (U_i M) V_i ,$$

où $U_i M$ est la distance anallagmatique de M à la sphère U_i, et où les V_i forment un système de n sphères appartenant à la famille linéaire des U_i, définies par

$$V_i = \overline{U_n \ldots U_{i+2} U_{i+1}} U_i \qquad i = 1, 2, \ldots n .$$

Les deux systèmes de sphères U_i et V_i sont associés de manière réciproque. On a d'autre part

$$\frac{h_n}{h} = \sigma_1 \overrightarrow{A_1 M}^2 - 2 \vec{\alpha}_1 \overrightarrow{A_1 M} + R_1^2 \sigma_2 ,$$

où le vecteur $\vec{\alpha}_1$ et les coefficients σ_p sont définis de la manière suivante. Si R_i désigne le rayon de U_i, et R'_i celui de V_i, on a

$$\sigma_p = \sum_{i=p}^{n} \frac{1}{R_i R'_i},$$

$$\vec{\alpha}_p = \sum_{i=p}^{n} \frac{\overrightarrow{A_p A_i}}{R_i R'_i},$$

où $p = 1, 2, \ldots n$; entre ces éléments existe la relation remarquable

$$\vec{\alpha}_p^2 = R_p^2 \sigma_p \sigma_{p+1} .$$

C'est grâce à l'opération symbolique mentionnée plus haut qu'on réussit à exprimer aisément ces éléments, en fonction des R_i et des vecteurs $\overrightarrow{A_i A_{i+1}}$, par les formules (34) et (43) du chapitre II.

La deuxième partie de ce chapitre résout le problème de reconnaître, en fonction des R_i et des $\overrightarrow{A_i A_{i+1}}$, si la transformation $\overline{U_n \ldots U_2 U_1}$ est une similitude. Il faut et il suffit que $\frac{h_n}{h}$ soit constant, donc que $\vec{\alpha}_1$ et σ_1 soient nuls. Pour l'ensemble des inversions réelles, il suffit que σ_1 soit nul, de sorte que $\sigma_1 = 0$ entraîne une condition vectorielle ($\vec{\alpha}_1 = 0$). Il est intéressant d'exprimer celle-ci aussi simplement que possible; c'est ce qui est fait pour moins de 6 sphères, par deux méthodes différentes.

Le troisième chapitre est consacré plus particulièrement encore aux produits d'inversion équivalents à une homothétie. La condition que $\overline{U_n \ldots U_2 U_1}$ soit une similitude permet d'abord de tout exprimer à l'aide des seuls vecteurs $\overrightarrow{A_1A_2}$, $\overrightarrow{A_1A_3}, \ldots \overrightarrow{A_1A_{n-1}}$, ou $\overrightarrow{A_nA'_2}$, $\overrightarrow{A_nA'_3}, \ldots \overrightarrow{A_nA'_{n-1}}$ (A_n et A'_n coïncident toujours, car $U_n = V_n$). Cette remarque faite, la condition trouvée a une forme tout à fait remarquable: il faut et il suffit que ces vecteurs soient tels que, pour tout vecteur ξ de l'espace, on ait l'une ou l'autre des identités

$$\frac{1-\varepsilon}{2}\vec{\xi} \equiv \sum_{i=2}^{n-1}\left(\frac{\overrightarrow{A_1A_i}}{R_i}\vec{\xi}\right)\frac{\overrightarrow{A_nA'_i}}{R_i} \qquad \varepsilon = \pm 1\,,$$

où la parenthèse est un produit scalaire.

Si $\varepsilon = 1$, les $n-2$ vecteurs $\overrightarrow{A_nA'_i}$ ne peuvent pas être linéairement distincts; il en est donc de même pour les $n-2$ vecteurs associés $\overrightarrow{A_1A_i}$; s'il existe q relations linéaires distinctes entre ces vecteurs, q est nécessairement supérieur ou égal à $\frac{n-2}{2}$. Un cas extrême est $q = n-3$, c'est-à-dire où les centres sont alignés[1]; il est étudié au paragraphe 21 pour les deux valeurs de ε, et l'on voit que $\varepsilon = 1$ ou -1 suivant que n est pair ou impair. Pour $\varepsilon = -1$, (1) exige que $n-2-q$ soit le nombre N des dimensions de l'espace. Le cas extrême où $q = 0$, c'est-à-dire $n = N+2$, est étudié au paragraphe 22, où l'on obtient la configuration générale de $N+2$ inversions dont les centres définissent l'espace et dont le produit équivaut à une homothétie. Dans le cas général, on est conduit à des systèmes d'équations algébriques compliqués; même pour la valeur minimum $q = \frac{n-2}{2}$ associée à $\varepsilon = 1$, où le degré de ces équations ne dépasse pas 3, on n'a pu qu'écrire ces systèmes d'équations, en les réduisant autant que possible à des équations probablement distinctes.

Les derniers paragraphes du chapitre sont consacrés aux transformations équivalentes à l'identité.

Dans le même esprit, le dernier chapitre traîte des transformations $\overline{U_n \ldots U_2 U_1}$ équivalant à une inversion. Le problème est abordé par deux méthodes. L'une utilise la formule de tranformation d'un point, et conduit au système de conditions vectorielles (28) du théorème III. L'autre utilise la formule de transformation d'une sphère, et conduit à l'identité (15) du chapitre. La comparaison avec le système (28)

[1] $q = n-2$ donne le cas banal où toutes les sphères sont concentriques.

est instructive. La discussion du problème est faite comme pour celui étudié au troisième chapitre, dans la mesure où le permet la complication des systèmes d'équations auxquels on aboutit, et permet de faire néanmoins un certain nombre d'observations intéressantes.

CHAPITRE I

Algorithme des points, sphères et plans.

1. L'espace considéré est l'espace euclidien E à N dimensions. P désigne le point courant de cet espace. A étant un point donné, nous convenons de le représenter par le carré scalaire variable $-\frac{\overrightarrow{AP}^2}{2}$, et nous écrivons

$$A = -\frac{\overrightarrow{AP}^2}{2}. \tag{1}$$

Le second membre s'annule quand P est en A, ou, plus généralement, sur la sphère de rayon nul et de centre A. k désignant un scalaire quelconque, l'expression

$$kA = -k\frac{\overrightarrow{AP}^2}{2} \tag{2}$$

représente le même point A, mais affecté d'une masse k. Lorsque P est remplacé par un point donné B, l'expression $-\frac{\overrightarrow{AB}^2}{2}$ représente, par définition, le produit des deux points A et B, et l'on écrit

$$AB = -\frac{\overrightarrow{AB}^2}{2}. \tag{3}$$

Ce produit est donc symétrique. Enfin, par définition, k et h étant deux scalaires, le produit

$$(kA)(hB) = kh(AB) = -kh\frac{\overrightarrow{AB}^2}{2};$$

ce produit général est également commutatif. En particulier, $(kA)^2 = 0$ quels que soient A et k.

Une sphère S de centre A et de rayon R est représentée par le second membre de

$$U = \frac{\overrightarrow{AP}^2 - R^2}{2R}, \tag{4}$$

c'est à dire par la puissance réduite, par rapport à S, du point courant P de l'espace. D'une manière générale, l'expression

$$kU = k\frac{\overrightarrow{AP}^2 - R^2}{2R},$$

où k est un scalaire quelconque non nul, représente la même sphère S affectée de la masse k. On conviendra de dire que (1) et (4) sont un point et une sphère unitaires. Un point est évidemment une sphère de rayon nul et de masse nulle (en tant que sphère).

Le produit d'une sphère unitaire U et d'un point unitaire B est, par définition,

$$UB = U(B) = \frac{\overrightarrow{AB}^2 - R^2}{2R},$$

c'est à dire la puissance réduite de B par rapport à U. D'une manière générale, $S = kU$ et le point hB fournissent le produit

$$S(hB) = khUB\,.$$

Le plan est la limite d'une sphère dont le centre A et le rayon R tendent vers l'infini, sans qu'elle cesse de passer par un point fixe M. Ainsi, l'expression (4), où l'on suppose de plus que le vecteur unitaire $\dfrac{\overrightarrow{AM}}{R}$ a une limite $\vec{e}$, sécrit

$$U = \frac{1}{2R}\left[(\overrightarrow{MP} - \overrightarrow{MA})^2 - R^2\right] = \frac{1}{2R}\left[\overrightarrow{MP}^2 - 2\overrightarrow{MA}\,\overrightarrow{MP}\right]$$

et tend vers $\vec{e}\,\overrightarrow{MP}$. On représentera donc un plan par

$$\varpi = \vec{e}\,\overrightarrow{MP}\,, \tag{5}$$

où M est un point quelconque de ce plan, et $\vec{e}$ un vecteur normal à ce plan. Lorsque $\vec{e}^2 = 1$, ce qui est le cas dans le calcul qui vient d'être fait, ϖ est dit unitaire. Mais il est clair que la sphère kU donnerait une expression (5) où $\vec{e}^2 = k^2$, c'est à dire le produit du plan unitaire par le scalaire k, appelé la masse du plan. Bien entendu, $\vec{e}^2 = 0$ pour un plan isotrope. B désignant un point donné, unitaire ainsi que ϖ, le produit ϖB est défini par

$$\varpi B = \varpi(B) = \vec{e}\,\overrightarrow{MB}\,, \tag{6}$$

et représente la distance algébrique de B au plan. D'une manière générale,

$$(k\varpi)(hB) = kh\,\vec{e}\,\overrightarrow{MB}\,.$$

2. **Addition.** La somme de points A_i, de plans ϖ_j, et de sphères S_h, de masses quelconques, est de la forme

$$\sum_i A_i + \sum_j \varpi_j + \sum_h S_h ,$$

et représente en général une sphère, pouvant se réduire à un plan ou un point, affectée d'une certaine masse. Ainsi, les points A_i étant unitaires, on a

$$\sum_i k_i A_i = -\tfrac{1}{2} \sum_i k_i \overrightarrow{A_i P}^2,$$

ou, en introduisant un point fixe O quelconque,

$$\sum_i k_i A_i = -\left(\sum_i k_i\right) \frac{\overrightarrow{OP}^2}{2} + \left(\sum_i k_i \overrightarrow{OA_i}\right) \overrightarrow{OP} - \tfrac{1}{2} \sum_i k_i \overrightarrow{OA}_i^2 . \tag{7}$$

Si $\sum_i k_i \neq 0$, prenons pour O le barycentre des points A_i affectés des masses k_i; la somme se réduit à

$$S = \sum_i k_i A_i = -\left(\sum_i k_i\right) \frac{\overrightarrow{OP}^2 - R^2}{2}, \tag{8}$$

avec

$$R^2 = -\frac{\sum_i k_i \overrightarrow{OA}_i^2}{\sum_i k_i}. \tag{9}$$

Lorsque $\sum_i k_i = 0$, le vecteur $\sum_i k_i \overrightarrow{OA_i}$ ne dépend pas de O, et, si on le désigne par $\vec{e}$, (7) devient

$$S = \sum_i k_i A_i = \vec{e}\, \overrightarrow{OP} - \tfrac{1}{2} \sum_i k_i \overrightarrow{OA}_i^2 . \tag{10}$$

Ainsi S représente une sphère si $\sum_i k_i \neq 0$ et si $R \neq O$; c'est le barycentre 0, affecté de la masse $\sum_i k_i$, si $R = 0$. Enfin, si $\sum_i k_i = 0$, S est un plan normal au vecteur $\vec{e}$, supposé différent de zéro. Cependant, si $\vec{e} = 0$, S ne contient plus le point courant P; lorsque $\sum_i k_i \overrightarrow{OA}_i$, dont la valeur est alors indépendante de O, n'est pas nul, nous convenons que (10) représente le plan de l'infini

$$\varpi_0 = 0 \times \overrightarrow{OP} + h , \tag{11}$$

où $h = -\frac{1}{2}\sum_i k_i \overrightarrow{OA}_i$ est quelconque, mais non nul. Lorsque h lui-même est nul, on écrira

$$\sum_i k_i A_i = 0 \, .$$

Pour qu'il en soit ainsi, il faut et il suffit que les 3 expressions

$$\sum_i k_i \, , \quad \sum_i k_i \overrightarrow{OA}_i \, , \quad \sum_i k_i \overrightarrow{OA}_i^2$$

soient nulles. Chacune des deux dernières sommes est d'ailleurs indépendante de O dès que celles qui la précèdent sont nulles.

3. **Produit des sphères et plans.** Nous avons défini le produit d'un point par un autre point, une sphère ou un plan. Etant donné la sphère (8) et une autre sphère

$$S' = \sum_j h_j B_j = -\Big(\sum_j h_j\Big)\frac{\overrightarrow{O'P}^2 - R'^2}{2} \, ,$$

considérons d'abord la somme des produits de S par $h_j B_j$, soit

$$\sum_j S(h_j B_j) = \sum_j h_j S(B_j) = \sum_j h_j \frac{-\sum_i k_i}{2}(\overrightarrow{OB}_j^2 - R^2) \, ,$$

ou, d'après (8) lui-même,

$$\sum_j S(h_j B_j) = \sum_j h_j \Big(\sum_i k_i A_i B_j\Big) = \sum_i \sum_j k_i h_j A_i B_j ;$$

ceci s'écrit

$$-\tfrac{1}{2}\sum_i \sum_j k_i h_j \overrightarrow{A_i B_j}^2 = -\tfrac{1}{2}\sum_i \sum_j k_i h_j (\overrightarrow{A_i O} + \overrightarrow{OO'} + \overrightarrow{O'B_j})^2 \, , \tag{12}$$

donc, compte tenu des propriétés des barycentres O, O' et des expressions des rayons de S et S' par la formule (9),

$$\sum_j S(h_j B_j) = \tfrac{1}{2}\Big(\sum_i k_i\Big)\Big(\sum_j h_j\Big)(R^2 + R'^2 - \overrightarrow{OO'}^2) \, . \tag{13}$$

Si l'on désigne par θ l'angle des deux sphères, il vient enfin

$$\sum_j S(h_j B_j) = \Big(\sum_i k_i\Big)\Big(\sum_j h_j\Big) RR' \cos\theta \, .$$

On voit ainsi que le premier membre de (13) a une valeur qui ne dépend que des sphères S, S' et non des points dont la somme les définit ; il est symétrique en S et S'. On peut donc le désigner par le produit $SS' = S'S$. Observons d'autre part que la masse de (8) est $-R\left(\sum_i k_i\right)$, donc le produit des deux sphères unitaires correspondantes vaut $\cos\theta$. On retiendra donc que

$$(14) \qquad SS' = S'S = \sum_i \sum_j k_i h_j A_i B_j = (\text{masse } S)\times(\text{masse } S')\times\cos\,(\widehat{S,S'})\,.$$

Ce résultat implique la distributivité du produit d'une sphère et d'une somme de points. En associant de diverses manières les points d'une telle somme, on obtient une somme de sphères, et la distributivité s'étend au produit de deux sommes de sphères, plans et points.

L'interprétation de (14) a été obtenue avec deux vraies sphères; mais par variation continue des points constitutifs, de manière que $\sum_i k_i$ ou $\sum_j h_j$ tendent vers zéro, elle s'étend aux cas où ces sphères deviennent des plans, séparément ou ensemble. Vérifions le, d'après (12), dans le cas de deux plans; on a en effet

$$\sum_i k_i = \sum_j h_j = 0\,,$$

$$\sum_i k_i \overrightarrow{OA}_i = \vec{e}\,, \quad \sum_j h_j \overrightarrow{O'B}_j = \vec{e}'\,,$$

$$S = \vec{e}\,\overrightarrow{OP} - \tfrac{1}{2}\sum_i k_i \overrightarrow{OA}_i^{\,2}\,, \quad S' = \vec{e}'\,\overrightarrow{O'P} - \tfrac{1}{2}\sum_j h_j \overrightarrow{O'B}_j^{\,2}\,,$$

et (12) se réduit au seul terme

$$-\sum_i \sum_j k_i h_j \overrightarrow{A_i O}\,\overrightarrow{O'B}_j = \vec{e}\,\vec{e}' = |\vec{e}|\times|\vec{e}'|\times\cos\,(\widehat{\vec{e},\vec{e}'})\,,$$

qui vaut bien ce que donne le dernier membre de (14).

Si S', par exemple, est une sphère de rayon nul, c'est à dire le point O' (unitaire) affecté de la masse $\sum_j h_j$, (13), où $R' = 0$, remplace le dernier membre de (14) par

$$(15) \qquad SS' = S'S = -\tfrac{1}{2}\left(\sum_i k_i\right)\left(\sum_j h_j\right)(\overrightarrow{OO'}^2 - R^2) = (\text{masse de } O')\times SO'\,,$$

et a bien la signification adoptée initialement pour le produit d'une sphère et d'un point. Enfin, si S est également un point, (15) se réduit bien à

$$SS' = S'S = (\text{masse } S)\times(\text{masse } S')\times\frac{-\overrightarrow{OO'}^{\,2}}{2}.$$

Tous ces produits sont commutatifs et distributifs pour l'addition. L'addition est elle-même associative.

Remarques. Une sphère unitaire (4) est, d'une infinité de façons, la somme de deux points $k_1A_1+k_2A_2$, de masses k_1, k_2. L'identification donne les trois conditions nécessaires et suffisantes

$$\begin{cases} k_1+k_2 = -\dfrac{1}{R}\,, \\ k_1\overrightarrow{AA_1}+k_2\overrightarrow{AA_2} = 0\,, \\ k_1\overrightarrow{AA_1}^2+k_2\overrightarrow{AA_2}^2 = R\,. \end{cases}$$

A_1 étant choisi arbitrairement, sauf sur la sphère U, on voit aisément que $k_1 = \dfrac{1}{2UA_1}$, et que A_2 est l'inverse de A_1 par rapport à U, avec $k_2 = \dfrac{1}{2UA_2}$. On observe en particulier que, pour deux points unitaires inverses par rapport à U, on a

$$\frac{1}{UA_1}+\frac{1}{UA_2} = -\frac{2}{R}.$$

Si $S = hU$, on peut conserver les points A_1 et A_2, et multiplier simplement par h les masses k_1 et k_2 qui fournissent U.

Une somme $S+S'$ de deux sphères peut être remplacée d'une infinité de façons par une somme de deux points, puisque c'est une sphère. Mais a priori on peut observer qu'on peut décomposer simultanément S et S' en

$$S = k_1A_1+k_2A_2\,, \quad S' = h_1A_1+h_2A_2\,,$$

avec le couple des points qui sont simultanément inverses par rapport à S, S', c'est-à-dire les points de Poncelet de leur faisceau.

Avec le plan de l'infini (11) défini par une somme (10), on voit que tout point unitaire A donne

$$\varpi_0 A = \sum_i k_iA_iA = -\tfrac{1}{2}\sum_i k_i\overrightarrow{A_iA}^2 = h\,; \tag{16}$$

le plan $\varpi = \vec{e}\,\overrightarrow{AP}$ donne le produit

$$\varpi_0\varpi = \sum_i k_i\varpi A_i = \vec{e}\sum_i k_i\overrightarrow{AA_i} = 0\,. \tag{17}$$

Le produit de (11) et d'une sphère unitaire (4) est

$$\varpi_0 U = \sum_i k_iUA_i = \frac{1}{2R}\sum_i k_i(\overrightarrow{AA_i}^2-R^2) = -\frac{h}{R}. \tag{18}$$

Enfin le carré

$$\varpi_0^2 = \sum_i k_i\varpi_0A_i = h\sum_i k_i = 0$$

Observons qu'on peut écrire (4)

$$U = \frac{-A}{R} + \frac{R}{2}\varpi_0 \qquad \varpi_0 = -1 ,$$

en fonction du centre unitaire A et de son inverse ϖ_0 par rapport à U. On retrouve ainsi aisément que le produit de deux sphères unitaires est le cosinus de leur angle.

Si A et B désignent deux points unitaires, les points de la droite AB sont de la forme

$$M = \lambda A + \mu B + \nu\varpi_0 \qquad \varpi_0 = -1 ,$$

avec

$$M^2 = 2[\lambda\mu AB - (\lambda+\mu)\nu] = 0 ,$$

donc

$$\nu = \frac{\lambda\mu}{\lambda+\mu} AB .$$

La masse du point M est d'ailleurs $\lambda+\mu$. Les points unitaires de la droite AB sont donc

(19) $$M = \lambda A + (1-\lambda)B + \lambda(1-\lambda)(AB)\varpi_0 \qquad \varpi_0 = -1 ,$$

avec

$$\overrightarrow{MB} = \lambda\overrightarrow{AB} .$$

4. **Orthogonalité.** S et S' sont orthogonales si $SS' = 0$. Lorsque l'une des deux sphères devient un point B, la condition d'orthogonalité, du genre $SB = 0$, exprime que B est sur la sphère S. Pour deux points, $AB = 0$ exprime que la droite AB est isotrope ou que les deux po'nts géométriques coïncident. Le plan de l'infini est orthogonal à tous les plans et à lui-même.

Par exemple, la famille des sphères $S = k_1A_1 + k_2A_2$, où A_1, A_2 sont deux points unitaires fixés, et k_1, k_2 des paramètres quelconques, sont orthogonales à toutes les sphères qui passent par A_1 et A_2; S dépend géométriquement d'un paramètre arbitraire; c'ést donc bien la famille des sphères par rapport auxquelles A_1 et A_2 sont inverses. De même, la famille $S = k_1A_1 + k_2A_2 + k_3A_3$, où A_1, A_2, A_3 sont trois points non alignés, est la famille des sphères orthogonales aux sphères qui passent par A_1, A_2, A_3; S, qui dépend géométriquement de deux paramètres, représente la famille des sphères orthogonales au cercle $A_1A_2A_3$. Si A_1, A_2, A_3 sont placés de manière quelconque, S peut se réduire au plan de l'infini, pourvu que

$$k_1 + k_2 + k_3 = k_1\overrightarrow{A_3A_1} + k_2\overrightarrow{A_3A_2} = 0 ,$$

c'est à dire si les trois points sont alignés, avec

$$\frac{\overrightarrow{A_1A_2}}{k_3} = \frac{\overrightarrow{A_2A_3}}{k_1} = \frac{\overrightarrow{A_3A_1}}{k_2},$$

et il suffit que les points soient distincts pour que $S \neq 0$.

5. **Différentielle d'un élément variable.** Si A est un point unitaire variable, et si A_1 est une valeur infiniment voisine, la partie principale de

$$A_1 - A = -\frac{\overrightarrow{A_1P}^2}{2} + \frac{\overrightarrow{AP}^2}{2}$$

est la différentielle du point A

$$dA = \overrightarrow{dA}\,\overrightarrow{AP};$$

c'est un plan, perpendiculaire en A au vecteur $\overrightarrow{dA}$; sa masse est $|\overrightarrow{dA}|$. Pour un point de masse variable, soit

$$A = -k\frac{\overrightarrow{AP}^2}{2},$$

il vient

$$dA = -\frac{dk}{2}\left[(\overrightarrow{OP}-\overrightarrow{OA})^2 - 2k\frac{\overrightarrow{dA}\,(\overrightarrow{OP}-\overrightarrow{OA})}{dk}\right],$$

où O désigne un point quelconque. C'est une sphère de centre O si l'on choisit ce point de manière que

(20) $$\overrightarrow{AO} = k\frac{\overrightarrow{dA}}{dk},$$

et il reste alors

(21) $$dA = -\frac{dk}{2}(\overrightarrow{OP}^2 - \overrightarrow{OA}^2);$$

c'est une sphère normale en A à la trajectoire de ce point A.

Si $\varpi = \vec{e}\,\overrightarrow{AP}$ est un plan variable, on a de même

(22) $$d\varpi = \overrightarrow{de}\overrightarrow{AP} - \vec{e}\,\overrightarrow{dA},$$

donc

$$\varpi d\varpi = \vec{e}\,\overrightarrow{de};$$

le plan $d\varpi$ est orthogonal à ϖ pourvu que ϖ ait une masse constante.

Pour une sphère variable

$$S = \frac{k}{2R}(\overrightarrow{AP}^2 - R^2),$$

$$(23)\qquad dS = d\left(\frac{k}{2R}\right)(\overrightarrow{AP}^2 - R^2) - \frac{k}{R}(\overrightarrow{dA}\,\overrightarrow{AP} + RdR)\,.$$

C'est une sphère si $d\left(\frac{k}{R}\right) \neq 0$; l'orthogonalité $SdS = 0$ s'exprime par

$$AdS = R^2 d\left(\frac{k}{2R}\right),$$

c'est-à-dire

$$R^2 d\left(\frac{k}{R}\right) + kdR = Rdk = 0\,;$$

ce sont donc les sphères de masse constante qui sont orthogonales à leur dérivée. En particulier, la sphère unitaire de courbure ν

$$(24)\qquad U = \frac{\nu}{2}\left(\overrightarrow{AP}^2 - \frac{1}{\nu^2}\right)$$

donne

$$dU = \frac{d\nu}{2}\left(\overrightarrow{AP}^2 - 2\nu\frac{\overrightarrow{dA}}{d\nu}\overrightarrow{AP} + \frac{1}{\nu^2}\right) = \frac{d\nu}{2}\left[\left(\overrightarrow{AP} - \nu\frac{\overrightarrow{dA}}{d\nu}\right)^2 + \frac{1}{\nu^2} - \nu^2\left(\frac{\overrightarrow{dA}}{d\nu}\right)^2\right].$$

C'est une sphère de centre A_1 tel que

$$(25)\qquad \overrightarrow{AA_1} = \nu\frac{\overrightarrow{dA}}{d\nu},$$

de courbure ν_1 définie par

$$(26)\qquad \frac{1}{\nu_1^2} = \left(\nu\frac{\overrightarrow{dA}}{d\nu}\right)^2 - \frac{1}{\nu^2},$$

et de masse $\frac{d\nu}{\nu_1}$, c'est-à-dire que

$$(27)\qquad dU = \frac{d\nu}{2}\left(\overrightarrow{A_1P}^2 - \frac{1}{\nu_1^2}\right).$$

Grâce à la distributivité du produit pour l'addition, la règle de dérivation du produit de deux éléments algébriques s'applique au produit de deux sphères, et d'une manière générale, au produit de deux sommes de sphères.

CHAPITRE II

Généralités sur les produits d'inversions.

6. Soit une sphère unitaire U, pouvant se réduire à un plan unitaire. C'est la base d'une inversion que nous désignons par $\overline{U}$. L'inverse M' d'un point M par rapport à U s'écrira $\overline{U}M$. Nous savons d'autre part que U est de la forme $\lambda M+\lambda' M'$, donc on peut écrire

$$M' = M+\lambda U\,,$$

avec

$$M'^2 = M^2+2\lambda UM+\lambda^2 = 0\,,$$

c'est à dire

$$\lambda(2UM+\lambda) = 0\,;$$

la seule solution acceptable est $\lambda = -2UM$. L'inverse d'un point quelconque M par rapport à la sphère unitaire U est donc

$$M' = M-2(UM)U\,. \tag{1}$$

Si Φ désigne une sphère unitaire, la formule analogue à (1)

$$\Phi' = \Phi-2(U\Phi)U \tag{2}$$

représente une sphère du faisceau U, Φ; l'élévation au carré donne $\Phi'^2 = 1$, et l'on voit en outre que $U\Phi' = -U\Phi$, donc Φ' est l'inverse de Φ par rapport à U à moins que $\Phi' = -\Phi$; mais, dans ce cas, il résulterait de (2) que $\Phi = (U\Phi)U$, de sorte que Φ coïnciderait avec U, et $-\Phi$ serait encore l'inverse de Φ. Les formules (1) et (2) représentent donc les inverses d'un point et d'une sphère quelconques par rapport à la sphère unitaire U. On vérifie également sur (2) que, dans une inversion réelle, c'est à dire si U a un centre réel et un rayon réel ou imaginaire pur[1], Φ et $\overline{U}\Phi$ sont simultanément réels ou imaginaires purs. Notons aussi que, comme son rayon, une sphère unitaire est définie au signe près.

7. Considérons maintenant deux sphères unitaires U_1, U_2 et le produit des deux inversions faites par rapport à U_1, puis U_2, que nous désignons par $\overline{U_2 U_1}$. On a successivement les deux transformés

$$M_1 = \overline{U}_1 M = M-2(U_1 M)U_1\,,$$
$$M_2 = \overline{U}_2 M_1 = M_1-2(U_2 M_1)U_2\,,$$

donc, en fonction de M,

$$M_2 = \overline{U_2 U_1}M = M-2(U_1 M)U_1-2(U_2 M)U_2+(-2)^2(U_1 M)(U_1 U_2)U_2\,.$$

---

[1] Dans ce dernier cas, on dira que U est imaginaire pure.

D'une manière générale, si $U_1, U_2, \dots U_n$ sont n sphères unitaires, le transformé anallagmatique

$$M_n = \overline{U_n \dots U_2 U_1 M}$$

est donné par la formule

$$(3) \qquad M_n = M + \sum_{p=1}^{n} (-2)^p \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_p \leq n} (U_{i_1} M)(U_{i_1} U_{i_2})(U_{i_2} U_{i_3}) \dots (U_{i_{p-1}} U_{i_p}) U_{i_p} .$$

Pour l'établir par récurrence, ajoutons une sphère U_{n+1}. (3) étant admis, le nouveau transformé $M_{n+1} = \overline{U}_{n+1} M_n$ est

$$\begin{aligned} M_{n+1} &= M_n - 2(U_{n+1} M_n) U_{n+1} \\ &= M + \sum_{p=1}^{n} (-2)^p \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_p \leq n} (U_{i_1} M)(U_{i_1} U_{i_2}) \dots (U_{i_{p-1}} U_{i_p}) U_{i_p} - 2(U_{n+1} M) U_{n+1} \\ &\quad + \sum_{p=1}^{n} (-2)^{p+1} \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_p \leq n} (U_{i_1} M)(U_{i_1} U_{i_2}) \dots (U_{i_{p-1}} U_{i_p})(U_{i_p} U_{n+1}) U_{n+1} . \end{aligned}$$

En ordonnant suivant les puissances de 2, sous la forme

$$M_{n+1} = M + \sum_{p=1}^{n+1} (-2)^p K_p ,$$

on voit tout de suite que

$$K_1 = \sum_{1 \leq i_1 \leq n+1} (U_{i_1} M) U_{i_1} ,$$

et

$$\begin{aligned} K_{n+1} &= \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_n \leq n} (U_{i_1} M)(U_{i_1} U_{i_2}) \dots (U_{i_{n-1}} U_{i_n})(U_{i_n} U_{n+1}) U_{n+1} \\ &= (U_1 M)(U_1 U_2) \dots (U_n U_{n+1}) U_{n+1} , \end{aligned}$$

qui sont de la forme des coefficients de (3); pour $2 \leq p \leq n$, on a enfin

$$K_p = \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_p \leq n} (U_{i_1} M)(U_{i_1} U_{i_2}) \dots (U_{i_{p-1}} U_{i_p}) U_{i_p} + \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_{p-1} \leq n} (U_{i_1} M)(U_{i_1} U_{i_2}) \dots (U_{i_{p-1}} U_{n+1}) U_{n+1} ;$$

en posant $n+1 = i_p$, la dernière somme s'écrit

$$\sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_{p-1} < i_p = n+1} (U_{i_1} M)(U_{i_1} U_{i_2}) \dots (U_{i_{p-1}} U_{i_p}) U_{i_p} ,$$

de sorte que l'ensemble des deux sommes de K_p se représente par la somme unique

$$K_p = \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_{p-1} < i_p \leq n+1} (U_{i_1} M)(U_{i_1} U_{i_2}) \dots (U_{i_{p-1}} U_{i_p}) U_{i_p} ,$$

qui est bien de la forme du terme correspondant de (3). Cette formule est donc générale.

L'identité de forme de (1) et (2) montre que la transformée $\Phi_n = \overline{U_n \dots U_2 U_1 \Phi}$ d'une sphère Φ est une sphère de masse égale

$$\Phi_n = \Phi + \sum_{p=1}^{n} (-2)^p \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_p \leq n} (U_{i_1} \Phi)(U_{i_1} U_{i_2}) \dots (U_{i_{p-1}} U_{i_p}) U_{i_p} . \tag{4}$$

8. Ordonnons le second membre de (3) suivant les produits $(U_{i_1} M)$. En posant $i_1 = i, i_2 = \alpha_1, i_3 = \alpha_2, \dots i_p = \alpha_{p-1}$, il vient

$$M_n = M - 2 \sum_{i=1}^{n} (U_i M) V_i , \tag{5}$$

avec

$$V_i = \sum_{p=1}^{n-i} (-2)^{p-1} \sum_{i < \alpha_1 < \alpha_2 < \dots < \alpha_{p-1} \leq n} (U_i U_{\alpha_1})(U_{\alpha_1} U_{\alpha_2}) \dots (U_{\alpha_{p-2}} U_{\alpha_{p-1}}) U_{\alpha_{p-1}} ,$$

la dernière somme se réduisant à U_i pour $p = 1$. Pour $p \geq 2$, ordonnons par rapport à l'indice α_{p-1}, que nous désignons par j, et qui varie de $i+1$ à n; lorsque j est fixé, les autres indices sont liés par les inégalités $i < \alpha_1 < \alpha_2 < \dots < \alpha_{p-2} < j$, ce qui exige $p-1 \leq j-i$; en remplaçant enfin $p-1$ par p, on obtient l'expression

$$V_i = U_i + \sum_{j=i+1}^{n} U_j \sum_{p=1}^{j-i} (-2)^p \sum_{i < \alpha_1 < \alpha_2 < \dots < \alpha_{p-1} < j} (U_i U_{\alpha_1})(U_{\alpha_1} U_{\alpha_2}) \dots (U_{\alpha_{p-1}} U_j) . \tag{6}$$

Ces n sphères V_i, mises en évidence dans (5), appartiennent à la famille linéaire des $U_1, U_2, \dots U_n$; plus précisément, chaque V_i appartient à la famille des $n+1-i$ sphères $U_i, U_{i+1}, \dots U_n$, et ne dépend pas de $U_1, U_2, \dots U_{i-1}$. D'ailleurs, en permutant les sommations par rapport aux indices p et j, et en écrivant $j = \alpha_p$, (6) s'écrit encore

$$V_i = U_i + \sum_{p=1}^{n-i} (-2)^p \sum_{i+1 \leq \alpha_1 < \alpha_2 < \dots < \alpha_p \leq n} (U_{\alpha_1} U_i)(U_{\alpha_1} U_{\alpha_2}) \dots (U_{\alpha_{p-1}} U_{\alpha_p}) U_{\alpha_p} ,$$

dont la comparaison avec (4) montre que

$$V_i = \overline{U_n U_{n-1} \dots U_{i+1}} U_i = U_i - 2 \sum_{j=i+1}^{n} (U_j U_i) V_j . \tag{7}$$

Ce sont tout d'abord des sphères unitaires. Ecrivons les sous la forme

$$V_i = U_i + \sum_{j=i+1}^{n} \Theta_i^j U_j . \tag{8}$$

L'élévation au carré des deux membres de (5), où $M_n^2 = M^2 = 0$, donne alors

$$0 = -\sum_{i=1}^{n}(U_iM)(V_iM)+\sum_{i=1}^{n}(U_iM)^2+2\sum_{1\leq i<j\leq n}(U_iM)(U_jM)V_iV_j$$

$$= -\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=i+1}^{n}\Theta_i^j(U_iM)(U_jM)+2\sum_{1<i<j<n}(U_iM)(U_jM)V_iV_j;$$

quel que soit M, on a donc

$$\sum_{1\leq i<j\leq n}(\Theta_i^j-2V_iV_j)(U_iM)(U_jM) = 0\ .$$

Lorsque les U_i sont linéairement distinctes, ceci entraîne

$$\Theta_i^j = 2V_iV_j \qquad i<j\leq n\ ,$$

mais la vérification formelle de ce fait subsiste évidemment dans tous les cas, et l'on obtient ainsi les expressions (8) des V_i sous la forme

$$V_i = U_i+2\sum_{j=i+1}^{n}(V_iV_j)U_j\ . \tag{9}$$

Leur comparaison avec (7), écrit sous la forme

$$U_i = V_i+2\sum_{j=i+1}^{n}(U_iU_j)V_j\ , \tag{10}$$

montre que *les deux systèmes de sphères U_i et V_i sont associés de manière réciproque.* La correspondance est évidemment anallagmatiquement invariante.

En posant

$$U_i = \frac{\overrightarrow{A_iP}^2-R_i^2}{2R_i},\qquad V_i = \frac{\overrightarrow{A_i'P}^2-R_i'^2}{2R_i'},\qquad i = 1, 2,\dots n\ , \tag{11}$$

l'identification des termes du second degré dans les deux membres de (7) fournit les formules récurrentes

$$\frac{1}{R_i'} = \frac{1}{R_i}-2\sum_{j=i+1}^{n}\frac{U_iU_j}{R_j'} \qquad i' = 1, 2,\dots n\ , \tag{12}$$

qui nous seront utiles. En particulier, $V_n = U_n$, $R_n' = R_n$. Cette même équation (7), dérivée par rapport au point P, donne également l'identité

$$\frac{\overrightarrow{PA_i'}}{R_i'} = \frac{\overrightarrow{PA_i}}{R_i}-2\sum_{j=i+1}^{n}\frac{U_iU_j}{R_j'}\overrightarrow{PA_j'}, \tag{13}$$

qui permet de déterminer de proche en proche les centres des V_i. A partir de (6), on aurait obtenu de même l'identité

(14) $$\frac{\overrightarrow{PA'_i}}{R'_i}=\frac{\overrightarrow{PA_i}}{R_i}+\sum_{j=i+1}^{n}\frac{\overrightarrow{PA_j}}{R_j}\sum_{p=1}^{j-i}(-2)^p\sum_{i<\alpha_1<\alpha_2<\ldots<\alpha_{p-1}<j}(U_iU_{\alpha_1})(U_{\alpha_1}U_{\alpha_2})\ldots(U_{\alpha_{p-1}}U_j)\,,$$

qui équivaut à l'ensemble des deux relations

(15) $$\frac{1}{R'_i}=\frac{1}{R_i}+\sum_{j=i+1}^{n}\frac{1}{R_j}\sum_{p=1}^{j-i}(-2)^p\sum_{i<\alpha_1<\alpha_2<\ldots<\alpha_{p-1}<j}(U_iU_{\alpha_1})(U_{\alpha_1}U_{\alpha_2})\ldots(U_{\alpha_{p-1}}U_j)\,,$$

(16) $$\frac{\overrightarrow{A_nA'_i}}{R'_i}=\frac{\overrightarrow{A_nA_i}}{R_i}+\sum_{j=i+1}^{n}\frac{\overrightarrow{A_nA_j}}{R_j}\sum_{p=1}^{j-i}(-2)^p\sum_{i<\alpha_1<\ldots<\alpha_{p-1}<j}(U_iU_{\alpha_1})(U_{\alpha_1}U_{\alpha_2})\ldots(U_{\alpha_{p-1}}U_j)\,.$$

On voit en même temps que si les inversions $\overline{U}_i$ sont toutes réelles, chaque sphère V_i est de même nature (réelle ou imaginaire pure) que U_i, de sorte que $\frac{1}{R_iR'_i}$ est réel.

9. La comparaison de (6) et de (9) donne, pour $j>i$,

(17) $$V_iV_j=\sum_{1\le p\le j-i}(-2)^{p-1}\sum_{i<\alpha_1<\alpha_2<\ldots<\alpha_{p-1}<j}(U_iU_{\alpha_1})(U_{\alpha_1}U_{\alpha_2})\ldots(U_{\alpha_{p-1}}U_j);$$

par réciprocité, on a

(18) $$U_iU_j=\sum_{1\le p\le j-i}(-2)^{p-1}\sum_{i<\alpha_1<\alpha_2<\ldots<\alpha_{p-1}<j}(V_iV_{\alpha_1})(V_{\alpha_1}V_{\alpha_2})\ldots(V_{\alpha_{p-1}}V_j)\,.$$

Il résulte d'autre part de (5) et de (10) que

$$M_n=M-2\sum_{i=1}^{n}\Big[V_iM+2\sum_{i<j\le n}(U_iU_j)V_jM\Big]V_i\,,$$

ou, en ordonnant suivant les V_iM,

(19) $$M_n=M-2\sum_{i=1}^{n}(V_iM)W_i\,,$$

avec

(20) $$W_i=V_i+2\sum_{1\le j<i}(U_iU_j)V_j\,,$$

ou, grâce à (18),

$$W_i=V_i+\sum_{1\le j<i}V_j\sum_{1\le p\le i-j}(-2)^p\sum_{j<\alpha_1<\alpha_2<\ldots<\alpha_{p-1}<i}(V_jV_{\alpha_1})(V_{\alpha_1}V_{\alpha_2})\ldots(V_{\alpha_{p-1}}V_i)\,.$$

Cette formule est analogue à (6), lorsqu'on lit le produit de droite à gauche, et montre que W_i se déduit de $V_1, V_2, \ldots V_i$, dans cet ordre, comme V_i se déduit de $U_n, U_{n-1}, \ldots U_i$ dans cet ordre. On a donc

$$W_i=\overline{V_1V_2\ldots V_{i-1}}V_i\,,$$

ce qui établit à l'aide de (19) que

$$M_n = \overline{V_1 V_2 \dots V_n M} .$$

On peut encore dire que

$$\overline{U_n U_{n-1} \dots U_1} \equiv \overline{V_1 V_2 \dots V_n} ,$$

ou que *les deux transformations anallagmatiques* $\overline{U_1 U_2 \dots U_n}$ *et* $\overline{V_1 V_2 \dots V_n}$ *sont inverses*[1].

Remarque. On tire de (9)

$$U_i V_i = 1 + 2 \sum_{j=i+1}^{n} (U_i U_j)(V_i V_j) ,$$

dont l'addition par rapport à l'indice i fournit l'identité

$$\sum_{i=1}^{n} U_i V_i - 2 \sum_{1 \le i < j \le n} (U_i U_j)(V_i V_j) = n . \tag{21}$$

10. Deux sphères Φ et Ψ ont deux transformées Φ_n et Ψ_n de même masse; l'angle est également conservé, donc le produit

$$\Phi_n \Psi_n = \Phi \Psi .$$

On le vérifie d'ailleurs tout de suite, à l'aide de (2), pour $n = 1$; et ça s'étend à tous les n par récurrence. Pour un point A et une sphère Φ, ou pour deux points A, B, on a de même

$$\Phi_n A_n = \Phi A , \qquad A_n B_n = AB ,$$

mais la masse d'un point n'est pas conservée. En désignant par h, h', h_n, h'_n les masses respectives de A, B, A_n, B_n, on a donc

$$h_n h'_n \overline{A_n B_n}^2 = h h' \overline{AB}^2 ; \tag{22}$$

d'autre part, l'équation (5) où l'on identifie les termes du second degré, donne

$$\frac{h_n}{h} = 1 + \frac{2}{h} \sum_{i=1}^{n} \frac{U_i M}{R'_i} . \tag{23}$$

Ce rapport des masses dépend généralement du point M; en remplaçant U_i par son expression (11), on a encore

---

[1] On voit en particulier que

$$W_i = \overline{V_1 V_2 \dots V_n V_n \dots V_i} V_i = -\overline{V_1 V_2 \dots V_n V_n \dots V_{i+1}} V_i = -\overline{U_n \dots U_2 U_1} U_i .$$

$$\frac{h_n}{h} = 1 + \sum_{i=1}^{n} \frac{\overrightarrow{A_iM}^2 - R_i^2}{R_i R_i'}.$$

Il est commode de rattacher M à un point fixe, par exemple A_1, ce qui conduit à remplacer $\overrightarrow{A_iM}$ par $\overrightarrow{A_1M} - \overrightarrow{A_1A_i}$, d'où résulte l'expression

$$\text{(24)} \qquad \frac{h_n}{h} = \overrightarrow{A_1M}^2 \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{R_i R_i'} - 2\overrightarrow{A_1M} \sum_{i=1}^{n} \frac{\overrightarrow{A_1A_i}}{R_i R_i'} + \left(1 + \sum_{i=1}^{n} \frac{\overrightarrow{A_1A_i}^2 - R_i^2}{R_i R_i'}\right).$$

Observons que $h_n = 0$ exprime que le point M_n est à l'infini; or $\overline{U_n \ldots U_2 U_1}$ est au plus le produit d'une inversion et d'une transformation enclidienne, et ne transforme en l'infini qu'un point (ou plutôt une sphère-point) au plus; le second membre de (24) doit donc être un carré parfait par rapport à $\overrightarrow{A_1M}$, tout au moins si $\sum \frac{1}{R_i R_i'} \neq 0$. Nous le vérifierons plus loin.

Pour que $\overline{U_n U_{n-1} \ldots U_1}$ soit une similitude, directe ou inverse, il faut et il suffit d'après (22) que $\frac{h_n}{h} \frac{h_n'}{h'}$ soit indépendant des points A, B, donc que $\frac{h_n}{h}$ soit constant. On peut donc énoncer le

Théorème I. *Les transformations anallagmatiques $\overline{U_n \ldots U_2 U_1}$ équivalant à une similitude sont celles qui multiplient par une constante la masse du point transformé.*

La somme au second membre de (23) est le produit par M de la sphère $\sum_{i=1}^{n} \frac{U_i}{R_i'}$, et n'est indépendante de M que lorsque cette sphère se réduit au plan de l'infini ou à zéro. Une autre forme du théorème I est donc

Théorème II. *Les transformations $\overline{U_n \ldots U_2 U_1}$ équivalant à une similitude sont celles pour lesquelles $\sum_{i=1}^{n} \frac{U_i}{R_i'}$ est identiquement nul ou représente le plan de l'infini.*

La traduction analytique est le système d'équations

$$\text{(25)} \qquad \sigma_1 = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{R_i R_i'} = 0\,,$$

$$\text{(26)} \qquad \vec{\alpha}_1 = \sum_{i=1}^{n} \frac{\overrightarrow{A_1A_i}}{R_i R_i'} = 0\,.$$

On peut compléter ces résultats par le

Théorème III. *Lorsque $\overline{U_n \ldots U_2 U_1}$ est une similitude, le rapport constant $\frac{h_n}{h}$ des masses est égal à $-\frac{R_1}{R_1'}$.*

On a vu en effet au paragraphe 3 que, si $\sum_{i=1}^{n} \frac{U_i}{R'_i} = \text{const.} = k$, on a respectivement

$$\frac{1}{h}\sum_{i=1}^{n} \frac{U_i M}{R'_i} = k\,, \quad \sum_{i=1}^{n} \frac{U_i U_1}{R'_i} = -\frac{k}{R_1},$$

donc, dans les conditions actuelles, (23) peut s'écrire

$$\frac{h_n}{h} = 1-2R_1 \sum_{i=1}^{n} \frac{U_i U_1}{R'_i} = 1-2\frac{R_1}{R'_1}-2R_1 \sum_{j=2}^{n} \frac{U_1 U_j}{R'_j},$$

ou, compte tenu de la formule (12) où $i = 1$,

$$\frac{h_n}{h} = 1-2\frac{R_1}{R'_1}+R_1\left(\frac{1}{R'_1}-\frac{1}{R_1}\right) = -\frac{R_1}{R'_1} \qquad \text{C. Q. F. D.} \tag{27}$$

On peut observer que la sphère V_1 est la transformée de U_1, car $\overline{U}_1 U_1 = -U_1$ permet d'écrire

$$V_1 = \overline{U_n \dots U_2} U_1 = -\overline{U_n \dots U_2 U_1} U_1\,,$$

et le rapport des rayons de $-V_1$ et de U_1 fournit le rapport de similitude, donc le rapport des masses $\frac{h_n}{h}$; cependant, ce raisonnement laisse subsister une ambiguïté de signe, qui est résolue par (27).

11. Il existe une relation remarquable entre les sommes des deux types contenues dans (25) et (26). En posant plus généralement

$$\sigma_p = \sum_{i=p}^{n} \frac{1}{R_i R'_i}\,, \quad \vec{\alpha}_p = \sum_{i=p}^{n} \frac{\overrightarrow{A_p A_i}}{R_i R'_i}, \tag{28}$$

σ_p et $\vec{\alpha}_p$ sont associés à la transformation $\overline{U_n \dots U_{p+1} U_p}$ comme σ_1 et $\vec{\alpha}_1$ le sont à $\overline{U_n \dots U_2 U_1}$, puisque les V_i $(i = p, p+1, \dots n)$ sont les mêmes. Démontrons que

$$\vec{\alpha}_1^{\,2} = R_1^2 \sigma_1 \sigma_2\,, \tag{29}$$

qui équivaut à la formule générale

$$\vec{\alpha}_p^{\,2} = R_p^2 \sigma_p \sigma_{p+1} \qquad p = 1, 2, \dots n-1\,. \tag{30}$$

On a en effet

$$\begin{aligned}
\vec{\alpha}_1^2 &= \sum_{i=1}^{n} \frac{\overrightarrow{A_1A_i}^2}{R_i^2 R_i'^2} + 2 \sum_{1\leq i<j\leq n} \frac{\overrightarrow{A_1A_i}\,\overrightarrow{A_2A_j}}{R_iR_i'R_jR_j'} \\
&= \sum_{i=1}^{n} \frac{\overrightarrow{A_1A_i}^2}{R_i^2 R_i'^2} + \sum_{1\leq i<j\leq n} \frac{\overrightarrow{A_1A_i}^2 + \overrightarrow{A_1A_j}^2 - \overrightarrow{A_iA_j}^2}{R_iR_i'R_jR_j'} \\
&= \sigma_1 \sum_{i=1}^{n} \frac{\overrightarrow{A_1A_i}^2}{R_iR_i'} - \sum_{1\leq i<j\leq n} \frac{R_i^2+R_j^2-2R_iR_jU_iU_j}{R_iR_i'R_jR_j'} \\
&= \sigma_1 \sum_{i=1}^{n} \frac{\overrightarrow{A_1A_i}^2}{R_iR_i'} - \sum_{i=1}^{n} \frac{R_i}{R_i'}\left(\sigma_1 - \frac{1}{R_iR_i'}\right) + 2 \sum_{1\leq i<j\leq n} \frac{U_iU_j}{R_i'R_j'}, \\
&= \sigma_1 \sum_{i=1}^{n} \frac{\overrightarrow{A_1A_i}^2 - R_i^2}{R_iR_i'} + \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{R_i'}\left(\frac{1}{R_i'} + 2 \sum_{j=i+1}^{n} \frac{U_iU_j}{R_j'}\right),
\end{aligned}$$

d'où résulte, grâce à (12), la première expression remarquable

$$\vec{\alpha}_1^2 = \sigma_1\left(1 + \sum_{i=1}^{n} \frac{\overrightarrow{A_1A_i}^2 - R_i^2}{R_iR_i'}\right). \tag{31}$$

La parenthèse est le dernier terme de la formule (24), qui a bien ainsi la forme prévue d'un carré parfait, soit

$$\sigma_1 \frac{h_n}{h} = (\sigma_1 \overrightarrow{A_1M} - \vec{\alpha}_1)^2 . \tag{32}$$

Pour aboutir à (29), il suffit maintenant d'exprimer, dans (31), $\overrightarrow{A_1A_i}^2$ à l'aide de U_1U_i; la parenthèse s'écrit alors

$$1 + \sum_{i=1}^{n} \frac{R_1^2 - 2R_1R_iU_1U_i}{R_iR_i'} = \sigma_1 R_1^2 + 1 - 2R_1 \sum_{i=1}^{n} \frac{U_1U_i}{R_i'},$$

donc, grâce à la formule (12) où $i = 1$,

$$\sigma_1 R_1^2 - \frac{R_1}{R_1'} = R_1^2\left(\sigma_1 - \frac{1}{R_1R_1'}\right) = R_1^2\sigma_2 . \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

12. **Remarques.** Lorsque les sphères U_i sont toutes réelles, il résulte de (30) que tous les σ_p ont le même signe, et, en particulier, celui de $\sigma_n = \frac{1}{R_n^2}$, qui est positif. σ_1 est donc supérieur ou égal à 0, donc h_n est du signe de h; il y a peut-être exception

si $\sigma_1 = 0$, mais, dans ce cas, $\vec{\alpha}_1$ est également nul, $\frac{h_n}{h} = R_1^2 \sigma_2$ est encore positif, donc le fait est général.

Plus généralement, si les inversions sont réelles, c'est-à-dire que les U_i sont réelles ou imaginaires pures, il en est de même des V_i, de sorte que $R_i R_i'$ est réel et non nul; les σ_p et $\vec{\alpha}_p$ sont réels et finis, donc il résulte de (29) que $\sigma_1 = 0$ entraîne $\vec{\alpha}_1 = 0$. On peut donc énoncer le

Théorème IV. *Un produit $\overline{U_n \ldots U_2 U_1}$ d'inversions réelles est une similitude pourvu que* $\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{R_i R_i'} = 0$.

Si $\vec{\alpha}_1 = 0$, (29) n'entraîne sûrement $\sigma_1 = 0$ que si $\sigma_2 \neq 0$, c'est à dire si la masse $R_1^2 \sigma_2$ de $\overline{U_n \ldots U_2 U_1} A_1 \neq 0$, ce qui exprime que le transformé de A_1 est à distance finie.

13. Examinons quelques cas particulièrement simples. On voit tout de suite que $R_n' = R_n$, $\sigma_n = \frac{1}{R_n^2}$, $\vec{\alpha}_n = 0$; l'inversion unique $\overline{U}_n$ ne peut effectivement être une similitude que si U_n se réduit à un plan. Pour $\overline{U_n U_{n-1}}$, on a $\vec{\alpha}_{n-1} = \frac{\overrightarrow{A_{n-1} A_n}}{R_n^2}$, donc, grâce à (30),

$$\sigma_{n-1} = \frac{\vec{\alpha}^{\,2}_{n-1}}{R_{n-1}^2 \sigma_n} = \frac{\overrightarrow{A_{n-1} A_n}^2}{R_{n-1}^2 R_n^2}. \tag{33}$$

Le produit de deux inversions est une similitude pourvu que les deux sphères soient concentriques, ce qui est un fait élémentaire. Pour 3 sphères, on a ensuite

$$\vec{\alpha}_{n-2} = \frac{\overrightarrow{A_{n-2} A_{n-1}}}{R_{n-1} R_{n-1}'} + \frac{\overrightarrow{A_{n-2} A_n}}{R_n R_n'} = \sigma_{n-1} \overrightarrow{A_{n-2} A_{n-1}} + \sigma_n \overrightarrow{A_{n-1} A_n} ,$$

donc, grâce à (33) ,

$$\sigma_{n-2} = \frac{\vec{\alpha}^{\,2}_{n-2}}{R_{n-2}^2 \sigma_{n-1}} = \frac{1}{R_{n-2}^2} (\sigma_{n-1} \overrightarrow{A_{n-2} A_{n-1}}^2 + 2\sigma_n \overrightarrow{A_{n-2} A_{n-1}}\, \overrightarrow{A_{n-1} A_n} + \sigma_n^2 R_{n-1}^2 R_n^2)$$
$$= \frac{1}{R_{n-2}^2 R_{n-1}^2 R_n^2} (\overrightarrow{A_{n-2} A_{n-1}}^2 \overrightarrow{A_{n-1} A_n}^2 + 2 R_{n-1}^2 \overrightarrow{A_{n-2} A_{n-1}}\, \overrightarrow{A_{n-1} A_n} + R_{n-1}^4) .$$

Si $\overline{U_n U_{n-1} U_{n-2}}$ est une similitude, $\vec{\alpha}_{n-2} = 0$ montre que les centres sont alignés, et $\sigma_{n-2} = 0$ se réduit alors à

$$\overline{A_{n-2}A_{n-1}}\,\overline{A_{n-1}A_n}+R_{n-1}^2 = 0\,,$$

qui exprime que A_n et A_{n-2} sont inverses l'un de l'autre par rapport à U_{n-1}. On voit ainsi que *le produit de 3 inversions est une similitude pourvu que les centres des sphères extrêmes soient inverses par rapport à la sphère moyenne.*

Même dans le cas général, on peut mettre σ_{n-2} sous la forme d'un carré en utilisant une multiplication symbolique. Il suffit d'effectuer le carré indiqué par la formule

$$\sigma_{n-2} = \frac{1}{R_{n-2}^2R_{n-1}^2R_n^2}\left(\overrightarrow{A_{n-2}A_{n-1}}\,\overrightarrow{A_{n-1}A_n}+R_{n-1}^2\right)_2$$

suivant les règles ordinaires, mais en écrivant les vecteurs de chaque monôme dans l'ordre des indices non décroissants, et en effectuant les carrés ou les produits scalaires dans l'ordre où ils se présentent.

14. Ce que nous venons de constater pour σ_n, σ_{n-1}, σ_{n-2} est un fait général, et cette multiplication symbolique permet d'exprimer simplement tous les σ_p en fonction des rayons des sphères et des vecteurs $\overrightarrow{A_iA_{i+1}}$ joignant les centres des sphères consécutives. Il suffit évidemment d'établir un tel résultat pour σ_1 en admettant qu'il soit vrai pour $\sigma_n, \sigma_{n-1}, \ldots \sigma_2$. Il s'agit de démontrer que σ_1 est égal au carré symbolique

$$\begin{aligned}(34)\qquad \sigma_1 = \frac{1}{R_1^2R_2^2\ldots R_n^2}\Big(&\overrightarrow{A_1A_2}\,\overrightarrow{A_2A_3}\ldots\overrightarrow{A_{n-1}A_n}+\\ &+\sum_{1<i<n} R_i^2\overrightarrow{A_1A_2}\ldots\overrightarrow{A_{i-2}A_{i-1}}\,\overrightarrow{A_{i+1}A_{i+2}}\ldots\overrightarrow{A_{n-1}A_n}+\\ &+\sum_{1<i<j-1<n-1} R_i^2R_j^2\overrightarrow{A_1A_2}\ldots\overrightarrow{A_{i-2}A_{i-1}}\,\overrightarrow{A_{i+1}A_{i+2}}\ldots\overrightarrow{A_{j-2}A_{j-1}}\,\overrightarrow{A_{j+1}A_{j+2}}\ldots\overrightarrow{A_{n-1}A_n}+\ldots\Big)_2\,,\end{aligned}$$

où les sommes entre parenthèses se déduisent du premier terme en y remplaçant de toutes les façons possibles un ou plusieurs produits de deux vecteurs consécutifs $\overrightarrow{A_{i-1}A_i}\,\overrightarrow{A_iA_{i+1}}$ par R_i^2; en particulier, si n est pair, la dernière somme est

$$R_3^2R_5^2\ldots R_{n-1}^2\overrightarrow{A_1A_2}+R_2^2R_5^2\ldots R_{n-1}^2\overrightarrow{A_3A_4}+\cdots+R_2^2R_4^2\ldots R_{n-2}^2\overrightarrow{A_{n-1}A_n}\,,$$

tandis que, lorsque n est impair, le dernier terme est $R_2^2R_4^2\ldots R_{n-1}^2$. Observons tout d'abord que

$$(35)\qquad \sigma_i = \sigma_{i+1}+\frac{1}{R_iR_i'}\,,$$

et que

(36) $$\vec{\alpha}_p = \sum_{i=p}^{n} \sigma_{i+1} \overrightarrow{A_i A_{i+1}} = \overrightarrow{\alpha_{p+1}} + \sigma_{p+1} \overrightarrow{A_p A_{p+1}} \,.$$

Compte tenu de l'expression de $\frac{1}{R_1'}$ donnée par (12), on a

$$\sigma_1 = \sigma_2 + \frac{1}{R_1 R_1'} = \frac{1}{R_1^2} + \sigma_2 - 2\sum_{i=2}^{n} \frac{U_1 U_i}{R_1 R_i'}$$

$$= \frac{1}{R_1^2} + \sigma_2 + \sum_{i=2}^{n} \frac{\overrightarrow{A_1 A_i'}^2 - R_1^2 - R_i^2}{R_1^2 R_i R_i'} = \frac{1}{R_1^2} + \sigma_2 + \sum_{i=2}^{n} \frac{\overrightarrow{A_1 A_i}^2 - R_1^2 - R_i^2}{R_1^2} (\sigma_i - \sigma_{i+1}) \,,$$

ou, en ordonnant suivant les σ_i,

(37) $$\sigma_1 = \frac{1}{R_1^2} \left[1 + \sigma_2 (\overrightarrow{A_1 A_2}^2 - R_2^2) + \sum_{i=3}^{n} \sigma_i (\overrightarrow{A_1 A_i}^2 - \overrightarrow{A_1 A_{i-1}}^2 - R_i^2 + R_{i-1}^2) \right]$$

$$= \frac{1}{R_1^2} \left[1 + \sigma_2 (\overrightarrow{A_1 A_2}^2 - R_2^2) + \sum_{i=3}^{n} \sigma_i \overrightarrow{A_{i-1} A_i} (2\overrightarrow{A_1 A_2} + 2\overrightarrow{A_2 A_3} + \cdots + 2\overrightarrow{A_{i-2} A_{i-1}} + \overrightarrow{A_{i-1} A_i}) \right.$$
$$\left. + \sum_{i=3}^{n} \sigma_i (R_{i-1}^2 - R_i^2) \right] .$$

Dans le crochet, le coefficient de $2\overrightarrow{A_1 A_2}$ est, d'après (36), égal à $\vec{\alpha}_2$; la somme des termes indépendants de $\overrightarrow{A_1 A_2}$ est

(38) $$1 - \sigma_2 R_2^2 + \sigma_3 (\overrightarrow{A_2 A_3}^2 + R_2^2 - R_3^2) +$$
$$+ \sum_{i=4}^{n} \sigma_i \{ \overrightarrow{A_{i-1} A_i} (2\overrightarrow{A_2 A_3} + \cdots + 2\overrightarrow{A_{i-2} A_{i-1}} + \overrightarrow{A_{i-1} A_i}) + R_{i-1}^2 - R_i^2 \}$$
$$= 1 - \sigma_2 R_2^2 + \sigma_3 (\overrightarrow{A_2 A_3}^2 + R_2^2 - R_3^2) + \sum_{i=4}^{n} \sigma_i (\overrightarrow{A_2 A_i}^2 - \overrightarrow{A_2 A_{i-1}}^2 + R_{i-1}^2 - R_i^2) \,,$$

qui est analogue à l'expression que (37) donnerait pour σ_2; celle-ci serait en effet

$$\sigma_2 = \frac{1}{R_2^2} \left[1 + \sigma_3 (\overrightarrow{A_2 A_3}^2 - R_3^2) + \sum_{i=4}^{n} \sigma_i (\overrightarrow{A_2 A_i}^2 - \overrightarrow{A_2 A_{i-1}}^2 + R_{i-1}^2 - R_i^2) \right] ,$$

donc (38) vaut $\sigma_3 R_2^2$ et (37) s'écrit

(39) $$\sigma_1 = \frac{1}{R_1^2} (\sigma_2 \overrightarrow{A_1 A_2}^2 + 2\vec{\alpha}_2 \overrightarrow{A_1 A_2} + \sigma_3 R_2^2) \,.$$

Sachant que $\vec{\alpha}_2^2 = R_2^2 \sigma_2 \sigma_3$, et en observant la forme de carré symbolique des expressions, analogues à (34), que l'on admet pour σ_2 et σ_3, on est conduit à vérifier que (39) s'identifie avec le carré symbolique

$$\sigma_1 = \frac{1}{R_1^2 R_2^2 \ldots R_n^2}\Big[\overrightarrow{A_1A_2}\Big(\overrightarrow{A_2A_3}\,\overrightarrow{A_3A_4}\ldots\overrightarrow{A_{n-1}A_n}+ \\ +\sum_{2<i<n} R_i^2\overrightarrow{A_2A_3}\ldots\overrightarrow{A_{i-2}A_{i-1}}\,\overrightarrow{A_{i+1}A_{i+2}}\ldots\overrightarrow{A_{n-1}A_n}+\cdots\Big)+ \\ +R_2^2\Big(\overrightarrow{A_3A_4}\,\overrightarrow{A_4A_5}\ldots\overrightarrow{A_{n-1}A_n}+\sum_{3<i<n} R_i^2\overrightarrow{A_3A_4}\ldots\overrightarrow{A_{i-2}A_{i-1}}\,\overrightarrow{A_{i+1}A_{i+2}}\ldots\overrightarrow{A_{n-1}A_n}+\cdots\Big)\Big]_2, \tag{40}$$

où les deux parenthèses sont formées suivant la règle indiquée pour (34). La vérification est immédiate pour $\sigma_2\overrightarrow{A_1A_2^2}$ et $\sigma_3 R_2^2$, et il suffit de montrer que

$$\vec{\alpha}_2 = \frac{1}{R_3^2R_4^2\ldots R_n^2}\Big(\overrightarrow{A_2A_3}\,\overrightarrow{A_3A_4}\ldots\overrightarrow{A_{n-1}A_n}+ \\ +\sum_{2<i<n} R_i^2\overrightarrow{A_2A_3}\ldots\overrightarrow{A_{i-2}A_{i-1}}\,\overrightarrow{A_{i+1}A_{i+2}}\ldots\overrightarrow{A_{n-1}A_n}+\cdots\Big)_\times \\ {}_\times\Big(\overrightarrow{A_3A_4}\,\overrightarrow{A_4A_5}\ldots\overrightarrow{A_{n-1}A_n}+\sum_{3<i<n} R_i^2\overrightarrow{A_3A_4}\ldots\overrightarrow{A_{i-2}A_{i-1}}\,\overrightarrow{A_{i+1}A_{i+2}}\ldots\overrightarrow{A_{n-1}A_n}+\cdots\Big), \tag{41}$$

où le signe de multiplication est placé inférieurement pour indiquer le sens symbolique de l'opération[1]. $\overrightarrow{A_2A_3}$ ne se trouve que dans la première parenthèse, et son coefficient y est égal à la deuxième; le coefficient de $\overrightarrow{A_2A_3}$ dans (41) est donc le quotient par $R_3^2R_4^2\ldots R_n^2$ du carré symbolique de la deuxième parenthèse, c'est à dire σ_3. D'autre part les termes indépendants de $\overrightarrow{A_2A_3}$ dans la première parenthèse sont ceux déduits de $\overrightarrow{A_2A_3}\,\overrightarrow{A_3A_4}\ldots\overrightarrow{A_{n-1}A_n}$ par la suppression d'au moins le produit $\overrightarrow{A_2A_3}\,\overrightarrow{A_3A_4}$; R_3^2 s'y trouve donc en facteur, donc (41) s'écrit

$$\vec{\alpha}_2 = \sigma_3\overrightarrow{A_2A_3}+\frac{1}{R_4^2R_5^2\ldots R_n^2}\Big(\overrightarrow{A_4A_5}\,\overrightarrow{A_5A_6}\ldots\overrightarrow{A_{n-1}A_n}+ \\ +\sum_{4<i<n} R_i^2\overrightarrow{A_4A_5}\ldots\overrightarrow{A_{i-2}A_{i-1}}\,\overrightarrow{A_{i+1}A_{i+2}}\ldots\overrightarrow{A_{n-1}A_n}+\cdots\Big)_\times \\ {}_\times\Big(\overrightarrow{A_3A_4}\,\overrightarrow{A_4A_5}\ldots\overrightarrow{A_{n-1}A_n}+\sum_{3<i<n} R_i^2\overrightarrow{A_3A_4}\ldots\overrightarrow{A_{i-2}A_{i-1}}\,\overrightarrow{A_{i+1}A_{i+2}}\ldots\overrightarrow{A_{n-1}A_n}+\cdots\Big). \tag{42}$$

[1] La remarque qui suit la démonstration précise le caractére de cette multiplication.

Si l'on admet que (41) s'applique à $\vec{\alpha}_3, \vec{\alpha}_4, \ldots \vec{\alpha}_n$, comme on a admis que (34) est valable pour $\sigma_2, \sigma_3, \ldots, \sigma_n$, (42) est vérifié pour $\vec{\alpha}_2$ à l'aide de (36). La démonstration par récurrence des expressions des σ_i et α_i est ainsi complète, si l'on observe que, pour $n = 3$, la deuxième parenthèse est remplacée par 1, et (41) se réduit à $\dfrac{\overrightarrow{A_2A_3}}{R_3^2}$, qui correspond bien à l'expression de $\overrightarrow{\alpha_{n-1}}$. Pour $\vec{\alpha}_1$, (41) s'écrit enfin

$$(43) \qquad \vec{\alpha}_1 = \frac{1}{R_2^2R_3^2\ldots R_n^2}\Big(\overrightarrow{A_1A_2}\,\overrightarrow{A_2A_3}\ldots\overrightarrow{A_{n-1}A_n}+$$
$$+\sum_{1<i<n} R_i^2\,\overrightarrow{A_1A_2}\ldots\overrightarrow{A_{i-2}A_{i-1}}\,\overrightarrow{A_{i+1}A_{i+2}}\ldots\overrightarrow{A_{n-1}A_n}+\cdots\Big)\times$$
$$\times\Big(\overrightarrow{A_2A_3}\,\overrightarrow{A_3A_4}\ldots\overrightarrow{A_{n-1}A_n}+\sum_{2<i<n} R_i^2\,\overrightarrow{A_2A_3}\ldots\overrightarrow{A_{i-2}A_{i-1}}\,\overrightarrow{A_{i+1}A_{i+2}}\ldots\overrightarrow{A_{n-1}A_n}+\cdots\Big).$$

Remarque. La multiplication symbolique des formules générales (34) et (43) ne présente aucune ambiguïté dans (34) car c'est le carré d'une somme de monômes formés avec des vecteurs dont les nombres ont la même parité; le carré lui-même est donc une somme de monômes contenant chacun un nombre pair de vecteurs. Par contre le produit (43) est une somme de monômes contenant tous un nombre impair de vecteurs, comme il se doit d'ailleurs pour l'assimiler à un vecteur; il faut préciser comment doivent être associés les vecteurs consécutifs dans la formation des produits scalaires; c'est la démonstration que nous venons de faire qui montre que c'est le premier des vecteurs, et non le dernier, qui doit être mis en facteur, et c'est cette règle qui lève l'ambiguïté. Observons encore que (29) apparaît comme une conséquence formelle de (34) et (43), mais que ça résulte de la forme particulière des deux sommes dont le produit symbolique donne $\vec{\alpha}_1$.

15. La détermination des transformations $\overline{U_n\ldots U_2U_1}$ qui sont une similitude, et qui a été faite au paragraphe 13 pour $n \leq 3$, repose sur les formules (36) et (38), ainsi que sur la forme définitive qu'on peut donner à (32)

$$(44) \qquad \frac{h_n}{h} = \sigma_1\overrightarrow{A_1M}^2 - 2\vec{\alpha}_1\overrightarrow{A_1M} + R_1^2\sigma_2\,.$$

Dans le cas réel, nous savons que $\sigma_1 = 0$ entraîne $\vec{\alpha}_1 = 0$, donc $\sigma_2 \neq 0$ sans quoi h_n serait identiquement nul, chose impossible. De même, si $\sigma_2 = 0$, $\vec{\alpha}_1$ est encore nul, donc $\sigma_1 \neq 0$. σ_1 et σ_2 ne s'annulent jamais simultanément. Si $\vec{\alpha}_1 = 0$, σ_1 ou σ_2 sont nuls; dans le premier cas, la transformation est une similitude; dans l'autre,

$$\frac{h_n}{h} = \sigma_1 \overrightarrow{A_1 M}^2,$$

donc les transformés A_n, B_n de deux points quelconque A, B sont à une distance telle que

$$\overline{A_n B_n}^2 = \frac{\overline{AB}^2}{\sigma_1^2 \overline{A_1 A}^2 \overline{A_1 B}^2};$$

effectivement, $\overline{U_n \ldots U_3 U_2}$ est une similitude, donc $\overline{U_n \ldots U_2 U_1}$ est le produit d'une inversion de pôle A_1 par une similitude.

Appliquons ces considérations générales pour réduire à sa plus simple forme la condition exprimant que le produit de 4 inversions réelles est une similitude. Tout d'abord,

$$\vec{\alpha}_1 = \sigma_2 \overrightarrow{A_1 A_2} + \sigma_3 \overrightarrow{A_2 A_3} + \sigma_4 \overrightarrow{A_3 A_4} = 0$$

exprime que les 4 centres sont dans un plan à deux dimensions. Si $\sigma_3 = \dfrac{\overrightarrow{A_3 A_4}^2}{R_3^2 R_4^2} = 0$, A_3 coïncide avec A_4, et $\vec{\alpha}_1 = 0$ exige que $A_1 = A_2$, car $\sigma_2 \neq 0$. $\overline{U_2 U_1}$ et $\overline{U_4 U_3}$ sont alors deux similitudes, et cette solution est banale. Si $\sigma_3 \neq 0$, $\vec{\alpha}_1 = 0$ est de la forme

(45) $$\overrightarrow{A_2 A_3} = \lambda \overrightarrow{A_1 A_2} + \mu \overrightarrow{A_3 A_4},$$

avec

(46) $$\lambda = -\frac{\sigma_2}{\sigma_3}, \quad \mu = -\frac{\sigma_4}{\sigma_3} = -\frac{R_3^2}{\overline{A_3 A_4}^2}.$$

Il faut maintenant écrire, et ça suffit, que $\sigma_1 = 0$; grâce à (45), il vient

$$\begin{aligned} R_1^2 R_2^2 R_3^2 R_4^2 \sigma_1 &= (\overrightarrow{A_1 A_2}\,\overrightarrow{A_2 A_3}\,\overrightarrow{A_3 A_4} + R_3^2 \overrightarrow{A_1 A_2} + R_2^2 \overrightarrow{A_3 A_4})_2 \\ &= (\lambda \overrightarrow{A_1 A_2}^2 \overrightarrow{A_3 A_4} + \mu \overrightarrow{A_1 A_2}\,\overrightarrow{A_3 A_4}^2 + R_3^2 \overrightarrow{A_1 A_2} + R_2^2 \overrightarrow{A_3 A_4})_2, \end{aligned}$$

car la substitution à $\overrightarrow{A_2 A_3}$ de son expression (45) n'apporte aucune modification à l'ordre des vecteurs. Ceci s'écrit encore, grâce à (46),

$$R_1^2 R_2^2 R_3^2 R_4^2 \sigma_1 = (\lambda \overrightarrow{A_1 A_2}^2 \overrightarrow{A_3 A_4} + R_2^2 \overrightarrow{A_3 A_4})_2 = (\lambda \overrightarrow{A_1 A_2}^2 + R_2^2)^2 \overrightarrow{A_3 A_4}^2,$$

donc $\sigma_1 = 0$ donne

$$\lambda = -\frac{R_2^2}{\overline{A_1 A_2}^2},$$

c'est-à-dire la condition nécessaire et suffisante

$$\text{(47)} \qquad \frac{R_2^2}{\overline{A_1A_2}^2}\overrightarrow{A_1A_2}+\overrightarrow{A_2A_3}+\frac{R_3^2}{\overline{A_3A_4}^2}\overrightarrow{A_3A_4}=0\,.$$

La solution banale est d'ailleurs contenue dans (47), car $A_3 = A_4$ rend infini le dernier terme, ce qui exige l'infinitude du premier terme, donc $A_1 = A_2$. On vérifie aussi aisément que, grâce à (47),

$$\sigma_2 = \frac{1}{R_2^2R_3^2R_4^2}(\overrightarrow{A_2A_3}\,\overrightarrow{A_3A_4}+R_3^2)_2 = \frac{R_2^2}{R_3^2R_4^2}\frac{\overrightarrow{A_3A_4}^2}{\overline{A_1A_2}^2},$$

donc que son quotient par $\sigma_3 = \dfrac{\overline{A_3A_4}^2}{R_3^2R_4^2}$ est égal à $-\lambda$. (47) vaut encore lorsque certaines des sphères deviennent des plans. Supposons par exemple que U_2 et U_3 soient des plans, et désignons par H_2 et H_3 les projections respectives de A_1 sur U_2 et de A_4 sur U_3. Avant le passage à la limite, (47) peut s'écrire

$$\left(\frac{R_2^2}{\overline{A_1A_2}^2}\overrightarrow{A_1A_2}+\overrightarrow{A_2H_2}\right)+\left(\frac{R_3^2}{\overline{A_3A_4}^2}\overrightarrow{A_3A_4}+\overrightarrow{H_3A_3}\right)+\overrightarrow{H_2H_3}=0\,,$$

où les deux parenthèses sont analogues, au signe près; la première s'écrit encore

$$\frac{R_2^2}{\overline{A_1A_2}^2}\overrightarrow{A_1H_2}-\overrightarrow{H_2A_2}\frac{\overrightarrow{A_1A_2}^2-R_2^2}{\overline{A_1A_2}^2}=\frac{R_2^2}{\overline{A_1A_2}^2}\overrightarrow{A_1H_2}-\overrightarrow{H_2A_2}\frac{\overrightarrow{A_1H_2}^2+2\overrightarrow{A_1H_2}\,\overrightarrow{H_2A_2}}{\overline{A_1A_2}^2},$$

et tend vers $\overrightarrow{H_2A_1}$; l'autre parenthèse tend de même vers $-\overrightarrow{H_3A_4}$, donc (47) devient à la limite

$$\overrightarrow{A_1H_2}+\overrightarrow{H_3A_4}=\overrightarrow{H_2H_3}\,,$$

qui exprime que les symétriques de A_1 et A_4 par rapport aux plans respectifs U_2 et U_4 sont confondus. Observons d'ailleurs que si U_1' est la sphère symétrique de U_1 par rapport à U_2, et U_4' la symétrique de U_4 par rapport à U_3, on a $\overline{U_2U_1} = \overline{U_1'U_2}$, $\overline{U_4U_3} = \overline{U_3U_4'}$, donc $\overline{U_4U_3U_2U_1} = \overline{U_3U_4'U_1'U_2}$; dans cette dernière transformation, les éléments extrêmes sont deux plans, donc c'est une similitude pourvu qu'il en soit ainsi pour $U_4'U_1'$, donc pourvu que les centres de ces deux sphères coïncident. Si une seule sphère intermédiaire est un plan, par exemple U_2, il suffit de mettre (47) sous la forme

$$\left(\frac{R_2^2}{\overline{A_1A_2}^2}\overrightarrow{A_1A_2}+\overrightarrow{A_2H_2}\right)+\overrightarrow{H_2A_3}+\frac{R_3^2}{\overline{A_3A_4}^2}\overrightarrow{A_3A_4}=0\,,$$

avec les mêmes notations, de sorte que le passage à la limite donne

$$\overrightarrow{H_2A_1}+\overrightarrow{H_2A_3}+\frac{R_3^2}{\overline{A_3A_4}^2}\overrightarrow{A_3A_4}=0\,.$$

A_1' étant le centre de U_1', ceci s'écrit

$$\overrightarrow{A_1'A_3}+\frac{R_3^2}{\overline{A_3A_4}^2}\overrightarrow{A_3A_4}=0\,,$$

qui est bien la condition trouvée au paragraphe 13 pour que $\overline{U_4U_3U_1'}$ soit une similitude.

16. Traitons encore le cas de cinq sphères.

$$\vec{\alpha}_1=\sigma_2\overrightarrow{A_1A_2}+\sigma_3\overrightarrow{A_2A_3}+\sigma_4\overrightarrow{A_3A_4}+\sigma_5\overrightarrow{A_4A_5}=0\,,$$

où $\sigma_5=\dfrac{1}{R_5^2}$, $\sigma_4=\dfrac{\overrightarrow{A_4A_5}^2}{R_4^2R_5^2}$, est résoluble par rapport à $\overrightarrow{A_3A_4}$, sauf si A_4 coïncide avec A_5. Dans ce cas exceptionnel, $\overline{U_5U_4}$ est une similitude, donc il faut et il suffit que $\overline{U_3U_2U_1}$ en soit également une, ce qui s'écrit $(\overrightarrow{A_1A_2}\overrightarrow{A_2A_3}+R_2^2)_2=0$. Si A_4' diffère de A_5, écrivons

$$\overrightarrow{A_3A_4}=\lambda\overrightarrow{A_1A_2}+\mu\overrightarrow{A_2A_3}-\frac{R_4^2}{\overline{A_4A_5}^2}\overrightarrow{A_4A_5}\,, \tag{48}$$

avec

$$\lambda=-\frac{\sigma_2}{\sigma_4},\quad \mu=-\frac{\sigma_3}{\sigma_4}. \tag{49}$$

Formons ensuite σ_1, que nous ordonnons par rapport à $\overrightarrow{A_3A_4}$, et où nous combinons les multiplications symboliques et ordinaires pour simplifier l'écriture[1]. Il vient d'abord

$$\begin{aligned}R_1^2R_2^2\ldots R_5^2\sigma_1 &= (\overrightarrow{A_1A_2}\overrightarrow{A_2A_3}\overrightarrow{A_3A_4}\overrightarrow{A_4A_5}+R_2^2\overrightarrow{A_3A_4}\overrightarrow{A_4A_5}+R_3^2\overrightarrow{A_1A_2}\overrightarrow{A_4A_5}+\\ &\quad +R_4^2\overrightarrow{A_1A_2}\overrightarrow{A_2A_3}+R_2^2R_4^2)_2\\ &= (\overrightarrow{A_1A_2}\overrightarrow{A_2A_3}+R_2^2)_2\overrightarrow{A_3A_4}^2\overrightarrow{A_4A_5}^2+2R_4^2(\overrightarrow{A_1A_2}\overrightarrow{A_2A_3}+R_2^2)_2(\overrightarrow{A_3A_4}\overrightarrow{A_4A_5})+\\ &\quad +2R_3^2\overrightarrow{A_1A_2}^2(\overrightarrow{A_2A_3}\overrightarrow{A_3A_4})\overrightarrow{A_4A_5}^2+2R_2^2R_3^2(\overrightarrow{A_1A_2}\overrightarrow{A_3A_4})\overrightarrow{A_4A_5}^2+\\ &\quad +[R_4^2(\overrightarrow{A_1A_2}\overrightarrow{A_2A_3}+R_2^2)+R_3^2\overrightarrow{A_1A_2}\overrightarrow{A_4A_5}]_2\,.\end{aligned}$$

---

[1] Les multiplications sont ordinaires, sauf lorsque l'exposant ou l'indice de multiplication est placé inférieurement.

En utilisant (48), où l'on sépare systématiquement du troisième terme les termes en λ, μ, il vient ensuite

$$\begin{aligned} R_1^2R_2^2\dots R_5^2\sigma_1 = {} & (\overrightarrow{A_1A_2}\,\overrightarrow{A_2A_3}+R_2^2)_2[(\lambda\overrightarrow{A_1A_2}+\mu\overrightarrow{A_2A_3})^2\overrightarrow{A_4A_5}^2-R_4^4] \\ & +2R_3^2\{\overrightarrow{A_1A_2}^2[\lambda(\overrightarrow{A_1A_2}\,\overrightarrow{A_2A_3})+\mu\overrightarrow{A_2A_3}^2]+R_2^2[\lambda\overrightarrow{A_1A_2}^2+ \\ & +\mu(\overrightarrow{A_1A_2}\,\overrightarrow{A_2A_3})]\}\overrightarrow{A_4A_5}^2-2R_3^2R_4^2[\overrightarrow{A_1A_2}^2(\overrightarrow{A_2A_3}\,\overrightarrow{A_4A_5})+ \\ & +R_2^2(\overrightarrow{A_1A_2}\,\overrightarrow{A_4A_5})]+[R_4^2(\overrightarrow{A_1A_2}\,\overrightarrow{A_2A_3}+R_2^2)+R_3^2\overrightarrow{A_1A_2}\,\overrightarrow{A_4A_5}]_2\,, \end{aligned}$$

ou, après des simplifications évidentes,

$$\begin{aligned} (50)\quad R_1^2R_2^2\dots R_5^2\sigma_1 = {} & \{(\overrightarrow{A_1A_2}\,\overrightarrow{A_2A_3}+R_2^2)_2(\lambda\overrightarrow{A_1A_2}+\mu\overrightarrow{A_2A_3})^2+ \\ & +2R_3^2\overrightarrow{A_1A_2}^2[\lambda(\overrightarrow{A_1A_2}\,\overrightarrow{A_2A_3})+\mu\overrightarrow{A_2A_3}^2]+ \\ & +2R_2^2R_3^2[\lambda\overrightarrow{A_1A_2}^2+\mu(\overrightarrow{A_1A_2}\,\overrightarrow{A_2A_3})]+R_3^4\overrightarrow{A_1A_2}^2\}\overrightarrow{A_4A_5}^2\,. \end{aligned}$$

L'équation $\sigma_1 = 0$ équivaut donc à l'annulation de l'accolade de (50). Désignons respectivement par l et m les mesures de $\overrightarrow{A_1A_2}$ et $\overrightarrow{A_2A_3}$, effectuées sur des supports orientés faisant un angle φ, et ordonnons l'équation obtenue par rapport au rayon R_3. $\sigma_1 = 0$ s'écrit ainsi

$$\begin{aligned} & R_3^4l^2+2R_3^2l^2m(\lambda l\cos\varphi+\mu m)+2R_2^2R_3^2l(\lambda l+\mu m\cos\varphi)+ \\ & +(l^2m^2+2R_2^2lm\cos\varphi+R_2^4)\times(\lambda^2l^2+2\lambda\mu lm\cos\varphi+\mu^2m^2) = 0\,, \end{aligned}$$

ou enfin

$$(51)\quad [R_3^2l+\lambda l(lm\cos\varphi+R_2^2)+\mu m(lm+R_2^2\cos\varphi)]^2+(\lambda l^2-\mu R_2^2)^2m^2\sin^2\varphi = 0\,.$$

On obtient ainsi, dans le domaine réel considéré, le système des deux équations

$$(52)\qquad \begin{cases} (\lambda l^2-\mu R_2^2)m\sin\varphi = 0\,, \\ R_3^2l+\lambda l(lm\cos\varphi+R_2^2)+\mu m(lm+R_2^2\cos\varphi) = 0\,. \end{cases}$$

Une première solution est $m = 0$, avec $l\ (R_3^2+\lambda R_2^2) = 0$; si $m = l = 0$, c'est à dire si $A_1 = A_2 = A_3$, il suffit de vérifier (48), qui se réduit à

$$(53)\qquad A_3A_4 = -\frac{R_4^2}{\overline{A_4A_5}^2}\overrightarrow{A_4A_5}\,,$$

et exprime que $\overline{U_5U_4U_3}$ est une similitude, comme il se doit puisque $\overline{U_2U_1}$ en est une. Si $A_2 = A_3 \mp A_1$, c'est à dire $m = 0$ et $\lambda = -\frac{R_3^2}{R_2^2}$, (48) s'écrit

$$(54) \qquad \overrightarrow{A_3A_4} = -\frac{R_3^2}{R_2^2}\overrightarrow{A_1A_2} - \frac{R_4^2}{\overline{A_4A_5}^2}\overrightarrow{A_4A_5}\,, \quad \text{avec } A_2 = A_3\,.$$

Une deuxième solution est $\varphi = 0$, qui exprime que A_1, A_2, A_3 sont alignés, avec

$$R_3^2 l + (\lambda l + \mu m)(lm + R_2^2) = 0\,.$$

$lm+R_2^2$ ne peut être nul, car il en résulterait $l = 0$, donc $R_2 = 0$; d'ailleurs, $lm+R_2^2 = 0$ exprime que $\overline{U_3U_2U_1}$ est une similitude, et il faudrait qu'il en fût de même pour $\overline{U_5U_4}$, ce qui n'est pas si $A_4 \neq A_5$. On peut donc écrire

$$\lambda l + \mu m = -\frac{R_3^2 l}{lm+R_2^2},$$

ce qui donne à (48) la forme

$$(55) \quad \overrightarrow{A_3A_4} = -\frac{R_3^2\overrightarrow{A_1A_2}}{\overrightarrow{A_1A_2}\,\overrightarrow{A_2A_3}+R_2^2} - \frac{R_4^2}{\overline{A_4A_5}^2}\overrightarrow{A_4A_5}\,, \quad \text{avec } A_1,\ A_2,\ A_3 \text{ alignés.}$$

Enfin une dernière solution est $\lambda l^2 - \mu R_2^2 = 0$, associée à la deuxième équation de (52); $l = 0$ entraîne d'ailleurs $\mu = 0$, d'où résulte encore (53), avec $A_1 = A_2$, ce qui s'explique comme précédemment. Si $l \neq 0$, il vient

$$\frac{\lambda}{R_2^2} = \frac{\mu}{l^2} = \frac{-R_3^2}{R_2^2(lm\cos\varphi + R_2^2) + lm(lm + R_2^2\cos\varphi)},$$

où le dernier dénominateur n'est rien autre que $(\overrightarrow{A_1A_2}\,\overrightarrow{A_2A_3}+R_2^2)_2$; (48) s'écrit alors

$$(56) \qquad \overrightarrow{A_3A_4} = -R_3^2\frac{R_2^2\overrightarrow{A_1A_2}+\overrightarrow{A_1A_2}^2\,\overrightarrow{A_2A_3}}{(\overrightarrow{A_1A_2}\,\overrightarrow{A_2A_3}+R_2^2)_2} - \frac{R_4^2}{\overline{A_4A_5}^2}\overrightarrow{A_4A_5}\,.$$

On vérifie tout de suite que les trois solutions particulières (53), (54), (55) sont contenues dans (56), ainsi que la solution pour laquelle $A_4 = A_5$, car le dernier terme de (56) devient alors infini, ce qui exige $(\overrightarrow{A_1A_2}\,\overrightarrow{A_2A_3}+R_2^2)_2 = 0$, donc $\sigma_3 = 0$, qui est bien la condition pour que $\overline{U_3U_2U_1}$ soit une similitude. En résumé, (56) est la condition générale pour que le produit $\overline{U_5\ldots U_2U_1}$ de 5 inversions réelles soit une similitude.

17. Les conditions obtenues laissent arbitraires R_1 et R_n. En effet, le produit de deux inversions est une similitude pourvu que les deux sphères soient concentriques; donc si U_1' est une sphère quelconque concentrique à U_1, $\overline{U_n\ldots U_2U_1} =$

$\overline{U_n\ldots U_2U_1'U_1'U_1}$ est le produit d'une similitude $\overline{U_1'U_1}$ par $\overline{U_n\ldots U_2U_1'}$, et est elle-même une similitude pourvu que $\overline{U_n\ldots U_2U_1'}$ en soit une; cette opération a changé arbitrairement le rayon de U_1, et le même raisonnement s'applique également à U_n.

Les formules (47) et (56) s'établissent très aisément en raisonnant par récurrence, grâce à la condition qu'un produit de 3 inversions soit une similitude. On sait en effet que si A_2' est l'inverse de A_1 par rapport à U_2, c'est à dire que

$$\overrightarrow{A_2'A_2} = \frac{R_2^2}{\overline{A_1A_2}^2}\overrightarrow{A_1A_2}, \tag{57}$$

le produit $\overline{U_2'U_2U_1}$ est une similitude pourvu que la sphère unitaire U_2' soit centrée en A_2'. D'autre part, $\overline{U_n\ldots U_2U_1} = \overline{U_n\ldots U_3U_2'U_2'U_2U_1}$ est le produit de la similitude $\overline{U_2'U_2U_1}$ par $\overline{U_n\ldots U_3U_2'}$, et est elle-même une similitude pourvu que $\overline{U_n\ldots U_3U_2'}$ en soit une; on est ainsi ramené au même problème pour un produit de $n-1$ inversions au lieu de n.

Par exemple, si $n = 4$, $\overline{U_4U_3U_2'}$ est une similitude pourvu que

$$\overrightarrow{A_2'A_3}+\frac{R_2^3}{\overline{A_3A_4}^2}\overrightarrow{A_3A_4} = 0\,, \tag{58}$$

et il suffit d'éliminer A_2' entre (57) et (58) pour obtenir (47).

Ensuite, avec $n = 5$, la condition (47) nous apprend que $\overline{U_5U_4U_3U_2'}$ est une similitude pourvu que

$$\frac{R_3^2}{\overline{A_2'A_3}^2}\overrightarrow{A_2'A_3}+\overrightarrow{A_3A_4}+\frac{R_4^2}{\overline{A_4A_5}^2}\overrightarrow{A_4A_5} = 0\,, \tag{59}$$

et il suffit encore d'éliminer A_2' entre (57) et (59) pour obtenir (56), en remarquant que

$$\overrightarrow{A_2'A_3} = \frac{R_2^2}{\overline{A_1A_2}^2}\overrightarrow{A_1A_2}+\overrightarrow{A_2A_3}$$

donne

$$\overrightarrow{A_2'A_3}^2 = \frac{R_2^4}{\overline{A_1A_2}^2}+2R_2^2\frac{\overrightarrow{A_1A_2}\,\overrightarrow{A_2A_3}}{\overline{A_1A_2}^2}+\overrightarrow{A_2A_3}^2 = \frac{(\overrightarrow{A_1A_2}\,\overrightarrow{A_2A_3}+R_2^2)_2}{\overline{A_1A_2}^2}. \tag{60}$$

Enfin, pour $n = 6$, la condition (56) appliquée à $\overline{U_6U_5U_4U_3U_2'}$ donne

$$\overrightarrow{A_4A_5} = -R_4^2\frac{R_3^2\overrightarrow{A_2'A_3}+\overline{A_2'A_3}^2\,\overrightarrow{A_3A_4}}{(\overrightarrow{A_2'A_3}\,\overrightarrow{A_3A_4}+R_3^2)_2}-\frac{R_5^2}{\overline{A_5A_6}^2}\overrightarrow{A_5A_6}\,,$$

avec, grâce à (60),

$$R_3^2\overrightarrow{A_2'A_3}+\overrightarrow{A_2'A_3}^2\overrightarrow{A_3A_4} = \frac{1}{\overline{A_1A_2}^2}\,[R_2^2R_3^2\overrightarrow{A_1A_2}+R_3^2\overrightarrow{A_1A_2}^2\overrightarrow{A_2A_3}+(\overrightarrow{A_1A_2}\,\overrightarrow{A_2A_3}+R_2^2)_2\overrightarrow{A_3A_4}]\,,$$

et

$$(\overrightarrow{A_1'A_3}\,\overrightarrow{A_3A_4}+R_3^2)_2 = \left(\frac{R_2^2\overrightarrow{A_1A_2}\,\overrightarrow{A_3A_4}+\overrightarrow{A_1A_2}^2\overrightarrow{A_2A_3}\,\overrightarrow{A_3A_4}}{\overline{A_1A_2}^2}+R_3^2\right)_2$$

$$= \frac{1}{\overline{A_1A_2}^4}\,(R_2^2\overrightarrow{A_1A_2}\,\overrightarrow{A_3A_4}+\overrightarrow{A_1A_2}^2\overrightarrow{A_2A_3}\,\overrightarrow{A_3A_4}+R_3^2\overrightarrow{A_1A_2}^2)_2$$

$$= \frac{1}{\overline{A_1A_2}^2}\,(\overrightarrow{A_1A_2}\,\overrightarrow{A_2A_3}\,\overrightarrow{A_3A_4}+R_2^2\overrightarrow{A_3A_4}+R_3^2\overrightarrow{A_1A_2})_2\,,$$

les calculs symboliques étant légitimes car $\overrightarrow{A_1A_2}$ est le premier vecteur. On obtient ainsi la condition pour que $\overline{U_6U_5\ldots U_1}$ soit une similitude sous la forme

$$\overrightarrow{A_4A_5} = -R_4^2\,\frac{R_2^2R_3^2\overrightarrow{A_1A_2}+R_3^2\overrightarrow{A_1A_2}^2\overrightarrow{A_2A_3}+(\overrightarrow{A_1A_2}\,\overrightarrow{A_2A_3}+R_2^2)_2\overrightarrow{A_3A_4}}{(\overrightarrow{A_1A_2}\,\overrightarrow{A_2A_3}\,\overrightarrow{A_3A_4}+R_2^2\overrightarrow{A_3A_4}+R_3^2\overrightarrow{A_1A_2})_2}-\frac{R_5^2}{\overline{A_5A_6}^2}\overrightarrow{A_5A_6}\,. \tag{61}$$

Bien entendu, les calculs deviennent rapidement compliqués quand n augmente, mais cette méthode est commode pour les petites valeurs de n, tandis que l'emploi des théorèmes II et IV est d'une portée théorique incomparablement supérieure.

18. Terminons ce chapitre par la résolution d'un problème classique. On sait que tout produit d'inversions $\overline{U_n\ldots U_2U_1}$ est équivalent au produit d'un déplacement, accompagné ou non d'une symétrie, et d'une inversion; soit donc

$$\overline{U_n\ldots U_2U_1} = \overline{DS}$$

où $\overline{D}$ représente une similitude de rapport ± 1, et $\overline{S}$ l'inversion associée à la sphère

$$S = \frac{\overrightarrow{KP}^2-\varrho^2}{2\varrho}.$$

σ_1 est supposé non nul. K est le seul point dont le transformé par $\overline{U_n\ldots U_2U_1}$ soit l'infini, donc

$$\overrightarrow{A_1K} = \frac{\vec{\alpha}_1}{\sigma_1}. \tag{62}$$

En écrivant $S = U_0$, la transformation $\overline{U_n\ldots U_2U_1U_0}$ est alors telle que l'on ait

$$\vec{\alpha}_0 = \sum_{i=1}^{n} \frac{\overrightarrow{A_0A_i}}{R_iR'_i} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\overrightarrow{KA_i}}{R_iR'_i} = 0 ,$$

avec

$$\vec{\alpha}_0^2 = \varrho^2\sigma_0\sigma_1 ;$$

donc $\vec{\alpha}_0 = 0$ entraîne $\sigma_0 = 0$, de sorte que $\overline{U_n \ldots U_2U_1S}$ est bien une similitude. On sait d'autre part que le rapport de cette similitude est $\varrho^2\sigma_1$, ce qui définit enfin ϱ par la condition $\varrho^2\sigma_1 = \pm 1$. On sait ainsi déterminer aisément la sphère d'inversion S, à l'aide de (62) et de $\varrho^2 = \dfrac{\varepsilon}{\sigma_1}$; on peut même la supposer réelle; et la similitude $D = \overline{U_n \ldots U_2U_1S}$ s'en déduit.

CHAPITRE III

Les produits d'inversions équivalents à une homothétie.

19. Lorsque $\overline{U_n \ldots U_2U_1}$ est une homothétie, le point courant M et son transformé M_n sont alignés avec un point fixe K. D'ailleurs les seules transformations anallagmatiques ayant cette propriété sont les homothéties et les inversions. On sait en effet que $\overline{U_n \ldots U_2U_1}$ est une transformation euclidienne E (similitude), ou une inversion I, ou un produit IE. Si K_1 est le transformé EK, les droites Δ passant par K sont transformées par E en le faisceau des droites Δ_1 de sommet K_1. Si donc $\overline{U_n \ldots U_2U_1} = E$, il faut que K_1 coïncide avec K et que les Δ soient invariantes, ce qui n'est possible que si E est une homothétie; si $\overline{U_n \ldots U_2U_1} = IE$, l'inversion I doit transformer chaque $\Delta_1 = E\Delta$ en Δ, donc il faut que K_1 coïncide avec K et le pôle de l'inversion, et que Δ_1 coïncide avec Δ; E ne peut être qu'une homothétie de centre K et I une inversion de même centre, donc IE est une inversion. Pour distinguer l'homothétie de l'inversion, il suffit d'exprimer que $\overline{U_n \ldots U_2U_1}$ est euclidien ou non, c'est-à-dire que $\dfrac{h_n}{h}$ est constant ou non, ou encore que $\sigma_1 = \vec{\alpha}_1 = 0$ ou non. Si

$$\overrightarrow{MK} = \lambda\overrightarrow{MM_n} , \quad \overrightarrow{M_nK} = (\lambda-1)\overrightarrow{MM_n} , \tag{1}$$

la condition d'alignement (19;I) s'écrit ici

$$K = \lambda\frac{M_n}{h_n} + (1-\lambda)\frac{M}{h} + \frac{\lambda(1-\lambda)}{hh_n}(MM_n)\varpi_0 \qquad \varpi_0 = -1 , \tag{2}$$

où λ est constant dans le cas de l'homothétie; le rapport d'homothétie est $\dfrac{\lambda-1}{\lambda}$, donc

$$\frac{h_n}{h} = -\frac{R_1}{R_1'} = \pm\frac{\lambda}{\lambda-1}.$$

Dans le cas de l'inversion, que nous ne traitons pas ici, c'est $\frac{\lambda(\lambda-1)}{hh_n}(MM_n)$ qui est constant, puisque ça doit valoir $-\frac{\varrho^2}{2}$ si $\frac{\overrightarrow{KP}^2-\varrho^2}{2\varrho}$ est la sphère d inversion, réelle ou non.

Il est cependant plus simple d'exprimer qu'il y a alignement à l'aide de l'identité

$$\frac{M_n}{h_n}-\frac{M}{h} \equiv \frac{\overrightarrow{MP}^2-\overrightarrow{M_nP}^2}{2} \equiv \overrightarrow{MM_n}\frac{\overrightarrow{MP}+\overrightarrow{M_nP}}{2} \equiv \overrightarrow{MM_n}\overrightarrow{KP}+\overrightarrow{MM_n}\frac{\overrightarrow{MK}+\overrightarrow{M_nK}}{2},$$

où M, M_n, K sont quelconques et où P désigne le point courant de l'espace. On voit d'abord que $\frac{M_n}{h_n}-\frac{M}{h}$ est linéaire en P, et que

$$\text{(3)} \qquad \frac{M_n}{h_n}-\frac{M}{h}+\frac{1}{\lambda}\overrightarrow{KM}\overrightarrow{KP} \equiv \left(\overrightarrow{MM_n}-\frac{\overrightarrow{MK}}{\lambda}\right)\overrightarrow{KP}+\overrightarrow{MM_n}\frac{\overrightarrow{MK}+\overrightarrow{M_nK}}{2}$$

est indépendant de P si (1) est vérifié, et réciproquement. On a ainsi établi que *les* $\overline{U_n \ldots U_2U_1}$ *qui sont une homothétie sont les transformations euclidiennes pour lesquelles il existe un point fixe K et une constante λ tels que*

$$\text{(4)} \qquad \frac{M_n}{h_n}-\frac{M}{h}+\frac{1}{\lambda}\overrightarrow{KM}\overrightarrow{KP} = \text{indépendant de } P.$$

En remplaçant M_n par son expression (5;II), (4) s'écrit

$$M\left(\frac{1}{h_n}-\frac{1}{h}\right)-\frac{2}{h_n}\sum_{i=1}^{n}(U_iM)V_i+\frac{1}{\lambda}\overrightarrow{KM}\overrightarrow{KP} = \text{indépendant de } P\,,$$

ou, en multipliant les deux membres par $\frac{h_n}{h}$, qui est constant,

$$\text{(5)} \qquad \left(1-\frac{h_n}{h}\right)\frac{M}{h}-\frac{2}{h}\sum_{i=1}^{n}(U_iM)V_i+\frac{h_n}{\lambda h}\overrightarrow{KM}\overrightarrow{KP} = \text{indépendant de } P\,.$$

Les termes du second degré en P doivent disparaître, comme on l'a observé, et la vérification est immédiate à l'aide de (23;II). Il reste donc la condition nécessaire et suffisante obtenue en annulant le coefficient de $\overrightarrow{KP}$

$$\text{(6)} \qquad \left[\frac{h_n}{h}(\lambda-1)-\lambda\right]\overrightarrow{KM}-\frac{2\lambda}{h}\sum_{i=1}^{n}\frac{U_iM}{R_i'}\overrightarrow{KA_i'} = 0$$

qui doit être satisfaite quel que soit M, pour des constantes convenables λ et K. Remplaçons $\overrightarrow{KM}$ par $\overrightarrow{A_1M}-\overrightarrow{A_1K}=\overrightarrow{A_1M}-\lambda\overrightarrow{A_1A_1'}$ et $\overrightarrow{KA_i'}$ par $\overrightarrow{A_1A_i'}-\lambda\overrightarrow{A_1A_1'}$, en tenant compte de ce que A_1', centre de V_1, est l'homothétique de A_1, centre de U_1; (6) s'écrit

$$\left[\frac{h_n}{h}(\lambda-1)-\lambda\right]\overrightarrow{A_1M}-2\frac{\lambda}{h}\sum_{i=1}^{n}\frac{U_iM}{R_i'}\overrightarrow{A_1A_i'}-\lambda\left[\left(\frac{h_n}{h}-1\right)\lambda-\frac{h_n}{h}-\frac{2\lambda}{h}\sum_{i=1}^{n}\frac{U_iM}{R_i'}\right]\overrightarrow{A_1A_1'}=0\,,$$

ou, compte tenu de (23;II),

$$\left[\frac{h_n}{h}(\lambda-1)-\lambda\right]\overrightarrow{A_1M}-\frac{2\lambda}{h}\sum_{i=1}^{n}\frac{U_iM}{R_i'}\overrightarrow{A_1A_i'}+\lambda\frac{h_n}{h}\overrightarrow{A_1A_1'}=0\,. \tag{7}$$

(7) équivaut à la condition (6) puisque le point K, défini par $\overrightarrow{A_1K}=\lambda\overrightarrow{A_1A_1'}$, est fixe dès que λ est constant. Explicitons enfin par rapport à M, en remplaçant $\frac{2}{h}U_iM$ par

$$\frac{\overrightarrow{A_iM}^2-R_i^2}{R_i}=\frac{\overrightarrow{A_1M}^2-2\overrightarrow{A_1A_i}\,\overrightarrow{A_1M}+\overrightarrow{A_1A_i}^2-R_i^2}{R_i};$$

nous obtenons le système d'équations nécessaires et suffisantes

$$\left\{\begin{aligned}&\sum_{i=1}^{n}\frac{\overrightarrow{A_1A_i'}}{R_iR_i'}=0\,,\\&\frac{1-\varepsilon}{2}\overrightarrow{A_1M}=\sum_{i=1}^{n}\frac{(\overrightarrow{A_1A_i}\,\overrightarrow{A_1M})}{R_iR_i'}\overrightarrow{A_1A_i'}\,,\\&\frac{h_n}{h}\overrightarrow{A_1A_1'}=\sum_{i=1}^{n}\frac{\overrightarrow{A_1A_i}^2-R_i^2}{R_iR_i'}\overrightarrow{A_1A_i'}\,,\end{aligned}\right. \tag{8}$$

où l'on a utilisé la relation $\frac{h_n}{h}=\varepsilon\frac{\lambda}{\lambda-1}\,(\varepsilon=\pm1)$.

20. Grâce à $\sigma_1=0$, la première de ces équations s'écrit encore

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{\overrightarrow{A_1'A_i'}}{R_iR_i'}=0\,;$$

le premier membre est le vecteur $\overrightarrow{\alpha_1'}$ associé à $\overline{V_n\ldots V_2V_1}$ comme $\overrightarrow{\alpha_1}$ l'est à $\overline{U_n\ldots U_2U_1}$; ces deux transformations, inverses l'une de l'autre, sont simultanément euclidiennes, donc $\overrightarrow{\alpha_1'}=0$ est une conséquence de $\overrightarrow{\alpha_1}=\sigma_1=0$. $\overrightarrow{\alpha_1}=0$ permet également de remplacer la deuxième équation (8) par

$$\frac{1-\varepsilon}{2}\overrightarrow{A_1M} = \sum_{i=1}^{n} \frac{(\overrightarrow{A_1A_i}\,\overrightarrow{A_1M})}{R_iR_i'}\overrightarrow{A_nA_i'}\,; \tag{9}$$

$\overrightarrow{A_1M}$ est le vecteur le plus général de l'espace, tandis que le second membre est un vecteur de la variété plane déterminée par les centres des sphères U_i, car les $\overrightarrow{A_nA_i'}$ sont des combinaisons linéaires des vecteurs $\overrightarrow{A_nA_i}$ (ou $\overrightarrow{A_1A_i}$); cette variété a moins de $n-1$ dimensions car $\vec{\alpha}_1 = 0$ établit une relation linéaire entre ces $n-1$ vecteurs. Si cet hyperplan remplit l'espace, les deux valeurs de ε sont a priori admissibles, tandis que seul $\varepsilon = 1$ convient dans le cas contraire; il suffit alors que le second membre de (9) soit nul pour tous les vecteurs $\overrightarrow{A_1M}$ de l'hyperplan.

Avant de discuter cette équation (9), montrons que la dernière équation (8) est satisfaite. $\frac{h_n}{h}$ étant égal à $R_1^2\sigma_2$, les deux termes en $\overrightarrow{A_1A_1'}$, portés tous deux au premier membre, ont le coefficient total

$$R_1^2\sigma_2 + \frac{R_1^2}{R_1R_1'} = R_1^2\sigma_1 = 0\,,$$

donc il suffit de vérifier que le vecteur

$$\vec{\beta}_1 = \frac{1}{R_1^2}\sum_{i=2}^{n} \frac{\overrightarrow{A_1A_i}^2 - R_i^2}{R_iR_i'}\overrightarrow{A_1A_i'} \tag{10}$$

est nul. On a encore

$$\vec{\beta}_1 = \frac{1}{R_1^2}\sum_{i=2}^{n} \frac{\overrightarrow{A_1A_i}^2 - R_i^2 - R_1^2 + R_1^2}{R_iR_i'}\overrightarrow{A_1A_i'} = -2\sum_{i=2}^{n}\frac{U_1U_i}{R_1R_i'}\overrightarrow{A_1A_i'} + \sum_{i=2}^{n}\frac{\overrightarrow{A_1A_i'}}{R_iR_i'},$$

donc, grâce à la formule (13;II) relative à $i = 1$, $P = A_1$,

$$\vec{\beta}_1 = \frac{\overrightarrow{A_1A_1'}}{R_1R_1'} + \sum_{i=2}^{n}\frac{\overrightarrow{A_1A_i'}}{R_iR_i'} = \sum_{i=1}^{n}\frac{\overrightarrow{A_1A_i'}}{R_iR_i'}, \tag{11}$$

qui est bien nul d'après la première équation (8) elle-même.

Remarque. A l'aide de (14;II) où $P = A_1$, le dernier membre de (11) s'écrit encore

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{\overrightarrow{A_1A_i'}}{R_iR_i'} = \sum_{i=2}^{n}\frac{\overrightarrow{A_1A_i}}{R_i^2} + \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{R_i}\sum_{j=i+1}^{n}\frac{\overrightarrow{A_1A_j}}{R_j}\sum_{p=1}^{j-i}(-2)^p\sum_{i<\alpha_1<\alpha_2<\ldots<\alpha_{p-1}<j}(U_iU_{\alpha_1})(U_{\alpha_1}U_{\alpha_2})\ldots(U_{\alpha_{p-1}}U_j)\,,$$

ou, en ordonnant par rapport à $\overrightarrow{A_1A_j}$,

$$\sum_{j=2}^{n} \frac{\overrightarrow{A_1A_j}}{R_j}\left[\frac{1}{R_j}+\sum_{i=1}^{j-1}\frac{1}{R_i}\sum_{p=1}^{j-i}(-2)^p \sum_{i<\alpha_1<\alpha_2<\ldots<\alpha_{p-1}<j}(U_iU_{\alpha_1})(U_{\alpha_1}U_{\alpha_2})\ldots(U_{\alpha_{p-1}}U_j)\right].$$

La quantité entre crochets est de la forme (15;II), mais relativement aux sphères prises dans l'ordre $U_n, U_{n-1}, \ldots U_1$ au lieu de $U_1, U_2, \ldots U_n$. Si donc l'on appelle T_i la sphère unitaire

$$\text{(12)} \qquad T_i = \overline{U_1U_2\ldots U_{i-1}}\,U_i = \frac{\overrightarrow{C_iP}^2-p_i^2}{2\varrho_i},$$

la quantité entre crochets est $\frac{1}{\varrho_j}$, et l'on a

$$\text{(13)} \qquad \vec{\beta}_1 = \sum_{i=1}^{n} \frac{\overrightarrow{A_1A_i}}{R_i\varrho_i}.$$

On vérifie encore que $\vec{\beta}_1 = 0$, car $\overline{U_1U_2\ldots U_n}$ est euclidienne en même temps que $\overline{U_n\ldots U_2U_1}$, et $\vec{\beta}_1$ est, pour cette première transformation, l'équivalent de ce qu'est, pour la deuxième, le vecteur

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\overrightarrow{A_nA_i}}{R_iR_i'} = \vec{\alpha}_1-\sigma_1\overrightarrow{A_1A_n}.$$

Observons encore que

$$\begin{aligned} T_i &= \overline{U_1U_2\ldots U_{i-1}U_i\ldots U_nU_n\ldots U_iU_i} \\ &= \overline{U_1U_2\ldots U_n}\;\overline{U_n\ldots U_{i+1}}\;\overline{U_i}\,U_i \\ &= -\overline{U_1U_2\ldots U_n}V_i \end{aligned}$$

ou

$$\text{(14)} \qquad -V_i = \overline{U_n\ldots U_2U_1}T_i.$$

$-V_i$ est donc la transformée de T_i comme $-V_1$ l'est de $T_1 = U_1$, donc, dans le cas de la similitude, le rapport des rayons est le même, et

$$\frac{1}{\varrho_i} = \frac{R_1'}{R_1}\frac{1}{R_i'}.$$

21. Nous avons ainsi démontré le

Théorème. *Les transformations $\overline{U_n\ldots U_2U_1}$ équivalentes à une homothétie sont les similitudes ($\sigma_1 = \vec{\alpha}_1 = 0$) pour lesquelles est satisfaite l'identité*

$$\text{(15)} \qquad \frac{1-\varepsilon}{2}\overrightarrow{A_1M} = \sum_{i=2}^{n-1} \frac{(\overrightarrow{A_1A_i}\,\overrightarrow{A_1M})}{R_iR_i'}\overrightarrow{A_nA_i'},$$

pour une valeur ± 1 de ε.

Les $n-2$ vecteurs $\overrightarrow{A_n A'_i}$ au second membre sont linéairement distincts, ou non, et la discussion générale ne conduit pas à une configuration simple. Examinons d'abord ce que donnent les deux hypothèses extrêmes où ces vecteurs sont parallèles, ou linéairement distincts.

Supposons les d'abord parallèles, autrement dit que les points A_i et A'_i soient sur une même droite Δ. Pour les points M de Δ, (15) s'écrit

$$\frac{1-\varepsilon}{2} = \sum_{i=2}^{n-1} \frac{\overline{A_1 A_i}\,\overline{A_n A'_i}}{R_i R'_i}. \tag{16}$$

Si $\varepsilon = -1$, la transformation $\overline{U_n \ldots U_2 U_1}$, qui vérifie $\sigma_1 = \vec{\alpha}_1 = 0$ et (15), ne peut être une homothétie que pour les points de Δ; si $\varepsilon = 1$, l'égalité générale (15) découle de (16), et la transformation est une homothétie pour l'espace E. D'ailleurs, du fait que $\overline{U_n \ldots U_2 U_1}$ est une similitude, c'est une homothétie ou une translation pour les points de Δ, donc (16) est satisfaite pour une certaine valeur de ε, qu'on peut déterminer de la façon suivante. Observons tout d'abord que les conditions

$$\sigma_1 = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{R_i R'_i} = 0\,, \quad \vec{\alpha}_1 = \sum_{i=2}^{n} \frac{\overrightarrow{A_1 A_i}}{R_i R'_i} = 0$$

laissent arbitraires $2n-3$ des $2n-1$ paramètres $\overline{A_1 A_i}$, R_i dont dépend ce système de sphères, qui peut ainsi être déformé de manière continue sans que la transformation cesse d'être une homothétie, donc sans que (16) cesse d'être vrai, ce qui laisse constant ε. D'autre part, le produit de deux inversions tel que $\overline{U_2 U_1}$ reste invariant quand on remplace U_1 et U_2, supposées non concentriques, par deux sphères de leur faisceau pourvu que leur angle soit le même, et, en particulier, par l'hyperplan radical p_1 et la sphère S_2 de centre $B_2 = \overline{U_2}A_1$; on a ainsi $\overline{U_2 U_1} = \overline{S_2 p_1}$. On peut ensuite remplacer $\overline{U_3 S_2}$ par $\overline{S_3 p_2}$, p_2 étant l'hyperplan radical de U_3 et S_2, supposées non concentriques, et le centre de S_3 étant le point $B_3 = \overline{U_3}B_2 = \overline{U_3 U_2}A_1$, et ainsi de suite. Par déformation continue, on peut admettre qu'aucune des sphères S_k n'est concentrique à U_{k+1}, tout au moins pour $k < n-1$, ce qui donne $\overline{U_n U_{n-1} \ldots U_1} = \overline{U_n S_{n-1} p_{n-2} \ldots p_2 p_1}$. Les $n-2$ plans p_k étant parallèles, le produit $\overline{p_{n-2} \ldots p_2 p_1}$ est une symétrie par rapport à un plan ou une translation suivant que n est impair ou pair; son produit par $\overline{U_n S_{n-1}}$ n'est euclidien que si U_n et S_{n-1} sont concentriques[1], et $\overline{U_n S_{n-1}}$ est alors une homothétie. Si donc n est pair, $\overline{U_n \ldots U_2 U_1}$ est le produit d'une translation par une homothétie, donc lui-même une homothétie pour tout l'espace, et $\varepsilon = 1$; si n

[1] On a $B_{n-1} = \overline{U_{n-1} \ldots U_2}A_1$, donc la coïcidence de B_{n-1} avec A_n équivaut à $\overline{U_n U_{n-1} \ldots U_2}A_1 = \infty$, ou $\overline{U_n U_{n-1} \ldots U_2 U_1}\,\infty = \infty$, ce qui est une condition évidente.

est impair, $\overline{U_n \ldots U_2 U_1}$ ne peut être une homothétie que pour les points de $\varDelta$, et $\varepsilon = -1$.

En résumé, *lorsque les centres* A_i *sont alignés,* ε *est égal à* 1 *ou* -1 *suivant que* n *est pair ou impair, et il suffit de* $\sigma_1 = \vec{\alpha}_1 = 0$ *pour que* (16) *soit vérifiée.*

22. Etudions maintenant l'autre cas extrême où les $n-1$ vecteurs $\overrightarrow{A_1A_i}$ déterminent une variété plane à $n-2$ dimensions, que nous appelons ϖ_{n-2}, c'est-à-dire que ces vecteurs ne sont pas liés par d'autre relation que $\vec{\alpha}_1 = 0$. Les $\overrightarrow{A_nA_i'}$ sont des combinaisons linéaires des $\overrightarrow{A_nA_i}$, et réciproquement, puisque le système des V_i est associé aux U_i de manière réciproque; les $\overrightarrow{A_nA_i'}$ définissent aussi ϖ_{n-2}, et sont liés par la seule condition $\vec{\alpha}_1' = 0$, c'est à dire

$$\frac{\overrightarrow{A_nA_1'}}{R_1R_1'} = -\sum_{i=2}^{n-1} \frac{\overrightarrow{A_nA_i'}}{R_iR_i'}.$$

Dans notre hypothèse, les $n-2$ vecteurs $\overrightarrow{A_nA_i'}$ $(i = 2, 3, \ldots n-1)$ sont linéairement distincts, et ce fait rend impossible (15) avec $\varepsilon = 1$, si $n > 2$. La seule solution acceptable est

$$\overrightarrow{A_1M} = \sum_{i=2}^{n-1} \frac{(\overrightarrow{A_1A_i}\,\overrightarrow{A_1M})}{R_iR_i'}\,\overrightarrow{A_nA_i'}\,, \tag{17}$$

l'espace étant la variété ϖ_{n-2}. Nous avons ainsi établi que, *dans l'espace à* N *dimensions,* $\overline{U_n \ldots U_2 U_1}$ *ne peut être une homothétie avec moins de* $N+2$ *sphères dont les centres déterminent cet espace linéaire.*

n étant égal à $N+2$, posons

$$\overrightarrow{A_1M} = \sum_{i=2}^{n-1} \lambda_i \overrightarrow{A_nA_i'}\,,$$

où les λ_i sont $n-2$ variables indépendantes. (17) donne alors le système

$$\lambda_i = \frac{1}{R_iR_i'} \sum_{k=2}^{n-1} (\overrightarrow{A_1A_i}\,\overrightarrow{A_nA_k'})\lambda_k \quad i = 2, 3, \ldots n-1\,,$$

c'est-à-dire

$$\overrightarrow{A_1A_i}\,\frac{\overrightarrow{A_nA_k'}}{R_k'} = \delta_{ik}R_k \qquad i, k = 2, 3, \ldots n-1\,, \tag{18}$$

où $\delta_{ik} = 1$ ou 0 suivant que $i = k$ ou $i \neq k$.

Ces $(n-2)^2$ équations permettent de déterminer assez aisément la configuration de ces systèmes de sphères, qui est remarquablement simple. Tout d'abord, $k = n-1$

et le remplacement de $\frac{\overrightarrow{A_n A'_{n-1}}}{R'_{n-1}}$ par le vecteur égal $\frac{\overrightarrow{A_n A_{n-1}}}{R_{n-1}}$ donnent les $n-2$ équations

$$\overrightarrow{A_n A_{n-1}}\,\overrightarrow{A_1 A_i} = \delta_{n-1,\,i}\, R^2_{n-1} \qquad i = 2, 3, \ldots n-1\,. \tag{19}$$

Les $n-3$ premières équations expriment que la variété plane ϖ_{n-3}, à $n-3$ dimensions, que définissent les centres $A_1, A_2, \ldots A_{n-2}$, est orthogonale à la droite $A_n A_{n-1}$; tandis que l'équation où $i = n-1$ s'écrit

$$\overrightarrow{A_n A_{n-1}}\,\overrightarrow{A_1 A_{n-1}} = R^2_{n-1}\,, \tag{20}$$

et exprime que ϖ_{n-3} rencontre $A_n A_{n-1}$ au point $B_{n-1} = \overline{U}_{n-1} A_n$. Ainsi, ϖ_{n-3} est le plan polaire de A_n par rapport à U_{n-1}, et l'on a encore

$$\overrightarrow{A_{n-1} A_n}\,\overrightarrow{A_{n-1} A_i} = \overrightarrow{A_{n-1} A_n}\,\overrightarrow{A_{n-1} B_{n-1}} = R^2_{n-1} \quad i = 1, 2, \ldots n-2\,. \tag{21}$$

Les équations (18) où $k = n-2$, et où on remplace $\frac{\overrightarrow{A_n A'_{n-2}}}{R'_{n-2}}$ par l'expression que (13;II) donne pour $P = A_n$, $i = n-2$, s'écrivent

$$\frac{\overrightarrow{A_n A_{n-2}}}{R_{n-2}}\,\overrightarrow{A_1 A_i} = \delta_{n-2,\,i}\, R_{n-2} + 2(U_{n-2} U_{n-1}) \frac{\overrightarrow{A_n A'_{n-1}}}{R'_{n-1}}\,\overrightarrow{A_1 A_i}\,,$$

ou, compte tenu des équations (18) elles-mêmes,

$$\frac{\overrightarrow{A_n A_{n-2}}}{R_{n-2}}\,\overrightarrow{A_1 A_i} = \delta_{n-2,\,i}\, R_{n-2} + 2\delta_{n-1,\,i}\, R_{n-1} U_{n-2} U_{n-1} \quad i = 2, 3, \ldots n-1\,. \tag{22}$$

D'autre part, $\overrightarrow{A_n A_{n-2}}$ est la somme $\overrightarrow{A_n B_{n-1}} + \overrightarrow{B_{n-1} A_{n-2}}$ de 2 vecteurs orthogonaux, où

$$\overrightarrow{A_n B_{n-1}} = \frac{\overline{A_n A_{n-1}}^2 - R^2_{n-1}}{\overline{A_n A_{n-1}}^2}\,\overrightarrow{A_n A_{n-1}}\,, \tag{23}$$

donc, compte tenu de (19), (22) donne

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{B_{n-1} A_{n-2}}\,\overrightarrow{A_1 A_i} &= \delta_{n-2,\,i} R^2_{n-2} + \delta_{n-1,\,i}\left[2 R_{n-2} R_{n-1} U_{n-2} U_{n-1} - \left(1 - \frac{R^2_{n-1}}{\overline{A_n A_{n-1}}^2}\right) R^2_{n-1}\right] \\
&= \delta_{n-2,\,i} R^2_{n-2} + \delta_{n-1,\,i}\left(R^2_{n-2} - \overline{A_{n-1} A_{n-2}}^2 + \frac{R^4_{n-1}}{\overline{A_n A_{n-1}}^2}\right) \\
&= \delta_{n-2,\,i} R^2_{n-2} + \delta_{n-1,\,i}\left(R^2_{n-2} - \overline{A_{n-1} A_{n-2}}^2 + \overline{A_{n-1} B_{n-1}}^2\right),
\end{aligned}$$

et enfin

$$\overrightarrow{B_{n-1} A_{n-2}}\,\overrightarrow{A_1 A_i} = \delta_{n-2,\,i} R^2_{n-2} - \delta_{n-1,\,i}\left(\overline{A_{n-2} B_{n-1}}^2 - R^2_{n-2}\right) \quad i = 2, 3, \ldots n-1\,. \tag{24}$$

Les $n-4$ premières équations expriment que l'hyperplan ϖ_{n-4} des points $A_1, A_2, \ldots A_{n-3}$ est orthogonal à $\overrightarrow{B_{n-1}A_{n-2}}$; c'est une variété à $n-4$ dimensions, située dans ϖ_{n-3}, et définie par le point B_{n-2} où la traverse la droite $B_{n-1}A_{n-2}$, lorsqu'on a choisi le centre A_{n-2} dans ω_{n-3}. L'équation (24) où $i = n-2$ définit ce point B_{n-2}, car

$$\overrightarrow{B_{n-1}A_{n-2}}\,\overrightarrow{A_1A_{n-2}} = \overrightarrow{B_{n-1}A_{n-2}}\,\overrightarrow{B_{n-2}A_{n-2}} = R_{n-2}^2$$

exprime que $B_{n-2} = \overline{U_{n-2}B_{n-1}} = \overline{U_{n-2}U_{n-1}A_n}$. Compte tenu des mêmes orthogonalités, le premier membre de (24) où $i = n-1$ est $\overrightarrow{B_{n-1}A_{n-2}}\,\overrightarrow{A_1A_{n-1}} = \overrightarrow{B_{n-1}A_{n-2}}\,\overrightarrow{B_{n-2}A_{n-1}} = \overrightarrow{B_{n-1}A_{n-2}}\,\overrightarrow{B_{n-2}B_{n-1}}$, où la configuration de $A_{n-2}, B_{n-1}, B_{n-2}$ est la même que celle de A_{n-1}, A_n, B_{n-1}; par analogie avec (23), ceci vaut donc $R_{n-2}^2 - \overline{A_{n-2}B_{n-1}}^2$, ce qui vérifie cette dernière équation (24).

Nous allons voir que cette configuration se prolonge jusqu'à A_1, c'est-à-dire que, d'une manière générale, l'hyperplan défini par les centres $A_1, A_2, \ldots A_{k-1}$ est le plan polaire ϖ_{k-2} du point $B_{k+1} = \overline{U_{k+1}U_{k+2}\ldots U_{n-1}A_n}$ par rapport à la sphère U_k, ceci trouvant place dans l'hyperplan ϖ_{k-1} à $k-1$ dimensions obtenu auparavant. Pour le démontrer par récurrence, admettons que ce genre de construction ait été obtenu à l'aide des équations (18) dont le second indice a la valeur $n-1, n-2, \ldots k+1$, et considérons celles d'indice k. Grâce à (13;II), elles s'écrivent

$$\frac{\overrightarrow{A_nA_k}}{R_k}\,\overrightarrow{A_1A_i} = \delta_{ik}R_k^2 + 2\sum_{j=k+1}^{n}(U_kU_j)\frac{\overrightarrow{A_nA_j'}}{R_j'}\,\overrightarrow{A_1A_i}\,,$$

ou, compte tenu des équations (18) antérieures,

$$\overrightarrow{A_nA_k}\,\overrightarrow{A_1A_i} = \delta_{ik}R_k^2 + 2\sum_{j=k+1}^{n}\delta_{ij}R_kR_jU_kU_j \qquad i = 2, 3, \ldots n-1\,. \tag{25}$$

Les $k-2$ premières équations expriment que $\overrightarrow{A_nA_k}$ est orthogonal aux $k-2$ vecteurs $\overrightarrow{A_1A_2}, \overrightarrow{A_1A_3}, \ldots \overrightarrow{A_1A_{k-1}}$, tandis que l'équation d'indice $i = k$ donne

$$\overrightarrow{A_nA_k}\,\overrightarrow{A_1A_k} = R_k^2\,;$$

A_1 et A_k étant dans l'hyperplan ϖ_{k-1} perpendiculaire à $A_{k+1}B_{k+2}$ en B_{k+1}, $\overrightarrow{A_1A_k}$ est orthogonal à $\overrightarrow{A_nB_{k+1}}$ et cette équation équivaut à

$$\overrightarrow{B_{k+1}A_k}\,\overrightarrow{A_1A_k} = R_k^2\,,$$

qui exprime que $A_1, A_2, \ldots A_{k-1}$ sont dans l'hyperplan ϖ_{k-2}, à $k-2$ dimensions, polaire de B_{k+1} par rapport à U_k, et situé dans ϖ_{k-1}. Il ne reste plus qu'à vérifier que les équations (25) d'indice $i > k$, c'est à dire

$$(26) \qquad \overrightarrow{A_nA_k}\,\overrightarrow{A_1A_i} = 2R_iR_kU_iU_k \qquad i = k+1, k+2, \dots n-1$$

sont automatiquement satisfaites. En décomposant les deux vecteurs au premier membre, celui-ci s'écrit

$$(\overrightarrow{A_nB_{k+1}}+\overrightarrow{B_{k+1}A_k})(\overrightarrow{A_1B_k}+\overrightarrow{B_kA_i}) = \overrightarrow{A_nB_{k+1}}\,\overrightarrow{B_kA_i}+\overrightarrow{B_{k+1}A_k}\,\overrightarrow{B_kA_i}\,,$$

où B_k est le point de rencontre de $B_{k+1}A_k$ avec ϖ_{k-2}, car $\overrightarrow{A_1B_k}$ est dans cet hyperplan, orthogonal à $\overrightarrow{A_nB_{k+1}}$ et $\overrightarrow{B_{k+1}A_k}$; en outre, $\overrightarrow{B_kB_{k+1}}$ étant orthogonal à $\overrightarrow{A_nB_{k+1}}$, ceci s'écrit encore

$$\overrightarrow{A_nB_{k+1}}\,\overrightarrow{B_{k+1}A_i}+\overrightarrow{B_{k+1}A_k}\,\overrightarrow{B_kB_{k+1}}\,;$$

le dernier produit scalaire vaut $R_k^2-\overline{A_kB_{k+1}}^2$, donc la vérification de (26) résulte de celle de

$$\overrightarrow{A_nB_{k+1}}\,\overrightarrow{B_{k+1}A_i} = R_i^2-\overrightarrow{A_iA_k}^2+\overrightarrow{A_kB_{k+1}}^2 = R_i^2-\overrightarrow{B_{k+1}A_i}^2 \qquad i = k+1, k+2, \dots n-1\,.$$

Mais ceci s'écrit

$$\overrightarrow{B_{k+1}A_i}\,\overrightarrow{A_nA_i} = R_i^2$$

ou, grâce à l'orthogonalité de $\overrightarrow{A_1B_{k+1}}$ et de $\overrightarrow{A_nA_i}$,

$$\overrightarrow{A_nA_i}\,\overrightarrow{A_1A_i} = R_i^2 \qquad i = k+1, k+2, \dots n-1\,,$$

qui ne sont rien autre que des équations (25) vérifiées antérieurement.

La proposition est ainsi vérifiée jusqu'à la variété plane ϖ_2 définie par $A_1A_2A_3$, qui coupe orthogonalement B_5A_4 en B_4, dans l'hyperplan ϖ_3 des 4 points $A_1A_2A_3A_4$; dans ϖ_2, la droite A_1A_2 est orthogonale à B_4A_3 au point $B_3 = \overline{U}_3B_4$, et A_1 coïncide enfin avec $B_2 = \overline{U}_2B_3 = \overline{U_2U_3\dots U_{n-1}}A_n$. Ce dernier fait s'explique naturellement, comme le montre la note du paragraphe 21.

23. Pour être complet, il faut vérifier que $\sigma_1 = 0$, et nous allons le faire pour la configuration la plus générale que viennent de nous fournir les équations (18). Calculons les σ_i ($i = n-1, n-2, \dots 1$) par récurrence, à l'aide de (34;II) et de (40;II). On sait tout d'abord que

$$R_n^2R_{n-1}^2\sigma_{n-1} = \overline{A_{n-1}A_n}^2\,;$$

(34;II) donne ensuite

$$R_n^2 R_{n-1}^2 R_{n-2}^2 \sigma_{n-2} = (\overrightarrow{A_{n-2}A_{n-1}}\,\overrightarrow{A_{n-1}A_n} + R_{n-1}^2)_2 ,$$

où

$$\overrightarrow{A_{n-2}A_{n-1}}\,\overrightarrow{A_{n-1}A_n} = \overrightarrow{B_{n-1}A_{n-1}}\,\overrightarrow{A_{n-1}A_n} = -R_{n-1}^2 ,$$

donc

$$R_n^2 R_{n-1}^2 R_{n-2}^2 \sigma_{n-2} = \overline{A_{n-2}A_{n-1}}^2\,\overline{A_{n-1}A_n}^2 - \overline{B_{n-1}A_{n-1}}^2\,\overline{A_{n-1}A_n}^2 = \overline{A_{n-2}B_{n-1}}^2\,\overline{A_{n-1}A_n}^2 .$$

Admettons alors que l'expression

$$R_n^2 R_{n-1}^2 \ldots R_p^2 \sigma_p = \overline{A_p B_{p+1}}^2\,\overline{A_{p+1}B_{p+2}}^2 \ldots \overline{A_{n-2}B_{n-1}}^2\,\overline{A_{n-1}A_n}^2 \tag{27}$$

ait été obtenue pour les σ_p d'indice $p \geq i+1$. (10;II) donne

$$\begin{aligned} R_n^2 R_{n-1}^2 \ldots R_i^2 \sigma_i = \Big[& \overrightarrow{A_iA_{i+1}} \Big(\overrightarrow{A_{i+1}A_{i+2}} \ldots \overrightarrow{A_{n-1}A_n} + \sum_{i+1<j<n} R_j^2 \overrightarrow{A_{i+1}A_{i+2}} \ldots \\ & \overrightarrow{A_{j-2}A_{j-1}}\,\overrightarrow{A_{j+1}A_{j+2}} \ldots \overrightarrow{A_{n-1}A_n} + \cdots \Big) + \\ & + R_{i+1}^2 \Big(\overrightarrow{A_{i+2}A_{i+3}} \ldots \overrightarrow{A_{n-1}A_n} + \\ & + \sum_{i+2<j<n} R_j^2 \overrightarrow{A_{i+2}A_{i+3}} \ldots \overrightarrow{A_{j-2}A_{j-1}}\,\overrightarrow{A_{j+1}A_{j+2}} \ldots \overrightarrow{A_{n-1}A_n} + \cdots \Big) \Big]_2 , \end{aligned}$$

où les deux parenthèses sont celles de σ_{i+1} et σ_{i+2}. Le double produit symbolique fait intervenir le produit scalaire $\overrightarrow{A_iA_{i+1}}\,\overrightarrow{A_{i+1}A_{i+2}}$, puisque ces 2 vecteurs sont ceux d'indices les plus faibles, multiplié par le carré symbolique de la deuxième parenthèse; les autres produits scalaires $\overrightarrow{A_iA_{i+1}}\,\overrightarrow{A_{j+1}A_{j+2}} (j > i)$ sont nuls d'après la configuration.

D'autre part, l'orthogonalité des droites A_iB_{i+1}, $B_{i+1}B_{i+2}$, $B_{i+2}A_{i+2}$ entraîne

$$\overrightarrow{A_iA_{i+1}}\,\overrightarrow{A_{i+1}A_{i+2}} = \overrightarrow{B_{i+1}A_{i+1}}\,\overrightarrow{A_{i+1}B_{i+2}} = -R_{i+1}^2 ,$$

donc

$$R_n^2 R_{n-1}^2 \ldots R_i^2 \sigma_i = \overrightarrow{A_iA_{i+1}}^2 R_n^2 R_{n-1}^2 \ldots R_{i+1}^2 \sigma_{i+1} - R_{i+1}^4 R_n^2 R_{n-1}^2 \ldots R_{i+2}^2 \sigma_{i+2} ,$$

ou, compte tenu de (27),

$$R_n^2 R_{n-1}^2 \ldots R_i^2 \sigma_i = (\overrightarrow{A_iA_{i+1}}^2\,\overrightarrow{A_{i+1}B_{i+2}}^2 - R_{i+1}^4)\overline{A_{i+2}B_{i+3}}^2\,\overline{A_{i+3}B_{i+4}}^2 \ldots \overline{A_{n-1}A_n}^2 .$$

La parenthèse s'écrit enfin

$$\overrightarrow{A_iA_{i+1}}^2\,\overrightarrow{A_{i+1}B_{i+2}}^2 - \overrightarrow{A_{i+1}B_{i+1}}^2\,\overrightarrow{A_{i+1}B_{i+2}}^2 = \overline{A_iB_{i+1}}^2\,\overline{A_{i+1}B_{i+2}}^2 ,$$

ce qui démontre (27) pour $p = i$. Pour $p = 1$, on aboutit ainsi à

$$R_n^2 R_{n-1}^2 \dots R_1^2 \sigma_1 = \overline{A_1 B_2}^2 \overline{A_2 B_3}^2 \dots \overline{A_{n-1} A_n}^2 ,$$

où A_1 coïncide avec B_2, donc $\sigma_1 = 0$. Par contre aucun des σ_i d'indice $i > 1$ n'est nul si l'on prend soin de choisir chaque A_i $(i > 1)$ distinct de B_{i+1}.

24. Pour l'examen du cas général, nous emploierons les expressions des vecteurs $\dfrac{\overrightarrow{A_1 A_i}}{R_i}$ en fonction des $\dfrac{\overrightarrow{A_n A'_j}}{R'_j}$ $(i, j = 2, 3, \dots n-1)$. La formule (13;II) donne tout d'abord

$$\frac{\overrightarrow{A_n A_i}}{R_i} = \frac{\overrightarrow{A_n A'_i}}{R'_i} + 2 \sum_{j=i+1}^{n-1} U_i U_j \frac{\overrightarrow{A_n A'_j}}{R'_j},$$

et une combinaison évidente avec l'équation particulière d'indice 1 donne

$$\frac{\overrightarrow{A_1 A_i}}{R_i} = -\frac{R_1}{R_i} \frac{\overrightarrow{A_n A'_1}}{R'_1} - 2 \frac{R_1}{R_i} \sum_{j=2}^{n-1} U_1 U_j \frac{\overrightarrow{A_n A'_j}}{R'_j} + \frac{\overrightarrow{A_n A'_i}}{R'_i} + 2 \sum_{j=i+1}^{n-1} U_i U_j \frac{\overrightarrow{A_n A'_i}}{R'_j}.$$

D'autre part, $\sigma_1 = \overrightarrow{\alpha'_1} = 0$ permet de remplacer $\dfrac{\overrightarrow{A_n A'_1}}{R_1 R'_1}$ par $-\sum\limits_{j=2}^{n-1} \dfrac{\overrightarrow{A_n A'_j}}{R_j R'_j}$, et l'on a ainsi

$$\text{(28)} \qquad \frac{\overrightarrow{A_1 A_i}}{R_i} = \sum_{j=2}^{n-1} \left(\frac{R_1^2}{R_i R_j} - 2 \frac{R_1}{R_i} U_1 U_j \right) \frac{\overrightarrow{A_n A'_j}}{R'_j} + \frac{\overrightarrow{A_n A'_i}}{R'_i} + 2 \sum_{j=i+1}^{n-1} U_i U_j \frac{\overrightarrow{A_n A'_j}}{R'_j}.$$

C'est de la forme

$$\text{(29)} \qquad \frac{\overrightarrow{A_1 A_i}}{R_i} = \sum_{j=2}^{n-1} \theta_i^j \frac{\overrightarrow{A_n A'_j}}{R'_j} \qquad i = 2, 3, \dots, n-1 ,$$

avec

$$\text{(30)} \qquad \begin{cases} \theta_i^j = \dfrac{R_1^2}{R_i R_j} - 2 \dfrac{R_1}{R_i} U_1 U_j = \dfrac{\overline{A_1 A_j}^2 - R_j^2}{R_i R_j} \qquad 2 \leq j < i , \\[2ex] \theta_i^i = \dfrac{\overline{A_1 A_i}^2}{R_i^2}, \\[2ex] \theta_i^j = \dfrac{\overline{A_1 A_j}^2 - R_j^2}{R_i R_j} + 2 U_i U_j = \dfrac{\overline{A_1 A_j}^2 - \overline{A_i A_j}^2 + R_i^2}{R_i R_j} = \dfrac{R_i^2 - \overline{A_1 A_i}^2 + 2 \overrightarrow{A_1 A_i} \overrightarrow{A_1 A_j}}{R_i R_j} \\ \hfill i < j \leq n-1 . \end{cases}$$

On voit en particulier que

$$\text{(31)} \qquad \theta_i^j + \theta_j^i = 2 \frac{\overrightarrow{A_1 A_i} \overrightarrow{A_1 A_j}}{R_i R_j} \qquad i, j = 2, 3, \dots n-1 .$$

Les coefficients θ_i^j sont ainsi des fonctions connues des $n-2$ vecteurs $\overrightarrow{A_1A_i}$ et des $n-2$ rayons R_i $(1 < i < n)$.

Nous admettons maintenant qu'il existe un certain nombre q de relations linéaires distinctes entre ces vecteurs $\overrightarrow{A_1A_i}$, qu'on peut supposer de la forme

$$\frac{\overrightarrow{A_1A_{\alpha_s}}}{R_{\alpha_s}} = \sum_{k=2}^{n-1}{}' \lambda_k^s \frac{\overrightarrow{A_1A_k}}{R_k} \qquad s = 1, 2, \ldots q\,, \tag{32}$$

où le symbole $\sum'$ signifie que la somme exclut les valeurs de k égales à un α_s. On a discuté plus haut les cas extrêmes $q = 0$ et $q = n-3$ (centres alignés); $q = n-2$ correspond à n sphères concentriques. Grâce aux identités (29), le système (32) équivaut à celui des q relations entre les $\overrightarrow{A_nA'_i}$

$$\sum_{i=2}^{n-1}\left(\theta_{\alpha_s}^i - \sum_{k=2}^{n-1}{}' \lambda_k^s \theta_k^i\right)\frac{\overrightarrow{A_nA'_i}}{R'_i} = 0 \qquad s = 1, 2, \ldots q\,, \tag{33}$$

qui sont également distinctes.

25. Ceci posé, étudions les homothéties fournies par l'identité (15) où $\varepsilon = 1$, c'est-à-dire

$$\sum_{i=2}^{n-1}\left(\frac{\overrightarrow{A_1A_i}}{R_i}\overrightarrow{A_1M}\right)\frac{\overrightarrow{A_nA'_i}}{R'_i} = 0\,. \tag{34}$$

Compte tenu de (32), elle s'écrit

$$\sum_{k=2}^{n-1}{}'\left(\frac{\overrightarrow{A_1A_k}}{R_k}\overrightarrow{A_1M}\right)\left[\frac{\overrightarrow{A_nA'_k}}{R'_k} + \sum_{s=1}^{q} \lambda_k^s \frac{\overrightarrow{A_nA'_{\alpha_s}}}{R'_{\alpha_s}}\right] = 0\,.$$

Les vecteurs $\overrightarrow{A_1A_k}$ étant linéairement distincts, les produits scalaires $\frac{\overrightarrow{A_1A_k}}{R_k}\overrightarrow{A_1M}$ sont $n-2-q$ nombres indépendants, et cette dernière identité équivaut aux $n-2-q$ relations

$$\frac{\overrightarrow{A_nA'_k}}{R'_k} + \sum_{s=1}^{q} \lambda_k^s \frac{\overrightarrow{A_nA'_{\alpha_s}}}{R'_{\alpha_s}} = 0 \qquad k = 2, 3, \ldots n-1;\ k \neq \alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_q\,. \tag{35}$$

Les seules relations qui peuvent unir les $n-2$ vecteurs $\overrightarrow{A_nA'_i}$ étant les relations (33), ou des conséquences de celles-ci, *la condition nécessaire et suffisante pour la réalisation de* (34) *est que les équations* (35) *soient des combinaisons linéaires des q équations* (33).

Voici une première conséquence: les équations (35) sont formellement distinctes, donc il faut que $n-2-q$ soit inférieur ou égal à q, c'est-à-dire

(36) $$q \geq \frac{n-2}{2}.$$

Sous la forme $n-2-q \leq \frac{n-2}{2}$, ceci signifie que (34) *n'est possible que si l'hyperplan* ϖ *des centres* A_i *a au plus* $\frac{n-2}{2}$ *dimensions*. En particulier, (34) est impossible avec $n = 4$ ou 5 sans que les sphères soient concentriques ou coaxiales; si $n = 6$, $\frac{n-2}{2} \leq q < n-3$ fournit la seule valeur $q = 2$.

En supposant donnés les vecteurs $\overrightarrow{A_1 A_k}$ et les rayons R_k, les relations (32) contiennent $q(n-2-q)$ coefficients indéterminés λ_k^s. Ces relations permettent d'exprimer les θ_i^j en fonction de ces seuls vecteurs $\overrightarrow{A_1 A_k}$ et des λ_k^s, sous forme d'expressions entières et au plus quadratiques; les coefficients de (33) sont donc des polynômes en λ_k^s, dont le degré ne dépasse pas 3. On exprime que les équations (35) sont des combinaisons linéaires des équations (33) en annulant $(n-2-q)^2$ déterminants de degré $q+1$; chacun d'eux a q lignes dont les éléments sont de degré au plus égal à 3, et une ligne dont les éléments sont au plus du premier degré. On obtient ainsi $(n-q-2)^2$ équations entières en λ_k^s, dont le degré ne surpasse pas $3q+1$, le nombre des inconnues étant au moins égal à celui de ces équations. Les résultats que fait apparaître cette méthode générale sont manifestement compliqués. Par exemple $n = 6$, $q = 2$ conduit à 4 équations à 4 inconnues, dont le degré ne dépasse pas 7. En fait les équations obtenues ne sont pas forcément distinctes et leur degré peut être bien inférieur à $3q+1$, sans que les résultats deviennent simples pour cela.

26. Lorsque $q = \frac{n-2}{2}$, ce qui suppose n pair, une simplification remarquable se produit cependant. Les deux systèmes (33) et (35) ont le même nombre d'équations, distinctes, et sont donc équivalents. Il est alors plus aisé d'exprimer que ce sont les équations (33) qui sont des combinaisons linéaires des (35), puisqu'il suffit de remplacer les vecteurs $\overrightarrow{A_n A'_k}$ dans (33) par leurs expressions (35) et d'annuler les coefficients des $\overrightarrow{A_n A'_{\alpha_t}}$ dans les équations ainsi transformées. Les $(n-2-q)^2 = q^2$ conditions obtenues sont

$$\theta_{\alpha_s}^{\alpha_t} - \sum_{h=2}^{n-1}{}' \lambda_h^s \theta_h^{\alpha_t} - \sum_{k=2}^{n-1}{}' \lambda_k^t \left(\theta_{\alpha_s}^k - \sum_{h=2}^{n-1}{}' \lambda_h^s \theta_h^k\right) = 0\,,$$

ou

(37) $$\sum_{h=2}^{n-1}{}' \sum_{k=2}^{n-1}{}' \theta_h^k \lambda_h^s \lambda_k^t - \sum_{k=2}^{n}{}' \left(\theta_{\alpha_s}^k \lambda_k^t + \theta_k^{\alpha_t} \lambda_k^s\right) + \theta_{\alpha_s}^{\alpha_t} = 0 \qquad s, t = 1, 2, \dots q\,.$$

Leur nombre est celui des inconnues λ_k^s, et leur degré ne surpasse pas 3 par rapport à ces λ_k^s, et non $3q+1$ comme dans la première évaluation. Ce système se simplifie encore beaucoup, car la somme des deux équations d'indices s, t donne

$$\sum_{h=2}^{n-1}{}' \sum_{k=2}^{n-1}{}' \left(\theta_h^k+\theta_k^h\right)\lambda_h^s\lambda_k^t - \sum_{k=2}^{n-1}{}' \left(\theta_{\alpha_s}^k+\theta_k^{\alpha_s}\right)\lambda_k^t - \sum_{k=2}^{n-1}{}' \left(\theta_{\alpha_t}^k+\theta_k^{\alpha_t}\right)\lambda_k^s+\theta_{\alpha_s}^{\alpha_t}+\theta_{\alpha_t}^{\alpha_s} = 0\,,$$

ou, grâce à (31),

$$\sum_{h=2}^{n-1}{}' \sum_{k=2}^{n-1}{}' \frac{\overrightarrow{A_1A_h}}{R_h}\frac{\overrightarrow{A_1A_k}}{R_k}\lambda_h^s\lambda_k^t - \frac{\overrightarrow{A_1A_{\alpha_s}}}{R_{\alpha_s}}\sum_{k=2}^{n-1}{}' \frac{\overrightarrow{A_1A_k}}{R_k}\lambda_k^t - \frac{\overrightarrow{A_1A_{\alpha_t}}}{R_{\alpha_t}}\sum_{k=2}^{n-1}{}' \frac{\overrightarrow{A_1A_k}}{R_k}\lambda_k^s + \frac{\overrightarrow{A_1A_{\alpha_s}}}{R_{\alpha_s}}\frac{\overrightarrow{A_1A_{\alpha_t}}}{R_{\alpha_t}} = 0\,,$$

qui est une conséquence immédiate de (32). Ainsi, le système (37) se réduit aux $\frac{q(q-1)}{2}$ équations formées par la différence de deux équations (37) d'indices s, t distincts, savoir

$$(38)\quad \sum_{2\leq k<h\leq n-1}{}' \left(\theta_h^k-\theta_k^h\right)\left(\lambda_h^s\lambda_k^t-\lambda_k^s\lambda_h^t\right) - \sum_{k=2}^{n-1}{}' \left(\theta_{\alpha_s}^k-\theta_k^{\alpha_s}\right)\lambda_k^t + \sum_{k=2}^{n-1}{}' \left(\theta_{\alpha_t}^k-\theta_k^{\alpha_t}\right)\lambda_k^s+\theta_{\alpha_s}^{\alpha_t}-\theta_{\alpha_t}^{\alpha_s} = 0\,.$$

Il résulte de (30) que $\theta_h^k-\theta_k^h$ s'exprime à l'aide des vecteurs et des rayons donnés, soit, si $k<h$,

$$\theta_h^k-\theta_k^h = 2\,\frac{\overrightarrow{A_1A_k}^2-R_k^2-\overrightarrow{A_1A_k}\,\overrightarrow{A_1A_h}}{R_kR_h}\,;$$

les autres différences analogues sont au plus du second degré par rapport aux inconnues λ_k^s, donc (38) est du troisième degré au plus par rapport à celles-ci. Par exemple pour $n=6$, $q=2$, on a une seule équation du troisième degré par rapport aux 4 coefficients inconnues λ_k^1, λ_k^2. Il suffit de choisir arbitrairement les valeurs de 3 d'entre elles et la quatrième est déterminée par une équation du second degré, car les équations (38) sont au plus du second degré par rapport à chaque lettre λ_k^s. Ceci résulte de la remarque que les seuls termes du trosième degré proviennent des deux dernières sommes dans (38), où, par exemple, $\theta_{\alpha_s}^k-\theta_k^{\alpha_s}$ ne contient que des termes λ_k^s, avec un degré inférieur ou égal à 2, et est multiplié par λ_k^t où $t \neq s$.

27. Toutes choses égales d'ailleurs, examinons maintenant l'identité (15) où $\varepsilon=-1$, soit

$$(39)\qquad \overrightarrow{A_1M} = \sum_{i=2}^{n-1}\left(\frac{\overrightarrow{A_1A_i}}{R_i}\overrightarrow{A_1M}\right)\frac{\overrightarrow{A_nA_i'}}{R_i'}\,.$$

Il faut que l'hyperplan des centres A_i', donc des A_i, coïncide avec l'espace E, donc que $n-2-q=N$; n doit surpasser $N+2$, et q est la différence des deux; le cas $q=n-2-N=0$ a été étudié au paragraphe 21. Grâce à (32), (39) s'écrit

$$\overrightarrow{A_1M} = \sum_{k=2}^{n-1}{}' \left(\frac{\overrightarrow{A_1A_k}}{R_k}\overrightarrow{A_1M}\right)\left[\frac{\overrightarrow{A_nA_k'}}{R_k'}+\sum_{s=1}^{q}\lambda_k^s\frac{\overrightarrow{A_nA_{\alpha_s}'}}{R_{\alpha_s}'}\right], \tag{40}$$

et doit être vérifié quelles que soient les valeurs des N coefficients u_h de l'expression

$$\overrightarrow{A_1M} = \sum_{h=2}^{n-1}{}' u_h \frac{\overrightarrow{A_1A_h}}{R_h}. \tag{41}$$

On obtient ainsi le système de N équations

$$\frac{\overrightarrow{A_1A_h}}{R_h} - \sum_{k=2}^{n-1}{}' \frac{(\overrightarrow{A_1A_h}\overrightarrow{A_1A_k})}{R_hR_k}\left[\frac{\overrightarrow{A_nA_k'}}{R_k'}+\sum_{s=1}^{q}\lambda_k^s\frac{\overrightarrow{A_nA_{\alpha_s}'}}{R_{\alpha_s}'}\right] = 0, \tag{42}$$

où $h = 2, 3, \ldots n-1$ et $h \neq \alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_q$. A l'aide de (29), ces équations deviennent N relations entre les vecteurs $\overrightarrow{A_nA_i'}$, soit

$$\sum_{k=2}^{n-1}{}' \left[\theta_h^k - \frac{(\overrightarrow{A_1A_h}\overrightarrow{A_1A_k})}{R_hR_k}\right]\frac{\overrightarrow{A_nA_k'}}{R_k'} + \sum_{s=1}^{q}\left[\theta_h^{\alpha_s} - \sum_{k=2}^{n-1}{}' \lambda_k^s \frac{(\overrightarrow{A_1A_h}\overrightarrow{A_1A_k})}{R_hR_k}\right]\frac{\overrightarrow{A_nA_{\alpha_s}'}}{R_{\alpha_s}'} = 0, \tag{43}$$

et l'on exprimera qu'elles sont des combinaisons linéaires des équations (33). Les coefficients dans (43) sont quadratiques au plus par rapport aux λ_k^s, donc les N^2 déterminants dont l'annulation exprime que (43) sont des conséquences de (33) sont entiers et de degré au plus égal à $3q+2$ par rapport à l'ensemble des qN inconnues λ_k^s. Bien entendu cette évaluation est très large, et ces conditions elles-mêmes ne sont pas toujours distinctes.

On peut observer encore que le déterminant des coefficients des vecteurs $\dfrac{\overrightarrow{A_nA_k'}}{R_k'}$ dans (43) est symétrique gauche, en vertu de (31). Il est donc nul si son degré N est impair, et carré parfait si N est pair. En particulier, si $N = q = \dfrac{n-2}{2}$ est pair, et si ce déterminant n'est pas nul, les N équations (43) sont résolubles par rapport aux $\overrightarrow{A_nA_k'}$ et distinctes. Comme il a été fait au paragraphe précédent, il est loisible et plus commode d'exprimer que ce sont les équations (33) qui sont des combinaisons linéaires des équations (43). Les expressions que ces dernières donnent pour $\dfrac{\overrightarrow{A_nA_k'}}{R_k'}$ sont entières et quadratiques par rapport aux λ_k^s et linéaires par rapport aux $\dfrac{\overrightarrow{A_nA_{\alpha_s}'}}{R_{\alpha_s}'}$; en portant dans (33) et en annulant le coefficient de chaque vecteur $\dfrac{\overrightarrow{A_nA_{\alpha_s}'}}{R_{\alpha_s}}$, on obtient ainsi N^2 équations entières en λ_k^s et de degré au plus égal à 4 par rapport à l'ensemble de ces inconnues.

28. Il est intéressant de préciser les conditions pour que $\overline{U_n \dots U_2 U_1}$ soit la transformation identique. L'étude est plus aisée avec une sphère Φ, au lieu du point courant M, car la conservation de la masse d'une sphère permet de traduire l'identité par $\Phi_n = \pm\Phi$, c'est-à-dire

$$(44) \qquad \frac{1-\varepsilon}{2}\Phi \equiv \sum_{i=1}^{n} (U_i\Phi)V_i \qquad \varepsilon = \pm 1 .$$

Si les U_i sont linéairement distinctes, il en est de même des V_i, donc (44) n'est possible que si $\varepsilon = -1$ et si la famille linéaire des V_i, donc des U_i, est l'ensemble des sphères de l'espace E. Il faut donc que $n = N+2$. Dans ces conditions, on peut poser

$$\Phi = \sum_{i=1}^{n} u_i V_i ,$$

où les u_i sont n paramètres indépendants; (44), où $\varepsilon = -1$, équivaut alors aux n identités

$$u_i = U_i\Phi = \sum_{k=1}^{n} (U_i V_k) u_k \qquad i = 1, 2, \dots n ,$$

ce qui donne les conditions nécessaires et suffisantes de structure

$$(45) \qquad U_i V_k = \delta_{ik} \qquad i, k = 1, 2, \dots n .$$

Mais alors (10;II) donne, pour $i \leq k$,

$$(46) \qquad U_i U_k = \delta_{ik} , \qquad i, k = 1, 2, \dots n ,$$

et, réciproquement, (46) entraîne (45) grâce à (9;II). On démontre ainsi aisément que *les systèmes de sphères linéairement distinctes pour lesquelles le produit des inversions équivaut à l'identité sont les systèmes orthogonaux de $N+2$ sphères.*

Observons que $V_i = U_i$, et $\sigma_1 = 0$ exprime la relation classique $\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{R_i^2} = 0$ entre les courbures d'un $(N+2)$-sphère orthogonal. $\vec{\alpha}_1 = 0$ s'écrit ici

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\overrightarrow{A_1 A_i}}{R_i^2} = 0 \text{ ou } \sum_{i=1}^{n} \frac{\overrightarrow{A_i P}}{R_i^2} \equiv 0 .$$

29. Si les n sphères U_i ne sont plus linéairement distinctes, (44) où $\varepsilon = 1$ s'écrit

(47)
$$\sum_{i=1}^{n}(U_i\Phi)V_i\equiv 0\ .$$

En raisonnant comme au paragraphe 24, désignons les q relations distinctes liant les V_i par

(48)
$$V_{\alpha_s}=\sum_{k=1}^{n}{}'\,\lambda_k^s V_k \qquad s=1,2,\dots q\ ,$$

où k ne prend que des valeurs différentes de $\alpha_1,\alpha_2,\dots\alpha_q$; bien entendu, les coefficients λ_k^s sont assujettis aux q conditions qui expriment que les V_{α_s} sont des sphères unitaires. (47) s'écrit alors

$$\sum_{k=1}^{n}{}'\,V_k\Big(U_k\Phi+\sum_{s=1}^{q}\lambda_k^s U_{\alpha_s}\Phi\Big)\equiv 0\ ,$$

et équivaut au système des $n-q$ identités

$$U_k\Phi+\sum_{s=1}^{q}\lambda_k^s U_{\alpha_s}\Phi\equiv 0 \qquad k=1,2,\dots n;\ k\neq\alpha_1,\alpha_2,\dots\alpha_q\ .$$

Ceci exprime que la sphère générale Φ est orthogonale à la sphère $U_k+\sum_{s=1}^{q}\lambda_q^s U_{\alpha_s}$, donc que

(49)
$$U_k=-\sum_{s=1}^{q}\lambda_k^s U_{\alpha_s} \qquad k=1,2,\dots n;\quad k\neq\alpha_1,\alpha_2,\dots\alpha_s\ .$$

Ainsi, il faut et il suffit que les U_i vérifient les $n-q$ relations (49), qui sont formellement distinctes. Ces sphères formant, comme les V_i, un système de rang $n-q$, une première condition est $n-q\leq q$, donc

(50)
$$q\geq\frac{n}{2};$$

en outre, il faut et il suffit que (49) résulte de (48). Grâce à (10;II), (49) s'exprime, en fonction des V_i, par

(51)
$$V_k+2\sum_{j=k+1}^{n}(U_kU_j)V_j+\sum_{s=1}^{q}\lambda_k^s V_{\alpha_s}+2\sum_{s=1}^{q}\ \sum_{j=\alpha_s+1}^{n}\lambda_k^s(U_{\alpha_s}U_j)V_j=0\,;$$

en utilisant (48) lui-même, il n'y a plus qu'à tout exprimer en fonctions des seuls V_h d'indice h différent de $\alpha_1,\alpha_2,\dots\alpha_q$, et d'annuler les coefficients de ces V_h pour obtenir les conditions cherchées; il vient ainsi

$$\sum_{h=1}^{n}{}' V_h \left[\sum_{\alpha_s>k} \lambda_h^s U_k U_{\alpha_s} + \sum_{\alpha_s<h} \lambda_k^s U_h U_{\alpha_s} + \sum_{1\leq s<t\leq q} \lambda_k^s \lambda_h^t U_{\alpha_s} U_{\alpha_t} + \tfrac{1}{2}\sum_{s=1}^{q} \lambda_k^s \lambda_h^s \right] + \tfrac{1}{2} V_k + \sum_{h>k}{}' (U_k U_h) V_h = 0\,,$$

où $k, h = 1, 2, \ldots n$; $k, h \neq \alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_q$; puis enfin les $(n-q)^2$ équations annoncées, entières par rapport aux λ_k^s,

$$(52)\quad \sum_{\alpha_s<h} \lambda_k^s U_h U_{\alpha_s} + \sum_{\alpha_s>k} \lambda_h^s U_k U_{\alpha_s} + \sum_{1\leq s<t\leq q} \lambda_k^s \lambda_h^t U_{\alpha_s} U_{\alpha_t} + \tfrac{1}{2}\sum_{s=1}^{q} \lambda_k^s \lambda_h^s = \begin{cases} -\tfrac{1}{2}\delta_{kh} & h \leq k\,, \\ -U_k U_h & h > k\,. \end{cases}$$

Il resterait à exprimer les produits de deux sphères U_i en fonction des sphères V_i, à l'aide de (18;II), donc, grâce à (48) lui-même, en fonction des produits $V_k V_h$ où $k, h \neq \alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_q$, et des coefficients inconnus λ_k^s. C'est évidemment très compliqué en général.

Comme plus haut, une simplification remarquable se produit lorsque n est pair, et $q = \frac{n}{2}$. (48) et (49) sont nécessairement équivalents, et les U_{α_s} forment également un système de q sphères linéairement distinctes. On peut aussi bien supposer qu'on a choisi les sphères U_{α_s} et remplacer dans (52) les U_k et U_h par leurs expressions (49). Les q^2 relations obtenues ainsi sont au plus du second degré par rapport aux λ_k^s. On vérifie aisément que les q conditions exprimant que $U_k^2 = 1$ ne sont rien autre que les équations (52) pour lesquelles $h = k$. Si $h \neq k$, la somme des deux équations (52) correspondant à ces 2 indices s'écrit

$$U_k \sum_{s=1}^{q}{}' \lambda_h^s U_{\alpha_s} + U_h \sum_{s=1}^{q}{}' \lambda_k^s U_{\alpha_s} + \sum_{\substack{1\\ s\neq t}}^{q}{}' \lambda_k^s \lambda_h^t U_{\alpha_s} U_{\alpha_t} + \sum_{s=1}^{q}{}' \lambda_k^s \lambda_h^s = -U_k U_h\,,$$

identiquement vérifié d'après (49). Les seules équations (52) distinctes sont ainsi les $\frac{q(q+1)}{2}$ relations relatives à $h \leq k$, parmi lesquelles celles où $h = k$ expriment que les sphères U_k sont unitaires. On est ainsi conduit à la résolution de $\frac{q(q+1)}{2}$ équations quadratiques et paires entre q^2 inconnues λ_k^s, ce qui laisse au moins $\frac{q(q-1)}{2}$ arbitraires.

Exemple: Supposons $\alpha_s = q+s$; h, k prennent les valeurs $1, 2, \ldots, q$, et (49) s'écrit

$$(53)\qquad U_k = -\sum_{s=1}^{q}{}' \lambda_k^s U_{q+s}\,.$$

Les équations (52) où $h \leq k$ prennent la forme

$$\sum_{s=1}^{q} \lambda_h^s U_k U_{q+s} + \sum_{1\leq s<t\leq q} \lambda_k^s \lambda_h^t U_{q+s} U_{q+t} + \tfrac{1}{2} \sum_{s=1}^{q} \lambda_k^s \lambda_h^s = -\tfrac{1}{2}\delta_{kh} ,$$

c'est-à-dire

(54) $$\sum_{s=1}^{q} \lambda_h^s \lambda_k^s + 2 \sum_{1\leq s<t\leq q} \lambda_h^s \lambda_k^t U_{q+s} U_{q+t} = \delta_{kh} \qquad h \leq k ,$$

et sont relativement simples.

Plus particulièrement, si les q sphères U_{q+s} forment un système orthogonal, (54) se réduit à

$$\sum_{s=1}^{q} \lambda_h^s \lambda_k^s = \delta_{kh} ,$$

de sorte que les λ_k^s sont les éléments d'une matrice orthonormale, d'ailleurs quelconque. Les sphères U_k, définies par (53), forment le système orthogonal le plus général de q sphères, dans la famille linéaire des U_{q+s}. Il résulte de (10;II) que $V_{q+s} = U_{q+s}$, et de la résolution des équations (48) que

$$V_k = \sum_{s=1}^{q} \lambda_k^s V_{q+s} = -U_k .$$

Que la transformation $\overline{U_n \ldots U_2 U_1}$ soit l'identité est d'ailleurs un fait évident, puisque les 2 systèmes orthogonaux de q sphères formés par les U_k et les U_{q+s} déterminent deux transformations équivalentes et toutes deux identiques à leurs propres inverses.

30. Les V_i étant toujours liés par les q équations (48), examinons maintenant les solutions de l'identité (44) où $\varepsilon = -1$, c'est-à-dire

$$\Phi \equiv \sum_{i=1}^{n} (U_i \Phi) V_i ,$$

ou encore, grâce à (48),

(55) $$\Phi \equiv \sum_{k=1}^{n}{}' \Big(U_k \Phi + \sum_{s=1}^{q} \lambda_k^s U_{\alpha_s} \Phi \Big) V_k .$$

De même qu'au paragraphe 26, une première condition est $n-q = N+2$, de sorte que les V_k forment un système complet de $N+2$ sphères de l'espace E. On peut poser

$$\Phi = \sum_{k=1}^{n}{}' u_k V_k ,$$

où les u_k sont $n-q$ paramètres indépendants; et (55) équivaut alors aux $(n-q)^2$ équations

(56) $$\Big(U_k + \sum_{s=1}^{q} \lambda_k^s U_{\alpha_s} \Big) V_h = \delta_{kh} \qquad k, h = 1, 2, \ldots n;\ k, h \neq \alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_q ;$$

ces relations s'ajoutent aux q^2 équations qui expriment que les V_{α_s} sont unitaires. Or tout système complet de $N+2$ sphères V_k de l'espace E est associé à un système unique de $N+2$ sphères V'_k, formant également un système complet, et tel que l'on ait

$$V_h V'_k = \delta_{kh} \qquad k, h = 1, 2, \ldots n;\ k, h \neq \alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_q . \tag{57}$$

Le système (56) peut alors s'écrire

$$U_k + \sum_{s=1}^{q} \lambda_k^s U_{\alpha_s} = V'_k = \sum_{h=1}^{n}{}' c_h^k V_h , \tag{58}$$

où les coefficients c_h^k se déduisent aisément des sphères V_k. Exprimons ensuite les sphères U_k et U_{α_s} en fonction des seules sphères V_h à l'aide de (10;II) et de (48); (58) s'écrit

$$\begin{aligned} V_k + 2\sum_{h>k}{}'(U_k U_h)V_h + 2\sum_{\alpha_s>k}\sum_{h=1}^{n}{}'(U_k U_{\alpha_s})\lambda_h^s V_h + \sum_{s=1}^{q}\sum_{h=1}^{n}{}' \lambda_k^s \lambda_h^s V_h + 2\sum_{s=1}^{q}\sum_{h>\alpha_s}{}' \lambda_k^s (U_{\alpha_s} U_h) V_h + \\ +2\sum_{1\le s<t\le q} \lambda_k^s \lambda_h^t (U_{\alpha_s} U_{\alpha_t}) V_h = \sum_{h=1}^{n}{}' c_h^k V_h , \end{aligned}$$

et il ne reste plus qu'à identifier les coefficients de V_h dans les deux membres pour obtenir le système

$$\left\{ \begin{aligned} & 1 + \sum_{s=1}^{q} (\lambda_k^s)^2 + 2\sum_{s=1}^{q} \lambda_k^s U_{\alpha_s} U_k + 2\sum_{1\le s<t\le q} \lambda_k^s \lambda_k^t U_{\alpha_s} U_{\alpha_t} = c_k^k , \\ & \sum_{s=1}^{q} \lambda_k^s \lambda_h^s + 2\sum_{\alpha_s<h} \lambda_k^s U_{\alpha_s} U_h + 2\sum_{\alpha_s>k} \lambda_h^s U_{\alpha_s} U_k + 2\sum_{1\le s<t\le q} \lambda_k^s \lambda_h^t U_{\alpha_s} U_{\alpha_t} = c_h^k \qquad h < k , \\ & 2U_k U_h + \sum_{s=1}^{q} \lambda_k^s \lambda_h^s + 2\sum_{\alpha_s<h} \lambda_k^s U_{\alpha_s} U_h + 2\sum_{\alpha_s>k} \lambda_h^s U_{\alpha_s} U_k + 2\sum_{1\le s<t\le q} \lambda_k^s \lambda_h^t U_{\alpha_s} U_{\alpha_t} = c_h^k \\ & \hfill h > k . \end{aligned} \right. \tag{59}$$

Comme dans (52), il reste à exprimer les produits de deux sphères U_i en fonction des produits $V_k V_h$ et des coefficients inconnus λ_k^s, à l'aide de (18;II) et (48).

CHAPITRE IV.

Les produits d'inversions équivalents à une inversion.

31. Le raisonnement suivi au paragraphe 19 est valable jusqu'à l'équation (4;III), λ n'étant plus constant, c'est-à-dire que $\overline{U_n \ldots U_2 U_1}$ est une inversion pourvu qu'il existe un point fixe K et un scalaire λ, variable, pour lesquels

$$\frac{M_n}{h_n}-\frac{M}{h}+\frac{1}{\lambda}\overrightarrow{KM}\,\overrightarrow{KP}=\text{indépendant de } P. \tag{1}$$

Comme pour l'homothétie, on en déduit la condition (6;III)

$$\left[\frac{h_n}{h}(\lambda-1)-\lambda\right]\overrightarrow{KM}-\frac{2\lambda}{h}\sum_{i=1}^{n}\frac{U_iM}{R_i'}\overrightarrow{KA_i'}=0\,. \tag{2}$$

On a ici

$$\frac{\lambda}{\lambda-1}=\frac{\overline{KM}^2}{\varrho^2},$$

où ϱ^2 désigne la puissance, de signe quelconque, de l'inversion équivalente, c'est-à-dire

$$\lambda=\frac{\overline{KM}^2}{\overline{KM}^2-\varrho^2}\,,\qquad \lambda-1=\frac{\varrho^2}{\overline{KM}^2-\varrho^2}\,.$$

En fonction des constantes K et ϱ^2, et grâce à (23;II), (2) s'écrit encore

$$\left(1+\frac{2}{h}\sum_{i=1}^{n}\frac{U_iM}{R_i'}-\frac{\overrightarrow{KM}^2}{\varrho^2}\right)\overrightarrow{KM}-\frac{2}{h}\frac{\overrightarrow{KM}^2}{\varrho^2}\sum_{i=1}^{n}\frac{U_iM}{R_i'}\overrightarrow{KA_i'}=0\,. \tag{3}$$

Explicitons $\frac{2}{h}U_iM=\frac{\overline{A_iM}^2-R_i^2}{R_i}$; les termes du quatrième degré en M donnent la première condition

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{\overrightarrow{KA_i'}}{R_iR_i'}=0\,, \tag{4}$$

qui définit K car σ_1 ne peut être nul. D'une manière détaillée, (3) s'écrit

$$\begin{aligned}&\left(1+\sum_{i=1}^{n}\frac{\overline{KM}^2-2\overrightarrow{KA_i}\overrightarrow{KM}+\overrightarrow{KA}_i^2-R_i^2}{R_iR_i'}-\frac{\overline{KM}^2}{\varrho^2}\right)\overrightarrow{KM}-\\&\qquad-\frac{\overline{KM}^2}{\varrho^2}\sum_{i=1}^{n}\frac{\overline{KM}^2-2\overrightarrow{KA_i}\overrightarrow{KM}+\overrightarrow{KA}_i^2-R_i^2}{R_iR_i'}\overrightarrow{KA_i'}=0\,,\end{aligned} \tag{5}$$

et les termes du second degré en $\overrightarrow{KM}$ donnent la nouvelle condition

$$2\overrightarrow{KM}\sum_{i=1}^{n}\frac{\overrightarrow{KA_i}\overrightarrow{KM}}{R_iR_i'}+\frac{\overrightarrow{KM}^2}{\varrho^2}\sum_{i=1}^{n}\frac{\overrightarrow{KA}_i^2-R_i^2}{R_iR_i'}\overrightarrow{KA_i'}=0\,;$$

la deuxième somme est un vecteur de direction fixe, alors que $\overrightarrow{KM}$ est un vecteur arbitraire; cette identité se décompose donc en deux, soit

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\overrightarrow{KA_i}\,\overrightarrow{KM}}{R_i R_i'} = 0\,, \tag{6}$$

et

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\overline{KA}_i^2 - R_i^2}{R_i R_i'} \overrightarrow{KA_i} = 0\,. \tag{7}$$

(6) équivaut elle-même à

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\overrightarrow{KA_i}}{R_i R_i'} = 0\,, \tag{8}$$

qui est analogue à (4); effectivement, ces deux équations se permutent en même temps que les deux systèmes de sphères U_i et V_i, ce qui remplace la transformation par son inverse, donc par la même inversion. Le système de (4) et (8) est équivalent à l'ensemble de

$$\overrightarrow{A_1K} = \frac{\vec{\alpha}_1}{\sigma_1}, \tag{9}$$

et

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\overrightarrow{A_iA_i'}}{R_i R_i'} = 0\,, \tag{10}$$

où (9) détermine K et où (10) est une condition[1] concernant les sphères U_i.

Les termes du premier degré en $\overrightarrow{KM}$ dans (5) ont le coefficient

$$\begin{aligned} 1 + \sum_{i=1}^{n} \frac{\overrightarrow{KA_i}^2 - R_i^2}{R_i R_i'} &= 1 + \sum_{i=1}^{n} \frac{\overline{A_1K}^2 - 2\overrightarrow{A_1K}\,\overrightarrow{A_1A_i} + \overrightarrow{A_1A_i}^2 - R_i^2}{R_i R_i'} \\ &= \sigma_1 \overline{A_1K}^2 - 2\vec{\alpha}_1 \overrightarrow{A_1K} + 1 + \sum_{i=1}^{n} \frac{\overline{A_1A}_i^2 - R_i^2}{R_i R_i'} = 0 \end{aligned} \tag{11}$$

grâce à (9) et (31; II). Il ne reste donc plus qu'à annuler les termes du troisième degré dans (5), ce qui donne l'identité

$$(\varrho^2\sigma_1 - 1)\overrightarrow{KM} + 2\sum_{i=1}^{n} \frac{\overrightarrow{KA_i}\,\overrightarrow{KM}}{R_i R_i'} \overrightarrow{KA_i'} = 0\,, \tag{12}$$

à joindre à (7), (9) et (10) pour former toutes les conditions nécessaires et suffisantes. (9) exprime que K est le transformé de l'infini, donc le seul point pour lequel $h_n = 0$.

[1] Cette condition est également nécessaire pour que $\overline{U_n \ldots U_2 U_1}$ soit une similitude, mais il s'y joint alors la condition $\sigma_1 = 0$.

En ce qui concerne ϱ^2, observons que $-V_1 = -\overline{U_n \ldots U_2 U_1} = \overline{U_n \ldots U_2 U_1} U_1$, donc, si l'on désigne par

$$S = \frac{\overrightarrow{KP}^2 - \varrho^2}{2\varrho}$$

la sphère unitaire de l'inversion équivalente à la transformation, on a

$$-\varepsilon V_1 = \overline{S} U_1 = U_1 - 2(SU_1)S \qquad \varepsilon = \pm 1 ;$$

les termes du second degré donnent alors

$$-\frac{\varepsilon}{R_1'} = \frac{1}{R_1} - 2\frac{SU_1}{\varrho} = \frac{1}{R_1} - \frac{R_1^2 + \varrho^2 - \overline{A_1 K}^2}{R_1 \varrho^2} = \frac{\overline{A_1 K}^2 - R_1^2}{R_1 \varrho^2},$$

ou, compte tenu de (9), de $\vec{\alpha}_1^{\,2} = R_1^2 \sigma_1 \sigma_2$ et de $\sigma_1 = \sigma_2 + \frac{1}{R_1 R_1'}$,

$$\varrho^2 \sigma_1 = \varepsilon ; \tag{13}$$

ceci définit ϱ^2, et permet de donner à (12) la forme

$$\frac{1-\varepsilon}{2} \overrightarrow{KM} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\overrightarrow{KA_i} \cdot \overrightarrow{KM}}{R_i R_i'} \overrightarrow{KA_i'} . \tag{14}$$

Nous pouvons ainsi énoncer le

Théorème I. *Pour que $\overline{U_n \ldots U_2 U_1}$ équivaille à une inversion, il faut et il suffit que soient vérifiées les conditions* (7), (10), (14), *où K est le point défini par* (9).

32. Il est instructif de reprendre le problème en étudiant la transformée d'une sphère courante Φ, au lieu d'un point M. S étant la même sphère que plus haut, écrivons que

$$\overline{U_n \ldots U_2 U_1} \Phi \equiv \varepsilon \overline{S} \Phi \qquad \varepsilon = \pm 1 .$$

On obtient ainsi l'identité

$$\frac{1-\varepsilon}{2} \Phi \equiv \sum_{i=1}^{n} (U_i \Phi) V_i - \varepsilon (S\Phi) S , \tag{15}$$

c'est-à-dire que l'on doit avoir

$$\frac{1-\varepsilon}{2} (\overrightarrow{MP}^2 - R^2) \equiv \sum_{i=1}^{n} \frac{R^2 + R_i^2 - \overline{A_i M}^2}{2R_i} \frac{\overline{A_i' P}^2 - R_i'^2}{R_i'} - \varepsilon \frac{R^2 + \varrho^2 - \overline{KM}^2}{2\varrho} \frac{\overline{KP}^2 - \varrho^2}{\varrho}, \tag{16}$$

quels que soient R, M, P; ε est le même que précédemment. En particulier, (16) est une conséquence des conditions (7), (10), (14), où K et ϱ^2 sont définis par (9) et (13).

Nous allons former les conditions fournies par (16), pour les comparer à celles du théorème du paragraphe 31. Les termes du second degré en P donnent d'abord l'identité en R, M

$$\frac{1-\varepsilon}{2}=\sum_{i=1}^{n}\frac{R^2+R_i^2-\overline{A_iM}^2}{2R_iR_i'}+\varepsilon\frac{\overline{KM}^2-\varrho^2-R^2}{2\varrho^2},$$

qui se décompose en (13) et en

$$1=\sum_{i=1}^{n}\frac{R_i^2-\overline{A_iM}^2}{R_iR_i'}+\varepsilon\frac{\overline{KM}^2}{\varrho^2};$$

les termes du second degré en M donnent encore (13), et il reste

$$1=\sum_{i=1}^{n}\frac{R_i^2-\overline{KA_i}^2+2\overrightarrow{KA_i}\,\overrightarrow{KM}}{R_iR_i'},$$

qui se décompose en (8) et en une autre relation vérifiée en (11).

Les autres termes de (16) fournissent la condition

$$(17)\quad \frac{1-\varepsilon}{2}(\overline{KM}^2-R^2-2\overrightarrow{KM}\,\overrightarrow{KP})\equiv\sum_{i=1}^{n}\frac{R^2+R_i^2-\overline{A_iM}^2}{2R_iR_i'}(\overline{KA_i'}^2-R_i'^2-2\overrightarrow{KA_i'}\,\overrightarrow{KP})+ +\varepsilon\frac{R^2+\varrho^2-\overline{KM}^2}{2}.$$

Les termes en R^2 donnent

$$1\equiv\sum_{i=1}^{n}\frac{2\overrightarrow{KA_i'}\,\overrightarrow{KP}+R_i'^2-\overline{KA_i'}^2}{R_iR_i'},$$

qui se décompose en (4) et en

$$(18)\qquad 1+\sum_{i=1}^{n}\frac{\overline{KA_i'}^2-R_i'^2}{R_iR_i'}=0,$$

qui est vérifié à l'aide de (4) comme (11) à l'aide de (8). Les termes de (17) qui sont indépendants de R^2 et du premier degré en $\overrightarrow{KP}$ donnent ensuite

$$(1-\varepsilon)\overrightarrow{KM}+\sum_{i=1}^{n}\frac{\overline{A_iM}^2-R_i^2}{R_iR_i'}\overrightarrow{KA_i'}=0,$$

qui se réduit à

$$(1-\varepsilon)\overrightarrow{KM}+\sum_{i=1}^{n}\frac{\overline{KA_i}^2-R_i^2-2\overrightarrow{KA_i}\,\overrightarrow{KM}}{R_iR_i'}\overrightarrow{KA_i'},$$

et se décompose en (7) et en (14). Ceci fait, il ne reste plus qu'à identifier dans (17) les termes indépendants de R^2 et P, c'est-à-dire

$$\overline{KM}^2 \equiv -\sum_{i=1}^{n} \frac{\overline{A_iM}^2 - R_i^2}{R_i} \frac{\overline{KA'_i}^2 - R_i'^2}{R'_i} + \varepsilon\varrho^2 ; \tag{19}$$

les termes du second degré en $\overrightarrow{KM}$ redonnent (18); ceux du premier degré donnent

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\overline{KA'_i}^2 - R_i'^2}{R_iR'_i} \overrightarrow{KA_i}\overrightarrow{KM} = 0 ,$$

donc

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\overline{KA'_i}^2 - R_i'^2}{R_iR'_i} \overrightarrow{KA_i} = 0 . \tag{20}$$

Cette relation est, pour $V_1, V_2, \dots V_n$, ce qu'est la condition (7) pour $U_1, U_2, \dots U_n$; c'est donc une conséquence naturelle du système des conditions (7), (9), (10), (14); il faut cependant remarquer que nous ne l'avons pas rencontrée au paragraphe 31, et que, par conséquent, sans la première solution, le raisonnement actuel conduirait à l'ajouter aux 4 équations (7), (9), (10), (16) sans qu'on s'aperçoive qu'elle est superflue. Enfin les termes de (19) indépendants de $\overrightarrow{KM}$ fournissent la relation

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\overline{KA_i}^2 - R_i^2}{R_i} \frac{\overline{KA'_i}^2 - R_i'^2}{R'_i} = \frac{1}{\sigma_1}, \tag{21}$$

dont la superfluité est également démontrée par la première résolution, mais que l'on n'aurait pas soupçonnée sans cette deuxième méthode.

En résumé, nous nous en tiendrons au système des équations (7), (9), (10), (14) du théorème énoncé plus haut, tout en sachant qu'elles entraînent les relations (20) (géométriquement évidente) et (21).

33. Nous nous proposons maintenant d'éliminer le point K, défini par (9), et dont l'existence résulte de (10). Cette dernière équation exprime qu'il existe un point K qui est transformé en l'infini par les deux anallagmaties inverses $\overline{U_n \dots U_2U_1}$ et $\overline{V_n \dots V_2V_1}$. Dans tous les cas, ces 2 transformations inverses sont de la forme IE et $E^{-1}I$, où E désigne une similitude et I une inversion; $IEK = \infty$ exprime que EK est le pôle de l'inversion I; $E^{-1}IK = \infty$ exprime que K est lui-même le pôle de l'inversion car ça équivaut à $IK = \infty$. Nous pouvons donc dire que *les anallagmaties vérifiant* (10) *sont celles qui équivalent au produit d'une inversion et d'une similitude conservant le pôle de l'inversion.*

En désignant par $\vec{\xi}$ le vecteur arbitraire $\overrightarrow{KM}$, (14) peut s'écrire

$$\frac{1-\varepsilon}{2}\vec{\xi} = \sum_{i=1}^{n} \frac{(\overrightarrow{KA_1} + \overrightarrow{A_1A_i}) \times \vec{\xi}}{R_iR'_i} \overrightarrow{KA'_i} ,$$

ou, compte tenu de (4), qui résulte lui-même de (9) et (10),

$$\frac{1-\varepsilon}{2}\vec{\xi} = \sum_{i=1}^{n} \frac{(\overrightarrow{A_1A_i}\,\vec{\xi})}{R_iR_i'}\,\overrightarrow{KA_i'} = \overrightarrow{KA_1}\sum_{i=1}^{n} \frac{(\overrightarrow{A_1A_i}\,\vec{\xi})}{R_iR_i'} + \sum_{i=1}^{n} \frac{(\overrightarrow{A_1A_i}\,\vec{\xi})}{R_iR_i'}\,\overrightarrow{A_1A_i'}\,;$$

grâce à (9), on obtient enfin

$$\frac{1-\varepsilon}{2}\vec{\xi} + (\vec{\alpha}_1\,\vec{\xi})\frac{\vec{\alpha}_1}{\sigma_1} = \sum_{i=2}^{n} \frac{(\overrightarrow{A_1A_i}\,\vec{\xi})}{R_iR_i'}\,\overrightarrow{A_1A_i'}\,. \tag{22}$$

Par la même méthode, (7) devient

$$0 = \sum_{i=1}^{n} \frac{\overline{KA_i}^2 - R_i^2}{R_iR_i'}(\overrightarrow{KA_1} + \overrightarrow{A_1A_i'}) = -\frac{\vec{\alpha}_1}{\sigma_1}\sum_{i=1}^{n} \frac{\overline{KA_i}^2 - R_i^2}{R_iR_i'} + \sum_{i=1}^{n} \frac{\overline{KA_i}^2 - R_i^2}{R_iR_i'}\,\overrightarrow{A_1A_i'}\,,$$

ou, compte tenu de (11), qui est une conséquence de (9),

$$\frac{\vec{\alpha}_1}{\sigma_1} + \sum_{i=1}^{n} \frac{\overline{KA_i}^2 - R_i^2}{R_iR_i'}\,\overrightarrow{A_1A_i'} = 0\,.$$

La décomposition de $\overrightarrow{KA_i}$ en $\overrightarrow{KA_1} + \overrightarrow{A_1A_i}$ donne ensuite

$$\frac{\vec{\alpha}_1}{\sigma_1} + \sum_{i=1}^{n} \frac{\overline{A_1K}^2 - 2\overrightarrow{A_1K}\,\overrightarrow{A_1A_i} + \overline{A_1A_i}^2 - R_i^2}{R_iR_i'}\,\overrightarrow{A_1A_i'} = 0\,,$$

donc, grâce à (9), (10) et (22),

$$(\varepsilon - R_1^2\sigma_2)\frac{\vec{\alpha}_1}{\sigma_1} + \sum_{i=1}^{n} \frac{\overline{A_1A_i}^2 - R_i^2}{R_iR_i'}\,\overrightarrow{A_1A_i'} = 0\,.$$

La somme a été évaluée au paragraphe 20, tout au moins pour $2 \leq i \leq n$; on peut alors écrire

$$\left(\frac{\varepsilon}{R_1^2} - \sigma_2\right)\frac{\vec{\alpha}_1}{\sigma_1} - \frac{\overrightarrow{A_1A_1'}}{R_1R_1'} + \sum_{i=1}^{n} \frac{\overrightarrow{A_1A_i'}}{R_iR_i'} = 0\,,$$

ou

$$\frac{\overrightarrow{A_1A_1'}}{R_1R_1'} = \left(\frac{\varepsilon}{R_1^2} + \sigma_1 - \sigma_2\right)\frac{\vec{\alpha}_1}{\sigma_1} = \frac{\vec{\alpha}_1}{\sigma_1}\left(\frac{\varepsilon}{R_1^2} + \frac{1}{R_1R_1'}\right),$$

et enfin

$$\frac{\overrightarrow{A_1A_1'}}{R_1'} = \left(\frac{\varepsilon}{R_1} + \frac{1}{R_1'}\right)\frac{\vec{\alpha}_1}{\sigma_1}. \tag{23}$$

Nous pouvons ainsi remplacer notre premier énoncé par le suivant:

Théorème II. *Les transformations* $\overline{U_n \ldots U_2 U_1}$ *équivalentes à une inversion sont celles qui satisfont au système* (10), (22), (23), *où* $\vec{\xi}$ *est le vecteur courant de l'espace et* $\varepsilon = \pm 1$.

34. $\overline{U_n \ldots U_2 U_1}$ et $\overline{V_n \ldots V_2 V_1}$ sont simultanément une inversion, avec la même sphère S et le même ε, car $\varepsilon \varrho^2 \sigma_1 = 1$. (10) est symétrique par rapport à ces deux systèmes de sphères, mais (23) est remplacé par

$$\frac{\overrightarrow{A_1' A_1}}{R_1} = \left(\frac{\varepsilon}{R_1'} + \frac{1}{R_1}\right) \frac{\vec{\alpha}_1'}{\sigma_1} \tag{24}$$

quand on considère $\overline{V_n \ldots V_2 V_1}$. On vérifie d'ailleurs aisément que (24) est une conséquence de (10) et (23); en particulier, on a

$$\frac{\vec{\alpha}_1'}{R_1'} = -\varepsilon \frac{\vec{\alpha}_1}{R_1}, \tag{25}$$

et *le système des deux équations* (10), (23) *équivaut à* (10), (24).

Montrons d'autre part qu'on ne change pas (22) en y remplaçant A_1 et $\vec{\alpha}_1$ par A_1' et $\vec{\alpha}_1'$, sans modifier les A_i et A_i'; le second membre de cette équation s'écrit encore

$$\sum_{i=2}^{n} \frac{(\overrightarrow{A_1 A_i}\, \vec{\xi})}{R_i R_i'} (\overrightarrow{A_1 A_1'} + \overrightarrow{A_1' A_i'}) = (\vec{\alpha}_1 \vec{\xi}) \overrightarrow{A_1 A_1'} + \sum_{i=2}^{n} \frac{(\overrightarrow{A_1 A_1'} + \overrightarrow{A_1' A_i}) \xi}{R_i R_i'} \overrightarrow{A_1' A_i'}$$

$$= (\vec{\alpha}_1 \vec{\xi}) \overrightarrow{A_1 A_1'} + (\overrightarrow{A_1 A_1'}\, \vec{\xi}) \vec{\alpha}_1' + \sum_{i=2}^{n} \frac{(\overrightarrow{A_1' A_i}\, \vec{\xi})}{R_i R_i'} \overrightarrow{A_1' A_i'}.$$

En groupant alors dans (22) les 3 termes en $(\vec{\alpha}_1 \vec{\xi})$ et $(\overrightarrow{A_1 A_1'}\, \vec{\xi})$, compte tenu de (24) et (25), leur somme s'écrit, à l'aide de $\vec{\alpha}_1'$,

$$(\vec{\alpha}_1 \vec{\xi}) \left(\overrightarrow{A_1 A_1'} - \frac{\vec{\alpha}_1}{\sigma_1}\right) + (\overrightarrow{A_1 A_1'}\, \vec{\xi}) \vec{\alpha}_1' = -(\vec{\alpha}_1' \vec{\xi}) \frac{\vec{\alpha}_1'}{\sigma_1},$$

ce qui établit la forme annoncée de (22)

$$\frac{1-\varepsilon}{2} \vec{\xi} + (\vec{\alpha}_1' \vec{\xi}) \frac{\vec{\alpha}_1'}{\sigma_1} = \sum_{i=2}^{n} \frac{(\overrightarrow{A_1' A_i}\, \vec{\xi})}{R_i R_i'} \overrightarrow{A_1' A_i'}. \tag{26}$$

En substituant maintenant $\overline{V_n \ldots V_2 V_1}$ à $\overline{U_n \ldots U_2 U_1}$, on peut remplacer le Théorème II par le

Théorème III. Les transformations $\overline{U_n \ldots U_2 U_1}$ équivalentes à une inversion sont celles qui vérifient les 3 équations

$$(27)\qquad \left\{\begin{aligned} &\sum_{i=1}^{n}{}' \frac{\overrightarrow{A_i A_i'}}{R_i R_i'} = 0\,, \\ &\frac{\overrightarrow{A_1 A_1'}}{R_1'} = \left(\frac{\varepsilon}{R_1} + \frac{1}{R_1'}\right)\frac{\overrightarrow{\alpha_1}}{\sigma_1}, \\ &\frac{1-\varepsilon}{2}\vec{\xi} + (\vec{\alpha}_1\vec{\xi})\frac{\overrightarrow{\alpha_1}}{\sigma_1} \equiv \sum_{i=2}^{n}{}' \frac{(\overrightarrow{A_1 A_i'}\,\vec{\xi})}{R_i R_i'}\overrightarrow{A_1 A_i}\,. \end{aligned}\right.$$

Il peut être avantageux de mettre ainsi en évidence les vecteurs $\overrightarrow{A_1 A_i}$, au lieu des vecteurs $\overrightarrow{A_1 A_i'}$ qui se présentent dans (22). Il faut évidemment que n surpasse N si $\varepsilon = -1$.

35. Les deux premières équations (27) n'entraînent pas nécessairement la dépendance linéaire des $n-1$ vecteurs $\overrightarrow{A_1 A_i}$. Par exemple, si les U_i forment un système orthogonal, on a $V_i = U_i$, donc $\overrightarrow{A_i A_i'} = 0$, $R_1 = R_1'$, et ces deux équations sont vérifiées avec $\varepsilon = -1$; or, cette orthogonalité n'établit pas de dépendance linéaire entre les centres si $n < N+2$.

Proposons-nous de déterminer tous les systèmes de n sphères U_i, dont les centres déterminent un hyperplan à $n-1$ dimensions, tels que $\overline{U_n \ldots U_2 U_1}$ soit une inversion.

Il est remarquable que la dernière équation (27) suffit pour résoudre ce problème. ε est nécessairement égal à -1, car l'identité où $\varepsilon = 1$ exigerait, par suite de l'indépendance des $\overrightarrow{A_1 A_i}$,

$$\frac{\vec{\alpha}_1\vec{\xi}}{\sigma_1} = \overrightarrow{A_1 A_i'}\,\vec{\xi}\,,$$

donc

$$\overrightarrow{A_1 A_i'} = \frac{\overrightarrow{\alpha_1}}{\sigma_1},$$

qui entraîne l'alignement de tous les A_i. Dans l'identité à étudier

$$(28)\qquad \vec{\xi} = -(\vec{\alpha}_1\vec{\xi})\frac{\overrightarrow{\alpha_1}}{\sigma_1} + \sum_{i=2}^{n}{}' \frac{(\overrightarrow{A_1 A_i'}\,\vec{\xi})}{R_i R_i'}\overrightarrow{A_1 A_i}\,,$$

on a donc $n = N+1$, et on peut poser

$$\vec{\xi} = \sum_{i=2}^{n} \xi_i \frac{\overrightarrow{A_1A_i}}{R_i}, \tag{29}$$

où les ξ_i sont $n-1$ variables indépendantes. (28) se décompose alors en $n-1$ identités scalaires

$$\xi_i = -\frac{\vec{\alpha}_1 \vec{\xi}}{\sigma_1 R_i'} + \frac{\overrightarrow{A_1A_i'}\,\vec{\xi}}{R_i'} \qquad i = 2, 3, \ldots n ,$$

où l'identification par rapport aux ξ_k fournit le système des $(n-1)^2$ équations

$$\overrightarrow{A_1A_k}\,\overrightarrow{A_1A_i'} = \frac{\vec{\alpha}_1 \overrightarrow{A_1A_k}}{\sigma_1} + \delta_{ik} R_k R_i' \qquad i, k = 2, 3, \ldots n . \tag{30}$$

L'addition des $n-1$ équations de même indice i, multipliées respectivement par $\frac{1}{R_k R_k'}$, donne

$$\vec{\alpha}_1 \overrightarrow{A_1A_i'} = \frac{\vec{\alpha}_1^2}{\sigma_1} + 1 = R_1^2\sigma_2 + 1 \qquad i = 2, 3, \ldots n . \tag{31}$$

La même égalité est valable avec $\overrightarrow{A_1A_i}$ au lieu de $\overrightarrow{A_1A_i'}$, car (31) s'écrit, grâce à (12;II) et (13;II),

$$\frac{\vec{\alpha}_1 \overrightarrow{A_1A_i}}{R_i} = \frac{R_1^2\sigma_2 + 1}{R_i'} + 2 \sum_{j=i+1}^{n} \frac{U_i U_j}{R_j'} \vec{\alpha}_1 \overrightarrow{A_1A_j'}$$

$$= (R_1^2\sigma_2 + 1)\left(\frac{1}{R_i'} + 2 \sum_{j=i+1}^{n} \frac{U_i U_j}{R_j'}\right) = \frac{R_1^2\sigma_2 + 1}{R_i},$$

donc

$$\vec{\alpha}_1 \overrightarrow{A_1A_i} = R_1^2\sigma_2 + 1 \qquad i = 2, 3, \ldots n . \tag{32}$$

(31) et (32) sont évidemment équivalents. Compte tenu de ce résultat, (30) s'écrit

$$\frac{\overrightarrow{A_1A_k}\,\overrightarrow{A_1A_i'}}{R_i'} = \frac{R_1^2\sigma_2 + 1}{\sigma_1 R_i'} + \delta_{ik} R_k ; \tag{33}$$

comme on a fait pour (31), on en déduit

$$\frac{\overrightarrow{A_1A_k}\,\overrightarrow{A_1A_i}}{R_i} = \frac{R_1^2\sigma_2 + 1}{\sigma_1 R_i'} + \delta_{ik} R_k + 2 \sum_{j=i+1}^{n} \frac{U_i U_j}{R_j'} \overrightarrow{A_1A_k}\,\overrightarrow{A_1A_j'} ,$$

ou, grâce à (33) elle-même,

$$\frac{\overrightarrow{A_1A_k}\overrightarrow{A_1A_i}}{R_i} = \frac{R_1^2\sigma_2+1}{\sigma_1}\left(\frac{1}{R_i'}+2\sum_{j=i+1}^{n}\frac{U_iU_j}{R_j'}\right)+\delta_{ik}R_k+2R_k\sum_{j=i+1}^{n}\delta_{kj}U_iU_j$$

c'est-à-dire

$$(34)\qquad \overrightarrow{A_1A_k}\overrightarrow{A_1A_i} = \frac{R_1^2\sigma_2+1}{\sigma_1}+\left(\delta_{ik}+2U_iU_k\sum_{j=i+1}^{n}\delta_{jk}\right)R_iR_k\,,\qquad i,k=2,3,\dots n\,.$$

La différence des deux équations (34) obtenues par permutation des 2 indices donne $U_iU_k = 0$ si $i \neq k$, donc les sphères $U_2, U_3, \dots U_n$ forment un système orthogonal. On en déduit $V_i = U_i$ et $R_i' = R_i$ pour $i \geq 2$. Les équations (34) où $i = k$, soit

$$(35)\qquad \overline{A_1A_i}^2 = \frac{R_1^2\sigma_2+1}{\sigma_1}+R_i^2\qquad i=2,3,\dots n$$

suffisent alors pour que soit vérifié le système entier, car la condition d'orthogonalité s'écrit

$$2\overrightarrow{A_1A_i}\overrightarrow{A_1A_k} = \overline{A_1A_i}^2-R_i^2+\overline{A_1A_k}^2-R_k^2\quad i\neq k\,.$$

D'ailleurs l'équation (34) générale s'écrit maintenant

$$(36)\qquad \overrightarrow{A_1A_i}\overrightarrow{A_1A_k} = \frac{R_1^2\sigma_2+1}{\sigma_1}+\delta_{ik}R_iR_k\qquad i,k=2,3,\dots n\,;$$

et l'addition de celles qui ont un même indice i, multipliées respectivement par $\dfrac{1}{R_kR_k'} = \dfrac{1}{R_k^2}$, donne

$$\vec{\alpha}_1\overrightarrow{A_1A_i} = \frac{R_1^2\sigma_2+1}{\sigma_1}\left(\sigma_1-\frac{1}{R_1R_1'}\right)+1\,,$$

dont la comparaison avec (32) entraîne l'égalité

$$R_1^2\sigma_2+1 = R_1R_1'\sigma_1 = R_1R_1'\left(\sigma_2+\frac{1}{R_1R_1'}\right)$$

ou

$$\sigma_2(R_1-R_1') = 0\,.$$

Les inversions étant réelles, $\sigma_2 = 0$ entraînerait $\vec{\alpha}_1 = 0$, qui est incompatible avec (32), donc

$$R_1' = R_1\,.$$

Mais alors $R_1^2\sigma_2+1 = R_1^2\sigma_1$ et (35) s'écrit

$$\overline{A_1A_i}^2 = R_1^2+R_i^2\,,$$

qui exprime que U_1 est orthogonale aux autres sphères U_i. Ainsi le système des n sphères U_i est orthogonal; on a $V_i = U_i$, $A'_i = A_i$, et les deux premières équations (27), où $\varepsilon = -1$, sont bien vérifiées. En résumé on a démontré que *les systèmes de n sphères dont l'hyperplan des centres a $n-1$ dimensions, et telles que le produit des inversions équivaille à une inversion, sont les systèmes de $N+1$ sphères orthogonales.*

36. Bien que les conditions déduites de (15) soient surabondantes, comme l'a montré la discussion faite au paragraphe 32, la recherche des anallagmaties $\overline{U_n \ldots U_2 U_1}$ équivalentes à une inversion paraît plus aisée avec (15) qu'à l'aide du système (28). Avec $\varepsilon = 1$, (15) s'écrit

$$(37) \qquad (S\Phi)S \equiv \sum_{i=1}^{n} (U_i\Phi)V_i \, ,$$

et donne, pour $\Phi = S$,

$$(38) \qquad S = \sum_{i=1}^{n} (U_iS)V_i \, .$$

S appartient à la famille linéaire des V_i, donc des U_i. $S\Phi = 0$ entraîne $\sum_{i=1}^{n} (U_i\Phi)V_i = 0$, et, comme il existe au moins une telle sphère Φ, orthogonale à S sans l'être à tous les U_i, si $n \geq 2$, les V_i ne sont pas linéairement distincts. Il en est de même pour les U_i.

Avec $\varepsilon = -1$, (15) s'écrit

$$(39) \qquad \Phi \equiv \sum_{i=1}^{n} (U_i\Phi)V_i + (S\Phi)S \, ,$$

et se réduit, pour $\Phi = S$, à

$$\sum_{i=1}^{n} (U_iS)V_i = 0 \, .$$

Ceci établit une relation linéaire entre les V_i, à moins que S ne soit orthogonale à tous les U_i. Or il résulte de (39) que toute sphère Φ orthogonale à tous les U_i est égale à $(S\Phi)S$, donc à $\pm S$ si elle est unitaire. Si donc les V_i étaient linéairement distincts, la sphère Φ la plus générale serait de la forme

$$\Phi = \sum_{i=1}^{n} u_iV_i + \lambda S \, .$$

La subsitution dans (39) donnerait les n équations

$$u_i = U_i\Phi = \sum_{k=1}^{n} u_kU_iV_k \qquad i = 1, 2, \ldots n \, ,$$

quels que soient les variables u_i, c'est-à-dire

$$(40) \qquad U_i V_k = \delta_{ik} \qquad i, k = 1, 2, \ldots n .$$

Nous avons vu au paragraphe 28 que les systèmes vérifiant (40) sont les systèmes orthogonaux de sphères. Ici, il n'existe qu'une sphère S orthogonale à tous les U_i, donc $n = N+1$, et S est la sphère qui complète le $(N+2)$-sphère orthonormal. On sait que $\overline{SU_n \ldots U_2 U_1}$ est l'identité donc $\overline{U_n \ldots U_2 U_1}$ est bien équivalent à $\overline{S}$. *En dehors de cette solution banale,* obtenue également au paragraphe précédent à partir d'hypothèses plus larges, *il suffit donc de rechercher les systèmes dont les sphères U_i sont linéairement liées.*

37. Reprenons d'abord (37) et (38), en admettant que les relations linéaires entre les V_i forment le système

$$(41) \qquad V_{\alpha_s} = \sum_{k=1}^{n}{}' \lambda_k^s V_k \qquad s = 1, 2, \ldots q;\ k \neq \alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_q ,$$

où les V_k sont $n-q$ sphères linéairement distinctes, et où nous utilisons une notation déjà familière. Il résulte de (38) que S est de la forme

$$(42) \qquad S = \sum_{k=1}^{n}{}' \varrho_k V_k ,$$

où les ϱ_k sont $n-q$ inconnues assujetties à la condition $S^2 = 1$. L'identification dans (37) par rapport aux V_k donne le système d'équations

$$\varrho_k S\Phi \equiv U_k \Phi + \sum_{s=1}^{q} \lambda_k^s U_{\alpha_s} \Phi \qquad k = 1, 2, \ldots n;\ k \neq \alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_q ,$$

qui expriment que Φ est orthogonale à $\varrho_k S - U_k - \sum_{s=1}^{q} \lambda_k^s U_{\alpha_s}$. Φ étant arbitraire, ces conditions équivalent à

$$(43) \qquad \varrho_k S = U_k + \sum_{s=1}^{q} \lambda_k^s U_{\alpha_s} \qquad k = 1, 2, \ldots n;\ k \neq \alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_q .$$

Les ϱ_k ne pouvant être tous nuls, l'élimination de S entre ces équations permet d'exprimer linéairement $n-q-1$ des sphères U_k en fonction des autres sphères U_i; le nombre des sphères U_i linéairement distinctes est donc inférieur ou égal à $q+1$; autrement dit, on a $n-q \leq q+1$, donc

$$(44) \qquad q \geq \frac{n-1}{2} .$$

Remarquons également que l'addition des $n-q$ équations (43), multipliées respectivement par V_k, donne

$$S^2 = \sum_{k=1}^{n}{}' U_k V_k + \sum_{s=1}^{q} U_{\alpha_s} V_{\alpha_s} = \sum_{i=1}^{n} U_i V_i \,,$$

donc tous les systèmes de sphères qui répondent à la question sont tels que l'on ait

$$\sum_{i=1}^{n} U_i V_i = 1 \,. \tag{45}$$

Il résulte de (21;II) que l'on a également

$$\sum_{1 \leq i < j \leq n} (U_i U_j)(V_i V_j) = \frac{1-n}{2}.$$

L'étude du système (43) est compliquée, mais peut être conduite de la manière suivante. En exprimant les U_i en fonction des V_i à l'aide de (10;II), (43) s'écrit

$$\varrho_k S = V_k + 2 \sum_{h>k}{}' (U_k U_h) V_h + 2 \sum_{\alpha_s > k} \sum_{h=1}^{n}{}' (U_k U_{\alpha_s}) \lambda_h^s V_h + \sum_{s=1}^{q} \sum_{h=1}^{n}{}' \lambda_k^s \lambda_h^s V_h +$$
$$+ 2 \sum_{s=1}^{q} \sum_{h>\alpha_s}{}' \lambda_k^s (U_{\alpha_s} U_h) V_h + 2 \sum_{s=1}^{q} \sum_{t=s+1}^{q} \sum_{h=1}^{n}{}' \lambda_k^s (U_{\alpha_s} U_{\alpha_t}) \lambda_h^t V_h \,,$$

c'est-à-dire

$$\varrho_k S = V_k + 2 \sum_{h>k}{}' (U_k U_h) V_h + \sum_{h=1}^{n}{}' \Big(\sum_{s=1}^{q} \lambda_k^s \lambda_h^s + 2 \sum_{\alpha_s < h} \lambda_k^s U_{\alpha_s} U_h +$$
$$+ 2 \sum_{\alpha_s > k} \lambda_h^s U_{\alpha_s} U_k + 2 \sum_{1 \leq s < t \leq q} \lambda_k^s \lambda_h^t U_{\alpha_s} U_{\alpha_t} \Big) V_h \,.$$

L'identification avec (42) donne alors un système de $(n-q)^2$ équations entre les $(q+1)(n-q)$ coefficients λ_k^s, ϱ_k, savoir

$$\text{(46)} \quad \left\{ \begin{aligned} & \varrho_k^2 = 1 + \sum_{s=1}^{q} (\lambda_k^s)^2 + 2 \sum_{s=1}^{q} \lambda_k^s U_{\alpha_s} U_k + 2 \sum_{1 \leq s < t \leq q} \lambda_k^s \lambda_k^t U_{\alpha_s} U_{\alpha_t} \,, \\ & \varrho_k \varrho_h = \sum_{s=1}^{q} \lambda_k^s \lambda_h^s + 2 \sum_{\alpha_s < h} \lambda_k^s U_{\alpha_s} U_h + 2 \sum_{\alpha_s > k} \lambda_h^s U_{\alpha_s} U_k + 2 \sum_{1 \leq s < t \leq q} \lambda_k^s \lambda_h^t U_{\alpha_s} U_{\alpha_t} \qquad h < k \,, \\ & \varrho_k \varrho_h = 2 U_k U_h + \sum_{s=1}^{q} \lambda_k^s \lambda_h^s + 2 \sum_{\alpha_s < h} \lambda_k^s U_{\alpha_s} U_k + 2 \sum_{\alpha_s > k} \lambda_k^s U_{\alpha_s} U_k + 2 \sum_{1 \leq s < t \leq q} \lambda_k^s \lambda_h^t U_{\alpha_s} U_{\alpha_t} \\ & \qquad h > k \,. \end{aligned} \right.$$

Il reste encore à exprimer les produits $U_i U_j$ aux seconds membres en fonction des

$V_i V_j$, grâce à (18;II); $U_i U_j$ est un polynôme dont le degré par rapport aux produits de 2 sphères V est égal à $j-i$ ($j > i$), donc au plus égal à $n-1$, et contient chaque sphère V une ou deux fois; seules les V_{α_s}, au nombre de q, font intervenir les λ_k^s, sous forme linéaire, donc $U_i U_j$ est au maximum de degré $2q$ ou $2(j-i)$ par rapport aux λ_k^s. Compte tenu des λ_k^s explicites dans (46), on voit que les seconds membres de ces équations sont des polynômes entiers par rapport à ces λ_k^s, de degré au plus égal à $2q+2$. Il ne faut pas oublier les relations qui expriment que les V_{α_s} sont unitaires. D'ailleurs la première ligne de (46), comparée au carré de (43), entraîne tout de suite $S^2 = 1$, et il n'est plus nécessaire de s'occuper de cette condition.

38. Lorsque $\varepsilon = -1$, c'est-à-dire pour l'identité (39), il nous suffit d'examiner le cas général où les sphères U_i sont linéairement liées. S'il existe une sphère orthogonale à tous les U_i, on sait qu'elle est unique, et est la sphère S elle-même. On a nécessairement $n-q = N+1$. Toute sphère Ψ appartenant à la famille linéaire des U_i est orthogonale à S, donc $\overline{S}\Psi \equiv \Psi$, et il faut que

$$\overline{U_n \ldots U_2 U_1}\Psi \equiv -\Psi \,.$$

Cette condition est d'ailleurs suffisante pour que $\overline{U_n \ldots U_2 U_1}$ équivaille à $-\overline{S}$, car une sphère quelconque de l'espace est de la forme $\Phi = \lambda\Psi + \mu S$, ce qui donne

$$\overline{U_n \ldots U_2 U_1}\Phi \equiv -\lambda\Psi + \mu \overline{U_n \ldots U_2 U_1} S \equiv -\lambda\Psi + \mu S \equiv -\overline{S}\Phi \,.$$

On est ainsi ramené au problème traité au paragraphe 30.

Supposons donc $n-q = N+2$, avec les relations (41) et (42). Posons

$$\Phi = \sum_{k=1}^{n}{}' u_k V_k \,, \tag{47}$$

où les u_i sont $n-q$ variables indépendantes. L'identification par rapport aux V remplace (39) par les $n-q$ identités en u

$$u_k = U_k \Phi + \sum_{s=1}^{q}{}' \lambda_k^s U_{\alpha_s}\Phi + \varrho_k S\Phi,$$

donc par les $(n-q)^2$ équations de condition

$$\left(U_k + \sum_{s=1}^{q} \lambda_k^s U_{\alpha_s} + \varrho_k S\right) V_h = \delta_{kh} \qquad k, h = 1, 2, \ldots n;\ k, h \neq \alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_q \,. \tag{48}$$

Ceci exprime que la sphère $U_k + \sum_{s=1}^{q}{}' \lambda_k^s U_{\alpha_s} + \varrho_k S$ est orthogonale à toutes les sphères V_h d'indice $h \neq k$. Toutes les sphères V_k formant un système complet de $N+2$

sphères, il existe une sphère et une seule orthogonale à tous les V_h d'indice $h \neq k$, et dont le produit par V_k vaut 1. Soit

$$(49) \qquad V'_k = \sum_{h=1}^{n}{}' c_k^h V_h \qquad k = 1, 2, \ldots n; \quad k \neq \alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_q$$

ces $n-q$ sphères, qui s'obtiennent aisément à partir des V_k, et qui sont telles que

$$(50) \qquad V'_k V_h = \delta_{kh} \qquad k, h = 1, 2, \ldots n; \; k, h \neq \alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_q \,.$$

(48) s'écrit alors

$$(51) \qquad U_k + \sum_{s=1}^{q}{}' \lambda_k^s U_{\alpha_s} = V'_k - \varrho_k S = \sum_{h=1}^{n}{}' (c_k^h - \varrho_k \varrho_h) V_h \,,$$

et ne diffère de (43) que par le changement de $\varrho_k \varrho_h$ en $c_k^h - \varrho_k \varrho_h$. (46) est donc simplement remplacé par

$$(52) \quad \left\{ \begin{aligned} c_k^k - \varrho_k^2 &= 1 + \sum_{s=1}^{q} (\lambda_k^s)^2 + 2 \sum_{s=1}^{q} \lambda_k^s U_{\alpha_s} U_k + 2 \sum_{1 \le s < t \le q} \lambda_k^s \lambda_k^t U_{\alpha_s} U_{\alpha_t} \,, \\ c_k^h - \varrho_k \varrho_h &= \sum_{s=1}^{q} \lambda_k^s \lambda_h^s + 2 \sum_{\alpha_s < h} \lambda_k^s U_{\alpha_s} U_h + 2 \sum_{\alpha_s > k} \lambda_h^s U_{\alpha_s} U_k + 2 \sum_{1 \le s < t \le q} \lambda_k^s \lambda_h^t U_{\alpha_s} U_{\alpha_t} \qquad h < k \,, \\ c_k^h - \varrho_k \varrho_h &= 2 U_k U_h + \sum_{s=1}^{q} \lambda_k^s \lambda_h^s + 2 \sum_{\alpha_s < h} \lambda_k^s U_{\alpha_s} U_h + 2 \sum_{\alpha_s > h} \lambda_h^s U_{\alpha_s} U_k + \\ &\qquad + 2 \sum_{1 \le s < t \le q} \lambda_k^s \lambda_h^t U_{\alpha_s} U_{\alpha_t} \qquad h > k \,. \end{aligned} \right.$$

Comme dans le cas du système (46), $S^2 = 1$ est une conséquence de (52). En effet, le carré de (51), comparé à la première ligne de (52), donne

$$V_k'^2 - 2\varrho_k^2 + \varrho_k^2 S^2 = c_k^k - \varrho_k^2$$

c'est-à-dire

$$\varrho_k^2 (S^2 - 1) = c_k^k - V_k'^2 = 0 \,,$$

comme le montre l'addition des équations (50) de même indice k multipliées respectivement par

$$c_k^h \; (h = 1, 2, \ldots n; \; h \neq \alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_q).$$

Les observations faites au sujet du degré de (46) sont valables ici. La somme des $n-q$ équations (51), multipliées respectivement par V_k, donne ici

$$\sum_{i=1}^{n} U_i V_i = n-q-1 = N+1 \,, \tag{53}$$

au lieu de la relation (45) trouvée dans le cas $\varepsilon = 1$. On a donc également

$$\sum_{1 \leq i < j \leq n} (U_i U_j)(V_i V_j) = -\frac{q+1}{2} = -\frac{n-1-N}{2}.$$