

TOPOLOGIE DREIDIMENSIONALER GEFASERTER RÄUME.

VON

H. SEIFERT

in DRESDEN.

Inhaltsübersicht.

	Seite
§ 1. Gefasertes Raum	148
§ 2. Zerlegungsfläche	155
§ 3. Faserungen der Hypersphäre (Beispiele)	159
§ 4. Triangulierbarkeit	162
§ 5. Ausbohrung und Verschlussring	164
§ 6. Klassen gefasertes Räume	170
§ 7. Die orientierbaren gefasertes Räume	178
§ 8. Die nichtorientierbaren gefasertes Räume	185
§ 9. Überlagerungsräume	194
§ 10. Die Fundamentalgruppen der gefasertes Räume	199
§ 11. Faserungen der Hypersphäre (vollständige Aufzählung)	205
§ 12. Die gefasertes Poincaréschen Räume	207
§ 13. Aus Torusknoten abgeleitete Poincarésche Räume	210
§ 14. Schiebungsgruppen gefasertes Räume	212
§ 15. Unfaserbare Räume	223
Anhang: Verzweigte Überlagerungen	231

Die Frage, der sich die folgenden Überlegungen unterordnen, ist das Homöomorphieproblem dreidimensionaler geschlossener Mannigfaltigkeiten. Wieviele topologisch nicht aufeinander abbildbare zweidimensionale Mannigfaltigkeiten vorhanden sind, darüber gibt der Fundamentalsatz der Flächentopologie Aufschluss. Die Verfahren, die man zu seinem Beweise benutzt, haben sich bisher

nicht auf drei und mehr Dimensionen übertragen lassen. Dem dreidimensionalen Probleme näherzukommen, bieten sich uns zwei Wege dar. Der erste besteht in der Untersuchung der Diskontinuitätsbereiche dreidimensionaler metrischer Bewegungsgruppen. Während aber in zwei Dimensionen jede geschlossene Fläche als Diskontinuitätsbereich einer fixpunktlosen Bewegungsgruppe auftritt, gibt es dreidimensionale Mannigfaltigkeiten, für die das nicht gilt. Die Diskontinuitätsbereiche der dreidimensionalen sphärischen Bewegungsgruppen erscheinen nun mit einer bestimmten Faserung versehen; die Fasern sind die Bahnkurven einer kontinuierlichen Bewegungsgruppe der Hypersphäre, wofür Beispiele in § 3 der vorliegenden und in der Arbeit DB II gegeben werden.¹ Diese Tatsache führt zum zweiten Wege: statt das vollständige Invariantensystem dreidimensionaler Punktmannigfaltigkeiten gegen topologische Abbildungen zu untersuchen, ermitteln wir dasjenige dreidimensionale gefaserte Räume gegen faserentreue Abbildungen. Diese Aufgabe wird in der vorliegenden Arbeit vollständig erledigt. Freilich beziehen sich die so erhaltenen Invarianten nicht auf eine gegebene Punktmannigfaltigkeit, sondern auf ihre Faserung, so dass bisweilen die Frage offen bleibt, ob zwei verschiedene gefaserte Räume als Punktmannigfaltigkeiten nicht topologisch aufeinander abbildbar sind. Überdies gibt es Punktmannigfaltigkeiten, die sich überhaupt nicht fasn lassen (§ 15). Dennoch dienen die Faserinvarianten der Topologie der Mannigfaltigkeiten, da sie die Entscheidung über deren Homöomorphie in vielen Fällen zu treffen gestatten. Beispiele hierfür finden sich in § 12 bis 14 sowie in DB II.

An Vorkenntnissen setzt die Arbeit die Flächentopologie und den Begriff der Fundamental- und Homologiegruppe mehrdimensionaler Mannigfaltigkeiten voraus. Einführende Beispiele bieten die Räume aus Linienelementen.² Ferner sind Beispiele in der Arbeit selbst angegeben.

§ 1. Gefasertes Raum.

Folgender Mannigfaltigkeitsbegriff wird zugrundegelegt.³ Eine Mannigfaltigkeit ist eine Punktmenge, in der zu jedem Punkte Teilmengen, *Umgebungen*, definiert sind, die den Axiomen 1) bis 4) genügen.

¹ Vergl. W. Threlfall u. H. Seifert, Topologische Untersuchung der Diskontinuitätsbereiche endlicher Bewegungsgruppen des dreidimensionalen sphärischen Raumes; Math. Ann. 107, im folgenden zitiert mit DB II, der erste Teil, Math. Ann. 104, mit DB I.

² W. Threlfall, Räume aus Linienelementen, Jahresber. d. D. Math. Ver. 42 (1932).

³ Vergl. hierzu H. Kneser, Topologie der Mannigfaltigkeiten. Jahresber. d. D. Math. Ver. 34 (1926), S. 1.

1) Hausdorffsche Umgebungsaxiome:

a) Jeder Punkt P hat wenigstens eine Umgebung U_P ; jede Umgebung von P enthält P ;

b) Sind U_P und V_P Umgebungen von P , so gibt es eine Umgebung W_P , die im Durchschnitt beider enthalten ist;

c) Liegt Q in der Umgebung von U_P , so gibt es eine Umgebung U_Q von Q , die ganz in U_P enthalten ist;

d) Für zwei verschiedene Punkte gibt es zwei Umgebungen ohne gemeinsame Punkte.

Ein Umgebungssystem, das diesen Axiomen genügt, definiert einen *topologischen Raum*. Zwei äquivalente Umgebungssysteme derselben Punktmenge bestimmen denselben topologischen Raum. Äquivalent heissen dabei zwei Umgebungssysteme, wenn es zu jeder Umgebung U_P des einen Systems eine Umgebung U'_P des anderen Systems gibt, die in U_P enthalten ist, und umgekehrt. Eine Teilmenge eines topologischen Raumes heisst *offen*, wenn mit jedem ihrer Punkte eine ganze Umgebung zu ihr gehört. Das System aller offenen Punktmenge des topologischen Raumes ist selbst ein Umgebungssystem, das zu allen anderen Umgebungssystemen dieses topologischen Raumes äquivalent ist. Wir legen im Folgenden stets dieses Umgebungssystem zugrunde.

2) Zu jedem Punkt der Mannigfaltigkeit gibt es eine Umgebung, die sich auf das Innere einer *dreidimensionalen* euklidischen Vollkugel topologisch abbilden lässt. Eine Abbildung heisst *topologisch*, wenn sie umkehrbar eindeutig und umkehrbar stetig ist.

3) Ist jedem Punkt eine beliebige Umgebung zugeordnet, so genügen abzählbar viele, die ganze Mannigfaltigkeit zu überdecken. Genügen schon endlich viele, so heisst die Mannigfaltigkeit *geschlossen*, andernfalls *offen*.⁴

4) Die Mannigfaltigkeit ist *zusammenhängend*, d. h. je zwei ihrer Punkte lassen sich durch eine Kurve verbinden, oder was dasselbe ist, die Mannigfaltigkeit lässt sich nicht in zwei offene punktfremde Mengen zerlegen.

In der kombinatorischen Topologie stellt man an die Mannigfaltigkeit noch die weitere Forderung, *triangulierbar*, d. h. aus abzählbar vielen Tetraedern zusammensetzbar zu sein. Von dieser Forderung kann hier abgesehen werden, da

⁴ Anstelle von 3) könnte man auch das zweite Hausdorffsche Abzählbarkeitsaxiom zu 1) und 2) hinzunehmen: es gibt ein äquivalentes Umgebungssystem, das nur aus abzählbar vielen verschiedenen Punktmenge besteht. Denselben Dienst würde auch das folgende Axiom tun: man kann die Mannigfaltigkeit mit abzählbar vielen Teilmengen überdecken, deren jede sich auf das Innere einer dreidimensionalen euklidischen Kugel topologisch abbilden lässt.

von den gefaserten Räumen auf Grund der Forderungen 5) bis 7) in § 4 gezeigt wird, dass sie triangulierbar sind.

Eine Mannigfaltigkeit wird man als gefasert bezeichnen, wenn ihre Punkte sich auf eine Menge von Kurven, *Fasern*, so verteilen, dass durch jeden Punkt genau eine Faser geht und eine Umgebung jeden Punktes sich auf die Umgebung eines Punktes eines euklidischen Raumes so topologisch abbilden lässt, dass die Fasern in die Geraden-Stücke eines Parallelgeradenbündels übergehen. Diese Forderung bezieht sich nur auf die Umgebung eines Punktes. Aber auch wenn wir sie an alle Punkte der Mannigfaltigkeit ohne Ausnahme stellten, so wäre doch dieser Begriff der gefaserten Mannigfaltigkeit uns noch zu allgemein.

In der vorliegenden Arbeit betrachten wir nur solche gefaserte Mannigfaltigkeiten, die ausser den vier Mannigfaltigkeitsaxiomen noch den drei folgenden Axiomen genügen, welche Eigenschaften der Faserung im Grossen fordern. Solche Mannigfaltigkeiten nennen wir kurz *gefaserter Räume*.

5) Die Fasern, auf die sich die Punkte der Mannigfaltigkeit verteilen, sind *geschlossene Kurven*.

6) Durch jeden Punkt geht *genau eine Faser* hindurch.

7) Zu jeder Faser H gibt es eine *Faserumgebung*, das ist eine solche H enthaltende Teilmenge von Fasern, die sich fasertreu auf einen »gefaserter Vollring« abbilden lässt, wobei H in die »mittlere Faser« übergeht.

Unter einem *gefaserter Vollring* verstehen wir einen geraden Kreiszyylinder des euklidischen Raumes, der durch die zur Achse parallelen Geraden gefasert ist, und dessen Grundfläche und Dachfläche, um einen rationalen Winkel

$$2\pi \frac{\nu}{\mu}$$

gegeneinander verschraubt zur Deckung gebracht sind. μ und ν sind teilerfremde ganze Zahlen. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit darf

$$\mu > 0 \quad \text{und} \quad 0 \leq \nu \leq \frac{1}{2} \mu$$

angenommen werden. Denn wenn man ν durch $\nu + k\mu$ oder durch $-\nu$ ersetzt, so lässt sich der neue Vollring auf den alten fasertreu abbilden.

Fasertreu wird dabei eine Abbildung genannt, wenn sie 1) topologisch ist und 2) Fasern in Fasern überführt. Zwei fasertreu auf einander abbildbare

Vollringe gelten als nicht verschieden. — Bei der Schliessung des Zylinders zum Vollring setzen sich je μ achsenparallele Strecke zu einer einzigen Faser aneinander, nur die Achse bildet eine Faser für sich allein. — Wenn Grund- und Dachfläche unverschraubt einander zugeordnet sind, die charakteristische Zahl μ also $=1$ ist, so heisst der Vollring ein *gewöhnlicher Vollring*.

Die Faserumgebungen sind im Gegensatz zu den Punktumgebungen abgeschlossene Punktengen: zu jeder Faserumgebung gehört die berandende Ringfläche hinzu.

Ein *Meridiankreis* M eines Vollringes ist eine doppeltpunktfreie geschlossene orientierte Kurve der Randringfläche, die nicht auf der Randringfläche, wohl aber im Vollring (durch das Innere hindurch) auf einen Punkt zusammenziehbar (nullhomotop) ist. Eine topologische Selbstabbildung des Vollringes ändert einen Meridiankreis wieder in einen Meridiankreis ab. Sieht man von der Orientierung ab, so kann man jeden Meridiankreis durch eine stetige Deformation der Randringfläche in jeden andern überführen. In Fig. 1 ist z. B. der orientierte Randkreis der Grundfläche ein Meridiankreis. Ein *Breitenkreis* B des Vollringes ist ein doppeltpunktfreier zu M konjugierter Rückkehrschnitt der Randringfläche, d. h. eine doppeltpunktfreie geschlossene Kurve, die M nur in einem Punkte überkreuzt. Er ist abgesehen von Deformationen der Randringfläche bis auf die Orientierung und bis auf Vielfache von M bestimmt. Jedes Paar von Meridian- und Breitenkreis kann in jedes andere durch eine topologische Selbstabbildung des Vollringes übergeführt werden; während aber jeder Meridiankreis in jeden andern durch eine Deformation auf der Ringfläche übergeht, ist dies für zwei Breitenkreise nicht mehr notwendig der Fall. Die Selbstabbildung des Vollringes, die zwei auf der Randringfläche nicht homologe Breitenkreise in einander überführt, lässt sich nicht durch eine Deformation aus der identischen Abbildung gewinnen. — Auch einer Faser H wird eine bestimmte Orientierung zuerteilt, die mit dem gefaserten Vollring noch nicht gegeben ist. Wenn also ein gefasertes Vollring vorliegt und wenn wir auf seiner Randringfläche eine Faser H , einen Meridiankreis M und einen Breitenkreis B ausgewählt haben, so können wir statt H, M, B ebenso gut das beliebige andere System H', M', B' benutzen, das mit dem ersten durch die Transformationsformeln zusammenhängt:

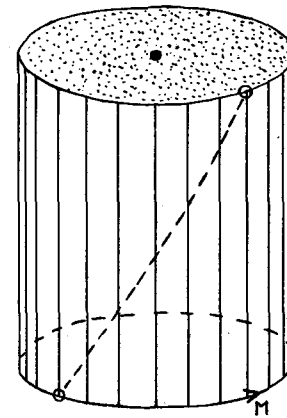


Fig. 1.

$$H \sim \varepsilon_1 H', \quad (1)$$

$$M \sim \varepsilon_2 M', \quad (2)$$

$$B \sim \varepsilon_3 B' + x M'. \quad (3)$$

Darin sind die $\varepsilon = \pm 1$ und x ist eine beliebige ganze Zahl. Statt des Gleichheitszeichens haben wir das Homologiezeichen benutzt, das hier Homologien auf der Randringfläche bezeichnet. Es kommt uns nämlich nur auf Homologiebeziehungen an, und wir lassen z. B. zu, dass H' eine mit H punktfremde Faser und dass M' ein durch Deformation auf der Randringfläche aus M hervorgegangener Meridiankreis ist. — Ein für allemal sei bemerkt, dass wir die Verknüpfung von Elementen der (abelschen) Homologiegruppe additiv, solche zwischen Elementen der Fundamentalgruppe multiplikativ schreiben.⁵

Durch die Zahlen μ und ν ist nicht nur der gefaserte Vollring bestimmt, sondern umgekehrt bestimmt der gefaserte Vollring die Zahlen μ und ν eindeutig, d. h. zwei gefaserte Vollringe sind dann und nur dann fasertreu aufeinander abbildbar, wenn sie in den definierenden Zahlen μ und ν übereinstimmen. Wählt man den Breitenkreis B geeignet (kürzeste Verbindungslinie eines Randpunktes der Grundfläche und seines äquivalenten der Dachfläche auf dem Mantel des euklidischen Zylinders, gestrichelte Linie in Fig. 1) und orientiert man M und H geeignet, so besteht zwischen H, M, B auf der Randringfläche die Homologie

$$H \sim \nu M + \mu B, \quad (H)$$

die nichts anderes besagt, als dass μ und ν die definierenden Zahlen des gefaserten Vollringes sind. Hätte man statt H, M, B ein beliebiges System H', M', B' des gegebenen gefaserten Vollringes zugrunde gelegt, so würde zwischen diesen Kurven eine Homologie gelten:

$$H' \sim n M' + m B', \quad (H')$$

weil M' und B' ein fundamentales Kurvensystem⁶ der Ringfläche ist, durch das sich jede andere Kurve ausdrückt. Hierin sind m und n relativ prime Zahlen, weil die Faser voraussetzungsgemäss doppeltpunktfrei ist, und es ist $m \neq 0$, weil sie nicht dem Meridiankreis homolog ist. Andererseits lässt sich die Homologie

⁵ Vergl. B. L. v. d. Waerden, *Moderne Algebra I* (Berlin 1930) S. 19.

⁶ Meridian- und Breitenkreis heissen auch ein kanonisches Kurvensystem oder ein Paar konjugierter Rückkehrsnitte.

(H) auf das System H', M', B' zufolge der Transformationsformeln (1) bis (3) umrechnen:

$$\varepsilon_1 H' \sim (\varepsilon_2 \nu + x\mu) M' + \varepsilon_3 \mu B'.$$

Also ist:

$$\varepsilon_1 \{(\varepsilon_2 \nu + x\mu) M' + \varepsilon_3 \mu B'\} \sim n M' + m B'.$$

Koeffizientenvergleich lehrt, dass durch die Zahlen m und n die Zahlen μ und ν eindeutig bestimmt sind: es ist $|\mu| = |m|$, also weil $\mu > 0$, $\mu = |m|$ und ν gleich dem absoluten Betrage der mod m auf das Intervall $-\frac{1}{2}m$ bis $+\frac{1}{2}m$ reduzierten Zahl n . Damit sind die Zahlen μ und ν als charakteristisch für den gegebenen Vollring erwiesen.

Während Meridian- und Breitenkreis schon auf einem ungefaserten Vollring definiert sind, setzt die vierte ausgezeichnete Kurve, deren wir später bedürfen, der *Querkreis* Q , die Faserung voraus. Er ist eine geschlossene Kurve der Randringfläche, die jede Faser der Randringfläche genau einmal durchsetzt, wofür man auch sagen kann: er ist ein zu jeder Faser H konjugierter Rückkehrschnitt der Randringfläche. Daher ist er bis auf seine Orientierung und bis auf Vielfache der Faser durch die Faserung der Randringfläche bestimmt, d. h. sind Q und Q' zwei Querkreise, so besteht zwischen ihnen die Beziehung:

$$Q \sim \varepsilon_4 Q' + y H', \tag{4}$$

eine Formel, die zu den Transformationsformeln (1) bis (3) hinzutritt.

Wie Meridian- und Breitenkreis, so bilden auch Faser H und Querkreis Q auf der Oberfläche eines gefaserten Vollringes ein fundamentales Kurvensystem, d. h. jede andere geschlossene Kurve der Randringfläche ist homolog einer linearen Kombination von H und Q .

Die Oberfläche eines beliebigen gefaserten Vollringes ist eine gefaserte Ringfläche. Daher lassen sich die Oberflächen je zweier gefaseter Vollringe faser-treu auf einander abbilden. Bestimmt ist der gefaserte Vollring durch die gefaserte Randringfläche erst dann, wenn auf ihr eine geschlossene Kurve M als Meridiankreis gegeben ist. M muss natürlich der Bedingung genügen, auf der Randringfläche doppeltpunktfrei, nicht nullhomolog und nicht der Faser homolog zu sein. Hat man auf einer gefaserten Ringfläche die Faser H orientiert und einen Querkreis Q ausgewählt, so drückt sich also M mit zwei teilerfremden Zahlen $\alpha (\neq 0)$ und β so aus:

$$M \sim \alpha Q + \beta H.$$

Dass durch M , also durch die Zahlen α, β der gefaserte Vollring eindeutig bestimmt ist, zeigen wir durch Berechnung seiner charakteristischen Zahlen μ, ν . Ist

$$B \sim \varrho Q + \sigma H$$

ein Breitenkreis auf der gefaserten Ringfläche, so kann man bei geeigneter Orientierung von B

$$\begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \varrho & \sigma \end{vmatrix} = 1 \quad (5)$$

annehmen, weil sowohl Q und H als M und B ein fundamentales Kurvensystem auf der Ringfläche sind. Dann ist

$$H \sim \alpha B - \varrho M.$$

Durch α und β ist ϱ vermöge Gleichung (5) bis auf Vielfache von α bestimmt. Wie früher aus Gleichung (H') erhält man jetzt aus der letzten Gleichung die

charakteristischen Zahlen μ und ν eindeutig: $\mu = |\alpha|$, ν gleich dem absoluten Be-

trage der mod α auf das Intervall $-\frac{1}{2}\alpha$ bis

$+\frac{1}{2}\alpha$ reduzierten Zahl ϱ . Ist insbesondere

der Meridiankreis ein Querkreis, so handelt es sich um einen gewöhnlichen gefaserten Vollring.

Das einfachste Beispiel eines gefaserten Raumes ist das topologische Produkt aus Kreislinie und Kugelfläche. Es ist der Raum, der aus einer Hohlkugel entsteht, wenn man je zwei Punkte der inneren und äusseren Randkugelfläche, die auf gleichem Radius liegen, identifiziert.

Fig. 2 stellt einen Schnitt durch den Mittelpunkt der Hohlkugel dar. Die Fasern werden von den Radien aus der Hohlkugel ausgeschnitten. Es liegt ein gefasertes Raum vor, denn zu jeder Faser gibt es eine Faserumgebung, die sich auf einen gefaserten Vollring mit den Zahlen $\mu=1$, $\nu=0$ abbilden lässt.

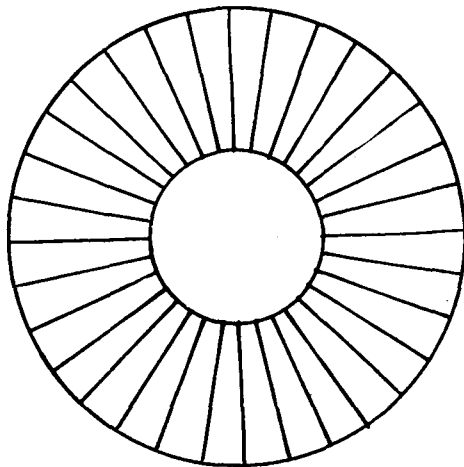


Fig. 2.

§ 2. Zerlegungsfläche.

Der wichtigste Begriff für die Untersuchung der gefaserten Räume ist der der *Zerlegungsfläche*. Jeder gefaserte Raum F hat eine Zerlegungsfläche f . Dies ist aber keine Punktmenge des Raumes F , und sie lässt sich im allgemeinen gar nicht als Fläche in den Raum hineinlegen⁷, sondern sie ist als abstrakte Mannigfaltigkeit so definiert: jeder Faser von F entspricht umkehrbar eindeutig ein Punkt der Zerlegungsfläche f .⁸ Damit hat zugleich jeder Punkt von F auf der Zerlegungsfläche einen bestimmten Bildpunkt, denn durch jeden Punkt F geht genau eine Faser hindurch. Die Umgebungen auf f sind definiert als Bilder der räumlichen Umgebungen in F . Man kann dann beweisen:

- 1) Die Umgebungen von f erfüllen die Hausdorffschen Umgebungsaxiome;
- 2) Es gibt zu jedem Punkte auf f eine Umgebung, die sich auf das Innere eines euklidischen Vollkreises topologisch abbilden lässt;
- 3) Ist jedem Punkte von f eine beliebige Umgebung zugeordnet, so genügen abzählbar viele, ganz f zu überdecken. Mit F ist auch f eine offene oder geschlossene Mannigfaltigkeit;
- 4) f ist zusammenhängend.

Beim Beweise von (2) wird wesentlich die Abbildbarkeit jeder Faserumgebung auf einen Vollring benutzt. Es ist ferner zu beachten, dass wir als Umgebungssystem das System aller offenen Teilmengen von F zugrunde legten.

Aus 1) bis 4) folgt nach einem von T. Radó bewiesenen Satze⁹, dass die Zerlegungsfläche triangulierbar ist. Man kann daher alle Sätze der Flächentopologie auf sie anwenden. Ist F geschlossen, so ist also die Zerlegungsfläche f eine orientierbare Fläche vom Geschlechte (Henkelzahl) p oder eine nichtorientierbare vom Geschlechte (Kreuzhaubenzahl) k . In dem Beispiele des topologischen Produktes aus Kreislinie und Kugelfläche (S. 154) ist die Zerlegungsfläche selbst eine Kugel, die man hier ausnahmsweise in den Raum, etwa als die äussere Randkugelfläche der Hohlkugel so hineinlegen kann, dass sie von jeder Faser genau in einem Punkte, ihrem Bildpunkte, getroffen wird. — Dass jede belie-

⁷ Unser Begriff der Zerlegungsfläche hat nichts mit dem der surface of section zu tun, den G. D. Birkhoff benutzt, Dynamical systems with two degrees of freedom, Trans. Am. Math. Soc. 18 (1917) S. 268; vergl. auch L. Bieberbach, Differentialgleichungen (Berlin 1923) S. 136.

⁸ Die Zerlegungsfläche gibt also gewissermassen an, wie die Mannigfaltigkeit in Fasern »zerlegt« ist. Vgl. Enc. Math. Wiss. III AB 13, S. 178 (Tietze-Vietoris).

⁹ T. Radó, Über den Begriff der Riemannschen Fläche, Acta litt. scient. Szeged II (1925) S. 101.

bige geschlossene oder offene, orientierbare oder nichtorientierbare Fläche als Zerlegungsfläche eines gefaserten Raumes auftreten kann, zeigt das topologische Produkt aus einer beliebigen Fläche f und einer Kreislinie C . Die Punkte des topologischen Produktes sind bekanntlich die Punktepaare, die aus einem Punkte a von f und einem Punkte b von C bestehen. Eine Faser wird in dem topologischen Produkt von allen Punktepaaren a, b gebildet, für die a ein und derselbe feste Punkt von f ist, während b den Kreis C durchläuft. Die Zerlegungsfläche ist offenbar die Fläche f , die man auch hier in den Raum so hineinlegen kann, dass jede Faser sie genau einmal in ihrem Bildpunkte trifft. Ein Beispiel, in dem das nicht mehr möglich ist, werden wir in § 3 kennen lernen.

Als Bezeichnungsregel setzen wir ein für allemal fest, dass der Übergang vom gefaserten Raum F zur Zerlegungsfläche f sich im Übergang von grossen zu kleinen Buchstaben ausdrückt. So entspricht der Faser H des Raumes F auf der Zerlegungsfläche der Punkt h .

Ist dann Ω_H eine Faserumgebung der Faser H , so bezeichnen wir ihr Bild ω_h als *Zerlegungsumgebung* des Bildpunktes h von H . Die Zerlegungsumgebung erhält man aus der Meridianschnittfläche der Faserumgebung, also aus der Grundfläche des euklidischen Zylinders Fig. 1, indem man Punkte, die derselben Faser angehören, identifiziert. Die Zerlegungsumgebung ist also ein Kreissektor vom Öffnungswinkel $\frac{2\pi}{\mu}$, dessen Randradien identifiziert sind, wofür man auch sagen kann: Diskontinuitätsbereich einer zyklischen Drehgruppe der Ordnung μ der Kreisscheibe um ihren Mittelpunkt. Also ist die Zerlegungsumgebung topologisch abbildbar auf eine Kreisscheibe mit Rand. Das topologische Bild einer solchen Kreisscheibe heisst *Elementarflächenstück*. Die Zerlegungsumgebungen sind somit ebenso wie die Faserumgebungen abgeschlossene Punkt mengen. Die Umgebungsaxiome gelten für sie nur, nachdem man die abgeschlossenen Zerlegungsumgebungen durch Entfernen ihrer Randkreise in offene Umgebungen abgeändert hat.

Von den Zerlegungsumgebungen gilt der folgende

Hilfssatz I: *Ist ω_h Zerlegungsumgebung des Punktes h und e ein ganz in ω_h enthaltenes Elementarflächenstück, das h nicht auf seinem Rande enthält, so ist e ebenfalls Zerlegungsumgebung und zwar a) von h , falls h innerer Punkt von e ist, b) von jedem beliebigen inneren Punkte von e , falls h ausserhalb e liegt. Die in e bez. ω_h abgebildeten Faserumgebungen E bez. Ω_H sind im Falle a) faserreu aufeinander abbildbar, im Falle b) ist E ein gewöhnlicher gefasertes Vollring.*

Beweis: a) Die Fasern, die sich in die Punkte von e abbilden, machen einen gefaserten Teilbereich E von Ω_H aus, der die Faser H im Innern enthält. Denken wir uns Ω_H als gefaserten Zylinder mit verschraubt zugeordneten Randflächen, so erhält man aus dem Meridianschnitt $\tilde{\omega}_h$ von Ω_H (Fig. 4) die Zerlegungsumgebung ω_h (Fig. 3), wenn man solche Punkte von $\tilde{\omega}_h$ identifiziert, die hinsichtlich der auf $\tilde{\omega}_h$ ausgeübten zyklischen Drehgruppe der Ordnung μ äquivalent sind. Die Punkte von $\tilde{\omega}_h$, die sich dabei in Punkte von e abbilden, machen ein in Fig. 4 schraffiertes Elementarflächenstück \tilde{e} aus, das den Mittelpunkt \tilde{h} von $\tilde{\omega}_h$ im Innern enthält und das bei der zyklischen Drehgruppe ebenfalls in sich übergeht. Der Teilbereich E von Ω_H besteht dann gerade aus den achsenparallelen Strecken des Zylinders Ω_H , die durch Punkte von \tilde{e} hindurchgehen. Man kann nun, wie wir zeigen werden, \tilde{e} auf $\tilde{\omega}_h$ durch eine topologische Abbildung \tilde{a} mit Erhaltung der Orientierung so abbilden, dass \tilde{h} festbleibt und

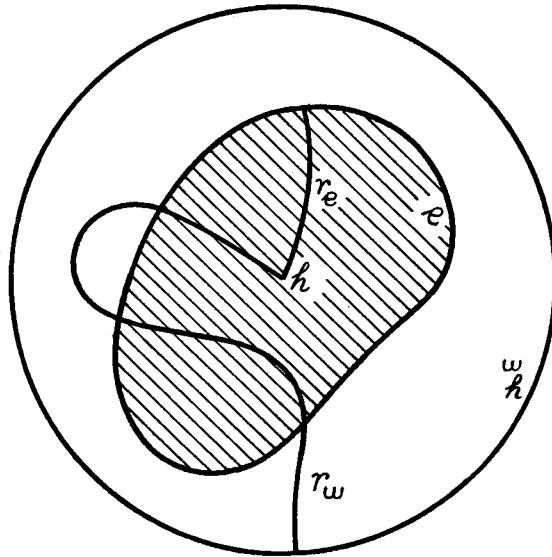


Fig. 3.

dass je μ Punkte, die hinsichtlich der zyklischen Drehgruppe äquivalent sind, wieder in μ solche Punkte übergehen. Übt man auf die achsenparallelen Strecken von E und Ω_H die entsprechende Abbildung aus, so erhält man eine topologische Abbildung von E auf Ω_H , die Fasern in Fasern überführt und die mittlere Faser H festlässt, wie es der Hilfssatz behauptet. — Die verwendete Abbildung \tilde{a} erhält man folgendermassen: sei a eine topologische Abbildung mit Erhaltung der Orientierung, die e in ω_h überführt und h festlässt, r_e eine doppel-

punktfreie Kurve von h nach dem Rande von e und r_w ihr Bild, das ebenfalls doppelpunktfrei ist und von

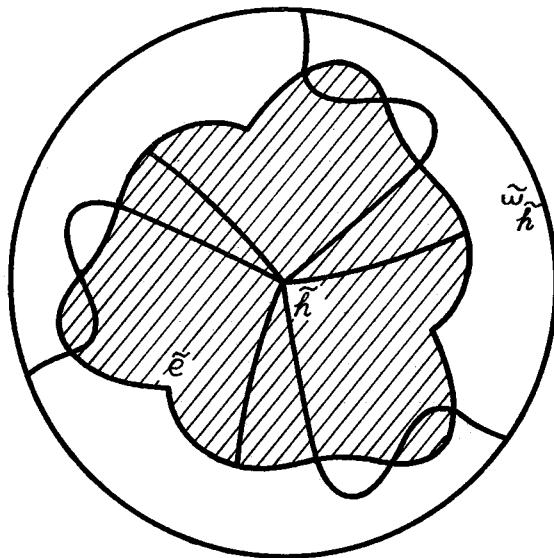


Fig. 4.

h nach dem Rande von ω_h läuft. Durch die μ Bilder von r_e bez. r_ω wird \tilde{e} bez. $\tilde{\omega}_h$ in μ aufeinander folgende Sektoren

$$\tilde{e}^1, \tilde{e}^2, \dots, \tilde{e}^\mu \quad \text{bez.} \quad \tilde{\omega}^1, \tilde{\omega}^2, \dots, \tilde{\omega}^\mu$$

zerlegt, die von der Drehgruppe zyklisch vertauscht werden. Durch die Abbildung a wird eine Abbildung des Sektors \tilde{e}^i auf den Sektor $\tilde{\omega}^i$ vermittelt und damit eine Abbildung \tilde{a} von \tilde{e} auf $\tilde{\omega}_h$ von der verlangten Beschaffenheit.

b) Dem Elementarflächenstück in ω_h entsprechen jetzt in $\tilde{\omega}_h$ μ getrennt liegende Elementarflächenstücke $\tilde{e}^1, \tilde{e}^2, \dots, \tilde{e}^\mu$, die sich bei der zyklischen Drehgruppe vertauschen. Die e entsprechende Fasermenge E wird in dem Zylinder Ω_H von μ kongruenten gefaserten euklidischen Zylindern gebildet, die über \tilde{e}^1 bis \tilde{e}^μ liegen. E wird aus diesen μ Stücken erhalten, indem man sie der Reihe nach aneinandersetzt und Grundfläche und Dachfläche unverschraubt zuordnet. Die Fasermenge E ist daher ein gewöhnlicher Vollring, in dem man jede innere Faser als mittlere Faser auffassen kann.

Aus dem Hilfssatz I folgt

Hilfssatz II: *Sind Ω_H^1 und Ω_H^2 zwei Faserumgebungen der Faser H , so sind sie fasertreu mit fester Faser H aufeinander abbildbar.*

Beweis: Es gibt auf der Zerlegungsfläche ein Elementarflächenstück e , das h überdeckt und im Innern des Durchschnittes der Zerlegungsumgebungen ω_h^1 und ω_h^2 liegt. Nach Hilfssatz I ist e Bild einer Faserumgebung E der Faser H , und E ist sowohl auf Ω_H^1 als auf Ω_H^2 fasertreu mit fester Faser H abbildbar.

Hiernach sind für alle Faserumgebungen einer festen Faser H die Zahlen μ, ν dieselben, also sind sie der Faser H eigentümlich. Ist $\mu > 1$, so heisst die Faser eine μ -fache Ausnahmefaser des gefaserten Raumes, für $\mu=1$ eine gewöhnliche Faser. Lässt man eine Nachbarfaser einer μ -fachen Ausnahmefaser in die Ausnahmefaser hineinrücken, so ist ihre Grenzlage die μ -fach durchlaufene Ausnahmefaser. In einem gefaserten Vollringe sind alle Fasern, höchstens mit Ausnahme der mittleren gewöhnliche Fasern. Die μ -fache Ausnahmefaser ist, μ mal durchlaufen, einer gewöhnlichen Faser in der Faserumgebung homolog. Die Punkte der Zerlegungsfläche, in die sich Ausnahmefasern abbilden, heissen *Ausnahmepunkte*; als Punkte der Zerlegungsfläche sind sie vor den gewöhnlichen Punkten nicht ausgezeichnet.

Satz 1: *In einem geschlossenen gefaserten Raume gibt es höchstens endlich viele Ausnahmefasern.*

Denn andernfalls gäbe es einen Punkt des Raumes, durch dessen jede Umgebung unendlich viele Ausnahmefasern hindurch gingen. Die Faser dieses Punktes hätte dann keine Faserumgebung.

§ 3. Faserungen der Hypersphäre.

Ehe wir die allgemeine Untersuchung der Faserungen fortsetzen, geben wir als Beispiel für Faserungen mit Ausnahmefasern die Faserungen der Hypersphäre an. Die Hypersphäre denken wir uns zunächst im euklidischen vierdimensionalen Raum gelegen. Sie ist da eine Hyperfläche mit der Gleichung

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = 1,$$

worin x_1, \dots, x_4 kartesische Koordinaten sind. Die Fasern sind die Bahnkurven von bestimmten eingliedrigen Gruppen starrer Bewegungen der Hypersphäre in sich. Sie sind als Hypersphärenkurven des R_4 durch die Gleichungen gegeben:

$$\begin{aligned} x'_1 &= x_1 \cos mt + x_2 \sin mt \\ x'_2 &= -x_1 \sin mt + x_2 \cos mt \\ x'_3 &= x_3 \cos nt + x_4 \sin nt \\ x'_4 &= -x_3 \sin nt + x_4 \cos nt. \end{aligned}$$

m und n sind darin teilerfremde ganze positive Zahlen; t ist ein stetiger Parameter. Die Bahnkurven sind geschlossene Kurven, die einmal durchlaufen werden, wenn t von 0 bis 2π läuft.

Wir machen uns von der Hypersphäre ein anschauliches Bild, indem wir sie stereographisch vom Nordpol, etwa dem Punkte $(0, 0, 0, 1)$ aus in die Äquatorhyperebene $x_4=0$ projizieren. Die Äquatorhyperebene ist ein dreidimensionaler euklidischer Raum mit den kartesischen Koordinaten x, y, z , den wir durch einen einzigen uneigentlichen Punkt, den Bildpunkt des Nordpoles zum konformen Raume schliessen.¹⁰ Jeder vom Nordpol verschiedene Punkt (x_1, x_2, x_3, x_4) hat dann einen bestimmten Bildpunkt mit den Koordinaten x, y, z ; die x -, y - z -Achse lassen wir mit der x_1 -, x_2 -, x_3 -Achse des R_4 zusammenfallen. Der euklidische Raum trägt dann ausser der euklidischen Metrik, die er von dem einbettenden euklidischen R_4 bezieht, eine sphärische Metrik, die ihm künstlich

¹⁰ Vergl. DB II § 7, § 1 und § 2.

durch die stereographische Projektion von der Hypersphäre her aufgeprägt wird. Bei der Projektion gehen die starren Bewegungen der Hypersphäre über in solche konforme (oder sphärisch-starre) Bewegungen, die Diametralkugeln der Einheitskugel $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ untereinander vertauschen. Die angegebene kontinuierliche Gruppe bildet sich insbesondere in eine Gruppe ab, die die z -Achse und den dazu senkrechte Einheitskreis $x^2 + y^2 = 1, z = 0$ in sich überführt. Es werden damit zugleich die ∞^1 Ringflächen einzeln in sich abgebildet, die die z -Achse zur Rotationsachse haben und das durch den Einheitskreis gehende Kugelbüschel orthogonal durchsetzen. In der Fig. 5 ist der Schnitt der Ringfläche mit der xz -Ebene wiedergegeben. Jede der Ringflächen berandet einen Vollring, der den

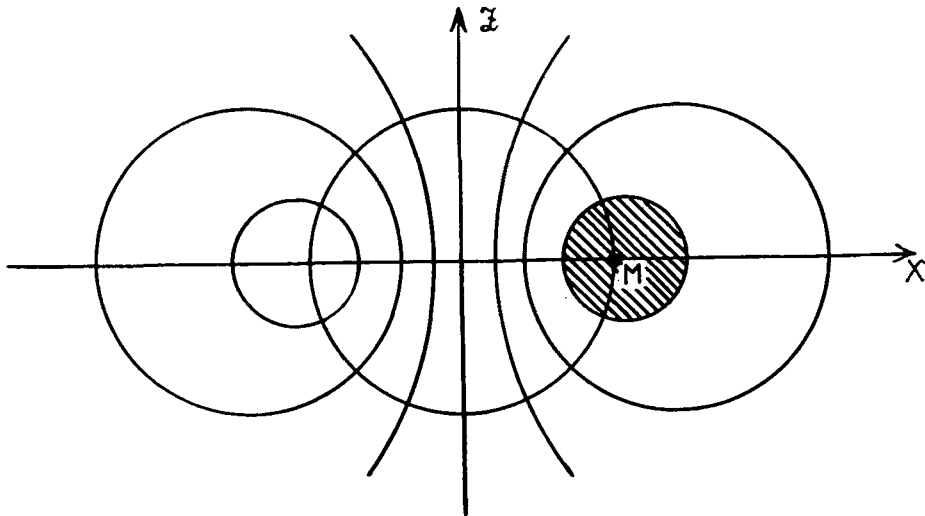


Fig. 5.

Einheitskreis im Innern enthält und der von Bahnkurven der Bewegungsgruppe gefasert wird. Denn von einer Bewegung der Gruppe wird eine von der z -Achse berandete Halbebene um die z -Achse gedreht. Der kreisförmige Schnitt der Halbebene mit einem Vollringe (in der Figur schraffiert) wird gleichzeitig sphärisch starr um seinen sphärischen Mittelpunkt M in sich gedreht und zwar durch den Winkel $\frac{2\pi n}{m}$, wenn die Halbebene sich einmal um die z -Achse herumbewegt hat. Die charakteristischen Zahlen μ und ν des gefaserten Vollringes sind daher $\mu = m$ und ν gleich dem absoluten Betrage der mod m auf das Intervall $-\frac{1}{2}m$ bis $+\frac{1}{2}m$ reduzierten Zahl n . Der ausserhalb der betrachteten Ringfläche gelegene

Teil der Hypersphäre ist ebenfalls ein von Bahnkurven gefasertes Vollring, der die z -Achse zur mittleren Faser hat. Denn durch die starre Bewegung $x'_1=x_3$, $x'_2=x_4$, $x'_3=x_1$, $x'_4=x_2$, vielmehr durch die entsprechende sphärische Bewegung des konformen Raumes, werden Einheitskreis und z -Achse miteinander vertauscht. Die charakteristischen Zahlen dieses Vollringes sind $\mu=n$ und ν gleich der mod n auf das Intervall $-\frac{1}{2}n$ bis $+\frac{1}{2}n$ reduzierten Zahl m . Der Einheitskreis ist daher eine m -fache, die z -Achse eine n -fache Ausnahmefaser. Jede andere Bahnkurve ist eine gewöhnliche Faser, da sie sich in einen der um den Einheitskreis gelegten gefaserten Vollringe einfangen lässt. Jede gewöhnliche Faser schlingt sich m mal um die z -Achse und n mal um den Einheitskreis herum, sie ist daher verknotet und zwar ein Torusknoten¹¹, wenn nicht gerade eine der Zahlen m und n den Wert 1 hat.

Die Zerlegungsfläche der Hypersphärenfaserungen ist stets die Kugel. Denn in der Hypersphäre kann man jede geschlossene Kurve in einen Punkt deformieren, also gilt dasselbe auf der Zerlegungsfläche. Weil die Hypersphäre geschlossen ist, ist es auch die Zerlegungsfläche (§ 2); damit ist sie aber als Kugelfläche charakterisiert. Wir wollen dies Ergebnis für den Fall $m=n=1$, in welchem überhaupt keine Ausnahmefasern vorhanden sind, bestätigen. In diesem Falle sind die Bahnkurven Kreise, zu denen auch die z -Achse und der Einheitskreis gehören. Jeder Kreis durchsetzt genau einmal das Innere des Einheitskreises, ausgenommen der Einheitskreis selbst. Führt man einen Punkt aus dem Innern der Einheitskreisfläche an den Rand heran, so nähert sich der hindurchgehende Bahnkreis immer dem Einheitskreise. Man muss also das Innere des Einheitskreises durch einen einzigen Punkt, den Bildpunkt des Einheitskreises schliessen, um zur Zerlegungsfläche zu kommen. Diese Schliessung führt aber zur Kugelfläche. — Die Zerlegungsfläche lässt sich nicht so in die Hypersphäre legen, dass sie von jeder Faser in ihrem Bildpunkte durchsetzt wird, denn eine Kugelfläche der Hypersphäre hat mit jeder geschlossenen Kurve eine gerade Anzahl von Schnittpunkten gemein.¹²

In § 11 wird gezeigt werden, dass die Faserungen durch die hier angegebenen Bahnkurven die einzig möglichen der Hypersphäre sind, d. h. jede Faserung der Hypersphäre lässt sich fasertreu auf eine dieser Faserungen abbilden.

¹¹ K. Reidemeister, Knoten und Gruppen, Abh. Math. Sem. Hamburg 5 (1927) S. 19.

¹² Da sich jeder Hypersphärenpunkt in einen Punkt der Zerlegungsfläche abbildet, so liegt eine Abbildung der Hypersphäre auf die Kugel vor. Es ist dieselbe, die H. Hopf, Über die Abbildungen der dreidimensionalen Sphäre auf die Kugelfläche, Math. Ann. 104 § 5 untersucht.

§ 4. Triangulierbarkeit der gefaserten Räume.

Die gefaserten Räume sind ihrem Wesen nach kontinuumstopologisch, d. h. als Punktmenge definiert; ausser dieser Definition gibt es bekanntlich eine rein kombinatorische Mannigfaltigkeitsdefinition, die zum Aufbau der Mannigfaltigkeit Dinge verschiedener Art, nämlich Zellen der Dimensionen 0 bis 3 benutzt. Von der kombinatorischen Definition kann man durch Ausfüllen der — immer als Simplexes wählbaren — Zellen mit Punkten zu einer kontinuumstopologischen Mannigfaltigkeit übergehen. In zwei Dimensionen lässt sich nun jede Punktmenge, die durch Axiome wie sie in § 1 unter 1) bis 4) für drei Dimensionen gegeben wurden, triangulieren — nach dem auf S. 155 angeführten Satze — und man kann daher Sätze über zweidimensionale Mannigfaltigkeiten je nach Bequemlichkeit auf die kontinuumstopologische oder auf die kombinatorisch-topologische Definition stützen. In drei und mehr Dimensionen dagegen hat es sich auf Grund der Axiome 1) bis 4) von § 1 bisher nicht beweisen lassen, dass die Mannigfaltigkeit einer simplicialen Zerlegung (in Tetraeder) fähig ist. Es ist daher von Wichtigkeit, dass für gefaserte Räume die Triangulierbarkeit feststeht, sodass wir auf diese Räume sowohl die Methoden der Kontinuums- wie der kombinatorischen Topologie anwenden dürfen, da wir sicher sind, zu jedem gefaserten Raum einen Aufbau aus Tetraedern angeben und ihm damit ein kombinatorisches Schema zuordnen zu können, durch dessen Ausfüllung mit Punkten wir zur Punktmannigfaltigkeit zurückkehren können. Den Beweis der Triangulierbarkeit, sowie einen dafür zwar nicht notwendigen, aber nützlichen Hilfssatz bringen wir jetzt vor.

Hilfssatz III: *Jedes Elementarflächenstück ω auf der Zerlegungsfläche f , das auf seinem Rande keinen und im Innern höchstens einen Ausnahmepunkt hat, ist Zerlegungsumgebung des Ausnahmepunktes, oder wenn der Ausnahmepunkt fehlt, jeden inneren Punktes.*

Beweis: Sei h der Ausnahmepunkt, oder wenn er fehlt, ein beliebiger innerer Punkt von ω . Wir triangulieren ω so fein, dass jedes Dreieck der Triangulation ganz von einer Zerlegungsumgebung überdeckt wird. Überdies soll h im Innern eines Dreiecks liegen. Um die Möglichkeit einer solchen Triangulation zu zeigen, bilden wir ω auf eine Kreisscheibe der euklidischen Ebene ab. Es gibt dann einen positiven Radius ε so, dass der Kreis um einen beliebigen Punkt p von ω mit dem Radius ε ganz von einer Zerlegungsumgebung (die nicht notwendig zu p gehört) überdeckt wird.

Sollte der ε -Kreis über die Kreisscheibe hinausragen, so betrachten wir nur das zu ω gehörige Stück. Aus der Annahme, dass kein solches ε vorhanden ist, würde folgen, dass es eine Folge von Kreisen gibt, deren Radien nach 0 und deren Mittelpunkte nach einem Punkte p_0 konvergieren und deren keiner sich mit einer Zerlegungsumgebung überdecken lässt. Um p_0 kann man einen Kreis mit dem Radius $\varrho > 0$ schlagen, der von der (zu p_0 gehörigen) Zerlegungsumgebung überdeckt wird. In ihm liegen fast alle Kreise der Folge, die sich somit ebenfalls fast alle mit einer Zerlegungsumgebung überdecken lassen. Die Annahme führt daher zu einem Widerspruch, und es muss somit ein ε der behaupteten Beschaffenheit vorhanden sein. Die Triangulation von ω haben wir nun nur so fein zu wählen, dass jedes Dreieck sich von einem Kreise vom Radius ε überdecken lässt. Dann können wir Hilfssatz I (S. 156) auf die ε -Kreise anwenden und wissen, dass alle Dreiecke der Triangulation Zerlegungsumgebungen sind. Die zugehörigen Faserumgebungen sind gewöhnliche gefaserte Vollringe, höchstens bis auf die Faserumgebung \mathcal{A}_H der Faser H , die sich in das h enthaltende Dreieck δ_h abbildet. Nun gibt es bekanntlich eine Folge von Elementarflächenstücken $\omega_1 = \delta_h, \omega_2, \dots, \omega_\sigma = \omega$, die alle aus Dreiecken der Triangulation von ω bestehen und deren jedes aus dem vorangehenden durch Hinzunahme eines einzigen, nur längs einer oder zweier Kanten angrenzenden Dreiecks entsteht, eine Tatsache, die in drei Dimensionen nebenbei bemerkt nicht mehr zu gelten braucht. Die entsprechenden Fasermengen $\Omega_1 = \mathcal{A}_H, \Omega_2, \dots, \Omega_\sigma = \Omega$ sind sämtlich Faserumgebungen von H . Denn wie ω_i aus ω_{i-1} hervorgeht, indem man an ω_{i-1} ein Dreieck δ längs einer einzigen Strecke s (die aus einer oder zwei Kanten von δ bestehen kann) ansetzt, so geht Ω_i aus Ω_{i-1} hervor, indem man einen gewöhnlichen gefaserten Vollring \mathcal{A} längs eines gefaserten Kreisringes S an Ω_{i-1} fasertreu ansetzt. Dabei entsteht aber, wie man leicht beweist, wieder ein gefasertes Vollring.

Es folgt nunmehr

Satz 2: *Jeder gefaserte Raum ist triangulierbar.*

Beweis: Wir triangulieren die Zerlegungsfläche so, dass die Ausnahmepunkte alle im Innern der Dreiecke liegen und dass kein Dreieck mehr als einen Ausnahmepunkt enthält. Nach Hilfssatz III ist jedes Dreieck Zerlegungsumgebung. Der gefaserte Raum zerfällt somit in endlich oder abzählbar unendlich viele gefaserte Vollringe. Zwei benachbarte solche Vollringe haben einen gefaserten Kreisring gemeinsam, der sich in eine Strecke der Zerlegungsflächentriangulation abbildet und den man nach Aufschneiden durch eine Querlinie auf ein Rechteck der euklidischen Ebene abbilden kann. Man kann danach in jedem solchen Kreisring von geraden Linien reden. Das sind nämlich solche, die sich in dem Bildrechteck geradlinig abbilden. Jeder der gefaserten Vollringe wird nun trianguliert und zwar so, dass die Triangulation der drei Kreisringflächen, aus denen der Rand des Vollringes besteht, »ge-

radlinig» wird. Auf jeder solcher Kreisringfläche liegen dann zwei Triangulationen, die von den Triangulationen der beiden angrenzenden Vollringe herrühren und die, da sie geradlinig sind, durch eine gemeinsame Unterteilung ersetzt werden können. Damit ist eine Einteilung des gefaserten Raumes in Zellen gewonnen. Aus ihr kann man durch Normalunterteilung eine simpliciale Zerlegung ableiten.

§ 5. Ausbohrung und Verschlussring.

Ein wesentliches Hilfsmittel für die Klassifikation der gefaserten Räume besteht in der *Ausbohrung* der Ausnahmefasern und im Ersetzen der *Bohrkerne* durch gewöhnliche Vollringe. Eine Faser H aus einem gefaserten Raume F ausbohren heisst die inneren Punkte einer Faserumgebung Ω_H von H aus dem Raume entfernen. Dadurch entsteht ein *gefaserter berandeter Raum* \bar{F} . Der Rand ist eine gefaserte Ringfläche. Die Zerlegungsfläche \bar{f} von \bar{F} entsteht aus der Zerlegungsfläche f von F durch Entfernen der inneren Punkte der Zerlegungsumgebung ω_h , in die sich die Faserumgebung Ω_H abbildet.

Unsere Aufgabe besteht zunächst darin zu zeigen, dass der Raum \bar{F} erstens unabhängig von der Auswahl der Faserumgebung der Faser H und zweitens, falls H eine gewöhnliche Faser ist, unabhängig von der Auswahl dieser Faser ist. Sodann gewinnen wir aus einem beliebigen gefaserten berandeten Raume \bar{F} durch *Schliessung* mit geeigneten gefaserten *Verschlussringen* gefaserte Räume F zurück.

Hilfssatz IV: *Sind Ω und Ω' zwei Faserumgebungen einer Faser H eines gefaserten Raumes F , so gibt es eine faser-treue Deformation des Raumes F , die Ω in Ω' überführt und H fest lässt.*

Beweis: Wir schalten zwischen Ω und Ω' eine Faserumgebung Ω_1 von H , die ganz im Innern von Ω und Ω' liegt, und zeigen, dass es eine faser-treue Deformation von F gibt, die bei fester Faser H Ω in Ω_1 überführt. Dann gibt es, da Ω' nicht vor Ω ausgezeichnet ist, eine ebensolche Deformation, die Ω' in Ω_1 überführt. Die erste Deformation, gefolgt von der reziproken der zweiten, ist die gesuchte. — Dass es eine solche Faserumgebung Ω_1 gibt, folgt aus Hilfssatz I, da man zu zwei Zerlegungsumgebungen ω und ω' von h immer eine Zerlegungsumgebung ω_1 von h angeben kann, die im Innern von ω und ω' liegt.

Wir nehmen eine weitere Zerlegungsumgebung ω_a von h hinzu, die ω ganz im Innern enthält. Das ist möglich; man braucht nämlich für ω_a nur ein Elementarflächenstück zu wählen, das ω ganz im Innern enthält und ausser etwa h keine weiteren Ausnahmepunkte überdeckt. Dieses existiert, weil die Zerlegungsumgebungen

abgeschlossen sind und Häufungspunkte von Ausnahmepunkten nicht vorhanden sind, und ist Zerlegungsumgebung nach Hilfssatz III.

Um eine bestimmte Vorstellung zu haben, denken wir uns ω_a auf eine Kreisfläche einer euklidischen Ebene abgebildet mit dem Bildpunkte von h als Mittelpunkt. ω und ω_1 mögen dabei — so kann man die Abbildung immer einrichten — in konzentrische Kreise übergehen (Fig. 6). Nunmehr üben wir auf die Kreisfläche eine Deformation aus, die ω_1 in ω überführt, etwa indem wir die Punkte der Kreisfläche auf Radien nach aussen wandern lassen. Dieser Deformation der Zerlegungsumgebung von h entspricht eine fasertreue Deformation der Faserumgebung Ω_a von H , bei der H und der Rand von Ω_a punktweise festgelassen werden. Man erhält diese Deformation von Ω_a , indem man Ω zum euklidischen Zylinder aufschneidet und die Deformation von ω_a auf alle Meridianschnittflächen, welche μ -fach verzweigte Überlagerungsflächen von ω_a sind, überträgt.

Aus Hilfssatz IV folgt, dass der gefaserte berandete Raum \bar{F} , der aus F durch Ausbohrung einer Faser H entsteht, unabhängig davon ist, welche der unendlich vielen Faserumgebungen von H man ausbohrt.

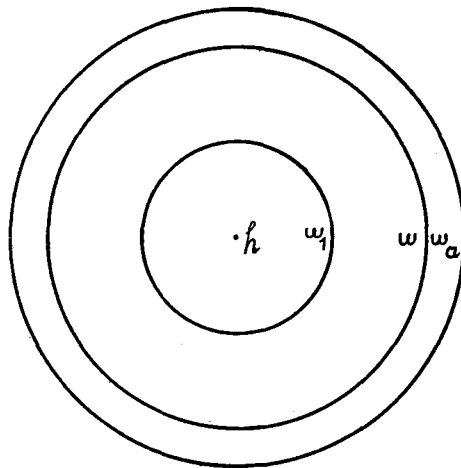


Fig. 6.

Hilfssatz V: *Der gefaserte berandete Raum \bar{F} , der aus F durch Ausbohrung einer gewöhnlichen Faser H entsteht, ist unabhängig davon, welche gewöhnliche Faser H man ausbohrt.*

Beweis: Sind H und H' zwei gewöhnliche Fasern von F , h und h' ihre Bildpunkte auf der Zerlegungsfläche f , so gibt es ein Elementarflächenstück ω , das h und h' zu inneren Punkten hat und das keine Ausnahmepunkte enthält. Es gibt dann eine Deformation von ω , bei der h in h' übergeht, während der Rand von ω punktweise festbleibt. ω ist nach Hilfssatz III Zerlegungsumgebung eines jeden inneren Punktes und somit Bild eines gewöhnlichen gefaserten Vollringes Ω . Der Deformation von ω entspricht eine fasertreue Deformation von Ω , die H in H' überführt und die Randringfläche von Ω punktweise festlässt.

Die gleiche Überlegung kann man auf den ausgebohrten Raum \bar{F} anwenden und damit zeigen, dass der längs einer beliebigen Anzahl gewöhnlicher Fasern ausgebohrte Raum F unabhängig von der Auswahl der ausgebohrten

Fasern ist. Nur hat man dafür zu sorgen, dass die ausgebohrten Faserumgebungen punktfremd sind.

Aus dem gefaserten berandeten Raum \bar{F} , der aus F durch Ausbohrung einer Faser erhalten wurde, kann man neue (unberandete) gefaserte Räume ableiten, indem man die Randringfläche $\bar{\Pi}$ von \bar{F} durch einen gefaserten Vollring, den *Verschlussring* V , schliesst. Das geschieht durch fasertreues Aufkleben der Randringfläche Π von V auf die Ringfläche $\bar{\Pi}$. Bei gegebenem Verschlussringe V kann diese Schliessung noch auf unendlich viele wesentlich verschiedene Weisen erfolgen. Doch ist die Schliessung vollkommen bestimmt, wenn man das Bild \bar{M} eines Meridiankreises M von V auf der Ringfläche $\bar{\Pi}$ kennt. \bar{M} kann offenbar auf $\bar{\Pi}$ weder nullhomolog noch der Faser homolog sein, weil sonst M auf Π es wäre; ausserdem ist \bar{M} doppelpunktfrei. Weiteren Einschränkungen unterliegt \bar{M} nicht. Es gilt nämlich

Hilfssatz VI: *Wird der gefaserte berandete Raum \bar{F} von der Ringfläche $\bar{\Pi}$ berandet, auf der eine doppelpunktfreie, auf $\bar{\Pi}$ weder null- noch der Faser homologe Kurve \bar{M} gezogen ist, so gibt es genau einen gefaserten Vollring V , dessen Randringfläche Π fasertreu so auf $\bar{\Pi}$ abgebildet werden kann, dass \bar{M} in V nullhomotop wird. Der so entstehende (unberandete) gefaserte Raum F_1 ist durch \bar{F} und die zu \bar{M} gehörige Homologieklassse von $\bar{\Pi}$ eindeutig bestimmt.*

Beweis: a) Wir beweisen zunächst, dass es einen und nur einen gefaserten Vollring V gibt, der die Bedingungen des Satzes erfüllt. Ist Q ein Querkreis, H eine orientierte Faser auf $\bar{\Pi}$, so ist

$$\bar{M} \sim \alpha \bar{Q} + \beta \bar{H} \quad (\alpha \neq 0; (\alpha, \beta) = 1).$$

Nach S. 154 gibt es dann genau einen gefaserten Vollring V mit einem Meridiankreis M , einer Faser H und einem geeignet gewählten Querkreis Q , auf dessen Randringfläche Π die Beziehung

$$M \sim \alpha Q + \beta H$$

besteht. Π kann man auf $\bar{\Pi}$ fasertreu abbilden, sodass Q mit \bar{Q} und H mit \bar{H} zusammenfällt. Denn man kann Π längs Q und H , $\bar{\Pi}$ längs \bar{Q} und \bar{H} zu zwei durch die Fasern schraffierten Rechtecken aufschneiden und diese Rechtecke fasertreu miteinander zur Deckung bringen. Dabei geht \bar{M} in M über, wird also Meridiankreis von V .

b) Wir beweisen zweitens, dass der gefaserte Raum F_1 eindeutig bestimmt ist durch \bar{F} und die Homologieklassse von \bar{M} . Alle möglichen fasertreuen Abbildungen

von $\overline{\Pi}$ auf Π , bei denen \overline{M} nullhomotop in V wird, erhält man aus einer einzigen solchen durch nachträgliche Ausübung einer fasertreuen Selbstabbildung A_{Π} von Π , bei der der Meridiankreis M oder vielmehr seine Kurvenklasse in sich oder ihr Negatives übergeht. Die Unabhängigkeit der entstehenden Faserung F_1 von der Art der Abbildung ist bewiesen, wenn gezeigt ist, dass A_{Π} sich zu einer fasertreuen Selbstabbildung A_V von V erweitern lässt, die Π ebenso abbildet wie A_{Π} . Wir sehen zuerst nach, wie sich die Kurvenklassen auf Π bei A_{Π} transformieren. H , Q und M mögen Faser, Querkreis und Meridiankreis auf Π mit beliebiger aber fester Durchlaufung versehen bezeichnen, und es sei

$$M \sim \alpha Q + \beta H.$$

Auf Grund der Transformation (4) von S. 153 können wir uns Q von vornherein so gewählt denken, dass $\alpha > 0$ und $0 \leq \beta < \alpha$ ist; natürlich sind wegen der Doppelpunktlosigkeit von M α und β relativ prim. H' , Q' , M' mögen die Bilder dieser Kurven unter A_{Π} sein. Wegen der Fasertreue von A_{Π} ist nach § 1

$$H' \sim \varepsilon_1 H, \quad Q' \sim \varepsilon_2 Q + \lambda H. \quad (\varepsilon_1, \varepsilon_2 = \pm 1) \quad (1)$$

Der Meridiankreis M geht durch A_{Π} über in

$$M' \sim \alpha Q' + \beta H' \sim \varepsilon_2 \alpha Q + (\varepsilon_1 \beta + \alpha \lambda) H.$$

Nun muss $M' \sim \varepsilon_3 M$ sein also

$$\varepsilon_2 \alpha Q + (\varepsilon_1 \beta + \alpha \lambda) H \sim \varepsilon_3 (\alpha Q + \beta H).$$

Durch Koeffizientenvergleichung folgt $\varepsilon_2 = \varepsilon_3$ und

$$\alpha \lambda + \varepsilon_1 \beta = \varepsilon_2 \beta. \quad (2)$$

Ist $\alpha > 2$, so folgt daraus $\lambda = 0$, und es gibt für (1) nur die beiden Möglichkeiten

$$\alpha > 2 \quad \left\{ \begin{array}{l} 1) H' \sim H, \quad Q' \sim Q, \\ 2) H' \sim -H, \quad Q' \sim -Q. \end{array} \right.$$

Für $\alpha = 2$ kann nur $\lambda = +1, -1$ oder 0 sein wegen $0 < \beta < \alpha$. Dem entsprechend gibt es folgende vier Möglichkeiten

$$\alpha = 2 \quad \left\{ \begin{array}{l} 1) H' \sim H, \quad Q' \sim Q, \\ 2) H' \sim -H, \quad Q' \sim -Q, \\ 3) H' \sim -H, \quad Q' \sim Q + H, \\ 4) H' \sim H, \quad Q' \sim -Q - H. \end{array} \right.$$

Für $\alpha = 1$ wird wieder $\lambda = 0$, und es ergeben sich ebenfalls vier Möglichkeiten

$$\alpha = 1 \quad H' \sim \pm H, \quad Q' \sim \pm Q$$

mit allen vier Vorzeichenkombinationen.

Die zu konstruierende Abbildung A_V zerlegen wir in zwei fasertreue Teilabbildungen¹³:

$$A_V = J_V \cdot B_V.$$

B_V ist eine beliebige fasertreue Abbildung, die die Kurvenklassen auf II ebenso transformiert wie A_H . Bei J_V geht dann jede Kurvenklasse von II in sich über. Wir schneiden V zum geraden Kreiszyylinder auf. Für B_V nehmen wir im Falle

$H' \sim -H, Q' \sim -Q$ eine Umklappung um eine zur Zylinderachse senkrechte Gerade. Sie ist fasertreu und führt jede Kurvenklasse auf II in die negative über. Im Falle $\alpha = 1$ erreicht man die gewünschte Transformation B_V durch die eben erwähnte Umklappung oder durch eine Spiegelung an einer zur Zylinderachse senkrechten oder an einer durch sie hindurchgehenden Ebene. Im Falle $\alpha = 2$ wird die Faser immer von zwei diametral zur mittleren Faser gelegenen Mantellinien (bez. inneren Linien) gebildet. Da $M \sim 2Q + H$ ist, hat der Querkreis die in Fig. 7 gezeichnete Lage. Eine Transformation 3) wird erhalten, indem man den Zylinder an der durch seinen Mittelpunkt gehenden, zur Achse senkrechten Ebene spiegelt, eine Transformation 4) dagegen durch Spiegelung an einer durch die Achse gehenden Ebene.

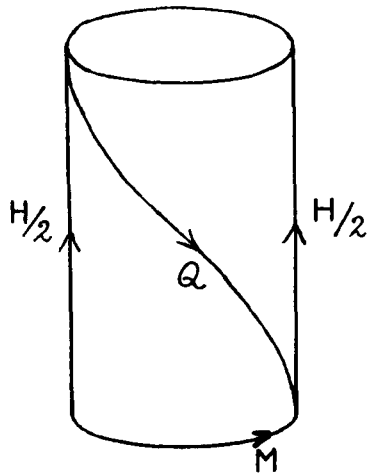


Fig. 7.

Es ist also nur noch zu zeigen, dass es zu einer beliebigen fasertreuen Selbstabbildung J_H von II , die jede Kurvenklasse von II in sich überführt, eine fasertreue Selbstabbildung J_V von V gibt, die II ebenso abbildet wie J_H . Wir beweisen zunächst, dass man J_H fasertreu in die Identität deformieren kann. Man kann diesen Beweis z. B. so führen, dass man zuerst die einzelne Faser so in sich starr verschiebt, dass der Bildkreis Q' von Q mit Q im Ganzen zur Deckung kommt. Eine solche Deformation ist möglich, weil nach Voraussetzung Q' homolog zu Q auf der Randfläche ist. Daran schließt sich eine fasertreue Deformation, die die einzelnen Fasern untereinander vertauscht und die Q' mit Q punktweise zur Deckung bringt. Die so deformierte Abbildung J_H erscheint in dem gefaserten Rechteck, das man aus der Ringfläche durch Aufschneiden längs einer Faser H und längs Q gewinnt, als eine fasertreue Abbildung C , bei der die beiden

¹³ $J_V \cdot B_V$ ist die Abbildung, die entsteht, wenn man erst B_V , dann J_V ausübt.

parallelen Seiten Q punktweise festbleiben und die inneren Punkte nur je auf ihrer Faser verschoben werden. Um diese Abbildung des Rechtecks fasertreu in die Identität überzuführen, gehen wir ähnlich vor wie Alexander beim Beweise des Tietzeschen Deformationssatzes. Wir ergänzen das Rechteck zu einem Halbstreifen durch das in der Fig. 8 schraffierte Gebiet und definieren eine Abbildung C' dieses Halbstreifens, die im Rechteck mit C übereinstimmt und im schraffierten Gebiet die Identität ist. $T(t)$ sei eine Streckung des Streifens nach oben, die den unteren Rand Q des Streifens festlässt: die Ordinate ξ eines Punktes des Streifens gehe dabei über in $t\xi$. Dann ist $T(t)^{-1}C'T(t) = C'(t)$ eine topologische Abbildung des Halbstreifens, die für $t \geq 1$ das Rechteck fasertreu in sich überführt. Für $t=1$ stimmt diese Abbildung im Rechteck mit C überein. Mit unendlich wachsendem t nähert sie sich stetig der Identität. Damit ist C , also J_H fasertreu in die Identität deformiert.

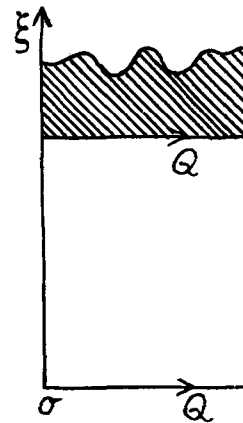


Fig. 8.

Diese Deformation denken wir uns auf einen Parameter τ bezogen, der von 1 bis $\frac{1}{2}$ abnimmt. Die zum Werte τ gehörige Abbildung heisse $J_H(\tau)$. Um dann J_H zu der gewünschten Abbildung J_V zu erweitern, schneiden wir V zum euklidischen Zylinder (vom Radius 1) auf und führen Zylinderkoordinaten z, φ, ρ ein. $\rho = \text{const.}$ liefert eine konzentrische Ringfläche vom Radius ρ . Die Ringflächen werden jetzt einzeln in sich fasertreu abgebildet. Die Randringfläche erleidet die Abbildung $J_H = J_H(1)$. Wenn die Abbildung $J_H(\tau)$ in den Koordinaten z, φ lautet

$$\left. \begin{aligned} z' &= z'(z, \varphi, \tau) \\ \varphi' &= \varphi'(z, \varphi, \tau) \end{aligned} \right\} \quad (J_H(\tau))$$

so wird die Abbildung J_V jetzt für $1 \geq \rho \geq \frac{1}{2}$ durch

$$\left. \begin{aligned} z' &= z'(z, \varphi, \rho) \\ \varphi' &= \varphi'(z, \varphi, \rho) \\ \rho' &= \rho \end{aligned} \right\} \quad (J_V)$$

gegeben, während sie für $\frac{1}{2} \geq \rho \geq 0$ die Identität ist. Mit der Konstruktion der Abbildung A_V ist der Beweis von Hilfssatz VI beendet.

Man hätte, statt A_V wie soeben geschehen zu konstruieren, diese Abbildung auch direkt in Zylinderkoordinaten angeben können. Bezeichnet nämlich

$$\left. \begin{aligned} \bar{z} &= \bar{z}(z, \varphi) [= z'(z, \varphi, \mathfrak{r})] \\ \bar{\varphi} &= \bar{\varphi}(z, \varphi) [= \varphi'(z, \varphi, \mathfrak{r})] \end{aligned} \right\} \quad (J_H)$$

die Abbildung J_H auf der Ringfläche Π in Zylinderkoordinaten, so ist die gesuchte Abbildung A_V im Gebiete $\mathfrak{r} \geq \varrho \geq \frac{\mathfrak{r}}{2}$ durch

$$\left. \begin{aligned} z' &= z \left(\varrho - \frac{\mathfrak{r}}{2} \right) z - z (\varrho - \mathfrak{r}) z, \\ \varphi' &= z \left(\varrho - \frac{\mathfrak{r}}{2} \right) \bar{\varphi} - z (\varrho - \mathfrak{r}) \varphi, \\ \varrho' &= \varrho \end{aligned} \right\} \quad (A_V)$$

gegeben, während sie für $\frac{\mathfrak{r}}{2} \geq \varrho \geq 0$ die Identität ist. Es ist aber nicht ganz einfach zu beweisen, dass die Abbildung A_V topologisch ist, und wir sind deshalb den obigen Weg gegangen.

§ 6. Klassen gefaserner Räume.

Ist w ein Weg der Zerlegungsfläche f , der von einem Punkte h_1 nach einem Punkte h_2 führt, so kann man in dem gefaserten Raume die Faser H_1 in die Faser H_2 so deformieren, dass sie immer Faser bleibt und ihr Spurpunkt auf der Zerlegungsfläche den Weg w durchläuft. Durch den Weg w ist nicht schon eine punktweise Abbildung der Anfangsfaser auf die Endfaser bestimmt, sondern unterwegs kann sich die Faser noch beliebig in sich verschieben. Wohl aber ist die Abbildung der Anfangsfaser auf die Endfaser bis auf eine Selbstabbildung von der ersten Art bestimmt. Ist also die Anfangsfaser orientiert, so überträgt sich die Orientierung längs des Weges w eindeutig auf die Endfaser. — Auf den genauen Sinn dieser Übertragung werden wir am Schluss des Paragraphen zurückkommen.

Ist w' ein zweiter Weg von h_1 nach h_2 , so kann die Fortsetzung ein und derselben Orientierung von h_1 längs w' zu einem andern Ergebnisse führen als diejenige längs w . Dagegen stimmen die Endorientierungen überein, wenn sich w in w' auf der Zerlegungsfläche deformieren lässt. Ist insbesondere w eine geschlossene Kurve der Zerlegungsfläche, so sind die beiden Fälle möglich, dass die Orientierung der Faser bei Durchlaufung von w erhalten bleibt oder sich umkehrt. Je nachdem der erste oder zweite Fall eintritt, erteilen wir der *Kurve*

w den Wert $+1$ oder -1 . Da sich der Wert einer geschlossenen Kurve bei Deformation nicht ändert, so kommt jeder Wegeklasse, d. h. jedem Element der Fundamentalgruppe ein bestimmter Wert zu. Bei einander folgender Durchlaufung zweier Wege a und b , d. h. bei Produktbildung $a \cdot b$ der den Wegen entsprechenden Elemente der Fundamentalgruppe, multiplizieren sich die zugehörigen Werte; bei Umkehrung der Durchlaufung, d. h. bei Reziprokenbildung bleibt der Wert erhalten. Hieraus folgt, dass der Wert einer Kurve sogar schon durch die Homologiekategorie bestimmt ist. Denn jede nullhomologe Kurve hat den Wert $+1$, weil das ihr entsprechende Element der Fundamentalgruppe der Kommutatorgruppe dieser Gruppe angehört, also Produkt von Kommutatoren ist, und jeder Kommutator $aba^{-1}b^{-1}$ den Wert $+1$ hat. Man kennt daher die Bewertung aller Kurven, wenn man sie für ein fundamentales Kurvensystem (Erzeugenden-System der Fundamentalgruppe), ja sogar schon, wenn man sie für eine Basis der Homologiegruppe kennt.

Zwei gefaserte Räume F und F' werden zur selben Klasse gerechnet, wenn ihre Zerlegungsflächen f und f' sich so aufeinander topologisch abbilden lassen, dass jede Kurve in eine gleich bewertete übergeht. Die Klasse eines gefaserten Raumes ist also durch seine »bewertete Zerlegungsfläche« gegeben. Zwei gefaserte Räume gehören sicher dann verschiedenen Klassen an, wenn ihre Zerlegungsflächen nicht homöomorph sind. Dagegen können zur selben Zerlegungsfläche verschiedene Klassen gehören. Die Klassen werden wir in § 7 und § 8 vollständig aufzählen. Z. B. gehören zur projektiven Ebene zwei Klassen, je nachdem die Faserorientierung längs der projektiven Geraden erhalten bleibt oder sich umkehrt. Zu einer einfach zusammenhängenden Fläche gehört dagegen nur eine Klasse, weil jede geschlossene Kurve auf ihr nullhomolog ist, also den Wert $+1$ hat.

Bohrt man eine Faser des Raumes aus und ersetzt man den Bohrkern durch einen neuen Verschlussring nach § 5, so ändert sich die Klasse des gefaserten Raumes nicht. Denn die Klasse ist bereits bestimmt, wenn man den Wert einer Kurve in jeder Homologiekategorie kennt. Die repräsentierenden Kurven der Homologieklassen kann man stets so wählen, dass sich die Ausbohrung und neue Schliessung nicht in ihrer Nähe abspielt, der Abänderungsprozess des Raumes also die Kurvenbewertung so wenig wie die Zerlegungsfläche ändert.

Bohrt man in einem gefaserten Raume F alle Ausnahmefasern aus und ersetzt die Ausbohrungen durch gewöhnliche Vollringe, so erhält man dadurch aus dem Raume F (aber nicht auf eindeutige Weise) einen anderen F_0 , der

keine Ausnahmefaser enthält und zur selben Klasse wie F gehört. Umgekehrt kann man F aus F_0 zurückgewinnen. Man wird daher zunächst alle Räume ohne Ausnahmefasern in einer Klasse bestimmen. Zu diesem Zwecke wird die Zerlegungsfläche f eines Raumes F_0 zum Fundamentalpolygon v aufgeschnitten, was voraussetzt, dass f eine geschlossene Fläche, also F ein geschlossener Raum ist, eine Beschränkung, die wir von hier an eintreten lassen. Das Fundamentalpolygon wird durch Abstumpfen der Ecken in ein Polygon \bar{v} übergeführt, was darauf hinauskommt, die Fläche f durch Ausschneiden eines den Eckpunkt h von v enthaltenden Elementarflächenstückes zu einer gelochten Fläche \bar{f} zu machen. In Figur 9 ist das gelochte Fundamentalpolygon der orientierbaren Fläche vom Geschlechte $p=2$ gezeichnet. \bar{f} kann man als Zerlegungsfläche eines Raumes \bar{F}_0 auffassen, der aus F_0 durch Ausbohrung einer

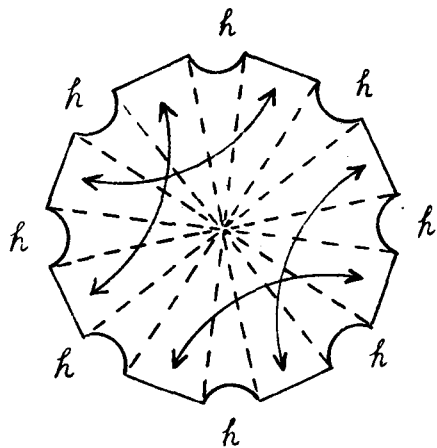


Fig. 9.

Faser H entsteht. \bar{F}_0 ist durch F_0 eindeutig bestimmt, da dieser Raum nach Hilfssatz V (§ 5) nicht von der Auswahl der ausgebohrten gewöhnlichen Faser abhängt. \bar{f} wird jetzt mit Benutzung der Kanten des Polygons \bar{v} trianguliert (gestrichelte Linien der Figur 9). Die Fasern von \bar{F}_0 , die sich in die Punkte eines Dreiecks der Triangulation abbilden, machen nach Hilfssatz III (§ 4) einen gewöhnlichen gefaserten Vollring aus. Nach dem Verfahren, das zum Beweise von Hilfssatz III benutzt wurde, kann man das Polygon \bar{v} schrittweise aus Dreiecken aufbauen derart, dass bei jedem

Schritte ein Elementarflächenstück entsteht. Diesem Aufbau entspricht ein Aufbau von \bar{F}_0 aus gewöhnlichen gefaserten Vollringen, der zu einem gewöhnlichen gefaserten Vollringe \bar{V} führt. Den Kanten von \bar{v} entsprechen in \bar{V} gefaserte Kreisringe. Wenn zwei Kanten a' und a'' in \bar{v} zu einer Strecke a von \bar{f} identifiziert sind, so sind die entsprechenden Kreisringe A' und A'' in \bar{V} fasertreu zu einem gefaserten Kreisringe A von \bar{F}_0 zu identifizieren. Identifiziert man so alle paarweise zugeordneten berandenden Kreisringe von \bar{V} , so schliesst sich \bar{V} zu \bar{F}_0 . Weiss man, wie zwei Kanten a' und a'' von \bar{v} einander zugeordnet sind (ob nach der ersten oder zweiten Art) und ob sich längs einer geschlossenen Kurve von \bar{f} , die von den Kanten des Fundamentalpolygons nur die Kante a einmal durchsetzt, also eine Kante des zu v reziproken Fundamentalpolygons ist,

die Faserorientierung umkehrt oder nicht, so ist die Zuordnung der Kreisringe A' und A'' bis auf eine fasertreue Selbstabbildung erster Art des einen Kreisringes, etwa A' , festgelegt. Diese Selbstabbildung von A' kann aber durch eine fasertreue Selbstabbildung des Vollringes \bar{V} , welche alle übrigen paarweise zugeordneten Kreisringflächen ungeändert lässt, bewirkt werden. Die Selbstabbildung von A' hat also auf das Ergebnis der Schliessung von \bar{V} keinen Einfluss. Alle so entstehenden gefaserten berandeten Räume sind fasertreu auf \bar{F}_0 abbildbar.

Damit ist gezeigt, dass alle geschlossenen gefaserten Räume F_0 ohne Ausnahmefasern, die derselben Klasse angehören, durch Ausbohrung einer beliebigen Faser in ein und denselben gefaserten berandeten Raum \bar{F}_0 übergehen. Würde man aus diesen Räumen F_0 statt einer Faser $r+1$ ausbohren, so würde man ebenfalls immer ein und denselben von $r+1$ Ringflächen berandeten Raum erhalten, nämlich den längs r Fasern ausgebohrten Raum \bar{F}_0 . Welche der Fasern von \bar{F}_0 man ausbohrt, ist gleichgültig, wie aus dem Beweise von Hilfssatz V (§ 5) hervorgeht.

Wir fassen das Ergebnis zusammen:

Satz 3: *Jede Klasse geschlossener gefaserner Räume bestimmt unkehrbar eindeutig einen gefaserten berandeten Raum \bar{F}_0 , den Klassenraum. Der Klassenraum ist der einzige gefaserte berandete Raum ohne Ausnahmefasern, der zur Zerlegungsfläche die einmal gelochte, der Klasse charakteristische bewertete Zerlegungsfläche hat. Aus \bar{F}_0 erhält man alle Räume der Klasse durch Ausbohren einer endlichen Anzahl r von Fasern und Schliessen aller $r+1$ Randringflächen mit beliebigen Verschlussringen. Die Aufzählung aller Klassen geschieht in Satz 7 § 8.*

Bisher sind wir von einem gegebenen gefaserten Raume F ausgegangen und haben seine Klasse, d. h. seine bewertete Zerlegungsfläche definiert. Jetzt wollen wir umgekehrt von einer beliebigen bewerteten geschlossenen Fläche zeigen, dass sie als bewertete Zerlegungsfläche einer Klasse auftritt. — Die gegebene Fläche f wird wie oben zum Fundamentalpolygon v aufgeschnitten und dann gelocht, wodurch die Ecken des Polygons v abgestumpft werden und v in \bar{v} übergeht. Der gewöhnliche gefaserte Vollring \bar{V} , der \bar{v} zum Meridianschnitt hat, kann zu einem gefaserten berandeten Raum \bar{F}_0 gemacht werden, indem man je zwei Kreisringflächen A' und A'' auf dem Rand von \bar{V} , die sich in zugeordnete Kanten a' und a'' von \bar{v} abbilden, fasertreu identifiziert und zwar so, dass immer zwei Fasern von A' und A'' zusammenfallen, wenn die entsprechenden

Punkte von a' und a'' zugeordnet sind. Die Abbildung von A' und A'' ist dann noch auf zwei wesentlich verschiedene Arten möglich. Denkt man sich nämlich die Fasern von \bar{V} gleichmässig orientiert, d. h. so, dass je zwei orientierte Fasern von \bar{V} homolog sind, so kann man A' auf A'' einmal mit Erhaltung, das andere Mal mit Umkehrung der Faserorientierung abbilden. Im ersten Falle bleibt die Orientierung der Faser längs einer Kurve, die von einem Punkte von A' durch das Innere von \bar{V} nach dem äquivalenten Punkte von A'' führt, erhalten, im andern Falle kehrt sie sich um. Identifiziert man so je zwei Seitenflächen von \bar{V} , die sich in zwei zugeordnete Kanten von \bar{v} abbilden, auf eine der beiden möglichen Weisen, so erhält man einen berandeten Raum, dessen Randfläche Π_0 aus Fasern gebildet wird. Diese Randfasern bilden sich in den Lochrand von \bar{v} ab. Π_0 kann also nur eine orientierbare oder nichtorientierbare Ringfläche sein. Um nachzuweisen, dass Π_0 eine orientierbare Ringfläche ist, bemerken wir, dass man beim Umlaufen des Loches von \bar{v} jede Kante des Polygons v genau zweimal überschreitet. Beidemale bleibt die Faserrichtung erhalten, oder sie wird beidemale umgekehrt, sodass beim einmaligen Umlaufen des Loches die Faserichtung erhalten bleibt; das ist aber nur bei der orientierbaren Ringfläche der Fall. Der durch Schliessung von \bar{V} entstehende Raum ist also ein gefasertes berandeter Raum ohne Ausnahmefasern. Seine Zerlegungsfläche ist die gelochte Fläche f , deren Bewertung durch willkürliche Bewertung der Kanten eines Fundamentalpolygons (nämlich des zu v reziproken Fundamentalpolygons) erhalten wurde.

Das Ergebnis ist

Satz 4: *Zu jeder beliebig bewerteten geschlossenen Fläche gehört eine Klasse gefasertes Räume. Eine Bewertung der Fläche erhält man durch willkürliche Bewertung eines kanonischen Systems fundamentaler Kurven, also der Kanten eines Poincaréschen Fundamentalpolygons der Fläche.*

Die letzte Bemerkung haben wir damit bewiesen, dass wir zu willkürlicher Bewertung der fundamentalen Kurven einen Raum \bar{F}_0 angeben, dessen Zerlegungsfläche die gelochte gegebene Fläche ist; die durch \bar{F}_0 gegebene Bewertung der Zerlegungsfläche stimmt in den fundamentalen Kurven mit der willkürlich vorgegebenen überein. Man hätte ebenso leicht unmittelbar zeigen können, dass willkürliche Bewertung der fundamentalen Kurven, d. h. der Erzeugenden der Fundamentalgruppe zu einer widerspruchlosen Bewertung der ganzen Fundamentalgruppe führt, da in der einzigen Relation der Fundamentalgruppe jede Erzeugende genau zweimal auf-

tritt, durch willkürliche Bewertung der Erzeugenden also die einzige Relation und damit jede Relation zwischen Elementen der Fundamentalgruppe widerspruchlos bewertet ist.

Mit Satz 3 und 4 sind die Mittel zur Bestimmung des vollen Invariantensystems gefaserner Räume gegen fasertreue Abbildung gewonnen. Es bleibt noch übrig, die zur Definition der Klasse benutzte Fortsetzbarkeit der Faserorientierung längs eines Weges der Zerlegungsfläche einwandfrei darzutun. Zu Anfang des Paragraphen haben wir diese Fortsetzbarkeit nur auf die anschaulich naheliegende Faserdeformation längs w gestützt. Ist w ein Weg der Zerlegungsfläche, der von einem Punkt h_1 nach einem Punkt h_2 führt und s ein stetiger von 0 bis 1 wachsender Parameter auf w , so gehört zu jedem Parameterwerte s ein Punkt $h(s)$ von f und damit eine Faser $H(s)$. Jede Faser $H(s)$ soll beliebig orientiert sein. Sollte zu verschiedenen Werten s dieselbe Faser H gehören, was dann eintritt, wenn w mehrfache Punkte hat, so erhält H ebensoviele von einander unabhängige Orientierungen. Eine Faserumgebung von $H(s)$ oder vielmehr die entsprechende Zerlegungsumgebung auf f schneidet aus w eine Umgebung des Punktes $h(s)$ heraus. Wenn für jeden Wert von s alle Fasern des den Punkt $h(s)$ umgebenden Wegstückes in der Faserumgebung von $H(s)$ homolog sind, wobei eine μ -fache Ausnahmefaser μ -fach zu zählen ist, so heissen *die Fasern längs w gleichmässig orientiert*. Dass es eine gleichmässige Orientierung der Fasern längs w gibt, ist klar, sobald sich w ganz von einer Zerlegungsumgebung ω überdecken lässt; denn dann braucht man nur alle Fasern, die sich in die Punkte von w abbilden, so zu orientieren, dass sie in Ω homolog werden.¹⁴ Im andern Falle kann man w in endlich viele Stücke zerlegen, sodass jedes Teilstück ganz im Innern einer Zerlegungsumgebung liegt. Die Fasern der einzelnen Stücke lassen sich gleichmässig so orientieren, dass jede Faser, in der zwei Stücke aneinanderstossen, von beiden Stücken die gleiche Orientierung bezieht. Dann sind auch die Fasern längs ganz w gleichmässig orientiert. Die Fasern lassen sich längs w offenbar nur auf zwei entgegengesetzte Weisen gleichmässig orientieren; die Orientierung längs w ist durch die Orientierung einer einzigen Faser, z. B. der Anfangsfaser festgelegt. Durch eine gleichmässige

¹⁴ Wir sagen dafür auch, dass die Fasern von Ω gleichmässig orientiert sind. Allgemeiner sprechen wir von einer gleichmässigen Orientierung aller Fasern eines gefaserten Raumes dann, wenn innerhalb jeder Faserumgebung je zwei Fasern homolog sind, wobei wieder eine μ -fache Ausnahmefaser μ -fach zu zählen ist. Nicht in jedem gefaserten Raum ist eine gleichmässige Faserorientierung möglich (sondern nur in den Räumen der Klassen Oo und Nn I von S. 188).

Orientierung der Fasern von w wird die Orientierung der Anfangsfaser längs w bis in die Endfaser fortgesetzt.

Sind w und w' zwei ineinander deformierbare Kurven der Zerlegungsfläche, die beide von h_1 nach h_2 führen, und ist die Faser H_1 orientiert, so liefert die Fortsetzung der Orientierung längs beider Kurven nach H_2 das gleiche Ergebnis, d. h. die Faserorientierung bleibt bei Fortsetzung längs des geschlossenen Weges ww'^{-1} erhalten. ww'^{-1} begrenzt nämlich ein unter Umständen singuläres Elementarflächenstück auf f , das ist das eindeutige und stetige, aber unter Umständen nicht umkehrbar eindeutige, also nicht topologische Bild eines Elementarflächenstückes e . e wird so fein trianguliert, dass das Bild eines jeden Dreiecks ganz in einer Zerlegungsumgebung von f enthalten ist. Das Dreieck braucht dabei nicht schlicht auf f zu liegen. Da sich der Weg ww'^{-1} aus Umläufen von Dreiecken zusammensetzen lässt, wenn hin und zurück durchlaufene Strecken fortgehoben werden, und da die Faserorientierung längs eines geschlossenen, ganz in einer Zerlegungsumgebung gelegenen Weges immer erhalten bleibt, so bleibt sie auch längs ww'^{-1} erhalten.

Es soll noch die Frage beantwortet werden, ob und auf wieviele Weisen sich die Zerlegungsfläche \bar{f}_0 in den Klassenraum \bar{F}_0 so hineinlegen lässt, dass sie von jeder Faser genau in ihrem Bildpunkt durchsetzt wird. Zu dem Zwecke schneiden wir \bar{f}_0 zu einem Fundamentalpolygon \bar{u} auf, das im Gegensatz zu dem oben benutzten Fundamentalpolygon \bar{v} das Loch von \bar{f}_0 im Innern enthält. \bar{u} ist also ein gelochtes Elementarflächenstück. Dem entspricht eine Aufschneidung von \bar{F}_0 zu einem gefaserten Hohlring \bar{U} . Die »innere« Randfläche Π_0 dieses Hohlringes bildet sich in den Rand des Loches von \bar{u} ab, während die »äussere« Randfläche Σ in eine gerade Anzahl $2j$ von paarweise einander zugeordneten gefaserten Seitenflächen (Kreisringen) zerfällt, die sich in die Seiten des Polygons \bar{u} abbilden. Angenommen, es sei gelungen, \bar{f}_0 in \bar{F}_0 hineinzulegen, dann erscheint \bar{f}_0 in \bar{U} notwendig als ein kreisringförmiges Flächenstück, das auf Σ mit einem Querkreise Q , auf Π_0 mit einem Querkreise Q_0 aufsitzt. Sind $Q'_1, Q'_2, \dots, Q'_j, Q''_1, Q''_2, \dots, Q''_j$ die $2j$ orientierten Strecken, in die Q zerfällt und die sich auf die $2j$ Seitenflächen von Σ verteilen, so müssen bei Zuordnung zweier solcher Seitenflächen A'_i und A''_i auch die beiden darin liegenden Strecken Q'_i und Q''_i miteinander zur Deckung kommen mit Erhaltung oder Umkehrung ihrer Orientierung. Einen Querkreis Q mit dieser Eigenschaft kann man auf Σ immer finden man wählt zu diesem Zwecke die Querlinien Q'_1, Q'_2, \dots, Q'_j belie-

big, nur so, dass ihre Endpunkte bei Zuordnung der Seitenflächen in ein und denselben Punkt fallen. Damit lässt sich auch die Zerlegungsfläche \bar{f}_0 in \bar{F}_0 hineinlegen. Man braucht z. B. nur \bar{U} zum euklidischen Hohlzylinder aufzuschneiden und von den Punkten von Q aus Radien zu ziehen, die senkrecht auf der Zylinderachse stehen. Diese Radien, soweit sie in \bar{U} verlaufen, bilden die verlangte Zerlegungsfläche.

Sei \bar{f}_0 noch auf eine weitere Art in \bar{F}_0 hineingelegt, wobei jetzt die Querkreise Q^* und Q_0^* die Rolle von Q und Q_0 übernehmen mögen. Die Strecken Q'_i und Q''_i des Querkreises Q bez. Q^* , die in derselben Seitenfläche A'_i von Σ liegen, haben dann, nachdem man Σ irgendwie orientiert hat, eine bestimmte Schnittpunktzahl¹⁵ γ'_i (sollten zufällig Q'_i und Q''_i gemeinsame Endpunkte haben, so kann man sie immer durch eine kleine Deformation der eingelagerten Zerlegungsflächen von einander trennen). Da nun bei der Identifizierung der zugeordneten Seitenflächen A'_i und A''_i die Strecken Q'_i und Q''_i mit den Strecken Q''_i und Q''_i , bez. mit $-Q''_i$ und $-Q''_i$ zur Deckung kommen, so ist die Schnittpunktzahl $\gamma''_i = -\gamma'_i$ oder $= +\gamma'_i$, je nachdem A'_i und A''_i nach der ersten oder zweiten Art¹⁶ zugeordnet sind. $\gamma = \sum_{i=1}^j \gamma'_i + \gamma''_i$, das ist die Schnittpunktzahl von

Q und Q^* , ist dann 0, falls alle Seitenflächen von Σ nach der ersten Art zugeordnet sind, d. h. wenn \bar{F}_0 orientierbar ist. Sonst kann man Q^* immer so wählen, dass γ eine vorgegebene gerade Zahl ist. Bei orientierbarem \bar{F}_0 ist also Q in Q^* und damit Q_0 in Q_0^* deformierbar, d. h. es gibt dann auf der Randringfläche Π_0 von \bar{F}_0 einen bis auf die Orientierung und natürlich bis auf eine Deformation festliegenden Querkreis Q_0 , in dem die in \bar{F}_0 hineingelegte Zerlegungsfläche \bar{f}_0 an Π_0 angrenzt. Ist dagegen \bar{F}_0 nichtorientierbar, so gibt es ausser Q_0 noch unendlich viele Querkreise Q_0^* , längs denen \bar{f}_0 an Π_0 angrenzen kann. Sie unterscheiden sich alle von Q_0 durch ein gerades Vielfaches der Faser. — Schneidet man den gefaserten Hohlring \bar{U} längs der darin liegenden Zerlegungsfläche \bar{f}_0 auf, so erhält man ein ausgebohrtes gefasertes Prisma, in dem Grund- und Dachfläche einander und die Seitenflächen paarweise zugeordnet sind. Von dieser Darstellung des Klassenraumes werden wir bei der Bestimmung der Fundamentalgruppen in § 10 Gebrauch machen.

¹⁵ O. Veblen, Anal. situs, 2nd ed., Amer. Math. Soc. Coll. Publ. V, 2 (New York 1931).

¹⁶ H. Tietze, Topologische Invarianten, Monatsh. f. Math. u. Phys. 19 (1907).

§ 7. Die orientierbaren gefaserten Räume.

Unsere Aufgabe, alle gefaserten Räume zu ermitteln und durch Invarianten zu charakterisieren, zerfällt nunmehr in zwei Teile: erstens alle Klassen zu bestimmen, zweitens die Räume innerhalb einer Klasse anzugeben. Wir lösen diese beiden Aufgaben zuerst für die orientierbaren Räume.

Sei zunächst die Zerlegungsfläche orientierbar vom Geschlechte p . Da der Raum orientierbar ist, kann sich alsdann längs keiner Kurve der Fläche die Faserorientierung umkehren. Wäre nämlich ein geschlossener Weg w vom Werte -1 auf der Zerlegungsfläche vorhanden, den wir frei von Ausnahmepunkten annehmen dürfen, so gäbe es eine faserentreue Deformation des ganzen Raumes, die die Faser H längs des Weges w herumführt. Denn die Kurve w lässt sich mit endlich vielen Zerlegungsumgebungen, sogar mit solchen ohne Ausnahmepunkten überdecken, nach dem Heine-Borelschen Überdeckungssatz. Innerhalb jeder Zerlegungsumgebung kann man die faserentreue Deformation, die im Beweise von Hilfssatz V benutzt wurde, anwenden und so die Faser H schrittweise längs w in ihre Ausgangslage zurückführen. Insbesondere kann man die Deformation so leiten, dass schliesslich eine Zerlegungsumgebung ω des Punktes h mit sich zur Deckung kommt, da sich längs w wegen der Orientierbarkeit der Zerlegungsfläche die Flächenorientierung nicht umkehrt. Der zugehörige gefaserte Vollring Ω hat dann eine Selbstabbildung mit Umkehrung der Orientierung erfahren. Bei einer Deformation kehrt sich aber in einem orientierbaren Raume die Raumorientierung nicht um nach einem bekannten Satze. Somit haben alle Kurven den Wert $+1$, und es gibt daher zu jeder orientierbaren Zerlegungsfläche eine einzige Klasse von orientierbaren gefaserten Räumen. Nun ist das nach S. 154 gefaserte topologische Produkt aus der gelochten Fläche vom Geschlechte p und einer Kreislinie ein orientierbarer gefasertes berandeter Raum, dessen Zerlegungsfläche die gelochte Fläche vom Geschlechte p ist und auf der alle Kurven den Wert $+1$ haben. Da überdies Ausnahmefasern nicht auftreten, so vereinigt dies topologische Produkt alle Eigenschaften des Klassenraumes in sich. Der Klassenraum \overline{F}_0 ist also das topologische Produkt aus gelochter Fläche vom Geschlechte p und Kreislinie.

Auch wenn die Zerlegungsfläche nichtorientierbar ist, gibt es zu ihr nur eine Klasse orientierbarer Räume. Wie im Falle der Orientierbarkeit der Zerlegungsfläche, sieht man zunächst, dass längs eines Weges w der Zerlegungs-

fläche, auf dem sich die Flächenorientierung erhält, sich auch die Faserorientierung erhalten muss. Kehrt sich aber die Flächenorientierung längs eines Weges w um, so ist der Raum nur dann orientierbar, wenn sich auch die Faserorientierung umkehrt, sodass also die Bewertung durch die Fläche festgelegt ist. Der Klassenraum ist hier nicht das topologische Produkt der gelochten Fläche vom Geschlecht k und einem Kreis, sondern ist nach dem Verfahren von S. 173 zu konstruieren. Fig. 10 zeigt ihn für den Fall $k=3$. In dem Prisma sind Grund- und Dachfläche durch eine Translation zuzuordnen. Die beiden Seitenflächen, in die eine Faser H eingezeichnet ist, sind so zu identifizieren, dass die Kante a_1 der einen mit der Kante \bar{a}_1 der anderen zur Deckung kommt. Entsprechendes gilt für die 4 übrigen nicht schraffierten Seitenflächen des Prismas. Die 6 schraffierten Seitenflächen werden durch die Zuordnung zur Randringfläche des Klassenraumes, die Grundfläche wird zur Zerlegungsfläche geschlossen.

Die Klassenbestimmung ist damit erledigt, und wir gehen jetzt dazu über, die Invarianten eines beliebigen orientierbaren gefaserten Raumes F zu bestimmen. Dem Raume F wird eine bestimmte Orientierung erteilt, und die Invarianten beziehen sich auf den mit der Orientierung versehenen Raum. Die Herstellung der Invarianten geschieht so, dass die Ausnahmefasern von F ausgebohrt und durch gewöhnliche Vollringe ersetzt werden, deren Meridiankreise eindeutig bis auf die Orientierung durch den orientierten Raum F bestimmt sind. So entsteht auf eindeutige Weise aus dem orientierten Raum F ein ebenfalls mit einer bestimmten Orientierung versehener Raum F_0 ohne Ausnahmefasern. — Sei C_1 eine Ausnahmefaser von F und Ω_1 eine Faserumgebung von C_1 . Der Vollring Ω_1 bezieht von F eine bestimmte Raumorientierung, die ihrerseits auf der Randringfläche Π_1 von Ω_1 eine bestimmte Flächenorientierung o induziert. Auf Π_1 wird ein orientierter Querkreis Q und eine orientierte Faser H gewählt. Durch diese beiden Kurven ist eine Orientierung o' auf Π_1 bestimmt. Man schneide nämlich Π_1 längs Q und H zum Rechteck auf; auf dessen Rand wird durch die Reihenfolge $QH Q^{-1} H^{-1}$ ein bestimmter Umlaufsinn und damit eine Orientierung des Rechteckes selbst festgelegt. Kehrt man die Orientierung

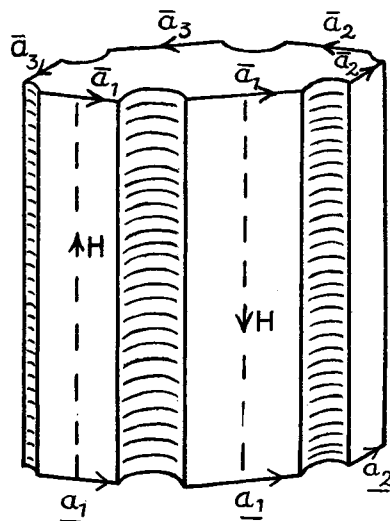


Fig. 10.

einer der beiden Kurven Q und H um, so ist dadurch zugleich die Orientierung o' umgekehrt. Dagegen bleibt o' erhalten, wenn man beide Kurven zugleich umorientiert. Wir wollen nun Q und H von vornherein so orientieren, dass o' mit o übereinstimmt. Man kann dafür auch sagen: Bei Benutzung der Orientierung o sollen Q und H die Schnittzahl $+1$ haben. Ein zweites Kurvenpaar Q_1 und H_1 , das auf Π_1 die gleiche Orientierung $o'=o$ festlegt, hängt mit Q und H durch die Homologien (auf Π_1) zusammen:

$$H \sim \varepsilon H_1, \quad Q \sim \varepsilon Q_1 + y H_1 \quad (\varepsilon = \pm 1, y \text{ beliebige ganze Zahl}). \quad (1)$$

Denn damit Q_1, H_1 dieselbe Orientierung wie Q, H bewirkt, muss die Transformationsdeterminante den Wert $+1$ haben. Daraus folgt aber, dass in den Transformationsformeln (1) und (4) von § 1 $\varepsilon_1 = \varepsilon_4 (= \varepsilon)$ ist. Der Meridiankreis M_1 des Vollringes Ω_1 drückt sich nun folgendermassen durch Q und H aus:

$$\begin{aligned} M_1 &\sim \alpha Q + \beta H \\ &\sim \varepsilon \alpha Q_1 + (\alpha y + \varepsilon \beta) H_1 = \\ &= \alpha_1 Q_1 + \beta_1 H_1. \end{aligned} \quad (2)$$

Man kann Q_1 und H_1 so wählen, dass

$$\alpha_1 > 1 \quad \text{und} \quad 0 < \beta_1 < \alpha_1 \quad (3)$$

wird, wodurch ε und y bestimmt sind. Hätte man statt M_1 den entgegengesetzt orientierten Meridiankreis gewählt, so brauchte man nur gleichzeitig die Orientierungen von Q_1 und H_1 umzukehren, um zur Homologie $M_1 \sim \alpha_1 Q_1 + \beta_1 H_1$ zurückzugelangen. Mithin sind durch den nichtorientierten Meridiankreis von Ω_1 die Zahlen α_1, β_1 vollständig eindeutig, und es ist der Querkreis Q_1 bis auf seine Orientierung bestimmt. Man bohre nun Ω_1 aus und schliesse mit einem neuen Verschlussringe V_1 , der Q_1 zum Meridiankreis hat. V_1 ist dann ein gewöhnlicher Vollring, da nur auf einem solchen der Meridiankreis zugleich Querkreis ist. Man hat also auf F einen orientierten gefaserten Raum F_1 abgeleitet, der eindeutig durch F , die Orientierung von F und die ausgebohrte Ausnahmefaser bestimmt ist. F_1 ist nämlich unabhängig davon, welche Faserumgebung Ω_1 der Faser C_1 man ausgebohrt hat. Denn nach Hilfssatz IV (§ 5) kann man eine beliebige Faserumgebung der Faser C_1 durch eine fasertreue Deformation von F in eine beliebige andere überführen.

Mit dem gefaserten Raum F_1 verfährt man wie soeben mit F . Man bohrt also eine Ausnahmefaser C_2 aus, wobei man das Zahlenpaar α_2, β_2 als weitere

Invarianten des orientierten Raumes F gewinnt. So fortfahrend erhält man schliesslich einen orientierten Raum F_0 ohne Ausnahmefasern, der durch den Raum F und seine Orientierung bestimmt ist. F_0 ist unabhängig von der Reihenfolge, in der man die Ausnahmefasern von F ausgebohrt hat, denn man darf alle zugleich ausbohren, da man die Faserumgebungen beliebig klein wählen kann.

Aus F_0 wird nun eine beliebige Faserumgebung V_0 ausgebohrt, wodurch der Klassenraum \bar{F}_0 von F entsteht. Die gegebene Orientierung von F überträgt sich auf ihn. Auf der Randringfläche Π_0 von \bar{F}_0 ist wegen der Orientierbarkeit von \bar{F}_0 ein Querkreis Q_0 bis auf Orientierung und stetige Deformation ausgezeichnet, nämlich derjenige Querkreis, in dem die in \bar{F}_0 hineingelegte Zerlegungsfläche \bar{f}_0 an Π_0 angrenzt (vergl. S. 177). Q_0 und eine Faser H_0 von Π_0 werde so orientiert, dass sie zusammen auf Π_0 die gleiche Orientierung bestimmen, die Π_0 von dem ausgebohrten Vollringe V_0 bezieht. Der Meridiankreis M_0 von V_0 , der zugleich Querkreis ist, hat in dem System Q_0, H_0 die Form

$$M_0 \sim Q_0 + b H_0. \tag{4}$$

b ist eine ganze Zahl, die durch den orientierten Raum F_0 , also auch durch F und die Orientierung von F bestimmt ist.

Mit b ist, wie wir zeigen werden, das System der Invarianten von F vollständig geworden. Es gilt nämlich der

Satz 5: *Ein orientierbarer gefaserner Raum F samt einer gegebenen Orientierung ist umkehrbar eindeutig durch ein System von Invarianten bestimmt, die wir, je nachdem die Zerlegungsfläche orientierbar ist oder nicht, in das Symbol*

$$(O \ o; \ p \mid b; \ \alpha_1, \beta_1; \ \alpha_2, \beta_2; \ \dots \ \alpha_r, \beta_r)$$

oder

$$(O \ n; \ k \mid b; \ \alpha_1, \beta_1; \ \alpha_2, \beta_2; \ \dots \ \alpha_r, \beta_r)$$

zusammenfassen. Darin weist O auf die Orientierbarkeit des Raumes, o bez. n auf die Orientierbarkeit bez. Nichtorientierbarkeit der Zerlegungsfläche hin. p und k bedeuten das Geschlecht (Henkelzahl bez. Kreuzhaubenzahl) der orientierbaren bez. nichtorientierbaren Zerlegungsfläche. Die drei Zeichen links vom Strich bestimmen also die Klasse des gefaserten Raumes. b legt die Schliessung des Klassenraumes \bar{F}_0 zu dem von Ausnahmefasern noch freien Raume F_0 umkehrbar eindeutig fest. Die Zahlen α_i, β_i bestimmen umkehrbar eindeutig die in F vorhandenen Ausnahmefasern.

Der Satz gestattet, von zwei orientierbaren gefaserten Räumen mit vorgegebenen Orientierungen zu entscheiden, ob sie mit Erhaltung der Orientierung aufeinander fasertreu abbildbar sind. Von der Änderung der Invarianten bei Umorientierung handelt Satz 6.

Wie man zu gegebenem orientierten Raum F das Invariantensystem ermittelt, haben wir gesehen. Um die Vollständigkeit des Systems zu beweisen, konstruieren wir umgekehrt zu gegebenen Invarianten auf eindeutige Weise den orientierten Raum F . Durch p bez. k ist die Klasse (S. 178) und damit nach Satz 3 (S. 173) zugleich der Klassenraum \bar{F}_0 gegeben. Die Orientierung von \bar{F}_0 kann beliebig vorgenommen werden, da \bar{F}_0 eine fasertreue Selbstabbildung mit Umkehrung der Orientierung gestattet (Spiegelung des Vollringes \bar{V} von S. 173 an einer Meridianebene). Der Querkreis Q_0 der Randringfläche Π_0 von \bar{F}_0 und eine Faser H_0 sind dadurch bis auf gleichzeitige Umkehrung ihrer Orientierung eindeutig bestimmt. Durch b ist $M_0 \sim Q_0 + bH_0$ ebenfalls bis auf seine Orientierung und damit die Schliessung von \bar{F}_0 zu F_0 vollständig eindeutig bestimmt. Aus F_0 sind r beliebige Fasern auszubohren; ihre Auswahl ist nach Hilfssatz V (S. 165) für den entstehenden, von r Ringflächen berandeten Raum gleichgültig. Auf jeder der Randringflächen liegt ein ausgezeichnete Querkreis Q_i , nämlich der Meridiankreis des eben ausgebohrten Vollringes bis auf seine Orientierung fest, und durch die Orientierung von F_0 ist damit ein Kurvenpaar Q_i, H_i bis auf gemeinsame Umorientierung bestimmt. Damit ist aber der Meridiankreis $M_i \sim \alpha_i Q_i + \beta_i H_i$ des neuen Verschlussringes ebenfalls bis auf die Orientierung eindeutig und die Schliessung von F_0 zu F vollständig eindeutig gegeben.

Zur übersichtlichen Bestimmung eines orientierbaren gefaserten Raumes F ist folgendes »Diagramm« \bar{V}_0 nützlich, das mit dem Klassenraum \bar{F}_0 zusammen den Raum festlegt. In F seien die Faserumgebungen Ω_i der Ausnahmefasern punktfremd gewählt. Dasselbe gilt dann in F_0 von den gewöhnlichen Verschlussringen V_i , durch die die Bohrkerne Ω_i ersetzt sind. Man kann die Faserumgebung V_0 , die wir aus F_0 ausgebohrt hatten, um zum Klassenraum \bar{F}_0 zu gelangen nach Hilfssatz III (S. 162) so wählen, dass sie alle Verschlussringe V_i im Innern enthält. Der gefaserte berandete Raum \bar{V}_0 , der aus V_0 durch Ausbohrung aller V_i entsteht und der das topologische Produkt aus einem r -fach gelochten Elementarflächenstück und der Kreislinie ist, bildet das *Diagramm* des gefaserten Raumes F , wenn auf der Randringfläche Π_0 von \bar{V}_0 noch der ausgezeichnete Querkreis Q_0 von \bar{F}_0 und auf den übrigen r Randringflächen Π_i die Meridiankreise M_i der Bohrkerne Ω_i eingezeichnet sind. Durch Q_0 ist

offenbar festgelegt, wie man den durch p bez. k bestimmten Klassenraum \bar{F}_0 an die Ringfläche Π_0 ansetzen muss. Durch M_i ist nach Hilfssatz VI die Schliessung durch den Bohrkern Ω_i bestimmt. Gibt man \bar{V}_0 überdies eine Orientierung, was wir tun wollen, so ist auch F orientiert.

Um aus dem Diagramm \bar{V}_0 die Invarianten $b; \alpha_1, \beta_1; \alpha_2, \beta_2; \dots \alpha_r, \beta_r$ von F abzuleiten, orientieren wir alle Fasern von \bar{V}_0 gleichmässig, d. h., so dass sie homolog in \bar{V}_0 werden. Dann sind die Orientierungen der Fasern $H_0, H_1, \dots H_r$ auf den Randringflächen $\Pi_0, \Pi_1, \dots \Pi_r$ festgelegt. Damit sind auch die oben mit $Q_1, Q_2, \dots Q_r$ bezeichneten Querkreise auf diesen Ringflächen einschliesslich ihrer Orientierung bestimmt, nämlich durch die Forderung, dass die Orientierung, die Q_i mit H_i auf der Ringfläche Π_i bewirkt, der von \bar{V}_0 induzierten Orientierung entgegengesetzt sein soll und dass die Zahlen α_i, β_i , die in der Homologie

$$M_i \sim \alpha_i Q_i + \beta_i H_i \tag{5}$$

(giltig auf Π_i) auftreten, der Bedingung $\alpha_i > 1$, $0 < \beta_i < \alpha_i$ genügen. Die Q_i sind die Meridiankreise der Verschliessringe V_i . Schliesst man V mit ihnen, so ergibt sich der gewöhnliche Vollring V_0 mit dem Meridiankreis

$$M_0 \sim Q_0 + bH_0 \quad (\text{auf } \Pi_0) \tag{6}$$

und man beweist leicht, dass in \bar{V}_0 die Homologie besteht

$$M_0 \sim Q_1 + Q_2 + \dots + Q_r \quad (\text{in } \bar{V}_0),$$

und damit

$$-Q_0 + Q_1 + Q_2 + \dots + Q_r \sim bH_0 \quad (\text{in } \bar{V}_0). \tag{7}$$

In Fig. 11 ist \bar{V}_0 , zum Vollring aufgeschnitten, mit $r=3$ und $b=4$ gezeichnet.

Wir wollen jetzt zusehen, wie sich die Invarianten ändern, wenn sich die Orientierung von F umkehrt. In dem Diagramm \bar{V}_0 ändert sich dann nur die Orientierung, während die Kurven M_i und Q_0 erhalten bleiben. Es ist zweckmässig, die Fasern von \bar{V}_0 jetzt alle gleichmässig umzuorientieren; die so umorientierten Fasern $H_0, H_1, \dots H_r$ mögen $H'_0, H'_1, \dots H'_r$ heissen:

$$H'_i \sim -H_i \quad (\text{auf } \Pi_i, i=0, 1, \dots r). \tag{8}$$

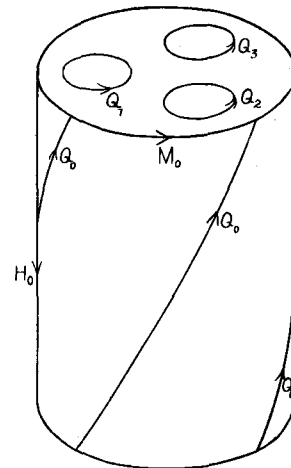


Fig. 11.

Die Q_1, Q_2, \dots, Q_r sind jetzt durch die Querkreise Q'_1, Q'_2, \dots, Q'_r zu ersetzen. Zwischen den alten und neuen Querkreisen bestehen die Homologien

$$Q'_i \sim Q_i + y_i H_i \quad (\text{auf } \Pi_i, i=1, 2, \dots, r). \quad (9)$$

In dieser Gleichung tritt Q_i mit positivem Vorzeichen auf; denn die Transformationsdeterminante eines Paares von Transformationen (8) und (9) hat den Wert -1 , weil sich mit der Orientierung von \bar{V}_0 zugleich die auf Π_i induzierte Orientierung umkehrt. Aus dem gleichen Grunde lautet die Transformation für Q_0 :

$$Q'_0 \sim Q_0 \quad (\text{auf } \Pi_0). \quad (10)$$

Für den Meridiankreis M_i ergibt sich dann

$$\begin{aligned} M^i &\sim \alpha_i Q_i + \beta_i H_i \sim \\ &\sim \alpha_i Q'_i + (\alpha_i y_i - \beta_i) H_i = \alpha'_i Q'_i + \beta'_i H'_i. \end{aligned}$$

Wegen der Forderung $\alpha'_i > 1$ und $0 < \beta'_i < \alpha'_i$ ist $\alpha'_i = \alpha_i$ und $\beta'_i = \alpha_i - \beta_i$, also $y_i = 1$. b' bestimmt sich, wie früher b aus der Homologie (7), jetzt aus der Homologie

$$-Q'_0 + Q'_1 + Q'_2 + \dots + Q'_r \sim b' H'_0. \quad (11)$$

Führt man darin die ungestrichenen Grössen ein und benutzt die Homologie (7), so ergibt sich

$$b' = -r - b.$$

Satz 6: *Der orientierte gefaserte Raum F mit den Invarianten*

$$(O \ 0; p \mid b; \alpha_1, \beta_1; \dots, \alpha_r, \beta_r)$$

bez.

$$(O \ n; k \mid b; \alpha_1, \beta_1; \dots, \alpha_r, \beta_r)$$

geht durch Umorientierung in den orientierten gefaserten Raum mit den Invarianten

$$(O \ 0; p \mid -r - b; \alpha_1, \alpha_1 - \beta_1; \dots, \alpha_r, \alpha_r - \beta_r)$$

bez.

$$(O \ n; k \mid -r - b; \alpha_1, \alpha_1 - \beta_1; \dots, \alpha_r, \alpha_r - \beta_r)$$

über.

Hätten wir die Zahlen β_i statt durch Gleichung (3) auf das Intervall $0 < \beta_i < \alpha_i$ auf das Intervall

$$-\frac{1}{2} \alpha_i < \beta_i \leq +\frac{1}{2} \alpha_i$$

normiert, so würden bei Umorientierung die Invarianten $b, \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_r$ nur ihr Vorzeichen wechseln, falls keine zweifachen Ausnahmefasern vorhanden, also alle $\alpha_i > 2$ sind. Haben dagegen s unter den Zahlen α_i , etwa die s ersten den Wert 2, so würden sich bei Umorientierung zwar nur die letzten $r-s$ Invarianten β ändern und sie würden einfach ihre Vorzeichen umkehren, b dagegen wäre auch jetzt durch $-s-b$ zu ersetzen, sodass durch Wahl der neuen Normierung keine wesentliche Vereinfachung bei Umorientierung erreicht wäre.

§ 8. Die nichtorientierbaren gefaserten Räume.

Um alle nichtorientierbaren gefaserten Räume zu überblicken, stellen wir wie im Falle der Orientierbarkeit zuerst alle Klassen auf. Wir nehmen wieder zunächst den Fall einer orientierbaren Zerlegungsfläche f daran. Ihr Geschlecht p ist grösser als 0, weil ein Raum, der die Kugel zur Zerlegungsfläche hat, notwendig orientierbar ist (S. 171 und S. 178). Wir beweisen: *Zu jeder orientierbaren Zerlegungsfläche vom Geschlechte $p > 0$ gibt es genau eine Klasse nichtorientierbarer Räume.* Der Satz ist richtig für $p = 1$. Sind nämlich a und b zwei konjugierte Rückkehrschnitte der Ringfläche, so hat einer von beiden, etwa a , den Wert -1 , da sonst der Raum orientierbar würde. Von b kann man den gleichen Wert annehmen, da man sonst b durch ab ersetzen kann. Angenommen, der Satz sei bewiesen für das Geschlecht $p-1$ (≥ 1), dann beweisen wir ihn für p , indem wir zeigen, dass es auf der Fläche vom Geschlechte $p > 1$ immer einen Henkel gibt, auf dem alle Kurven den Wert $+1$ haben. Schneidet man diesen Henkel ab, so bleibt eine gelochte Fläche vom Geschlechte $p-1$, auf der es Kurven des Wertes -1 gibt und die nach der Induktionsvoraussetzung dadurch eindeutig bestimmt ist. Um die Existenz eines solchen Henkels zu beweisen, wähle man ein kanonisches Kurvensystem, durch das die Fläche zu einem Fundamentalpolygon mit der Kantenfolge $a_1 b_1 a_1^{-1} b_1^{-1} \dots a_p b_p a_p^{-1} b_p^{-1}$ aufgeschnitten wird. Es kann sein, dass es darunter ein Paar konjugierter Rückkehrschnitte a_i, b_i des Wertes $+1$ und damit einen Henkel gibt, auf dem alle Kurven den Wert $+1$ haben. Im andern Falle gehen wir so vor. Es gibt unter den Kurven des kanonischen Systems wenigstens eine, etwa a_1 , vom Werte -1 . Von b_1 kann man annehmen, dass sie den Wert $+1$ hat, da man sie sonst durch $a_1 b_1$ ersetzen kann. Ausserdem hat noch eine Kurve a_j oder b_j ($j > 1$) den Wert -1 ; eine der Kurven $a_1 a_j$ oder $a_1 b_j^{-1}$ hat also den Wert $+1$ und bildet mit b_1 zu-

sammen ein Rückkehrschrittpaar, das einen Henkel mit lauter Kurven des Wertes $+1$ aufspannt.

Wegen der Einzigkeit der Klasse kann man auf der Fläche vom Geschlecht $p \geq 1$ immer ein kanonisches Kurvensystem wählen, dessen Kurven alle den Wert -1 haben.

Ist die Zerlegungsfläche f nichtorientierbar vom Geschlechte k , so kann man sie als Kugel mit k Kreuzhauben x_1, x_2, \dots, x_k darstellen, d. h. als eine Kugel mit k Löchern, auf deren Rändern Diametralpunkte zu identifizieren sind. Der Rand eines solchen Loches ist dann auf der Fläche eine zweimal durchlaufene

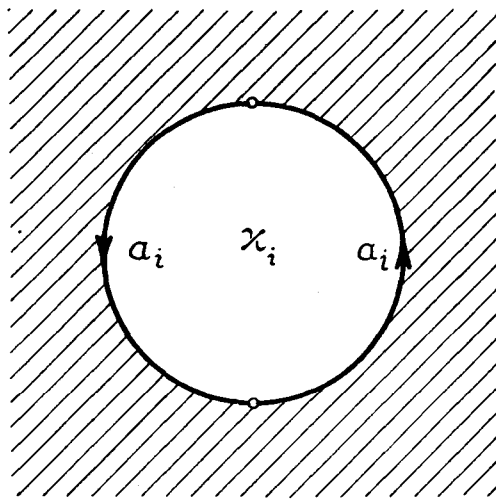


Fig. 12.

Kurve a_i^2 (Fig. 12). a_i selbst ist eine Kurve, die die Kreuzhaube x_i gerade einmal durchsetzt; längs a_i kehrt sich also die Flächenorientierung um. a_1, a_2, \dots, a_k erzeugen die Homologiegruppe, deren einzige wesentliche Relation

$$2a_1 + 2a_2 + \dots + 2a_k \sim 0 \quad (1)$$

ist. Die Bewertung der Fläche F ist also durch die Bewertung von a_1, a_2, \dots, a_k festgelegt. Von dem Falle, dass alle a_i den Wert -1 haben, können wir absehen, da er die im vorigen Paragraphen behandelte einzige Klasse orientierbarer Räume liefert. Es hat

also wenigstens ein a_i den Wert $+1$. Nun sind folgende Fälle denkbar:

A) Alle a_i und damit überhaupt alle Kurven der Fläche haben den Wert $+1$. Ein Raum mit dieser Eigenschaft ist das topologische Produkt aus der Fläche vom Geschlechte k und der Kreislinie. Durch Ausbohren einer beliebigen Faser erhält man daraus den Klassenraum \bar{F}_0 , der nach S. 173 durch die bewertete Zerlegungsfläche eindeutig bestimmt ist; er ist somit das gefaserte topologische Produkt aus gelochter Fläche vom Geschlechte k und Kreislinie.

B) k_1 unter den a_i haben den Wert $+1$, die übrigen $k_2 = k - k_1$ den Wert -1 ($k_1 > 0, k_2 > 0$). Hier scheidet die projektive Ebene wegen $k=1$ aus. Ebenso kann man die nichtorientierbare Ringfläche als erledigt betrachten. Hier ist notwendig $k_1 = k_2 = 1$. In den übrigen Fällen kann man annehmen, dass $k_1 = 1$

oder $=2$ ist. Für $k=3$ ist das klar. Für $k > 3$ wird diese Anzahl durch folgendes Reduktionsverfahren erreicht: wenn nicht schon $k_1=1$ oder $=2$ ist, so gibt es wenigstens drei a_i , etwa a_2, a_3, a_4 , mit dem Werte $+1$ und eines, etwa a_1 , mit dem Werte -1 . Durch eine Kurve l , die die Kreuzhauben $\kappa_1, \kappa_2, \kappa_3, \kappa_4$ von den übrigen trennt, wird die Fläche in zwei Teile φ und ψ zerlegt. φ ist eine Kugel mit den Kreuzhauben $\kappa_1, \dots, \kappa_4$ und einem Loch mit dem Rande l . Es gibt auf φ zwei punktfremde Rückkehrschnitte $a'_1 \sim a_1 + a_2 + a_3$ und $a'_2 \sim a_1 + a_3 + a_4$ vom Werte -1 . Ausserdem gibt es einen zu a'_1 und a'_2 punktfremden Rückkehrschnitt c , längs dessen sich die Flächenorientierung umkehrt (vergl. Fig. 13), sodass die Fläche $\bar{\varphi}$, die man aus φ durch Aufschneiden längs a'_1 und a'_2 erhält, immer noch nicht-orientierbar ist. $\bar{\varphi}$ kann also dargestellt werden als eine Kugel mit zwei Kreuzhauben und drei Löchern mit den Rändern l, a'_1, a'_2 . Identifiziert man auf den Rändern der letzten beiden Löcher Diametralpunkte, so erhält man φ zurück, d. h. φ ist dargestellt als eine Kugel mit vier Kreuzhauben und einem Loch. Setzt man ψ unverändert an l an, so erhält man eine neue Darstellung von f als Kugel mit k Kreuzhauben. Da aber a'_1 und a'_2

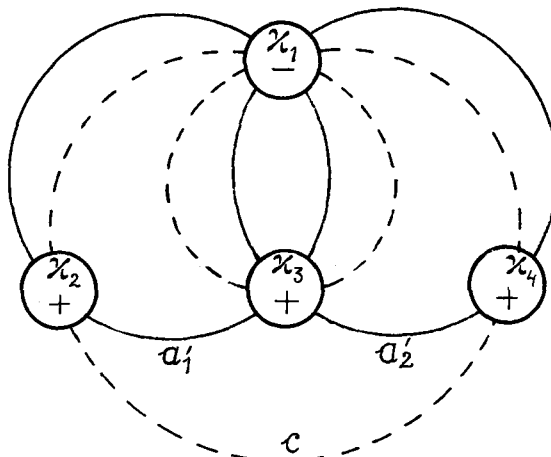


Fig. 13.

den Wert -1 haben, so hat jetzt die Zahl der negativen Kreuzhauben mindestens um 1 zugenommen. Das Verfahren kann so lange wiederholt werden, bis $k_1=1$ oder $=2$ geworden ist. Es ist noch zu zeigen, dass diese beiden Bewertungen von einander verschieden sind. Sei d eine Kurve auf f , die erst zweimal durchlaufen nullhomolog wird, d. h. es soll sein

$$d \sim \sum \gamma_i a_i + 0, \tag{2}$$

$$2d \sim \sum 2\gamma_i a_i \sim 0. \tag{3}$$

(Dass es ein solches d immer gibt, zeigt das Beispiel einer doppelpunktfreien Kurve, die jede der k Kreuzhauben gerade einmal durchsetzt. In diesem Falle

ist d ein orientierbar machender Rückkehrschnitt auf f , d. h. bei Aufschneiden von f längs d erhält man eine orientierbare Fläche mit einem oder mit zwei Löchern, je nachdem k ungerade oder gerade ist.) Die Relation (3) muss eine Folgerelation der einzigen Relation (1) der Homologiegruppe sein. Daher kann sich $\sum 2\gamma_i a_i$ von der linken Seite von (1) nur durch einen Faktor unterscheiden und alle γ_i sind gleich und ungerade, weil sonst schon $d \sim 0$ wäre. Die Kurve d hat also den Wert $(-1)^{k_2}$. Also sind die Bewertungen von f mit geradem k_2 verschieden von denen mit ungeradem k_2 , insbesondere liefern die Fälle $k_1=1$ und $k_1=2$ verschiedene Bewertungen von f . Damit ist die Ermittlung aller Klassen gefaserner Räume beendet. Ergebnis:

Satz 7: *Zu jeder orientierbaren Zerlegungsfläche f vom Geschlechte p gibt es genau eine Klasse orientierbarer, und falls $p > 0$ ist, eine Klasse nicht orientierbarer gefaserner Räume. Zu jeder nichtorientierbaren Zerlegungsfläche vom Geschlechte k gibt es genau eine Klasse orientierbarer gefaserner Räume, und falls $k > 2$ ist, genau drei Klassen nichtorientierbarer; für $k=1$ gibt es eine Klasse, für $k=2$ zwei Klassen nichtorientierbarer Räume.*

Nachstehende Tafel gibt eine Übersicht über die verschiedenen Klassen mit ihren charakteristischen Eigenschaften. O, N bezeichnen Orientierbarkeit oder Nichtorientierbarkeit des gefaserten Raumes F , o, n seiner Zerlegungsfläche f , deren Geschlecht gegeben sein muss, damit die Klasse festliegt. Wir erinnern daran, dass eine geschlossene Kurve w der Zerlegungsfläche den Wert $+1$ bekommt, wenn sich die Faserorientierung längs ihrer erhält, andernfalls -1 , und dass die Klasse und damit der Klassenraum \bar{F}_0 durch die Bewertung aller Kurven der Zerlegungsfläche eindeutig bestimmt ist.

- Oo Alle Kurven haben den Wert $+1$; \bar{F}_0 topologisches Produkt aus ge-
lochter Zerlegungsfläche vom Geschlechte p und Kreislinie;
- On Alle einufrigen Kurven haben den Wert -1 ;
- No Es gibt Kurven vom Werte -1 ;
- Nn I Alle Kurven haben den Wert $+1$; \bar{F}_0 topologisches Produkt;
- Nn II Es gibt einufrige Kurven vom Werte $+1$ und solche vom Werte -1 ;
jeder orientierbar machende Rückkehrschnitt hat den Wert -1 ;
- Nn III Es gibt einufrige Kurven vom Werte $+1$ und solche vom Werte -1 ;
jeder orientierbar machende Rückkehrschnitt hat den Wert $+1$.

Für $p=0$ gibt es nur die Klasse Oo , für $k=1$ nur On und Nn I,
für $k=2$ ausserdem Nn II.

Wo in der Tabelle \overline{F}_0 nicht angegeben ist, lässt es sich nach dem auf S. 173 angegebenen Verfahren durch kanonische Zerscheidung der Zerlegungsfläche aufbauen.

Es bleibt noch übrig, die nichtorientierbaren gefaserten Räume F , deren Klassen wir ermittelt haben, durch Invarianten zu charakterisieren. Gibt es in F eine Ausnahmefaser C_1 und ist Ω_1 eine Faserumgebung von C_1 , so besteht auf der Randringfläche Π_1 von Ω_1 zwischen einem Meridiankreis M_1 , einem beliebig gewählten Querkreis Q und einer Faser H die Homologie

$$M_1 \sim \alpha Q + \beta H.$$

Mit Hilfe der Transformationsformeln (1) und (4) von § 1:

$$H \sim \varepsilon_1 H_1, \quad Q \sim \varepsilon_4 Q_1 + y H_1$$

kann man einen neuen Querkreis Q_1 und eine neue Faser H_1 so finden, dass

$$M_1 \sim \alpha_1 Q_1 + \beta_1 H_1 \tag{4}$$

wird, worin

$$\alpha_1 > 1, \quad 0 < \beta_1 \leq \frac{1}{2} \alpha_1$$

ist. Durch die erste Forderung ist nämlich ε_1 bestimmt. Durch geeignete Wahl von y lässt sich dann β_1 auf das Intervall $-\frac{1}{2} \alpha_1$ bis $+\frac{1}{2} \alpha_1$ bringen und schliesslich durch Wahl von ε_4 auf das angegebene Intervall. Die Abweichung vom Falle der orientierbaren gefaserten Räume besteht darin, dass jetzt auf der Ringfläche keine ausgezeichnete Orientierung gegeben ist, weil man F nicht orientieren kann; ε_1 und ε_4 sind daher unabhängig von einander wählbar (vergl. S. 180). Die Zahlen α_1 und β_1 sind durch Ω_1 und damit durch die Ausnahmefaser C_1 eindeutig bestimmt. Dasselbe gilt, sobald $\alpha_1 > 2$ ist, von Q_1 und H_1 bis auf gleichzeitige Umorientierung, welche erlaubt ist, da die Orientierung von M_1 durch Ω_1 nicht gegeben wird. Ist dagegen $\alpha_1 = 2$, so gibt es ausser Q_1, H_1 noch das System

$$Q'_1 \sim Q_1 + H_1, \quad H'_1 \sim -H_1, \tag{5}$$

in dem M_1 ebenfalls die Normalform (4) annimmt:

$$M_1 \sim 2 Q'_1 + H'_1. \tag{6}$$

Wenn $\alpha_1 > 2$ ist, so soll die Faserumgebung Ω_1 ausgebohrt und mit einem gewöhnlichen Verschlussringe V_1 geschlossen werden, der Q_1 zum Meridiankreis hat. Das gleiche Verfahren wird auf alle mehr als zweifachen Ausnahmefasern angewendet. Aus F entsteht dadurch in eindeutiger Weise ein nichtorientierbarer gefasertes Raum F_s , der nur noch die zweifachen Ausnahmefasern von F enthält; deren Anzahl sei $s \geq 0$. Zur weiteren Untersuchung von F_s bedarf es des folgenden Hilfssatzes:

Hilfssatz VII: *Ein nichtorientierbarer gefasertes berandeter Raum \bar{F} , der aus einem gefaserten Raum F durch Ausbohren einer endlichen Anzahl von Ausnahmefasern entsteht, lässt sich so auf sich fasertreu abbilden, dass alle Randringflächen bis auf eine, \bar{H} , punktweise fest bleiben, während \bar{H} eine fasertreue Selbstabbildung erfährt, die einen vorgegebenen Querkreis Q in einen beliebigen Querkreis der Form*

$$Q' \sim + (Q + 2zH) \quad \text{oder auch} \quad Q' \sim - (Q + 2zH) \quad (7)$$

überführt. Hierin ist z eine vorgebbare ganze Zahl und H eine orientierte Faser auf \bar{H} . Ob die Selbstabbildung von \bar{H} von der ersten oder zweiten Art ist, d. h. die Orientierung von \bar{H} erhält oder umgekehrt, kann dabei noch beliebig vorgeschrieben werden.¹⁷

Beweis. a) Wir führen den Beweis zuerst für $z=0$. Eine Selbstabbildung, die \bar{H} nach der ersten Art abbildet, ist alsdann z. B. die Identität. Um eine Selbstabbildung zweiter Art aufzuweisen, setzen wir auf \bar{H} einen gewöhnlichen gefaserten Vollring V , sodass Q Meridiankreis in V wird. Der neue Raum heiße $\bar{F}+V$. Die gesuchte Abbildung erhalten wir als Endergebnis einer fasertreuen Deformation von $\bar{F}+V$. Da $\bar{F}+V$ nichtorientierbar ist, gibt es einen geschlossenen Raumweg W , der von einem innern Punkte P von V ausgeht, alle Ausnahmefasern vermeidet und längs dessen sich die Raumorientierung umkehrt. Man kann dann $\bar{F}+V$ fasertreu so deformieren, dass dabei P diesen Weg durchläuft und V mit sich selbst zur Deckung kommt. Das Verfahren haben wir bereits auf S. 178 auseinandergesetzt. V , also auch die Randringfläche \bar{H} hat dabei eine fasertreue Abbildung zweiter Art erfahren, und der Querkreis Q ist als Meridiankreis von V in $Q' \sim + Q$ oder $\sim - Q$ übergegangen, je nachdem sich die Faser längs des Weges W umkehrt oder nicht. Nach Beendigung der Deformation hat man nur V wieder zu entfernen, um die gewünschte Selbstabbildung von \bar{F} allein zu erhalten.

¹⁷ Der Satz sagt nicht aus, dass man in jedem Falle die Wahl über das Vorzeichen in (7) frei hat.

b) Nach a) gibt es eine fasertreue Selbstabbildung von \bar{F} , bei der der Querkreis $Q+zH$ bis auf seine Orientierung in sich übergeht und \bar{H} nach der zweiten Art abgebildet wird. Dabei geht Q in

$$Q' \sim \pm (Q + 2zH)$$

über. Sucht man eine Abbildung, die \bar{H} nach der ersten Art abbildet und Q ebenso transformiert, so hat man nur noch eine Selbstabbildung von \bar{F} folgen zu lassen, die Q' bis auf seine Orientierung festlässt und H nach der zweiten Art abbildet.

Der Hilfssatz dient uns zum Nachweise, dass der Raum F_s im Falle $s > 0$ eindeutig durch die Klasse und die Anzahl s seiner zweifachen Ausnahmefasern bestimmt ist. Wir bohren die s Ausnahmefasern gleichzeitig aus, indem wir s punktfremde Faserumgebungen aus F_s entfernen. Der entstehende Raum \bar{F}_s ist durch die Klasse von F_s (die nach S. 171 mit der von F übereinstimmt) und durch die Anzahl s bestimmt, denn er ist entweder der Klassenraum \bar{F}_0 selbst, wenn nämlich $s = 1$ ist, oder der $(s-1)$ -mal ausgebohrte Klassenraum (vergl. S. 173). Aus \bar{F}_s gewinnt man F_s zurück durch Schliessung mit s Vollringen der charakteristischen Zahl $\mu=2$. Dabei ist es für das Ergebnis der Schliessung gleichgültig, wie man einen solchen Verschlussring Ω auf eine Randringfläche \bar{H} von \bar{F}_s fasertreu aufsetzt. Ist nämlich Q ein Querkreis und H eine Faser von \bar{H} , so gilt für den Meridiankreis M von Ω

$$M \sim 2Q + yH$$

auf \bar{H} . y ist ungerade, weil M doppelpunktfrei ist. Ist jetzt $y \equiv 1 \pmod{4}$, so nehmen wir eine fasertreue Selbstabbildung von \bar{F}_s vor, bei der alle Randringflächen bis auf \bar{H} festbleiben, während \bar{H} eine Selbstabbildung erster Art erfährt. Diese Selbstabbildung wählen wir so (nach Hilfssatz VII), dass Q in

$$Q' \sim \pm \left(Q + 2 \frac{1-y}{4} H \right),$$

also M in

$$M' \sim 2Q' + yH' \sim \pm (2Q + H)$$

übergeht. Ist dagegen $y \equiv -1 \pmod{4}$, so gibt es eine fasertreue Selbstabbildung von \bar{F}_s , bei der \bar{H} eine Selbstabbildung zweiter Art erfährt, sodass Q in

$$Q' \sim \pm \left(Q + 2 \frac{1+y}{4} H \right),$$

also M in

$$M' \sim \pm (2Q + H)$$

übergeht. In jedem Falle kann man also anstelle von

$$M \sim 2Q + yH$$

den Kreis

$$M' \sim \pm (2Q + H)$$

als Meridiankreis des Verschlussringes benutzen. Das Ergebnis der Schliessung ist daher unabhängig von y und hängt somit nur von \bar{F}_0 und der Anzahl s der anzubringenden zweifachen Ausnahmefasern ab.

Enthält F überhaupt keine zweifachen Ausnahmefasern, ist also $s=0$, so ist der Raum F_0 , der durch Ausbohrung der mehr als zweifachen Ausnahmefasern und Schliessung mit gewöhnlichen Verschlussringen erhalten wurde, frei von Ausnahmefasern und geht durch nochmalige Ausbohrung in den Klassenraum \bar{F}_0 über. Umgekehrt entsteht F_0 aus \bar{F}_0 durch Schliessung mit einem gewöhnlichen Vollring, dessen Meridiankreis ein Querkreis Q auf der Randringfläche Π_0 von \bar{F}_0 ist. Auf Π_0 gibt es aber nur zwei wesentlich verschiedene Querkreise. Man kann nämlich nach Hilfssatz VII durch eine fasertreue Selbstabbildung von F_0 Q in jeden Querkreis

$$Q' \sim \pm (Q + 2zH)$$

überführen.

Ist also Q_0 ein Querkreis von Π_0 , etwa der, an den die in \bar{F}_0 hineingelegte Zerlegungsfläche \bar{f}_0 an Π_0 angrenzt, so braucht man nur die beiden Fälle zu unterscheiden, dass Q mit Q_0 oder mit $Q_0 + H$ zusammenfällt. Diese beiden Querkreise sind nun insofern wesentlich verschieden, als es keine fasertreue Selbstabbildung von \bar{F}_0 geben kann, die Q_0 in $\pm (Q_0 + H)$ überführt. Von S. 177 wissen wir nämlich, dass man die Zerlegungsfläche \bar{f}_0 nicht zugleich so in \bar{F}_0 hineinlegen kann, dass sie einmal längs Q_0 und das andere Mal längs $Q_0 + H$ an Π_0 angrenzt. Somit sind auch die gefaserten Räume F_0 und F'_0 , die man aus \bar{F}_0 erhält, indem man das eine Mal Q_0 , das andere Mal $Q_0 + H$ zum Meridiankreis Q des Verschlussringes macht, verschieden. Eine fasertreue Abbildung von F_0 auf F'_0 könnte man nämlich immer so einrichten, dass die Verschlussringe von F_0 und F'_0 , also auch ihre Meridiankreise einander entsprächen, sodass es eine fasertreue Selbstabbildung von \bar{F}_0 gäbe, bei der Q_0 in $\pm (Q_0 + H)$ übergeht. Die beiden verschiedenen Räume F_0 und F'_0 sind also durch den Klassenraum

\bar{F}_0 und die Zahl $b=0$ oder $=1$ charakterisiert, die angibt, dass der Meridiankreis des Verschlussringes $\sim Q_0 + bH$ ist.

Ist aber $F_s (s \geq 0)$ bekannt, so ist F durch die Zahlen

$$\alpha_i, \beta_i \quad (\alpha_i > 2, \quad 0 < \beta_i < \frac{1}{2} \alpha_i)$$

eindeutig bestimmt; i läuft von $s+1$ bis r . Aus F_s sind nämlich $r-s$ beliebige Fasern auszubohren, wodurch auf jeder Randringfläche Π_i des so entstehenden ausgebohrten gefaserten Raumes ein Querkreis Q_i (bis auf seine Orientierung) ausgezeichnet ist, nämlich der Meridiankreis des soeben ausgebohrten Vollringes. Wählt man noch eine orientierte Faser H_i auf jeder Randringfläche, so ist der Meridiankreis M_i des neuen Verschlussringes durch

$$M_i \sim \alpha_i Q_i + \beta_i H_i$$

festgelegt, nach Gleichung (4) von S. 189. Da aber sowohl die Orientierung von Q_i als die von H_i willkürlich ist, erhält man ausser M_i noch einen weiteren mit M_i gleichberechtigten Meridiankreis

$$M'_i \sim \alpha_i Q_i - \beta_i H_i.$$

Nach Hilfssatz VII gibt es nun eine fasertreue Selbstabbildung des berandeten Raumes, bei der alle Randringflächen bis auf Π_i punktweise festbleiben, während Π_i eine Selbstabbildung zweiter Art erleidet, die Q_i bis auf die Orientierung festlässt. Dabei geht dann M_i in $\pm (\alpha_i Q_i - \beta_i H_i) \sim \pm M'_i$ über, sodass es gleichgültig ist, ob man M_i oder M'_i zum Meridiankreis des Verschlussringes macht. F ist also eindeutig bestimmt durch seine Klasse und die Zahlen α_i, β_i, s und b .

Entsprechend Satz 5 formulieren wir das Ergebnis in dem

Satz 8: *Ein nichtorientierbarer gefaserner Raum F ist umkehrbar eindeutig durch ein System von Invarianten bestimmt, die wir in das Symbol zusammenfassen:*

$$\begin{aligned} & (No; p \quad | \quad b; \alpha_1, \beta_1; \dots \alpha_s, \beta_s; \alpha_{s+1}, \beta_{s+1}; \dots \alpha_r, \beta_r) \\ \text{oder} & \quad (Nn \text{ I}; k \quad | \quad b; \alpha_1, \beta_1; \dots \alpha_s, \beta_s; \alpha_{s+1}, \beta_{s+1}; \dots \alpha_r, \beta_r) \\ \text{oder} & \quad (Nn \text{ II}; k \quad | \quad b; \alpha_1, \beta_1; \dots \alpha_s, \beta_s; \alpha_{s+1}, \beta_{s+1}; \dots \alpha_r, \beta_r) \\ \text{oder} & \quad (Nn \text{ III}; k \quad | \quad b; \alpha_1, \beta_1; \dots \alpha_s, \beta_s; \alpha_{s+1}, \beta_{s+1}; \dots \alpha_r, \beta_r). \end{aligned}$$

Hierin weist N auf die Nichtorientierbarkeit des Raumes, o bez. n auf die Orientier-

barkeit oder Nichtorientierbarkeit der Zerlegungsfläche hin, sodass durch die links vom Strich stehenden Zeichen eindeutig die Klasse bestimmt ist. Die Zahlenpaare α_i, β_i bestimmen für $i \leq s$ die zweifachen, für $i > s$ die mehr als zweifachen Ausnahmefasern, es ist also

$$\begin{aligned} (i \leq s) & \quad \alpha_i = 2, \quad \beta_i = 1; \\ (i > s) & \quad \alpha_i > 2, \quad 0 < \beta_i < \frac{1}{2} \alpha_i. \end{aligned}$$

Die Zahl b ist nur von Bedeutung, wenn $s=0$ ist, und dann ist sie $=0$ oder 1 und setzt die zwei verschiedenen Möglichkeiten fest, auf die man den Klassenraum \bar{F}_0 zu einem gefaserten Raume ohne Ausnahmefasern schliessen kann. Im andern Falle ist der Raum ohne Angabe von b schon eindeutig bestimmt und b durch einen Strich zu ersetzen.

Betrachten wir als Beispiel einen nichtorientierbaren gefaserten Raum mit einer einzigen dreifachen Ausnahmefaser, dessen Klassenraum \bar{F}_0 durch das Zeichen $Nn I; k$ bestimmt sei. \bar{F}_0 ist also das topologische Produkt aus der einmal gelochten nichtorientierbaren Fläche vom Geschlechte k und der Kreislinie. Es entstehen aus ihm durch Schliessung und Anbringung einer dreifachen Ausnahmefaser die beiden verschiedenen gefaserten Räume:

$$(Nn I; k | 0; 3, 1) \quad \text{und} \quad (Nn I; k | 1; 3, 1).$$

Fügt man aber der dreifachen noch eine zweifache Ausnahmefaser hinzu, so gehen beide Räume in den einzigen

$$(Nn I; k | -; 2, 1; 3, 1)$$

über.

§ 9. Überlagerungsräume.

1. Eine Mannigfaltigkeit \tilde{F} heisst *unverzweigte Überlagerungsmannigfaltigkeit* von F , wenn es eine eindeutige stetige Abbildung A von \tilde{F} auf F gibt mit den folgenden Eigenschaften:

I. Über jedem Punkt P von F liegt mindestens ein Punkt \tilde{P} von \tilde{F} , d.h. bei der Abbildung A geht \tilde{P} in P über.

II. Sind $\tilde{P}_1, \tilde{P}_2, \dots$ die sämtlichen über P liegenden Punkte, so gibt es Umgebungen $U_{\tilde{P}_1}, U_{\tilde{P}_2}, \dots$, die sich bei A topologisch auf ein und dieselbe

Umgebung U_P von P abbilden und die alle über U_P liegenden Punkte erschöpfen.

Ist F gefasert und P ein Punkt einer Faser H , \tilde{P} ein über P liegender Punkt von \tilde{F} und lässt man P auf H wandern, so wird \tilde{P} , da die Abbildung im Kleinen topologisch ist, ebenfalls eine Kurve \tilde{H} von \tilde{F} durchlaufen.^{17a} Die Kurve \tilde{H} bildet sich dann vermöge der Abbildung A in H ab. Doch wird diese Abbildung im allgemeinen nicht topologisch sein, vielmehr wird \tilde{H} die Faser H mehrfach oder sogar unendlich oft überlagern. Ausser \tilde{H} werden sich im allgemeinen noch andere Kurven \tilde{H}' , \tilde{H}'' , ... in H abbilden. Durch jeden Punkt von \tilde{F} geht genau eine solche Kurve, und es erhebt sich die Frage, in welchen Fällen diese Kurvenschar S eine Faserung von \tilde{F} ausmacht.

2. Ist Ω_C eine Faserumgebung einer Faser C von F , P ein beliebiger aber fester Punkt von Ω_C , über dem ein Punkt \tilde{P} von \tilde{F} liegt, \overline{PQ} ein ganz in Ω_C verlaufender, von P nach Q führender Weg, so entspricht diesem ein eindeutig bestimmter Weg $\overline{\tilde{P}\tilde{Q}}$ in \tilde{F} , dessen Endpunkt \tilde{Q} über Q liegt. Hätte man statt \overline{PQ} einen andern Weg benutzt, der aus diesem durch Deformation innerhalb Ω_C unter Festhaltung der Endpunkte P und Q hervorgeht, so wäre man zu demselben Punkt \tilde{Q} gelangt. Die Gesamtheit dieser Punkte \tilde{Q} , die man so von \tilde{P} erreicht, bilden offenbar eine Teilmenge $\tilde{\Omega}_{\tilde{C}}$ von \tilde{F} , die die Faserumgebung Ω_C überlagert. $\tilde{\Omega}_{\tilde{C}}$ besteht ganz aus Kurven der Schar S und enthält die Faser \tilde{C} ganz im Innern. $\tilde{\Omega}_{\tilde{C}}$ ist durch Ω_C und eine ganze Zahl σ einschliesslich ∞ bestimmt, die die Vielfachheit angibt, mit der Ω_C von $\tilde{\Omega}_{\tilde{C}}$ überlagert wird. σ gibt also an, dass \tilde{C} in die σ -mal durchlaufene Faser C abgebildet wird.

3. Ist $\sigma < \infty$, so sind alle Kurven von $\tilde{\Omega}_{\tilde{C}}$ geschlossen, und sie sind alle offen, wenn $\sigma = \infty$ ist. Da mit jeder Kurve der Schar S eine ganze Umgebung aus lauter offenen oder geschlossenen Kurven besteht, so zerfällt \tilde{F} in zwei offene punktfremde Teilmengen, nämlich in die Menge der offenen und die der geschlossenen Kurven. Weil aber \tilde{F} zusammenhängend ist, so ist eine dieser beiden Mengen die Nullmenge, d. h. *die Schar S kann nicht zugleich offene und geschlossene Kurven enthalten. Sind die Kurven von S geschlossen, so bilden sie eine Faserung von \tilde{F} ; denn die endliche unverzweigte Überlagerung einer Faserumgebung Ω_C ist offenbar wieder ein gefasertes Vollring.*

4. Wir nehmen im Folgenden immer an, dass die Kurvenschar S von \tilde{F} eine Faserung ist. Da die Überlagerung von Ω_C durch $\tilde{\Omega}_{\tilde{C}}$ durch die Zahl σ

^{17a} Die ausführlichen Beweise für diese wie für ähnliche Eigenschaften der Überlagerungsmannigfaltigkeiten übergehen wir.

vollkommen bestimmt ist, so muss man die charakteristischen Zahlen $\tilde{\mu}$, $\tilde{\nu}$ des gefaserten Vollringes $\tilde{\Omega}_C$ aus σ und den charakteristischen Zahlen μ , ν von Ω_C berechnen können. Schneidet man $\tilde{\Omega}_C$ zum gefaserten Zylinder auf, so sind dessen Grund- und Dachfläche, um den Winkel

$$2\pi \frac{\tilde{\nu}}{\tilde{\mu}} = 2\pi \frac{\nu}{\mu} \sigma = 2\pi \nu \frac{\frac{\sigma}{(\mu, \sigma)}}{\frac{\mu}{(\mu, \sigma)}}$$

verschraubt, einander zugeordnet. (μ, σ) bezeichnet den grössten gemeinsamen Teiler von μ und σ . Es ist somit nach Definition der charakteristischen Zahlen S. 150

$$\tilde{\mu} = \frac{\mu}{(\mu, \sigma)}; \quad \tilde{\nu} \equiv \pm \nu \frac{\sigma}{(\mu, \sigma)} \pmod{\tilde{\mu}}. \quad (1)$$

Während in dem Zylinder Ω_C je μ achsenparallele Strecken zu einer Faser vereinigt werden, sind es in $\tilde{\Omega}_C$ $\tilde{\mu} = \frac{\mu}{(\mu, \sigma)}$, sodass sich immer (μ, σ) gewöhnliche Fasern von $\tilde{\Omega}_C$ in eine einzige gewöhnliche Faser von Ω_C abbilden. Dagegen liegt über der mittleren Faser C immer nur eine einzige Faser von $\tilde{\Omega}_C$, nämlich \tilde{C} . Das kann man auch so ausdrücken: Vermöge der eindeutigen und stetigen Abbildung der Fasern von \tilde{F} auf die von F wird auch eine eindeutige und stetige Abbildung der Zerlegungsfläche \tilde{f} von \tilde{F} auf die Zerlegungsfläche f von F vermittelt. Sind c und \tilde{c} die den Fasern C bez. \tilde{C} entsprechenden Punkte auf f bez. \tilde{f} und ist $(\mu, \sigma) > 1$, so ist die Überlagerung von f durch \tilde{f} im Punkte c (μ, σ) -fach verzweigt. Die Vielfachheit der Verzweigung ist immer ein Teiler der Vielfachheit der Ausnahmefaser C . Als Verzweigungspunkte kommen somit nur Ausnahmepunkte von f in Frage.

5. Da wegen (1) $\tilde{\mu} \leq \mu$ ist, so ist die überlagernde Faser \tilde{C} immer dann eine gewöhnliche Faser, wenn C gewöhnlich ist. Ist aber C eine Ausnahmefaser ($\mu > 1$), so kann \tilde{C} gewöhnlich oder eine Ausnahmefaser sein, deren Vielfachheit ein Teiler derjenigen von C ist. Zur Erläuterung diene folgendes Beispiel: Zwei kongruente gefaserte Vollringe mit je einer α -fachen Ausnahmefaser werden so aufeinander geklebt, dass Punkte der Oberflächen, die vermöge der Kongruenz der Vollringe einander entsprechen, aufeinanderfallen. Es entsteht ein gefasertes Raum, der nebenbei bemerkt die Invarianten $(Oo; o | -1; \alpha, \beta; \alpha, \alpha - \beta)$ hat und das topologische Produkt aus Kreis und Kugel ist. Überlagert man jeden der beiden kongruenten Vollringe α -fach und setzt die überlagernden

Vollringe mit ihren Oberflächen aufeinander, so entsteht ein α -facher Überlagerungsraum \tilde{F} von F , der frei von Ausnahmefasern ist. Denn die Zahlen der Gleichung (1) sind hier $\mu=\alpha$, $\sigma=\alpha$, also $\tilde{\mu}=1$ für beide Ausnahmefasern.

Sind \tilde{H} und \tilde{H}' zwei Fasern von \tilde{F} , die zwei gewöhnliche Fasern H bez. H' ϱ bez. ϱ' mal überlagern, so ist $\varrho=\varrho'$. Man kann nämlich \tilde{H} und \tilde{H}' in \tilde{F} durch einen Weg verbinden, dessen Grundweg in F alle Ausnahmefasern vermeidet. Da in einer hinreichend kleinen Umgebung einer gewöhnlichen Faser sich die Vielfachheit der Überlagerung nicht ändert, so bleibt sie längs des ganzen Weges konstant.

Von der Betrachtung allgemeiner gefaserner Überlagerungsräume wenden wir uns jetzt besonderen Überlagerungsräumen zu.

6. Der *universelle Überlagerungsraum* \hat{F} von F ist der eindeutig bestimmte einfach zusammenhängende Überlagerungsraum von F . Ist H eine Faser von F und \hat{H} eine Kurve von \hat{F} , die H überlagert, so ist nach 3. \hat{F} dann und nur dann gefasert, wenn \hat{H} geschlossen ist. Dann wird H von \hat{H} endlich oft, etwa ϱ -mal überlagert. Da \hat{H} wegen des einfachen Zusammenhanges von \hat{F} nullhomotop in \hat{F} ist, so ist die ϱ -mal durchlaufene Faser H in F ebenfalls nullhomotop. *Die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, dass der universelle Überlagerungsraum \hat{F} gefasert ist, besteht also darin, dass ein endliches Vielfaches der Faser von F nullhomotop in F ist.* Weiss man von einer einzigen Faser H , dass ein endliches Vielfaches nullhomotop ist, so gilt dasselbe offenbar von jeder beliebigen Faser von F .

7. F sei ein nichtorientierbarer geschlossener Raum, \tilde{F} der zugehörige zweifache orientierbare Überlagerungsraum. Da sich in F längs einer Faser niemals die Orientierung umkehrt, so entsprechen jeder Faser H genau zwei geschlossene Kurven \tilde{H} und \tilde{H}' , deren jede H einfach überlagert. Da \tilde{H} somit geschlossen ist, ist \tilde{F} nach 3. ein gefasertes Raum und die Zahl σ , die die Vielfachheit der Überlagerung von H durch \tilde{H} angibt, ist für jede Faser $=1$. Daher ist die Faserumgebung $\tilde{\Omega}_{\tilde{H}}$, die die Faserumgebung Ω_H überlagert, fasertreu auf Ω_H abbildbar. Sind \tilde{P} und \tilde{P}' zwei Punkte von \tilde{F} , die beide über demselben Punkte P von F liegen, so erhält man durch Zuordnung von \tilde{P} und \tilde{P}' eine fixpunktlose involutorische Selbstabbildung von \tilde{F} , die fasertreu ist und die Raumorientierung umkehrt. Durch die Zuordnung der Fasern \tilde{H} und \tilde{H}' erfährt zugleich die Zerlegungsfläche \tilde{f} von \tilde{F} eine involutorische fixpunktlose Selbstabbildung. Sei nun F etwa der Raum

$$(No; p | b; \alpha_1, \beta_1; \dots \alpha_r, \beta_r). \tag{2}$$

Da jede Ausnahmefaser H von F von zwei Ausnahmefasern \tilde{H} und \tilde{H}' der gleichen Vielfachheit überlagert wird, so hat \tilde{F} $2r$ Ausnahmefasern. Genauer: ist H die Ausnahmefaser, die zu den Invarianten α_1, β_1 gehört, so gehören zu den Fasern \tilde{H} und \tilde{H}' die Invarianten α_1, β_1 bzw. $\alpha_1, \alpha_1 - \beta_1$ nach Satz 6 S. 184. Denn die involutorische fasertreue Selbstabbildung von \tilde{F} führt \tilde{H} in \tilde{H}' über und kehrt zugleich die Raumorientierung um. Da ferner \tilde{f} eine unverzweigte zweifache Überlagerung von f ist, so ist \tilde{f} orientierbar vom Geschlechte $2p-1$, sodass \tilde{F} der Raum

$$(Oo; 2p-1 | \tilde{b}; \alpha_1, \beta_1; \dots \alpha_r, \beta_r; \alpha_1, \alpha_1 - \beta_1; \dots \alpha_r, \alpha_r - \beta_r) \quad (3)$$

ist. Da \tilde{F} eine fasertreue Selbstabbildung zweiter Art gestattet, so kann sich das Symbol nicht ändern, wenn man die Orientierung von \tilde{F} umkehrt. Nach Satz 6 geht der gefaserte Raum (3) bei Umkehrung der Orientierung in den Raum über

$$(Oo; 2p-1 | -2r - \tilde{b}; \alpha_1, \beta_1; \dots \alpha_r, \beta_r; \alpha_1, \alpha_1 - \beta_1; \dots \alpha_r, \alpha_r - \beta_r). \quad (4)$$

Damit (3) und (4) übereinstimmen, muss $\tilde{b} = -2r - \tilde{b}$ sein, also $\tilde{b} = -r$, unabhängig von b . Ähnlich verläuft die Rechnung in allen übrigen Fällen. Wir geben nur das Ergebnis an. F bezeichnet immer den nichtorientierbaren gefaserten Grundraum, \tilde{F} den zweifachen orientierbaren Überlagerungsraum.

$$\begin{aligned} & \left\{ \begin{array}{l} F (No; p | b; \alpha_1, \beta_1; \dots \alpha_r, \beta_r) \\ \tilde{F} (Oo; 2p-1 | -r; \alpha_1, \beta_1; \dots \alpha_r, \beta_r; \alpha_1, \alpha_1 - \beta_1; \dots \alpha_r, \alpha_r - \beta_r) \end{array} \right. \\ & \left\{ \begin{array}{l} F (Nn I; k | b; \alpha_1, \beta_1; \dots \alpha_r, \beta_r) \\ \tilde{F} (Oo; k-1 | -r; \alpha_1, \beta_1; \dots \alpha_r, \beta_r; \alpha_1, \alpha_1 - \beta_1; \dots \alpha_r, \alpha_r - \beta_r) \end{array} \right. \\ & \left\{ \begin{array}{l} F (Nn II; k | b; \alpha_1, \beta_1; \dots \alpha_r, \beta_r) \\ \tilde{F} (On; 2k-2 | -r; \alpha_1, \beta_1; \dots \alpha_r, \beta_r; \alpha_1, \alpha_1 - \beta_1; \dots \alpha_r, \alpha_r - \beta_r) \end{array} \right. \\ & \left\{ \begin{array}{l} F (Nn III; k | b; \alpha_1, \beta_1; \dots \alpha_r, \beta_r) \\ \tilde{F} (On; 2k-2 | -r; \alpha_1, \beta_1; \dots \alpha_r, \beta_r; \alpha_1, \alpha_1 - \beta_1; \dots \alpha_r, \alpha_r - \beta_r). \end{array} \right. \end{aligned}$$

In den letzten beiden Fällen ist die Zerlegungsfläche \tilde{f} nichtorientierbar, weil es auf f einufrige Rückkehrschnitte gibt, längs deren sich die Faser umkehrt, also die Raumorientierung erhalten bleibt.

8. Zu einem gefaserten Raum F mit der Zerlegungsfläche f kann man auch folgendermassen Überlagerungsräume konstruieren. Sei \tilde{f} eine unverzweigte Überlagerungsfläche von f , \tilde{p} ein über dem Punkt p von f liegender Punkt von

\tilde{f} , P ein Punkt von F , der sich in p abbildet, dann ist das Punktepaar (P, \tilde{p}) ein Punkt des zu konstruierenden Überlagerungsraumes \tilde{F} , der aus der Gesamtheit dieser Punktepaare besteht. Eine Umgebung eines Punktes (P_0, \tilde{p}_0) besteht aus allen Punkten (P, \tilde{p}) , für die P in der Umgebung von P_0 , \tilde{p} in der Umgebung von \tilde{p}_0 liegt. Ordnet man jedem Punkt (P, \tilde{p}) von \tilde{F} den Punkt P von F als Bildpunkt zu, so ist diese Abbildung offenbar eindeutig und stetig und es sind die Bedingungen I und II von Nr. 1 erfüllt. Die Vielfachheit dieser Überlagerung stimmt überein mit der Vielfachheit der Überlagerung von f durch \tilde{f} . Ist P ein auf einer Faser H von F wandernder Punkt, so beschreibt der Punkt (P, \tilde{p}) bei festem \tilde{p} eine Kurve \tilde{H} , die einfach über H liegt. Nach Nr. 3. ist dann \tilde{F} ebenfalls gefasert, und eine Faserumgebung $\tilde{\Omega}_{\tilde{H}}$ von \tilde{F} bildet sich fasertreu auf die Faserumgebung Ω_H ab, die sie überlagert.

Zur Erläuterung sei F der orientierbare Raum $(On; 1 | b; \alpha_1, \beta_1; \dots \alpha_r, \beta_r)$, dessen Zerlegungsfläche f also die projektive Ebene ist, \tilde{f} sei die Kugel. Da mit F auch \tilde{F} orientierbar ist, gehört \tilde{F} zur Klasse $(Oo; o)$. Orientiert man \tilde{F} so, dass bei der Abbildung von \tilde{F} auf F die Orientierung erhalten bleibt, so bilden sich die beiden Faserumgebungen $\tilde{\Omega}_{\tilde{H}}$ und $\tilde{\Omega}_{\tilde{H}'}$ mit Erhaltung ihrer Orientierung in ein und dieselbe Faserumgebung Ω_H ab, d. h. der Ausnahmefaser, die zu den Werten α_i, β_i gehört, entsprechen in \tilde{F} zwei Ausnahmefasern, denen beiden die Zahlen α_i, β_i zukommen. Bohrt man nun die Ausnahmefasern von F aus und schliesst die Ausbohrungen durch gewöhnliche Vollringe nach dem Verfahren von S. 180, und tut man dasselbe in \tilde{F} , so erhält man die Räume F_0 bez. \tilde{F}_0 ohne Ausnahmefasern, und \tilde{F}_0 ist zweifache Überlagerung von F_0 . Zur Bestimmung der Faserinvariante \tilde{b} von \tilde{F} , die der Invariante b von F entspricht, braucht man nur noch die Räume F_0 und \tilde{F}_0 gegenüberzustellen. Durch eine ähnliche Betrachtung, wie wir sie soeben für die α_i und β_i angestellt haben, findet man $\tilde{b} = 2b$, sodass \tilde{F} der Raum $(Oo; o | 2b; \alpha_1, \beta_1; \dots \alpha_r, \beta_r; \alpha_1, \beta_1; \dots \alpha_r, \beta_r)$ ist.

§ 10. Die Fundamentalgruppen der gefaserten Räume.

Die Invarianten gefaserner Räume gegen fasertreue Abbildungen und die Sätze, die von ihnen gelten, benutzen wir von nun an, um Eigenschaften der gefaserten Räume zu untersuchen, die ihnen schon als topologischen Punktman-

nigfaltigkeiten, also unabhängig von der Faserung zukommen. Wir bestimmen zuerst die Fundamentalgruppen der gefaserten Räume.

Zu dem Zweck schneiden wir den Klassenraum \bar{F}_0 wie auf S. 177 zu einem gefaserten ausgebohrten Prisma auf, wählen aber die Ausbohrung so, dass sie das Prisma längs einer Kante H berührt. Die r Ausbohrungen, die an \bar{F}_0 zwecks Anbringung der r Ausnahmefasern noch vorzunehmen sind, legen wir ebenfalls so, dass sie die Kante H berühren. Die Grundfläche des Prismas schneidet aus den $r+1$ Randflächen $\Pi_0, \Pi_1, \Pi_2, \dots, \Pi_r$ die früher angeführten Querschnitte $Q_0, Q_1, Q_2, \dots, Q_r$ aus. Die Fig. 14 zeigt die Grundfläche des Prismas für den Fall eines gefaserten Raumes mit orientierbarer Zerlegungsfläche vom Geschlechte $p=2$ und zwei Ausnahmefasern. Die

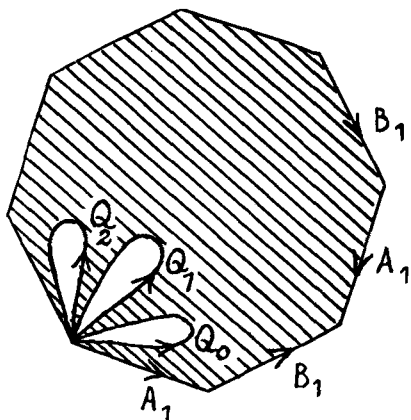


Fig. 14.

Fundamentalgruppe dieses Raumes \bar{F}_0 , also des r -fach ausgebohrten Klassenraumes \bar{F}_0 bestimmt man nun durch Umlaufen der Flächenstücke.¹⁸ Die Relationen lauten im Falle einer orientierbaren Zerlegungsfläche vom Geschlechte $p > 0$, die in \bar{F}_0 zum Fundamentalpolygon mit der Kantenfolge

$$A_1 B_1 A_1^{-1} B_1^{-1} \dots A_p B_p A_p^{-1} B_p^{-1}$$

aufgeschnitten ist,

$$\bar{F}_0, p > 0 \begin{cases} A_i H A_i^{-1} = H^{\varepsilon_i}, B_i H B_i^{-1} = H^{\varepsilon'_i} & (i=1, \dots, p; \varepsilon_i, \varepsilon'_i = \pm 1) \\ Q_0 Q_1 \dots Q_r = A_1 B_1 A_1^{-1} B_1^{-1} \dots A_p B_p A_p^{-1} B_p^{-1} \\ Q_j H Q_j^{-1} = H & (j=0, 1, \dots, r). \end{cases} \quad (1)$$

Darin ist $\varepsilon_i(\varepsilon'_i) = +1$ oder -1 , je nachdem die Faserorientierung längs $A_i(B_i)$ erhalten bleibt oder sich umkehrt. Für $p=0$ hat man die Relationen:

$$\bar{F}_0, p = 0 \begin{cases} Q_0 Q_1 \dots Q_r = 1; \\ Q_j H Q_j^{-1} = H & (j=0, 1, \dots, r). \end{cases} \quad (2)$$

¹⁸ Vergl. H. Seifert, Konstruktion dreidimensionaler geschl. Räume, Ber. Sächs. Akad. Wiss. 83 (1931) S. 33. Die Hilfswege und damit die Relationen der Klasse I fallen hier fort, da \bar{F}_0 nur eine einzige Ecke enthält.

Für eine nichtorientierbare Zerlegungsfläche vom Geschlechte k heissen die Relationen entsprechend:

$$\bar{F}'_0, k \quad \begin{cases} A_i H A_i^{-1} = H^{\varepsilon_i} & (i=1, 2, \dots, k; \varepsilon_i = \pm 1) \\ Q_0 Q_1 \dots Q_r = A_1^2 \dots A_k^2 & \\ Q_j H Q_j^{-1} = H & (j=0, 1, \dots, r). \end{cases} \quad (3)$$

Von den Relationen von \bar{F}'_0 kommt man zu den Relationen von F durch Hinzunahme von $r+1$ weiteren Relationen, die den $r+1$ Verschlussringen der Randringflächen Π_0, \dots, Π_r entsprechen. Sie heissen

$$Q_0 H^b = Q_1^{\alpha_1} H^{\beta_1} = \dots = Q_r^{\alpha_r} H^{\beta_r} = 1. \quad (4)$$

Z. B. bedeutet die Relation $Q_1^{\alpha_1} H^{\beta_1} = 1$, dass der Meridiankreis $M_1 \sim \alpha_1 Q_1 + \beta_1 H$ des Verschlussringes von Π_1 in dem Verschlussring nullhomotop ist. Die Fundamentalgruppe des Raumes

$$(O_0; 0 | b; \alpha_1, \beta_1; \dots, \alpha_r, \beta_r)$$

würde demnach die Relationen haben:

$$\begin{aligned} Q_0 H^b &= Q_1^{\alpha_1} H^{\beta_1} = \dots = Q_r^{\alpha_r} H^{\beta_r} = Q_0 Q_1 \dots Q_r = 1 \\ Q_j H Q_j^{-1} &= H \quad (j=0, 1, \dots, r). \end{aligned} \quad (5)$$

Die Fundamentalgruppen der gefaserten Räume sind hiermit bestimmt.

Setzt man in der Fundamentalgruppe von F die Erzeugenden Q_0, Q_1, \dots, Q_r und $H=1$, so bleibt eine einzige Relation

$$A_1 B_1 A_1^{-1} B_1^{-1} \dots A_p^{-1} B_p^{-1} = 1 \text{ bez. } A_1^2 \dots A_k^2 = 1$$

übrig, die definierende Relation der Fundamentalgruppe der Zerlegungsfläche. Die Fundamentalgruppe der Zerlegungsfläche ist also eine Quotientengruppe der Fundamentalgruppe von F . Ohne Benutzung der Relationen folgt dasselbe Ergebnis auch so: Ordnet man jeder geschlossenen Kurve auf F ihr Bild auf der Zerlegungsfläche f zu, so ist damit eine homomorphe¹⁹ Abbildung der Fundamentalgruppe von F auf die von f hergestellt. Nach dem Homomorphiesatz für Gruppen ist letztere eine Quotientengruppe der ersteren. Ebenso ist die Homo-

¹⁹ Für den Terminus homomorph sagt man bisweilen »ein- oder mehrstufig isomorph«. Unter isomorph verstehen wir 1-isomorph im Anschluss an v. d. Waerden, *Moderne Algebra I* (1930), S. 32.

logiegruppe von f eine Quotientengruppe der Homologiegruppe von F . Diese Überlegung gilt auch noch für offene gefaserte Räume, wovon in § 14 Gebrauch gemacht wird.

Von den dreidimensionalen geschlossenen Mannigfaltigkeiten sind die eingehend untersucht worden, die als Diskontinuitätsbereiche dreidimensionaler sphärischer Bewegungsgruppen auftreten und als solche endliche Fundamentalgruppen haben. Es interessiert uns daher die Frage, ob die gefaserten Räume zu den Mannigfaltigkeiten endlicher Fundamentalgruppe neue beitragen, oder ob sie bereits alle unter den Diskontinuitätsbereichen enthalten sind. In der Arbeit DB II (vgl. Fussnote 1) werden wir zeigen, dass die gefaserten Räume endlicher Fundamentalgruppe mit den Diskontinuitätsbereichen fixpunktloser sphärischer Bewegungsgruppen übereinstimmen. Notwendige Bedingung für die Endlichkeit der Fundamentalgruppe eines gefaserten Raumes F ist die Endlichkeit der Fundamentalgruppe seiner Zerlegungsfläche, da diese ja als Quotientengruppe jener auftritt. Es muss also die Zerlegungsfläche entweder die Kugel oder die projektive Ebene sein.

Ist f die Kugel, so sind (5) die Relationen der Fundamentalgruppe von F . Indem man in (5) $H=1$ setzt, erhält man eine Quotientengruppe der Fundamentalgruppe, nämlich die Gruppe

$$Q_1^{\alpha_1} = \dots = Q_r^{\alpha_r} = \bar{Q}_1 \cdots Q_r = 1. \quad (6)$$

Für $r \geq 3$ sind dies die Relationen einer Polygonnetzgruppe. Man nehme ein geradliniges r -Eck mit den Winkeln $\frac{\pi}{\alpha_1}, \frac{\pi}{\alpha_2}, \dots, \frac{\pi}{\alpha_r}$, das man, je nachdem

$$\sum_{i=1}^r \frac{1}{\alpha_i} >, = \text{ oder } < r-2 \quad (7)$$

ist, auf die Kugel, in die euklidische oder hyperbolische Ebene legen kann, und spiegele es fortgesetzt an seinen Seiten. Dadurch entsteht ein Polygonnetz, das die betreffende Ebene mit abwechselnd kongruenten und spiegelbildlichen (schwarzen und weissen) r -Ecken parkettiert. Es gestattet eine Gruppe von Deckbewegungen erster Art, deren Diskontinuitätsbereich aus einem Doppelpolygon, d. h. einem weissen und einem angrenzenden schwarzen r -Eck besteht. Diese Gruppe hat gerade die Relationen (6) zu definierenden Relationen.²⁰ Da für $r > 3$ das

²⁰ Vergl. W. Threlfall, Gruppenbilder, Abh. Sächs. Akad. d. Wiss. Bd. 41 Nr. 6 (1932).

Polygon nicht auf die Kugel gelegt werden kann, so ist dann die Gruppe (6), also erst recht die Fundamentalgruppe (5) unendlich. Für $r=3$ ist die Gruppe (6) nur endlich, wenn sie eine platonische Gruppe ist, d. h. wenn $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ eines der Wertsysteme $2, 2, n; 2, 3, 3; 2, 3, 4; 2, 3, 5$ ist ($n \geq 2$). Dass alsdann auch die Fundamentalgruppe (5) endlich ist, zeigen wir mit Hilfsmitteln, die dem Gegenstande der vorliegenden Arbeit fernliegen in DB II, § 7. Ist $r \leq 2$, so ist die Gruppe (5) zyklisch von endlicher oder unendlicher Ordnung.

Ist die Zerlegungsfläche f die projektive Ebene, so kann bei endlicher Fundamentalgruppe F nur ein Raum

$$(On; 1 | b; \alpha_1, \beta_1; \dots \alpha_r, \beta_r) \tag{8}$$

sein, weil jeder nichtorientierbare dreidimensionale Raum unendliche Fundamentalgruppe hat. Auch ohne Benutzung dieser Tatsache kann man aus der Betrachtung der angegebenen Fundamentalgruppen der nichtorientierbaren gefaserten Räume erkennen, dass sie alle unendliche Ordnung haben; denn die erste Bettische Zahl p_1 dieser Gruppen ist immer > 0 .²¹ Der Raum (8) aber hat einen zweifachen Überlagerungsraum (§ 9 Nr. 8) nämlich den Raum

$$(Oo; 0 | 2b; \alpha_1, \beta_1; \alpha_1, \beta_1; \dots \alpha_r, \beta_r; \alpha_r, \beta_r).$$

Dieser Raum hat unendliche Fundamentalgruppe, wenn nicht $r=1$ ist. Denn schon für $r=2$ hat der Raum vier Ausnahmefasern. Wir fassen das Ergebnis zusammen in

Satz 9: *Ein gefaserner Raum endlicher Fundamentalgruppe hat entweder die projektive Ebene oder die Kugel zur Zerlegungsfläche. Im ersteren Falle kann er höchstens eine Aufnahmefaser, im letzteren höchstens drei Ausnahmefasern haben. Gibt es drei Ausnahmefasern, so müssen ihre Vielfachheiten eines der platonischen Wertsysteme $2, 2, n; 2, 3, 3; 2, 3, 4; 2, 3, 5$ bilden. Wie alle geschlossenen Räume endlicher Fundamentalgruppe sind die gefaserten Räume endlicher Fundamentalgruppe orientierbar.*

Die Kenntnis der Fundamentalgruppen der gefaserten Räume setzt uns in den Stand, weitere Schlüsse auf die Homöomorphie gefaserner Räume zu ziehen, d. h. die Frage zu erörtern, wann zwei gefaserte Räume, die nicht durch eine

²¹ Poincaré hat die Zahl $P_1 = p_1 + 1$ als Bettische Zahl eingeführt. Wir folgen H. Weyl.

faserentreue Selbstabbildung ineinander überföhrbar sind, dennoch durch eine topologische Abbildung ineinander übergelien. Wir beweisen den

Satz 10: *Eine notwendige Bedingung für die Homöomorphie zweier gefaserner Räume F und F' , die die Kugel zur Zerlegungsfläche und mindestens drei Ausnahmefasern der Vielfachheiten $\alpha_1, \dots, \alpha_r$ bez. $\alpha'_1, \dots, \alpha'_r$ haben, besteht darin, dass $\alpha_1, \dots, \alpha_r$ bis auf die Reihenfolge mit $\alpha'_1, \dots, \alpha'_r$ übereinstimmen.*

Beweis: Ist $r=3$, so ist das Zentrum der Fundamentalgruppe (5) die von H erzeugte Untergruppe \mathfrak{h} . Wäre nämlich das Zentrum grösser als \mathfrak{h} , so müsste die Quotientengruppe (6) noch ein von der Identität verschiedenes Zentrum besitzen. Das ist nun sicher nicht der Fall, wenn die Polygonnetzgruppe (6) eine Gruppe der euklidischen oder hyperbolischen Ebene ist. Ist (6) aber eine platonische Gruppe, so hat sie nur dann ein vom Einselement verschiedenes Zentrum, wenn sie eine Diedergruppe von durch 4 teilbarer Ordnung ist. Doch kann man zeigen, dass auch in diesem Falle das Zentrum von (5) nicht grösser als \mathfrak{h} ist (vergl. DB II, § 6). In jedem Falle ist also für $r=3$ (6) die Quotientengruppe der Fundamentalgruppe (5) nach ihrem Zentrum. Sind nun F und F' homöomorph, so müssen ihre Fundamentalgruppen, also auch deren Quotientengruppen nach dem Zentrum isomorph sein. Damit aber zwei Polygonnetzgruppen (6) isomorph sind, ist notwendig (und hinreichend), dass die Polygone die gleichen Eckenanzahlen haben und dass ihre Winkel, abgesehen von der Reihenfolge, übereinstimmen, d. h. es muss die Bedingung des Satzes erfüllt sein. Um die Richtigkeit der letzten Behauptung einzusehen, können wir annehmen, dass keine der Polygonnetzgruppen eine platonische Gruppe ist, denn eine platonische Gruppe führt notwendig auf die Eckenzahl 3 und auf die Zahlentripel des Satzes 9. Die Elemente $\bar{Q}_1, \dots, \bar{Q}_r$ der Polygonnetzgruppe (6) sind Drehungen um die r Ecken eines bestimmten Polygons Π durch die Winkel $\frac{2\pi}{\alpha_1}, \dots, \frac{2\pi}{\alpha_r}$. Da ein Element endlicher Ordnung der Gruppe (6) als Bewegung einer metrischen Ebene notwendig eine Drehung um einen Fixpunkt, also um eine Ecke des Polygonnetzes ist, so ist jedes von der Identität verschiedene Element endlicher Ordnung von (6) ähnlich mit einer Drehung um eine Ecke des Polygons Π , also mit einer Potenz $\bar{Q}_i^{\gamma_i}$ ($\gamma_i=1, \dots, \alpha_i-1$). Zwei solche Potenzen $\bar{Q}_i^{\gamma_i}$ und $\bar{Q}_j^{\gamma_j}$ sind aber, wie wieder aus der geometrischen Bedeutung hervorgeht, — die platonischen Gruppen hatten wir vorher ausgeschlossen — niemals einander ähnlich. Die Anzahl der Klassen konjugierter Elemente von bestimmter endlicher Ordnung ist also durch die Zahlen $\alpha_1, \dots, \alpha_r$ bestimmt, und umgekehrt bestätigt man leicht, dass die Zahlen $\alpha_1, \dots, \alpha_r$ durch die Anzahl der Klassen konjugierter Elemente von bestimmter endlicher Ordnung festgelegt sind.

§ 11. Faserungen der Hypersphäre (vollständige Aufzählung).

In § 3 hatten wir unendlich viele verschiedene Faserungen der Hypersphäre aufgestellt. Die Fasern waren Bahnkurven gewisser kontinuierlicher Gruppen, und die Faserung war bestimmt durch zwei ganze teilerfremde positive Zahlen m und n , die die Vielfachheiten der beiden Ausnahmefasern angaben. Wir wollen jetzt zeigen, dass diese Faserungen die einzigen in der Hypersphäre sind, d. h. dass jede Faserung der Hypersphäre in eine solche Bahnkurvenfaserung abbildbar ist. Zu dem Zwecke fragen wir allgemeiner nach allen geschlossenen gefaserten Räumen, deren Fundamentalgruppe die Identität ist, oder, was dasselbe besagt, nach allen geschlossenen gefaserten Räumen, in denen jede geschlossene Kurve nullhomotop ist. Wir sind dann sicher, darunter alle möglichen Hypersphärenfaserungen anzutreffen.

Erst recht muss dann auf der Zerlegungsfläche eines solchen gefaserten Raumes jede geschlossene Kurve nullhomotop sein, die Zerlegungsfläche ist also die Kugel und der gefaserte Raum ein Raum

$$(Oo; o|b; \alpha_1, \beta_1; \dots \alpha_r, \beta_r).$$

Dafür dass die Fundamentalgruppe dieses Raumes endlich sei, ist nach Satz 9 $r \leq 3$ eine notwendige Bedingung. Nun gibt es für $r=3$ zwar gefaserte Räume endlicher Fundamentalgruppe, nämlich dann, wenn die Vielfachheiten der Ausnahmefasern, die in Satz 9 angegebenen Werte haben. Doch ist dann die Quotientengruppe (6) von S. 202 eine platonische Gruppe und nicht die Identität. Es kann also r höchstens $= 2$ sein. Wir behandeln der Reihe nach die Fälle $r=0, 1, 2$. Für $r=0$ lautet die Fundamentalgruppe (5) $Q_0 H^b = Q_0 = 1$, also $H^b = 1$. Sie ist dann und nur dann die Identität, wenn $b = \pm 1$ ist. Es gibt somit nur zwei gefaserte Räume ohne Ausnahmefasern, deren Fundamentalgruppe die Identität ist, nämlich die Räume $(Oo; o|1)$ und $(Oo; o|-1)$. Sie unterscheiden sich nur durch die Orientierung nach Satz 6, S. 184 und stellen die Faserung der Hypersphäre durch Kreise dar, denn diese ist ebenfalls frei von Ausnahmefasern.

Für $r=1$ ist $b\alpha_1 + \beta_1 = \pm 1$ die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, dass die Fundamentalgruppe (5) (S. 201) die Identität wird. Jetzt ist $\alpha_1 (\geq 2)$ beliebig wählbar. Für b und β_1 gibt es dann noch zwei Lösungen, $b=0, \beta_1=1$ und $b=-1, \beta_1=\alpha_1-1$. Die beiden Räume

$$(Oo; o|o; \alpha_1, 1) \quad \text{und} \quad (Oo; o|-1; \alpha_1, \alpha_1-1)$$

unterscheiden sich nach Satz 6 wieder nur durch die Orientierung, sodass der gefaserte Raum durch die Eigenschaft, die Fundamentalgruppe zur Identität und eine einzige α_1 -fache Ausnahmefaser zu haben, bis auf seine Orientierung eindeutig bestimmt ist. Dieser Raum ist somit die Bahnkurvenfaserung der Hypersphäre, die den Werten $m=1$, $n=\alpha_1$ von § 3 entspricht.

Für $r=2$ ist die Fundamentalgruppe (5) zyklisch von der Ordnung $|b\alpha_1\alpha_2 + \beta_1\alpha_2 + \beta_2\alpha_1|$ (bezw. die freie Gruppe von einer Erzeugenden, falls dieser Ausdruck verschwindet). Die Gleichung

$$b\alpha_1\alpha_2 + \beta_1\alpha_2 + \beta_2\alpha_1 = \pm 1 \tag{1}$$

hat nur dann eine Lösung, wenn α_1 und α_2 relativ prim sind. Sind aber α_1 und α_2 relativ prim vorgegeben (und ≥ 2 als Vielfachheiten von Ausnahmefasern), so gibt es genau zwei Lösungen für b, β_1, β_2 , für die β_1 und β_2 die Normierungsbedingungen $0 < \beta_1 < \alpha_1$ und $0 < \beta_2 < \alpha_2$ erfüllen. Die zugehörigen Räume unterscheiden sich nur durch die Orientierung. Den Beweis für die Existenz dieser Lösungen erbringen wir im nächsten Paragraphen für beliebiges r und gehen deshalb hier nicht darauf ein. Nun haben wir in § 3 eine Faserung der Hypersphäre durch Bahnkurven gefunden, die gerade zwei Ausnahmefasern der Vielfachheiten m und n hat, wo m und n nur teilerfremd sein mussten. Die hier gefundene durch α_1 und α_2 bestimmte Faserung muss also mit der Faserung des § 3 übereinstimmen. Damit ist der Satz bewiesen:

Satz 11: *Ein geschlossener gefasertes Raum, der die Identität zur Fundamentalgruppe hat, ist die Hypersphäre. Die sämtlichen Hypersphärenfaserungen sind durch zwei ganze positive relativ prime Zahlen m und n umkehrbar eindeutig bestimmt. Ist $m=n=1$, so fehlen Ausnahmefasern; ist nur eine der beiden Zahlen $=1$, so gibt es eine Ausnahmefaser, deren Vielfachheit die andere Zahl angibt; ist keine der beiden Zahlen $=1$, so geben sie die Vielfachheiten der beiden alsdann vorhandenen Ausnahmefasern an. Die Hypersphärenfaserungen stimmen mit den Bahnkurvenfaserungen der kontinuierlichen Gruppen des § 3 überein.*

Die gewöhnlichen Fasern sind für $m \neq 1$ und $n \neq 1$ Torusknoten, die sich im konformen Bildraum (S. 159) m mal um die z -Achse und n mal um den Einheitskreis winden. Für $m=2$, $n=3$ sind sie also Kleeblattschlingen.

§ 12. Die gefaserten Poincaréschen Räume.

In § 11 haben wir nach allen gefaserten Räumen gefragt, die dieselbe Fundamentalgruppe haben wie die Hypersphäre, nämlich die Identität. Jetzt verallgemeinern wir die Aufgabe dahin, alle gefaserten Räume zu finden, deren Homologiegruppe die Identität ist. Ein solcher Raum, der nicht die Hypersphäre ist, heisst ein Poincaréscher Raum. Die Räume, deren Homologiegruppe die Identität ist und die also entweder die Hypersphäre oder Poincarésche Räume sind, sind dadurch gekennzeichnet, dass in ihnen jede geschlossene Kurve nullhomolog, aber nicht notwendig jede nullhomotop ist, d. h. jede geschlossene Kurve ist zwar Rand einer orientierbaren Fläche, aber sie braucht nicht Rand eines Elementarflächenstückes zu sein, oder mit anderen Worten gesagt: sie lässt sich immer mit, aber nicht notwendig immer ohne Zerreiſsung in geschlossene orientierte Teilkurven auf einen Punkt zusammenziehen.²²

Nach S. 201 ist mit der Homologiegruppe des gefaserten Raumes auch die Homologiegruppe der Zerlegungsfläche die Identität, die Zerlegungsfläche also die Kugel und der gefaserte Raum ein Raum $(Oo; o|b; \alpha_1, \beta_1; \dots \alpha_r, \beta_r)$. Seine Homologiegruppe erhält man dadurch, dass man die Fundamentalgruppe (5) S. 201 abelsch macht. Die abelsch gemachte Fundamentalgruppe hat die $r + 2$ Erzeugenden $Q_0, Q_1, \dots Q_r, H$ und ausser den Vertauschbarkeitsrelationen die $r + 2$ Relationen

$$Q_0 H^b = Q_1^{\alpha_1} H^{\beta_1} = \dots = Q_r^{\alpha_r} H^{\beta_r} = Q_0 Q_1 \dots Q_r = 1. \tag{1}$$

Additiv schreiben sich die Relationen als lineare Gleichungen

$$\begin{aligned} Q_0 & \dots \dots \dots + b H = 0 \\ & \alpha_1 Q_1 \dots \dots \dots + \beta_1 H = 0 \\ & \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \\ & \dots \dots \dots \alpha_r Q_r + \beta_r H = 0 \\ Q_0 + Q_1 + \dots + Q_r & \dots \dots = 0. \end{aligned} \tag{1'}$$

Die Null der rechten Seite dieser Gleichungen steht bei der additiven Schreibung für das Einselement der Gruppe (1). Aus ihnen kann man bekanntlich gleichwertige Relationen und Erzeugendensysteme ableiten, indem man auf die linken Seiten und auf die Erzeugenden unimodulare Substitutionen ausübt. Hierdurch

²² Vergl. DB I, S. 51.

lässt sich stets eine Normalform der Koeffizientenmatrix herstellen, die höchstens in der Diagonale von 0 verschiedene Koeffizienten, die invarianten Faktoren der ursprünglichen Matrix aufweist. Wenn nun die Gruppe aus dem Einselement allein bestehen soll, so müssen auf Grund eines Relationensystems alle Erzeugenden zum Einselement werden. In der Normalform müssen also die Diagonalelemente alle $=1$ werden, weil sonst nicht schon Q_i sondern erst ein Vielfaches von $Q_i=0$ wäre. Es dürfen daher keine von 1 verschiedenen invarianten Faktoren, keine Torsionskoeffizienten, vorhanden sein, und es dürfen auch keine freien Erzeugenden vorkommen, d. h. es darf nicht eine Erzeugende dadurch, dass alle Koeffizienten ihrer Spalte verschwinden, überhaupt nicht beschränkt werden, wofür man auch sagt, dass die Bettische Zahl $=0$ ist. Da die vorliegende Matrix quadratisch ist, so sind beide Forderungen dann und nur dann erfüllt, wenn die Determinante

$$A = \begin{vmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & b \\ 0 & \alpha_1 & \dots & 0 & \beta_1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \alpha_r & \beta_r \\ 1 & 1 & \dots & 1 & 0 \end{vmatrix} = \pm 1 \quad (2)$$

ist. Ausrechnen von A liefert die Gleichung

$$A = b\alpha_1 \dots \alpha_r + \beta_1\alpha_2 \dots \alpha_r + \alpha_1\beta_2 \dots \alpha_r + \dots + \alpha_1\alpha_2 \dots \beta_r = \varepsilon \quad (\varepsilon = \pm 1). \quad (3)$$

Hätte man die Orientierung des Raumes umgekehrt, hätte man also den gefaserten Raum $(O0; 0 | -r-b; \alpha_1, \alpha_1-\beta_1; \dots, \alpha_r, \alpha_r-\beta_r)$ vor sich, so würde die entsprechend gebildete Determinante den Wert $-\varepsilon$ erhalten. Wir denken uns den Raum so orientiert, dass $\varepsilon=+1$ wird. Dadurch ist die Orientierung des Raumes festgelegt. Um die Gleichung

$$b\alpha_1 \dots \alpha_r + \beta_1\alpha_2 \dots \alpha_r + \dots + \alpha_1\alpha_2 \dots \beta_r = 1 \quad (4)$$

aufzulösen, denken wir uns $\alpha_1, \dots, \alpha_r$ fest vorgegeben, $\alpha_i \geq 2$ und suchen $b, \beta_1, \dots, \beta_r$ zu bestimmen. Für $r=0$ und $r=1$ kommt man auf die beiden Gleichungen $b=1$ und $b\alpha_1 + \beta_1=1$ zurück, die in § 11 gelöst worden sind. Wir setzen daher $r \geq 2$ voraus. Die Lösung von (4) ist sicher unmöglich, wenn zwei der α_i einen gemeinsamen Teiler haben. Setzen wir also voraus, dass je zwei α_i teilerfremd sind! Dann haben die Zahlen $\alpha_1 \dots \alpha_r, \alpha_2 \dots \alpha_r, \alpha_1\alpha_3 \dots \alpha_r, \dots, \alpha_1\alpha_2 \dots \alpha_{r-1}$ den grössten gemeinsamen Teiler 1 . Infolgedessen gibt es ein Lösungssystem

$b, \beta_1, \dots, \beta_r$ und zwar ist β_i prim zu α_i , da sonst die linke Seite einen von 1 verschiedenen Faktor hätte. Jedoch gilt für die β_i noch nicht notwendig die Normierungsbedingung

$$0 < \beta_i < \alpha_i. \quad (5)$$

Diese Bedingung kann man aber dadurch erfüllen, dass man β_i durch $\beta_i + x_i \alpha_i$ und gleichzeitig b durch $b - x_i$ ersetzt, wodurch die Richtigkeit von Gleichung (4) nicht gestört wird. Das so normierte Lösungssystem ist einzig. Ist nämlich $b', \beta'_1, \dots, \beta'_r$ eine andere ebenfalls normierte Lösung von (4), so ist nach Subtraktion

$$(b - b') \alpha_1 \dots \alpha_r + (\beta_1 - \beta'_1) \alpha_2 \dots \alpha_r + \dots = 0.$$

Daraus folgt $\beta_i - \beta'_i \equiv 0 \pmod{\alpha_i}$, also $\beta_i = \beta'_i$.

Mit der Ermittlung der Lösung von Gleichung (4) ist das Ergebnis des vorigen Paragraphen vollständig bewiesen. Für $r=2$ sind danach die gefaserten Räume, deren Homologiegruppe die Identität ist, der Hypersphäre homöomorph. Für $r > 2$ sind sie Poincarésche Räume, da nach Satz 11 S. 206 eine Faserung der Hypersphäre höchstens zwei Ausnahmefasern hat. Wir gelangen damit zu dem Ergebnis

Satz 12: *In einem gefaserten Poincaréschen Raum gibt es mindestens drei Ausnahmefasern. Ihre Vielfachheiten $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$ sind paarweise relativ prim. Sind umgekehrt $\alpha_1, \dots, \alpha_r$ ($r \geq 3$) paarweise relativ prime Zahlen, ≥ 2 , so gibt es genau einen gefaserten Poincaréschen Raum, der r Ausnahmefasern dieser Vielfachheiten hat. Zwei gefaserte Poincarésche Räume sind nur dann homöomorph, wenn sie sich faserstreu aufeinander abbilden lassen; mit anderen Worten: wenn ein Poincaréscher Raum überhaupt faserbar ist, so nur auf eine Weise. Der einzige gefaserte Poincarésche Raum mit endlicher Fundamentalgruppe ist der Dodekaederraum.²³*

Die beiden letzten Behauptungen sind noch zu beweisen. Wenn zwei gefaserte Poincarésche Räume homöomorph sind, so müssen sie nach Satz 10 S. 204 in den Vielfachheiten ihrer Ausnahmefasern übereinstimmen. Durch diese Vielfachheiten ist aber die Faserung eines Poincaréschen Raumes schon bestimmt. — Nach Satz 9 S. 203 kann ein gefaserner Poincaréscher Raum mit endlicher Fundamentalgruppe nur drei Ausnahmefasern mit den Vielfachheiten 2, 3, 5 haben, denn dies ist das einzige unter den dort angegebenen Wertetripeln, des-

²³ Vergl. DB I, § 12.

sen Zahlen zu je zweien relativ prim sind. Dieser gefaserte Raum hat wegen Gleichung (4) die Invarianten

$$(Oo; o | -1; 5, 1; 2, 1; 3, 1).$$

Seine Fundamentalgruppe hat daher die Relationen

$$Q_0 H^{-1} = Q_1^5 H = Q_2^2 H = Q_3^3 H = Q_0 Q_1 Q_2 Q_3 = 1.$$

(Die Vertauschbarkeit von H mit Q_i ist eine Folge dieser Relationen und braucht deshalb nicht hingeschrieben zu werden.) Elimination von H führt die Relationen in die der binären Ikosaedergruppe der Ordnung 120 über²⁴:

$$Q_1^5 = Q_2^2 = Q_3^3 = Q_1 Q_2 Q_3.$$

Die Übereinstimmung dieses Raumes mit dem Dodekaederraum wird in DB II, § 7, durch Angabe einer Faserung des Dodekaederraums bewiesen.

§ 13. Aus Torusknoten abgeleitete Poincarésche Räume.

M. Dehn²⁵ hat zuerst ein Verfahren zur Konstruktion von beliebig vielen Poincaréschen Räumen angegeben. Eine in der Hypersphäre gelegene doppel-punktfreie (verknottete) Kurve C wird ausgebohrt. Die Homologiegruppe des entstehenden, von einer Ringfläche Π berandeten Raumes, des Aussenraumes A , ist die freie Gruppe von einer Erzeugenden. Die Erzeugende ist der auf der Randfläche Π gelegene Meridiankreis M des Bohrkerns. Ist B ein zu M konjugierter Rückkehrschnitt auf Π , so ist daher $B \sim xM$ (im Aussenraum), und man kann annehmen, dass $x=0$ ist, da man andernfalls B nur durch $B-xM$ zu ersetzen braucht. Offenbar ist B durch die Eigenschaft, ein zu M konjugierter Rückkehrschnitt und in A nullhomolog zu sein, bis auf seine Orientierung und Deformation auf Π eindeutig bestimmt. Schliesst man nun A mit einem Verschlussring V' , dessen Meridiankreis

$$M' \sim M + qB \quad (\text{auf } \Pi; q \neq 0) \quad (1)$$

ist, so entsteht ein geschlossener Raum R , dessen Homologiegruppe die Identität ist, denn das erzeugende Element M der Homologiegruppe von A wird in R

²⁴ Vergl. Aufgabe 84 im Jahresber. d. D. Math. Ver. 41, 1932 S. 6.

²⁵ M. Dehn, Über die Topologie des dreidimensionalen Raumes. Math. Ann. 69 (1910).

wegen $M' \sim 0$, $B \sim 0$ ebenfalls ~ 0 . R ist also entweder die Hypersphäre oder ein Poincaréscher Raum.

Wir wollen nun den Fall besonders betrachten, dass C ein Torusknoten ist, d. h. ein Knoten, der doppeltpunktfrei auf einem unverknoteten Torus ausgebreitet werden kann. Die allgemeinsten Torusknoten sind die Bahnkurven der Faserungen der Hypersphäre, die in § 3 angegeben sind. Legen wir eine solche Faserung der Hypersphäre, oder vielmehr des konformen Raumes, zugrunde, die wir wie früher durch zwei teilerfremde Zahlen m und $n (\geq 2)$ charakterisieren, so wird einer Faser C , die weder die z -Achse noch der Einheitskreis, also eine gewöhnliche Faser sei, durch Fortnahme einer Faserumgebung von C ausgebohrt. Nun lässt sich eine Faser H der Randringfläche Π im Aussenraum A in die n mal durchlaufene z -Achse überführen, da aber die z -Achse in A dem m -fachen Meridiankreis M homolog ist, so ist $H \sim mnM$ in A , geeignete Orientierung von M vorausgesetzt. Somit ist $H - mnM \sim 0$ in A , also identisch mit der Kurve B . Nach Gleichung (1) ist dann $M' \sim M + qB \sim (1 - qmn)M + qH$ auf Π . Da M Querkreis auf Π ist, so enthält der Verschlussring eine Ausnahmefaser der Vielfachheit $|qmn - 1|$. Da wir nämlich m und $n > 1$ voraussetzen — sonst wäre C unverknotet und wir würden sicher keinen Poincaréschen Raum erhalten —, ist auch $|qmn - 1| > 1$, ja sogar grösser als jede der Zahlen m, n . Der Raum R ist also der nach Satz 12 eindeutig bestimmte gefaserte Poincarésche Raum mit drei Ausnahmefasern der Vielfachheiten $m, n, |qmn - 1|$. Da ferner $|q_1mn - 1| \neq |q_2mn - 1|$ ist, falls $q_1 \neq q_2$, so sind die Poincaréschen Räume, die man aus ein und demselben Torusknoten durch verschiedene Schliessung ableiten kann, nach Satz 12 sicher nicht homöomorph, weil die Vielfachheiten ihrer Ausnahmefasern nicht übereinstimmen. Schliesslich sind zwei Poincarésche Räume, die sich aus verschiedenen Torusknoten ableiten, niemals homöomorph. Weiss man nämlich von einem gefaserten Poincaréschen Raum, dessen Ausnahmefasern die Vielfachheiten $\alpha_1 < \alpha_2 < \alpha_3$ haben, dass er sich aus einem Torusknoten ableitet, so kann es wegen $|qmn - 1| > \text{Max}(m, n)$ nur der Knoten $m = \alpha_1, n = \alpha_2$ sein. Nebenbei folgt daraus übrigens, dass zwei Torusknoten, die zu den Werten $m < n$ bez. $m' < n'$ gehören, nur dann topologisch äquivalent sind, wenn $m = m', n = n'$ ist, denn die Poincaréschen Räume, die aus ihnen abgeleitet werden können, stimmen nur dann überein.

Satz 13: *Ein Poincaréscher Raum lässt sich dann und nur dann aus einem Torusknoten ableiten, wenn er sich fasern lässt und seine Faserung genau drei Aus-*

nahmefasern der Vielfachheiten $\alpha_1 < \alpha_2 < \alpha_3$ hat, wobei $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ paarweise relativ prime ganze positive Zahlen (> 1) sind und $\alpha_3 = |q\alpha_1\alpha_2 - 1|$ ist (q eine beliebige ganze Zahl). Ein solcher Poincaréscher Raum lässt sich nur aus einem einzigen Torusknoten auf eindeutig bestimmte Weise ableiten.

So ist z. B. der Dehnsche Kleeblattschlingenraum, der sich aus einer Kleeblattschlinge ableitet und zu den Werten $m=2, n=3, q=1$ gehört, homöomorph mit dem einzigen gefaserten Poincaréschen Raum mit drei Ausnahmefasern der Vielfachheiten 2, 3, 5. Seinen Faserinvarianten sind S. 210 angegeben.

§ 14. Schiebungsgruppen gefaserner Räume.

Eine Schiebungsgruppe eines gefaserten Raumes F ist eine endliche Gruppe von faserstreuen Selbstabbildungen, deren jede jede Faser mit Erhaltung ihrer Orientierung in sich verschiebt. Ist H eine beliebige Faser von F , so bilden die sämtlichen Selbstabbildungen, die H bei der Schiebungsgruppe erfährt, eine Gruppe \mathfrak{S} . Diese ist aber homöomorph einer endlichen zyklischen Gruppe von starren Drehungen eines Kreises in sich. Ist nämlich P ein beliebiger Punkt auf H , und $P', P'', \dots, P^{(i)} = P$ seine äquivalenten, und zwar in ihrer natürlichen Reihenfolge, die einer Durchlaufung der orientierten Faser H von P aus entspricht, so ist klar, dass sich bei einer Abbildung aus \mathfrak{S} die Punkte P, P', \dots und die dadurch bestimmten Strecken auf H zyklisch vertauschen müssen. Bleibt insbesondere P fest, so wird die Strecke PP' bei Festhaltung der Endpunkte auf sich abgebildet, und da diese Abbildung endliche Ordnung haben muss, ist sie die Identität. Mit P bleibt daher überhaupt jeder Punkt von H fest, und es gibt in der Gruppe \mathfrak{S} gewiss eine Abbildung, die P in einen vorgegebenen Punkt $P^{(k)}$ überführt. \mathfrak{S} besteht also aus den Potenzen derjenigen Abbildung, bei der P in P' übergeht.

Nunmehr folgt, dass jede Schiebungsgruppe \mathfrak{S} zyklisch ist. Man braucht nur zu zeigen, dass eine Abbildung S von \mathfrak{S} , bei der eine einzige gewöhnliche Faser H punktweise festbleibt, die Identität ist. Denn dann ist \mathfrak{S} 1-isomorph zur Gruppe \mathfrak{S} , die wir als zyklisch erkannt haben. Nun konvergiert das Maximum der Verschiebungen, die die Punkte einer bestimmten Faser bei S erfahren, nach 0, wenn man sich der Faser H nähert, denn H ist eine gewöhnliche Faser. Andererseits kann diese maximale Verschiebung nicht beliebig klein werden, da dann die Ordnung von S unendlich gross werden würde. Es muss also eine

ganze Faserumgebung von H geben, deren Fasern bei S punktweise festbleiben. Die Gesamtheit der gewöhnlichen Fasern von F , die bei S punktweise festbleiben, bilden also eine offene Menge. Die Menge der gewöhnlichen Fasern, die bei S nicht punktweise festbleiben, ist aber ebenfalls offen, also die Nullmenge, da F zusammenhängend ist. Natürlich bleiben dann bei \mathfrak{S} auch alle Ausnahmefasern fest.

Von der Existenz der Schiebungsgruppen handelt der folgende

Satz 14: *Ein geschlossener gefaserner Raum, in dem sich die Fasern gleichmässig orientieren lassen, also ein Raum einer Klasse $O_0; p$ oder $Nn I; k$ gestattet eine Schiebungsgruppe von beliebiger Ordnung g .*

Beweis: Wir zeigen zunächst, dass ein beliebiger gefaserner Vollring mit den charakteristischen Zahlen μ, ν eine Schiebungsgruppe der Ordnung g zulässt. Denkt man sich den Vollring zum euklidischen Zylinder von der Höhe 1 aufgeschnitten und bezeichnet z den Abstand eines Punktes von der Grundfläche, so gibt es eine kontinuierliche Bewegungsgruppe des Vollringes, bei der jeder Punkt auf seiner Faser wandert, während sich die z -Koordinate nach der Formel $z' = z + t$ stetig ändert. Darin ist z' die z -Koordinate des Bildpunktes und t der stetige Parameter der Gruppe. Die Koordinate z ist in naheliegender Weise als zyklische Koordinate aufzufassen, die von $-\infty$ bis $+\infty$ variieren kann. Wächst t stetig von 0 an, so ist für $t = 1$ die mittlere Faser in ihre alte Lage zurückgekommen, für $t = \mu$ ist zum ersten Male wieder die identische Abbildung erreicht. Die Bewegungen, die den Parameterwerten $t = 0, \frac{\mu}{g}, \dots, \frac{\mu(g-1)}{g}$ entsprechen, bilden eine zyklische Schiebungsgruppe der Ordnung g . Sei nun F ein gefaserner Raum mit gleichmässig orientierten Fasern; seine Zerlegungsfläche f wird so trianguliert, dass jeder Ausnahmepunkt von f im Innern eines Dreiecks liegt, dass ein Dreieck höchstens einen Ausnahmepunkt enthält und dass je zwei Dreiecke mit Ausnahmepunkten punktfremd sind. Dieser Triangulation von f entspricht eine Zerlegung von F in endlich viele gefaserte Vollringe. Wir definieren in den Vollringen, die Ausnahmefasern enthalten, wie soeben eine zyklische Schiebungsgruppe der Ordnung g , ebenso auf den noch übrig bleibenden Fasern, die sich in die Eckpunkte der Triangulation abbilden und die nicht schon auf den Ausnahmefasern liegen. Als erzeugende Bewegung Z der Gruppe betrachten wir immer die Schiebung, bei der die gewöhnlichen Fasern um möglichst wenig im positiven Sinne in sich verschoben werden. Ist nun K der gefaserte Kreisring, der sich in eine bestimmte Strecke der Triangulation abbildet, so liegt K entweder auf einem der Ausnahmefasern; dann ist die Schiebungsgruppe auf K schon definiert. Andernfalls ist die Schiebungsgruppe nur auf den beiden Randkreisen a und b von K festgelegt. Wir bilden dann K so auf einen gleichbezeichneten

Kreisring der euklidischen Ebene ab, dass die Fasern von K konzentrische Kreise werden und dass a und b von Z starr in sich gedreht werden. Diese Drehung erfolgt durch den Winkel $\frac{2\pi}{g}$ in demselben Sinne, da Z die Bewegung ist, die eine Faser um den kleinsten möglichen Betrag in sich verschiebt und weil a und b in K homolog sind, wegen der gleichmässigen Orientierung der Fasern von F . Durch diese euklidische Drehung erfährt dann der Kreisring K eine Schiebung Z der Ordnung g in sich, die auf dem Rande mit der vorgegebenen Schiebung übereinstimmt. Es bleibt noch übrig, die Schiebung Z in das Innere der gewöhnlichen Vollringe fortzusetzen, die sich in die von Ausnahmepunkten freien Dreiecke der Triangulation von f abbilden. Auf der Randringfläche II eines solchen Vollringes V ist die Schiebung schon erklärt. Wir denken uns V als Rotationsvollring im euklidischen Raume gelegen, sodass die Fasern von V bei Rotation um die Rotationsachse in sich verschoben werden. Die Oberfläche II von V bilden wir vermöge einer fasertreuen Selbstabbildung A so auf sich ab, dass die Bewegung Z auf II in eine starre Drehung von II um die Rotationsachse durch den Winkel $\frac{2\pi}{g}$ übergeht. Das ist immer möglich, da nämlich die Schiebung Z auf den drei gefaserten Kreisringen, aus denen II besteht und die sich in die drei Seiten eines Dreiecks der Triangulation abbilden, homöomorph einer starren Drehung eines euklidischen Kreisringes durch den Winkel $\frac{2\pi}{g}$ ist, so ist die Schiebung Z auf II homöomorph einer starren Drehung einer Ringfläche des euklidischen Raumes um ihre Rotationsachse. Man kann A immer so wählen, dass jede Kurvenklasse auf II in sich übergeht. Wie auf S. 167 gezeigt, lässt sich dann A in den Vollring V hinein zu einer fasertreuen Selbstabbildung von V fortsetzen. Man kann daher V so auf einen rotationssymmetrischen Vollring V' des euklidischen Raumes abbilden, dass die Fasern von V' bei Rotation um die Rotationsachse in sich gedreht werden und dass die Bewegung Z auf II in eine euklidisch starre Drehung der Oberfläche II' von V' durch den Winkel $\frac{2\pi}{g}$ übergeht. In V' definieren wir als Schiebung Z die starre Drehung von V' durch den Winkel $\frac{2\pi}{g}$. Damit ist in ganz F eine Schiebung Z der Ordnung g erklärt, womit Satz 14 bewiesen ist.

Wir werden jetzt zeigen, dass man durch Identifizieren der hinsichtlich einer Schiebungsgruppe äquivalenten Punkte eines gefaserten Raumes F wieder einen gefaserten Raum F'' erhält, d. h. dass der Diskontinuitätsbereich einer Schiebungsgruppe von F wieder ein gefasertes Raumbereich ist. Zur Vorbereitung bestimmen wir den Diskontinuitätsbereich einer Schiebungsgruppe innerhalb eines gefaserten Vollringes V . Ist V ein gewöhnlicher Vollring, so zerfällt er bei der

Schiebungsgruppe in g äquivalente zylindrische Stücke; in jedem ist Grund- und Dachfläche unverschraubt zugeordnet, d. h. der Diskontinuitätsbereich ist wieder ein gewöhnlicher gefaserner Vollring. Sei jetzt V ein Vollring mit einer Ausnahmefaser der charakteristischen Zahlen μ, ν . Es kann dann sein, dass es in der Schiebungsgruppe \mathcal{G} eine von der Identität verschiedene Untergruppe \mathfrak{U} gibt, bei der die mittlere Faser punktweise fest bleibt. \mathfrak{U} ist zyklisch von der Ordnung u . Schneidet man V zum euklidischen Vollring auf, so werden bei einer Bewegung von \mathfrak{U} Grund- und Dachfläche des Zylinders im allgemeinen nicht in sich übergehen. Man kann jedoch einen Meridianschnitt finden, der bei \mathfrak{U} in sich abgebildet wird. Sei E_0 die Kreisscheibe, in der der Zylinder V von seiner mittleren Ebene geschnitten wird, E_1, E_2, \dots, E_{u-1} die Bilder von E_0 bei der Gruppe \mathfrak{U} . Wir nehmen an, dass kein E_i Grund- oder Dachfläche des Zylinders V durchsetzt. Andernfalls brauchte man nämlich V nur durch einen konzentrischen dünneren Zylinder zu ersetzen, in dem diese Annahme zutrifft. Jede achsenparallele Strecke wird also von den E_0, E_1, \dots, E_{u-1} in u Punkten getroffen, von denen natürlich einige zusammenfallen können. Wählt man auf jeder Strecke den obersten dieser u Punkte aus, so erhält man einen Meridianschnitt E von V , der bei \mathfrak{U} in sich übergeführt wird.²⁶ Man kann also den Vollring V längs E zu einem euklidischen Zylinder aufschneiden, in dem die Untergruppe \mathfrak{U} als eine Gruppe starrer Drehungen um die Achse, verbunden mit Schiebungen der achsenparallelen Strecken in sich erscheint. Der Diskontinuitätsbereich ist ein Zylindersektor vom Öffnungswinkel $\frac{2\pi}{u}$, also ein Keil, in dem die beiden Seitenflächen zugeordnet sind, sodass er zu einem gefaserten Zylinder wird. In diesem sind Grund- und Dachfläche, um den Winkel $\frac{2\pi\nu}{\mu}$ verschraubt, einander zugeordnet; dabei ist $\mu' = \frac{\mu}{u}$, μ' und ν sind somit teilerfremd. Der

²⁶ Dass E bei \mathfrak{U} in sich übergeht, folgt so: Angenommen, es gibt eine Abbildung B in \mathfrak{U} , bei der ein Punkt P von E in einen Punkt P' übergeht, der nicht auf E liegt. Dann ist der Punkt Q' , in dem die durch P' gehende achsenparallele Strecke des Zylinders V von E getroffen wird, $\neq P'$. Nun geht die Strecke $P'Q'$ bei B^{-1} über in eine Strecke PQ , wo Q ein Punkt auf einem der Flächenstücke E_i ist. Da aber P auf der durch P gehenden achsenparallelen Strecke der oberste von allen n Schnittpunkten mit den Flächenstücken E_0, \dots, E_{u-1} ist, so enthält PQ einen Punkt R der Dachfläche von V , dessen Bildpunkt bei B ein bestimmter Punkt R' auf der Strecke $P'Q'$ ist. Lässt man nun P auf E stetig nach der Zylinderachse rücken, so ändern sich P', Q', R' stetig, und da schliesslich P' und Q' zusammenfallen, so muss R' einmal mit P' oder Q' zusammenfallen, d. h. es gibt eine Abbildung B^{-1} aus \mathfrak{U} , bei der ein Punkt eines gewissen E_i in einen Punkt der Dachfläche übergeht. Das wurde aber ausgeschlossen.

Diskontinuitätsbereich der Untergruppe \mathbb{H} ist also ein gefasertes Vollring V' mit einer $\frac{\mu}{u}$ -fachen Ausnahmefaser.

Die Schiebungsgruppe \mathbb{G} von V bildet sich nun in eine Schiebungsgruppe \mathbb{G}' von V' ab. \mathbb{G}' hat die Ordnung $v = \frac{g}{u}$ und enthält ausser der Identität keine Bewegung, die die mittlere Faser von V' punktweise festlässt. Der V' entsprechende euklidische Zylinder wird dann durch die $v-1$ Bilder der Grundfläche in v äquivalente Teile zerlegt. Grund- und Dachfläche eines jeden Teiles sind, um einen gewissen Winkel $\frac{2\pi v''}{\mu''}$ verschraubt, einander zugeordnet $(\mu'', v'') = 1$. Der Diskontinuitätsbereich D von \mathbb{G}' innerhalb V' , das ist zugleich derjenige von \mathbb{G} innerhalb V , ist somit ein gefasertes Vollring, der von V' v -fach unverzweigt überlagert wird. Da die Fasern von D denjenigen von V' umkehrbar eindeutig entsprechen, so liegt die Zerlegungsfläche von V' unverzweigt über der Zerlegungsfläche von D . Nach S. 196 ist daher $(\mu'', v) = 1$, also nach Formel (1) S. 196, $\mu' = \mu''$, d. h. die Ausnahmefaser von D ist eine μ' -fache. Nun ist $(g, \mu) = (uv, u\mu') = u(v, \mu') = u$ und $v = \frac{g}{u} = \frac{g}{(g, \mu)}$. Die Zahlen u, v sind also durch die Ordnung g von \mathbb{G} und die Vielfachheit μ der Ausnahmefaser von V bestimmt.

Ergebnis: *Der Diskontinuitätsbereich einer Schiebungsgruppe \mathbb{G} der Ordnung g innerhalb eines gefaserten Vollringes V mit einer μ -fachen Ausnahmefaser ist ein gefasertes Vollring, dessen mittlere Faser die Vielfachheit $\frac{\mu}{(g, \mu)}$ hat. Ist $(\mu, g) > 1$, so ist die Überlagerung des Diskontinuitätsbereiches durch V verzweigt, und zwar ist die mittlere Faser von V eine (μ, g) -fache Verzweigungslinie. Daraus folgt, dass der Diskontinuitätsbereich einer Schiebungsgruppe \mathbb{G} von F ein gefasertes Raum F' ist, der von F im allgemeinen verzweigt überlagert wird.*

Die Faserinvarianten von F' wollen wir jetzt berechnen. Sei F der Raum $(O_0; p|b; \alpha_1, \beta_1; \dots \alpha_r, \beta_r)$. Nach Ausbohrung seiner Ausnahmefasern und einer beliebigen gewöhnlichen Faser bleibt das topologische Produkt \bar{F} aus einer $(r+1)$ -fach gelochten Fläche vom Geschlechte p und einer Kreislinie. Auf den Randringflächen $\Pi_0, \Pi_1, \dots \Pi_r$ liegen die Querkreise $Q_0, Q_1, \dots Q_r$, die nur die Bedingung erfüllen müssen, dass sie zusammen mit den Fasern $H_0, H_1, \dots H_r$ — alle Fasern von F sind gleichmässig orientiert — auf den Ringflächen $\Pi_0, \Pi_1, \dots \Pi_r$

Orientierungen bestimmen, die den von \bar{F} induzierten entgegengesetzt sind, und dass

$$Q_0 + Q_1 + \dots + Q_r \sim 0 \quad (\text{in } \bar{F})$$

ist. F' wird erhalten, indem man die Kreise $Q_0 + bH_0, \alpha_1 Q_1 + \beta_1 H_1, \dots, \alpha_r Q_r + \beta_r H_r$ zu Meridiankreisen der Verschlußringe V_i macht. Nun ist der Diskontinuitätsbereich \bar{F}' von \mathcal{G} innerhalb \bar{F} offenbar wieder ein topologisches Produkt aus einer $(r+1)$ -fach gelochten Fläche vom Geschlechte p und einer Kreislinie. Die Orientierung von \bar{F} überträgt sich auf \bar{F}' , ebenso die Faserorientierung. Sind $\check{Q}_0, \check{Q}_1, \dots, \check{Q}_r$ und $\check{H}_0, \check{H}_1, \dots, \check{H}_r$ die Bilder von $Q_0, Q_1, \dots, Q_r, H_0, H_1, \dots, H_r$ in \bar{F}' , so sind $\check{Q}_0, \check{Q}_1, \dots, \check{Q}_r$ Querkreise auf den Randringflächen $\Pi'_0, \Pi'_1, \dots, \Pi'_r$ von \bar{F}' , während \check{H}_i eine bestimmte Faser H'_i von Π'_i g mal überlagert: $\check{H}_i = gH'_i$. Zwischen $\check{Q}_0, \check{Q}_1, \dots, \check{Q}_r$ besteht auch in \bar{F}' die Homologie

$$\check{Q}_0 + \check{Q}_1 + \dots + \check{Q}_r \sim 0 \quad (\text{in } \bar{F}'),$$

und die Orientierung, die \check{Q}_i und H'_i auf Π'_i bestimmen, ist derjenigen entgegengesetzt, die von der Raumorientierung von \bar{F}' auf Π'_i induziert wird. Kennt man noch die Meridiankreise $M'_i \sim \check{\alpha}_i \check{Q}_i + \check{\beta}_i H'_i$, bez. $M'_0 \sim \check{Q}_0 + \check{b} H'_0$ der Verschlußringe V'_i , durch die \bar{F}' zum gesuchten Diskontinuitätsbereich F' geschlossen wird, so kann man aus $\check{b}, \check{\alpha}_i, \check{\beta}_i$ die Faserinvarianten von F' leicht berechnen. Da der Meridiankreis M_i des Verschlußringes V_i nullhomotop in V_i ist, so ist der Bildkreis \check{M}_i nullhomotop im Verschlußringe V'_i , der auf Π'_i zu setzen ist. Mit andern Worten: aus

$$M_i \sim \alpha_i Q_i + \beta_i H_i \quad (\text{auf } \Pi_i)$$

folgt

$$\check{M}_i \sim \alpha_i \check{Q}_i + \beta_i \check{H}_i \sim \alpha_i \check{Q}_i + \beta_i g H'_i \quad (\text{auf } \Pi'_i)$$

$$\sim 0 \quad (\text{in } V'_i).$$

Daher ist auch schon

$$M'_i \sim \alpha_i / (\alpha_i, g) \check{Q}_i + \beta_i g / (\alpha_i, g) H'_i = \check{\alpha}_i \check{Q}_i + \check{\beta}_i H'_i \sim 0 \quad (\text{in } V'_i),$$

und da $\check{\alpha}_i$ und $\check{\beta}_i$ teilerfremd sind, so ist M'_i Meridiankreis von V'_i . Entsprechend ist

$$M'_0 \sim \check{Q}_0 + b g H'_0 \sim \check{Q}_0 + \check{b} H'_0$$

Meridiankreis von V'_0 . $\check{b}, \check{\alpha}_i, \check{\beta}_i$ sind noch nicht die gesuchten Faserinvarianten von F' , da $\check{\beta}_i$ im allgemeinen noch nicht die Normierungsbedingung $0 \leq \check{\beta}_i < \check{\alpha}_i$ erfüllen wird. Führt man aber anstelle der Querkreise $\check{Q}_1, \dots, \check{Q}_r$ die Querkreise

$Q'_1 \sim \check{Q}_1 + x_1 H'_1, \dots, Q'_r \sim \check{Q}_r + x_r H'_r$, anstelle von \check{Q}_0 den Querkreis $Q'_0 \sim \check{Q}_0 - (x_1 + \dots + x_r) H'_0$ ein, so besteht auch zwischen den Q'_i noch die Homologie

$$Q'_0 + Q'_1 + \dots + Q'_r \sim 0 \quad (\text{in } \bar{F}'),$$

und die Orientierung, die Q'_i zusammen mit H'_i auf Π'_i induziert, ist dieselbe wie die, die \check{Q}_i zusammen mit H'_i induziert. In den neuen Basiskurven drücken sich nun die Meridiankreise M'_i folgendermassen aus:

$$\begin{aligned} M'_i &\sim \check{\alpha}_i Q'_i + (\check{\beta}_i - \check{\alpha}_i x_i) H'_i = \alpha'_i Q'_i + \beta'_i H'_i & (i=1, 2, \dots, r), \\ M'_0 &\sim Q'_0 + (\check{b} + x_1 + \dots + x_r) H'_0 = Q'_0 + b' H'_0. \end{aligned}$$

Man kann x_i immer so wählen, dass $0 \leq \beta'_i < \alpha'_i$ wird. Dann hat man in b', α'_i, β'_i die Faserinvarianten von F' , wenn man noch die Wertepaare α'_i, β'_i streicht, für die $\alpha'_i = 1$, also $\beta'_i = 0$ ist. — Ist F ein nichtorientierbarer Raum ($Nn I; k|b; \alpha_1, \beta_1; \dots, \alpha_r, \beta_r$), so führt eine ähnliche Überlegung zum Ziel.

Als Beispiel wählen wir den Dehnschen Kleeblattschlingenraum $(Oo; o|-1; 2, 1; 3, 1; 5, 1)$ von S. 210 und als Schiebungsgruppe die Gruppe der Ordnung $g=5$. Jetzt ist

$$\begin{aligned} (\alpha_1, g) &= 1, & (\alpha_2, g) &= 1, & (\alpha_3, g) &= 5; \\ \check{\alpha}_1 &= \alpha_1 / (\alpha_1, g) = 2, & \check{\alpha}_2 &= 3, & \check{\alpha}_3 &= 1, \check{b} = bg = -5; \\ \check{\beta}_1 &= \beta_1 g / (\alpha_1, g) = 5, & \check{\beta}_2 &= 5, & \check{\beta}_3 &= 1; \end{aligned}$$

demnach $x_1=2, x_2=1, x_3=1$. Also ist der Diskontinuitätsbereich F' der Raum

$$(Oo; o|b'; \alpha'_1, \beta'_1; \alpha'_2, \beta'_2) = (Oo; o|-1; 2, 1; 3, 2).$$

Der Ausdruck

$$\mathcal{A}' = b' \alpha'_1 \alpha'_2 + \beta'_1 \alpha'_2 + \alpha'_1 \beta'_2$$

(vergl. S. 208) wird hier $=1$. F' ist also die Hypersphäre, und die Fasern sind Kleeblattschlingen (S. 206). Insbesondere ist die 5-fache Ausnahmefaser von F in eine gewöhnliche Faser von F' , also in eine Kleeblattschlinge übergegangen. F ist daher 5-facher verzweigter Überlagerungsraum der Hypersphäre mit einer Kleeblattschlinge als Verzweigungskurve.

Dies Ergebnis lässt sich wesentlich verallgemeinern. Sei F ein beliebiger Poincaréscher Raum

$$(Oo; o|b; \alpha_1, \beta_1; \dots, \alpha_r, \beta_r).$$

Notwendig und hinreichend dafür, dass es sich um einen Poincaréschen Raum handelt, ist nach S. 208, dass die Determinante

$$A = \begin{vmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & b \\ 0 & \alpha_1 & \dots & 0 & \beta_1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \alpha_r & \beta_r \\ 1 & 1 & \dots & 1 & 0 \end{vmatrix} = \pm 1$$

ist. Der oben mit \bar{F}' bezeichnete Raum ist hier das topologische Produkt aus einer $(r+1)$ -fach gelochten Kugel und einer Kreislinie. Die Erzeugenden der Homologiegruppe von \bar{F}' sind $\check{Q}_0, \check{Q}_1, \dots, \check{Q}_r$ und eine beliebige Faser H' , und es besteht die eine Relation

$$\check{Q}_0 + \check{Q}_1 + \dots + \check{Q}_r \sim 0.$$

Durch die Schliessung von \bar{F}' zu F' treten die $r+1$ Relationen hinzu

$$\check{Q}_0 + \check{b} H' = \check{\alpha}_1 \check{Q}_1 + \check{\beta}_1 H' = \dots = \check{\alpha}_r \check{Q}_r + \check{\beta}_r H' \sim 0.$$

Darin ist $\check{b} = bg$, $\check{\alpha}_i = \alpha_i / (\alpha_i, g)$, $\check{\beta}_i = \beta_i g / (\alpha_i, g)$. Die Koeffizientenmatrix der Homologiegruppe von F' lautet also

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & \check{b} \\ 0 & \check{\alpha}_1 & \dots & 0 & \check{\beta}_1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \check{\alpha}_r & \check{\beta}_r \\ 1 & 1 & \dots & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

und die Determinante A' dieser quadratischen Matrix ist

$$A' = \begin{vmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & bg \\ 0 & \alpha_1 / (\alpha_1, g) & \dots & 0 & \beta_1 g / (\alpha_1, g) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \alpha_r / (\alpha_r, g) & \beta_r g / (\alpha_r, g) \\ 1 & 1 & \dots & 1 & 0 \end{vmatrix} = \frac{g}{(\alpha_1, g)(\alpha_2, g) \dots (\alpha_r, g)} A = \pm \frac{g}{(\alpha_1, g)(\alpha_2, g) \dots (\alpha_r, g)}$$

F' ist nur dann wieder ein Poincaréscher Raum bez. die Hypersphäre, wenn $A' = \pm 1$ ist. Da $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$ paarweise teilerfremd sind, so hat man

$$(\alpha_1, g)(\alpha_2, g) \dots (\alpha_r, g) = (\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_r, g),$$

und \mathcal{A}' ist dann und nur dann $= \pm 1$, wenn g ein Teiler des Produktes $\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_r$ ist. Die Vielfachheiten der Ausnahmefasern von F' sind durch die von 1 verschiedenen Zahlen $\check{\alpha}_1, \check{\alpha}_2, \dots, \check{\alpha}_r$ gegeben. Durch diese Zahlen ist F' charakterisiert nach Satz 12 (S. 209).

Es gilt also

Satz 15: *Der Diskontinuitätsbereich F' einer Schiebungsgruppe eines gefaserten Raumes F mit den Faserinvarianten*

$$(O_0; p|b; \alpha_1, \beta_1; \dots, \alpha_r, \beta_r) \text{ bez. } (Nn I; k|b; \alpha_1, \beta_1; \dots, \alpha_r, \beta_r)$$

ist wieder ein gefasertes Raum derselben Klasse, dessen Faserinvarianten durch diejenigen von F und die Ordnung der Schiebungsgruppe bestimmt sind. Ist F der Poincarésche Raum mit r Ausnahmefasern der Vielfachheiten $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$, so ist F' dann und nur dann wieder ein Poincaréscher Raum oder die Hypersphäre, wenn die Ordnung g der Schiebungsgruppe ein Teiler des Produktes $\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_r$ ist. In diesem Falle ist F' der Poincarésche Raum, dessen Ausnahmefasern zu Vielfachheiten die von 1 verschiedenen unter den Zahlen

$$\alpha_1/(\alpha_1, g), \alpha_2/(\alpha_2, g), \dots, \alpha_r/(\alpha_r, g)$$

haben. Die Überlagerung von F' durch F ist verzweigt, und zwar sind die Verzweigungslinien diejenigen Ausnahmefasern von F , für die $(\alpha_i, g) > 1$ ist; (α_i, g) gibt die Vielfachheit der Verzweigung an.

Durch Spezialisierung gehen hieraus die weiteren Sätze hervor:

Satz 16: *Übt man auf den Poincaréschen Raum F mit r Ausnahmefasern der Vielfachheiten $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$ eine Schiebungsgruppe der Ordnung $g = \alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_i$ aus, so ist der Diskontinuitätsbereich F' ein Poincaréscher Raum oder die Hypersphäre mit den Ausnahmefasern der Vielfachheiten $\alpha_{i+1}, \alpha_{i+2}, \dots, \alpha_r$.*

Satz 17: *Gegeben sind $r \geq 3$ paarweise teilerfremde Zahlen ≥ 2*

$$\begin{array}{l} \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r \\ \text{und } r-2 \text{ Torusknoten} \\ k_1, k_2, \dots, k_{r-2}, \end{array}$$

die so in der Hypersphäre liegen wie $r-2$ gewöhnliche Fasern einer Hypersphären-

faserung. Ihre Knoteninvarianten m, n (S. 160) seien zwei beliebige unter den Zahlen $\alpha_1, \dots, \alpha_r$. Man streiche diese beiden Zahlen aus der Reihe $\alpha_1, \dots, \alpha_r$ aus und ordne die übrig bleibenden umkehrbar eindeutig den Knoten k_1, \dots, k_{r-2} zu. Man bilde ferner die verzweigte Überlagerung der Hypersphäre, die die Knoten k_1, \dots, k_{r-2} zu Verzweigungslinien hat und die folgende Eigenschaft E besitzt: Ein Weg \tilde{w} des Überlagerungsraumes, der über einem geschlossenen, die Knoten meidenden Wege w der Hypersphäre liegt, ist dann und nur dann geschlossen, wenn die Verschlingungszahl χ_i von w mit dem Knoten k_i durch die Zahl α_j teilbar ist, die dem Knoten k_i zugeordnet ist (gültig für $i=1, \dots, r-2$). Diese Überlagerung ist $\alpha_1 \dots \alpha_r / m \cdot n$ -blättrig, und wir behaupten: sie ist ein Poincaréscher Raum, der immer der gleiche ist, wie man auch die Zahlen m, n aus der Reihe der $\alpha_1, \dots, \alpha_r$ ausgewählt hat.

Beweis: Wir denken uns die Zahlen $\alpha_1, \dots, \alpha_r$ so numeriert, dass $m=\alpha_{r-1}$, $n=\alpha_r$ wird und dass α_i dem Knoten k_i zugeordnet ist ($i=1, \dots, r-2$). Üben wir dann auf den Poincaréschen gefaserten Raum F mit r Ausnahmefasern der Vielfachheiten $\alpha_1, \dots, \alpha_r$ eine Schiebungsgruppe der Ordnung $g=\alpha_1 \dots \alpha_{r-2}$ aus, so ergibt sich nach dem vorigen Satz ein gefasertes Raum F' mit zwei Ausnahmefasern der Vielfachheiten α_{r-1} und α_r , der die Hypersphäre sein muss, da nach Satz 12 ein Poincaréscher gefasertes Raum mindestens drei Ausnahmefasern hat. Die Faserung der Hypersphäre besteht aus Torusknoten mit den Invarianten $m=\alpha_{r-1}$, $n=\alpha_r$ (§ 3). Nach Satz 15 wird F' verzweigt von F überlagert, und zwar sind die Verzweigungslinien in F die Ausnahmefasern der Vielfachheiten $\alpha_1, \dots, \alpha_{r-2}$, die sich in gewöhnliche Fasern von F' abbilden, also in $r-2$ Torusknoten k_1, \dots, k_{r-2} mit den Knoteninvarianten $m=\alpha_{r-1}$, $n=\alpha_r$. Die Vielfachheit der Verzweigung ist nach Satz 15 durch $(\alpha_i, g)=\alpha_i$ gegeben, d. h. ein Weg, der sich im Überlagerungsraum F gerade einmal um die i -te Verzweigungslinie herumschlingt, bildet sich in einen Weg des Grundraumes F' ab, der α_i mal den Knoten k_i umschlingt. Da nun die Überlagerung von F' durch F regulär und die Deckbewegungsgruppe zyklisch von der Ordnung $g=\alpha_1 \dots \alpha_{r-2}$ ist, so ist nach dem Hilfssatz des Anhanges ein Weg \tilde{w} von F , der über einem die Verzweigungslinien nicht treffenden Weg w von F' liegt, dann und nur dann geschlossen, wenn für jedes i die Verschlingungszahl von w mit k_i durch α_i teilbar ist, und durch diese Eigenschaft, also durch die Eigenschaft E des Satzes 17, ist F als Überlagerung von F' eindeutig bestimmt. Der durch die Eigenschaft E festgelegte Überlagerungsraum der Hypersphäre ist also der gefaserte Poincarésche Raum mit r Ausnahmefasern der Vielfachheiten $\alpha_1, \dots, \alpha_r$. Da dieser aber durch die Zahlen $\alpha_1, \dots, \alpha_r$ nach Satz 12 bestimmt ist, so muss es gleichgültig sein, welche der Zahlen $\alpha_1, \dots, \alpha_r$ wir zu den Knoteninvarianten m und n der Verzweigungslinien der Hypersphäre ernannt haben.

Satz 17 ist deshalb bemerkenswert, weil er eine Aussage macht über die Homöomorphie gewisser Überlagerungsmannigfaltigkeiten, die sich unabhängig von allen Faserungen charakterisieren lassen. Denn die Forderung, dass die Knoten k_1, \dots, k_{r-2} gewöhnliche Fasern einer Hypersphärenfaserung sein sollen, kann ebenso gut durch folgende ersetzt werden: k_1, \dots, k_{r-2} sind doppelpunktfreie, einander nicht schneidende geschlossene Kurven auf einer Ringfläche, die die Hypersphäre in zwei Vollringe zerlegt, und diese Kurven sind in keinem der beiden Vollringe nullhomotop. Man kann dann beweisen, dass es eine Hypersphärenfaserung gibt, die diese $r-2$ Kurven als gewöhnliche Fasern enthält.

Der Sonderfall, den man aus Satz 17 für $r=3$ erhält, verdient hervorgehoben zu werden. Wir bezeichnen als *g-fache zyklische Überlagerung* eines Knotens k der Hypersphäre die verzweigte Überlagerung folgender Eigenschaft: Liegt ein Weg \tilde{w} des Überlagerungsraumes über einem Wege w der Hypersphäre, der den Knoten nicht trifft, so ist \tilde{w} dann und nur dann geschlossen, wenn die Verschlingungszahl von w mit dem Knoten ein Vielfaches von g ist.²⁷ Der Sonderfall lässt sich dann so aussprechen:

Zusatz zu Satz 17: Sind $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ drei paarweise relativ prime Zahlen ≥ 2 , so ist die α_3 -fache zyklische Überlagerung des Torusknotens mit den Knoteninvarianten $m=\alpha_1, n=\alpha_2$ ein Poincaréscher Raum. Denselben Raum erhält man, wenn man $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ ihre Rollen beliebig vertauschen lässt.

Dieser Poincarésche Raum ist nämlich der gefaserte Poincarésche Raum mit drei Ausnahmefasern der Vielfachheiten $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$. So kann man z. B. den Dehnschen Kleeblattschlingenraum, der auf S. 212 durch Ausbohren und Schließen einer Kleeblattschlinge erhalten wurde, auch als fünffache zyklische Überlagerung einer Kleeblattschlinge oder als dreifache zyklische Überlagerung des Torusknotens $m=2, m=5$, oder als zweifache zyklische Überlagerung des Torusknotens $m=3, m=5$ erhalten.

²⁷ Man kann die zyklische Überlagerung auch so charakterisieren: Man schneide die Hypersphäre längs einer in k eingespannten singularitätenfreien Fläche zu einem (dreidimensionalen) »Blatte« auf und hefte g solche Blätter zyklisch an einander. Herrn H. Kneser verdanke ich die Mitteilung, dass es ausser dieser zyklischen Überlagerung im allgemeinen noch weitere g -fache Überlagerungen eines Knotens gibt, die auch die Eigenschaft haben, dass ein kleiner Kreis, der den Knoten einmal umschlingt, erst nach g -maliger Durchlaufung im Überlagerungsraum geschlossen wird. Die zyklischen Überlagerungen spielen eine Rolle in der Knotentheorie. Dort dienen die Torsionskoeffizienten der Überlagerung dazu, die Knoten zu unterscheiden. Vgl. K. Reidemeister, Abh. Hamb. Sem. V (1927) S. 7 und Knotentheorie (Berlin 1932).

Endlich kann man jeden gefaserten Poincaréschen Raum mit den Faserinvarianten $(Oo; o|b; \alpha_1, \beta_1; \dots \alpha_r, \beta_r)$ als $\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_r$ -fache verzweigte Überlagerung der Hypersphäre erhalten. Übt man nämlich auf F die Schiebungsgruppe der Ordnung $g = \alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_r$ aus, so ergibt sich ein gefasertes Raum ohne Ausnahmefasern, der nach Satz 16 notwendig ein Poincaréscher Raum oder die Hypersphäre und nach Satz 12 die Hypersphäre ist. Nun kennen wir die von Ausnahmefasern freie Faserung der Hypersphäre; sie wird durch Kreise bewirkt (S. 161), von denen je zwei einfach verkettet sind. Die Verzweigungslinien in der Hypersphäre sind die Bilder der r Ausnahmefasern, also r solche Kreise, d. h. r spezielle unverknotete, paarweise verkettete geschlossene Kurven. Die Vielfachheiten der Verzweigungen sind α_1 , bez. $\alpha_2, \dots, \alpha_r$.

§ 15. Unfaserbare Räume.

Wenn ein Raum gefasert ist, so lassen sich seine topologischen Eigenschaften, wie wir in den letzten Paragraphen sahen, weit genauer festlegen, als wenn er nur als topologische Punktmannigfaltigkeit gegeben ist. Wir wollen jetzt eine notwendige Bedingung dafür angeben, dass eine Mannigfaltigkeit sich fasern lässt, und Mannigfaltigkeiten aufzeigen, die diese Bedingung nicht erfüllen. Auch offene Mannigfaltigkeiten lassen wir wieder zu.

Ist W ein geschlossener Weg in einem gefaserten Raum, der einen auf einer gewöhnlichen Faser H gelegenen Punkt O zum Anfangs- und Endpunkt hat, und führt man die durch O gehende Faser H längs W einmal herum, so ist die Endlage der Faser H die Faser $H' = H^{\pm 1}$. Fasst man W und H als repräsentierende Wege gleichbezeichneter Wegekassen, also als Elemente der Fundamentalgruppe auf, so ist $H' = W^{-1} H W$, also $W^{-1} H W = H^{\pm 1}$. Die Gleichung besagt, dass das von der Faser repräsentierte Element der Fundamentalgruppe bei Transformation mit irgend einem anderen Element W in sich oder sein Reziprokes übergeht. Soll sich also der Raum fasern lassen, so muss die Fundamentalgruppe ein Element H enthalten, das diese Bedingung erfüllt. Die Bedingung gewinnt erst dadurch einen Inhalt, dass man zeigen kann: die gewöhnliche Faser H kann nur dann das Einselement der Fundamentalgruppe repräsentieren, wenn der gefaserte Raum die Hypersphäre oder ein Linsenraum von besonderer angebbarer Faserung ist.²⁸ Insbesondere ist H sicher dann vom Einselement verschieden, wenn die Fundamentalgruppe unendliche Ordnung hat.

²⁸ Über Linsenräume vergl. man DB II, § 1.

Um dieses Ergebnis zu gewinnen, leiten wir zuerst einen vorbereitenden Satz ab.

Satz 18: *Ein offener einfach zusammenhängender Raum lässt sich nicht fasern.*

Beweis: Liesse sich ein solcher Raum F fasern, so wäre seine Zerlegungsfläche f eine offene einfach zusammenhängende Fläche, also homöomorph mit dem Kreisinneren. Wir unterscheiden zwei Fälle:

a) Es gibt keine Ausnahmefaser. Da F einfach zusammenhängend ist, so ist insbesondere die Faser H nullhomotop, also Rand eines unter Umständen singulären Elementarflächenstückes E . Dieses bildet sich auf der Zerlegungsfläche f als (singuläres) Elementarflächenstück e ab, das man von einer Zerlegungs-umgebung ω vollständig überdecken kann, weil f offen und einfach zusammenhängend ist. E würde ganz in der ω entsprechenden Faserumgebung Ω liegen, d. h. die Faser H der Faserumgebung Ω wäre in dem gefaserten Vollring Ω nullhomotop, was nicht der Fall ist.

b) Es gibt mindestens eine Ausnahmefaser. Durch Ausbohren einer α -fachen Ausnahmefaser erhält man einen berandeten Raum \bar{F} , dessen Zerlegungsfläche \bar{f} das gelochte Kreisinnere ist. Die Homologiegruppe von \bar{F} ist die freie Gruppe von einer Erzeugenden; die Erzeugende ist der Meridiankreis M des Bohrernes, der sich in den α -mal durchlaufenen Lochrand l von \bar{f} abbildet, $\alpha \geq 2$. Durch die Abbildung von \bar{F} auf \bar{f} ist eine homomorphe Abbildung²⁹ der Homologiegruppe von \bar{F} auf die von \bar{f} hergestellt. Dabei geht das erzeugende Element M der Homologiegruppe von \bar{F} in ein erzeugendes Element der Homologiegruppe von \bar{f} , und da die Homologiegruppe von \bar{f} ebenfalls die freie Gruppe von einer Erzeugenden ist, gerade in $\pm l$ über, während wir doch sahen, dass sich M in αl abbildet mit $\alpha > 1$. Damit ist auch im Falle b ein Widerspruch hergeleitet.

Aus Satz 18 folgt nebenbei bemerkt, dass sich der euklidische Raum nicht in dem hier benutzten Sinne fasern lässt. Projizieren wir wie in § 3 eine der Faserungen der Hypersphäre stereographisch in den euklidischen Äquatorbildraum, so wird dieser zwar mit Kurven ausgefüllt, die einer Faserung sehr nahe kommen. Nur eine Kurve, die z -Achse, erfüllt die Bedingung der Geschlossenheit nicht.

Satz 18 ermöglicht nun den Beweis des folgenden Satzes.

²⁹ Vergl. S. 201.

Satz 19: *Ist in einem gefaserten Raum F eine Faser H oder ein endliches Vielfaches der Faser nullhomotop, so ist F geschlossen und die Fundamentalgruppe ist endlich.*

Beweis: Die universelle Überlagerungsmannigfaltigkeit von F ist nach § 9 Nr. 6 ein gefasertes Raum \hat{F} , der wegen seines einfachen Zusammenhangs nach dem vorigen Satze geschlossen (und nach Satz 11 daher sogar die Hypersphäre) ist. Die Ordnung der Fundamentalgruppe von F ist dann gleich der Anzahl der Punkte von \hat{F} , die über einem Punkt von F liegen. Das sind endlich viele, da sie andernfalls wegen der Geschlossenheit von \hat{F} einen Häufungspunkt hätten.

Die gefaserten Räume endlicher Fundamentalgruppe sind in Satz 9 S. 203 aufgezählt worden. Unter ihnen bestimmen wir jetzt diejenigen, in denen jede gewöhnliche Faser H nullhomotop ist, indem wir sie einzeln durchmustern. Beginnen wir mit den gefaserten Räumen, deren Zerlegungsfläche die Kugel ist und die $r=3$ Ausnahmefasern enthalten! Ihre Fundamentalgruppe hat nach S. 201 die Relationen

$$\begin{aligned} Q_0 H^b &= Q_1^{\alpha_1} H^{\beta_1} = Q_2^{\alpha_2} H^{\beta_2} = Q_3^{\alpha_3} H^{\beta_3} = Q_0 Q_1 Q_2 Q_3 = 1 \\ Q_j H Q_j^{-1} &= H \end{aligned} \quad (j = 0, 1, 2, 3). \tag{1}$$

$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ sind eines der platonischen Wertetripel. Eliminiert man Q_0 und nimmt man die Zusatzrelation $H^2=1$ hinzu, so erhält man eine Quotientengruppe der gegebenen Fundamentalgruppe (1) mit den Relationen

$$\check{Q}_1^{\alpha_1} \check{H}^{\delta_1} = \check{Q}_2^{\alpha_2} \check{H}^{\delta_2} = \check{Q}_3^{\alpha_3} \check{H}^{\delta_3} = \check{Q}_1 \check{Q}_2 \check{Q}_3 \check{H}^{\delta_4} = \check{H}^2 = 1, \quad \check{Q}_i \check{H} \check{Q}_i^{-1} = \check{H}, \tag{2}$$

worin $\delta_1, \delta_2, \delta_3, \delta_4=0$ oder $=1$ ist, je nachdem bez. $\beta_1, \beta_2, \beta_3, b$ gerade oder ungerade ist. Durch Einführung neuer Erzeugender kann man stets erreichen, dass $\delta_1=\delta_2=\delta_3=1, \delta_4=0$ wird. In den platonischen Tripeln $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ ist nämlich stets einer der Exponenten, sagen wir $\alpha_2=2$. Dann ist $\beta_2=1$ wegen der Normierungsbedingung $0 < \beta_i < \alpha_i$, also von vornherein $\delta_2=1$. Ist aber z. B. α_1 ungerade, ist also β_1 möglicherweise gerade und dann $\delta_1=0$, so führe man die neue Erzeugende Q'_1 durch die Gleichung $\check{Q}_1=Q'_1 \check{H}$ ein. Die Relation $\check{Q}_1^{\alpha_1} \check{H}^{\delta_1}=1$ geht dadurch über in $Q'^{\alpha_1}_1 \check{H}^{\alpha_1+\delta_1}=1$, und hierin ist $\alpha_1+\delta_1=\alpha_1$ ungerade, also $\check{H}^{\alpha_1+\delta_1}=\check{H}$. Wir dürfen daher annehmen, dass nötigenfalls nach Ausführung solcher Transformationen die Exponenten $\delta_1, \delta_2, \delta_3$ in (2) den Wert 1 haben. δ_4 hat dann durch diese Transformationen möglicherweise einen neuen Wert

erhalten. Ist $\alpha_1 = 1$, so wird die neue Erzeugende Q'_2 durch die Gleichung $\check{Q}_2 = Q'_2 \check{H}$ eingeführt. Dadurch wird δ_1 zu 0, während sich wegen $\alpha_2 = 2$ an den übrigen Relationen nichts ändert. Man hat also das Relationensystem erreicht:

$$Q'^{\alpha_1} = Q'^{\alpha_2} = Q'^{\alpha_3} = \check{H}, \quad Q'_1 Q'_2 Q'_3 = 1, \quad \check{H}^2 = 1. \quad (3)$$

Die Gruppen, die diese Relationen definieren, sind für die nach Satz 9 allein in Betracht kommenden platonischen Wertetripel die binären platonischen Gruppen, die man in Math. Ann. 104 S. 26 aufgezählt findet. Dort ist gezeigt, dass das Element \check{H} die Ordnung 2 hat. Also hat auch H nicht die Ordnung 1 und ist daher nicht nullhomotop.

Wir gehen zu dem Falle über, dass die Zerlegungsfläche die projektive Ebene, also $r=1$ oder $r=0$ ist. Wenn $r=1$ ist, so lauten die Relationen der Fundamentalgruppe nach S. 201 (3) und (4)

$$\begin{aligned} A H A^{-1} H = 1, \quad Q_0 Q_1 = A^2, \quad Q_j H Q_j^{-1} = H, \quad (j=0, 1) \\ Q_0 H^b = Q_1^{\alpha_1} H^{\beta_1} = 1. \end{aligned} \quad (4)$$

Eliminiert man Q_0 und nimmt man die Zusatzrelation $H^2=1$ hinzu, so lauten die Relationen der dadurch abgeschiedenen Quotientengruppe

$$\begin{aligned} \check{A}^2 \check{Q}_1^{-1} \check{H}^{\delta_1} = \check{Q}_1^{\alpha_1} \check{H}^{\delta_2} = 1, \quad \check{H}^2 = 1 \\ \check{A} \check{H} \check{A}^{-1} = \check{H}, \quad \check{Q}_1 \check{H} \check{Q}_1^{-1} = \check{H}. \end{aligned}$$

Eliminiert man hieraus \check{Q}_1 , so bleibt die Abelsche Gruppe übrig: $\check{H}^2=1$, $\check{A}^{2\alpha_1} \check{H}^{\delta_3}=1$. $\delta_1, \delta_2, \delta_3$ haben den Wert 0 oder 1. In dieser Abelschen Gruppe hat \check{H} , ob nun $\delta_3=0$ oder $=1$ ist, nicht die Ordnung 1, also ist auch in der ursprünglichen Gruppe H nicht das Einselement, also die Faser nicht nullhomotop. Gleiches ergibt sich, wenn $r=0$ ist, also Ausnahmefasern fehlen. In diesem Falle hat man nämlich nur in den vorstehenden Relationen $\alpha_1=1$ zu setzen; auch dann ist noch $\check{H} \neq 1$.

Es bleibt noch der Fall übrig, dass die Zerlegungsfläche die Kugel ist und höchstens zwei Ausnahmefasern auftreten. Die Zerlegungsfläche kann man dann in zwei Halbkugeln zerschneiden derart, dass die beiden etwa vorhandenen Ausnahmepunkte in verschiedenen Halbkugeln liegen. Dem entspricht eine Zerschneidung des gefaserten Raumes in zwei gefaserte Vollringe V_1 und V_2 . Durch Aufeinanderkleben zweier Vollringe entsteht nun immer ein Linsenraum oder das

topologische Produkt aus Kugelfläche und Kreislinie. Im topologischen Produkt ist H nicht nullhomotop nach Satz 19, weil die Fundamentalgruppe des topologischen Produktes unendliche Ordnung hat. Zu jedem Linsenraum dagegen lassen sich unendlich viele verschiedene Faserungen angeben, in denen jede gewöhnliche Faser H nullhomotop ist. Ein Linsenraum ist vollkommen bestimmt, wenn man weiss, wie sich der Meridiankreis M_2 des Vollringes V_2 auf der Oberfläche Π_1 des Vollringes V_1 abbildet. Sind also M_1 und B_1 der Meridiankreis und ein Breitenkreis von Π_1 , so ist der Linsenraum durch die Homologie

$$M_2 \sim pB_1 + qM_1 \quad (\text{auf } \Pi_1), \quad (5)$$

also durch die teilerfremden Zahlen p, q bestimmt. Dabei ist $p \neq 0$, da für $p=0$ $M_2 \sim \pm M_1$ würde. Durch Aufeinanderkleben von V_1 und V_2 erhielte man dann das topologische Produkt aus Kreis und Kugel und keinen Linsenraum. Man fasere nun den Vollring V_1 so, dass für die Faser H die Homologie besteht

$$H \sim pB_1 + xM_1, \quad (6)$$

wobei nur $x \neq q$ und teilerfremd zu p gewählt sei. V_1 kann man nunmehr als einen gefaserten berandeten Raum auffassen, der durch den Verschlussring V_2 geschlossen wird, wodurch nach Hilfssatz VI S. 166 eine Faserung des entstehenden Linsenraumes eindeutig festgelegt ist. In ihm ist die Faser H nullhomotop. Aus (5) und (6) folgt nämlich $H \sim M_2 - qM_1 + xM_1$; M_1 und M_2 sind aber im Linsenraum nullhomolog.

Damit ist das Ergebnis gewonnen:

Satz 20: *Unter allen offenen oder geschlossenen Mannigfaltigkeiten sind die Linsenräume die einzigen, die Faserungen zulassen, deren gewöhnliche Fasern nullhomotop sind.*

Von den einfach zusammenhängenden Mannigfaltigkeiten ist, wie die Sätze 11 und 18 besagen, nur die Hypersphäre faserbar. Wenn dagegen die Fundamentalgruppe nicht nur aus dem Element 1 besteht, so können wir jetzt die Faserbarkeitsbedingung angeben:

Satz 21: *Eine notwendige Bedingung für die Faserbarkeit einer offenen oder geschlossenen Mannigfaltigkeit, deren Fundamentalgruppe nicht aus dem Einselement allein besteht, ist, dass ein vom Einselement verschiedenes Element vorhanden ist, das bei Transformation mit jedem beliebigen Element in sich oder auch in sein Reziprokes übergeht.*

Entweder nämlich repräsentiert jede gewöhnliche Faser H eines gefaserten Raumes mit vom Einselement verschiedener Fundamentalgruppe das Einselement der Fundamentalgruppe. Dann liegt eine Faserung eines Linsenraumes vor, und die Fundamentalgruppe ist zyklisch, erfüllt also die Bedingung des Satzes. Oder die gewöhnliche Faser repräsentiert ein vom Einselement verschiedenes Element H . Dann muss, wie wir zu Anfang des Paragraphen sahen, H ein Element der Fundamentalgruppe von der geforderten Eigenschaft sein.

Auf Grund dieses Satzes kann man unendlich viele, auch geschlossene Mannigfaltigkeiten angeben, die sich nicht fasern lassen. Es sind die topologischen Summen zweier Mannigfaltigkeiten. Die topologische Summe zweier Mannigfaltigkeiten R_A und R_B erhält man, indem man aus jeder der Mannigfaltigkeiten ein Elementarraumstück entfernt und die beiden berandenden Kugelflächen aufeinander klebt, was auf zwei verschiedene Arten möglich ist. Sind \mathfrak{A} und \mathfrak{B} die Fundamentalgruppen von R_A und R_B , so ist die Fundamentalgruppe der Summe das freie Produkt von \mathfrak{A} und \mathfrak{B} .³⁰ Das freie Produkt zweier Gruppen ist so erklärt³¹: Element ist ein beliebiges Produkt von endlich vielen Elementen von \mathfrak{A} und \mathfrak{B} , die Faktorelemente des Elementes heissen. Jedes solche vom Einselement verschiedene Element lässt sich auf eine Normalform bringen, in der vom Einselement verschiedene Elemente von \mathfrak{A} und \mathfrak{B} miteinander abwechseln. Zwei Elemente des freien Produktes stimmen dann und nur dann überein, wenn ihre Normalformen Glied für Glied übereinstimmen. Es ist z. B. nur dann

$$A_{i_1} B_{j_1} A_{i_2} B_{j_2} \dots A_{i_r} B_{j_r} = A'_{i_1} B'_{j_1} A'_{i_2} B'_{j_2} \dots A'_{i_r} B'_{j_r},$$

wenn einzeln

$$A_{i_1} = A'_{i_1}, \quad B_{j_1} = B'_{j_1}, \quad \dots \quad B_{j_r} = B'_{j_r}$$

ist. — Die Multiplikation der Elemente erfolgt durch Aneinanderreihen der Faktoren der zu multiplizierenden Elemente. Nun benutzen wir den

Hilfssatz VIII: *Das freie Produkt zweier nicht allein aus dem Einselement bestehender Gruppen \mathfrak{A} und \mathfrak{B} hat dann und nur dann ein vom Einselement verschiedenes Element H , das bei Transformation mit jedem Element in sich oder auch in sein Reziprokes übergeht, wenn die Gruppen \mathfrak{A} und \mathfrak{B} beide die Ordnung 2 haben.*

³⁰ Der Beweis für diese Behauptung findet sich in der auf S. 200 angeführten Arbeit S. 36.

³¹ Vgl. O. Schreier, Die Untergruppen der freien Gruppen. Abh. a. d. Math. Sem. Hamburg, V (1927), S. 161.

Beweis: H kann nicht Element von \mathfrak{U} sein, da ein Element von \mathfrak{U} bei Transformation mit einem Element $\neq 1$ von \mathfrak{B} nicht wieder ein Element von \mathfrak{U} liefert. Ebenso wenig ist H Element von \mathfrak{B} . Ein nicht in \mathfrak{U} enthaltenes Element H des freien Produktes ist mit einem Element A von \mathfrak{U} nur vertauschbar, wenn $A=1$ ist, weil andernfalls AHA^{-1} nicht dieselbe Normalform wie H hat. Daher muss $AHA^{-1}=H^{-1}$ sein. Ist $A'(\neq 1)$ ebenfalls ein Element von \mathfrak{U} , so ist auch $A'HA'^{-1}=H^{-1}$, also $A'AHA^{-1}A'^{-1}=H$, daher $A'A=1$. Jedes Element $A'(\neq 1)$ von \mathfrak{U} ist daher $=A^{-1}$, insbesondere auch das Element A . Das besagt aber, dass \mathfrak{U} die Ordnung 2 hat. Gleiches gilt von \mathfrak{B} .

Aus Satz 21 folgt jetzt unmittelbar

Satz 22: Die topologische Summe zweier dreidimensionaler Mannigfaltigkeiten lässt sich nicht fasern, ausgenommen wenn beide Mannigfaltigkeiten eine Fundamentalgruppe der Ordnung 2 oder auch 1 haben.

Dass im Ausnahmefalle die Summe sich unter Umständen fasern lässt, dafür ist ein Beispiel die Summe zweier projektiver Räume. Der projektive Raum entsteht, wenn man auf der Randkugelfläche einer Vollkugel Diametralpunkte identifiziert. Die Summe zweier projektiver Räume erhält man, wenn man auf den beiden Randkugelflächen K_1 und K_2 einer Hohlkugel (in Fig. 15 im Schnitt gezeichnet) Diametralpunkte identifiziert.

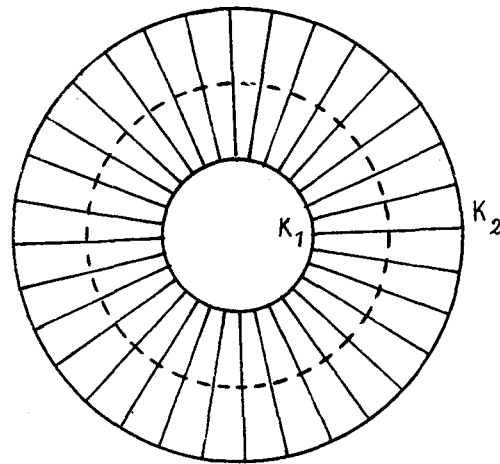


Fig. 15.

Das ist deshalb der Fall, weil die Hohlkugel durch eine konzentrische Kugelfläche (im Schnitt gestrichelt) in zwei gelochte projektive Räume zerschnitten wird. Die Fasern bestehen aus den Radien, die die Hohlkugel durchziehen, und zwar setzen sich immer zwei diametrale Stücke dieser Radien zu einer Faser zusammen. Die Invarianten der Faserung sind, da die Zerlegungsfläche die projektive Ebene und der Raum als Summe zweier orientierbarer Räume orientierbar ist, $(0n; 1|0)$; dass in der Tat $b=0$ ist, folgt z. B. daraus, dass der Raum eine faserentreue Selbstabbildung mit Umkehrung der Orientierung zulässt, nämlich die Spiegelung an der mittleren (gestrichelten) Kugelfläche. Es ist daher nach Satz 6 $(0n; 1|b)=(0n; 1|-b)$, also $b=-b$.

Das einfachste Beispiel eines nicht faserbaren Raumes ist die Summe aus zwei topologischen Produkten aus Kreis und Kugel, die man aus einer vierfach gelochten Hypersphäre durch paarweise Zuordnung der Randkugelflächen (nach der ersten Art) erhält.

Wir haben folgende Möglichkeiten der Faserbarkeit von Räumen kennen gelernt: 1.) Der Raum ist überhaupt nicht faserbar (Summe zweier Produkte aus Kreis und Kugel). 2.) Er lässt sich auf eine einzige Weise fasern (Poincarésche Räume). 3.) Er gestattet unendlich viele verschiedene Faserungen (Hypersphäre). Im letzteren Beispiel ist für alle die verschiedenen Faserungen die Zerlegungsfläche die gleiche, nämlich die Kugel. Wir wollen noch ein Beispiel eines Raumes

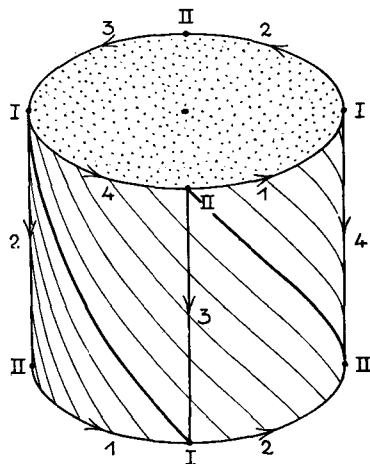


Fig. 16.

geben, der zwei Faserungen mit verschiedener Zerlegungsfläche zulässt. Es ist das der Quaternionenraum, dessen Fundamentalgruppe die Quaternionengruppe ist. Er entsteht aus einem Würfel, indem man je zwei gegenüberliegende Seitenflächen um $\frac{\pi}{2}$ gegeneinander verschraubt einander zuordnet.

Da die Quaternionengruppe, die von den Elementen $\pm 1, \pm i, \pm j, \pm k$ gebildet wird, ein Element, nämlich -1 hat, das mit allen vertauschbar ist und ein zweites, z. B. i , das bei Transformation mit ± 1 und $\pm i$ in sich, bei Transformation mit $\pm j, \pm k$ in $-i$ übergeht,

so wird man vermuten können, dass sich der Raum dementsprechend auf zwei verschiedene Weisen fasern lässt. Dies ist wirklich der Fall. Um die Faserungen bequemer darstellen zu können, deformieren wir den Würfel, zu dem der Quaternionenraum aufgeschnitten ist, in einen Zylinder, in dem Grund- und Dachfläche, um $\frac{\pi}{2}$ verschraubt (etwa vermöge einer Rechtsschraubung) einander zugeordnet sind, während der Mantel des Zylinders durch vier Mantellinien in vier Seitenflächen zerlegt wird, von denen je zwei gegenüberliegende, ebenfalls um $\frac{\pi}{2}$ vermöge einer Rechtsschraubung gegeneinander verschraubt, zugeordnet sind (Fig. 16). Bei der Zuordnung werden die Seitenflächen deformiert, sodass eine Mantellinie in einen Viertelkreis der Grund bzw. Dachfläche übergeht. Denkt

man sich die Grundfläche des Zylinders durch eine stetige Linksschraubung um den Gesamtwinkel $\frac{\pi}{2}$ in die Dachfläche übergeführt, so beschreibt jeder Punkt der Grundfläche eine Schraubenlinie, insbesondere der Mittelpunkt der Grundfläche die Zylinderachse. Diese Schraubenlinien bilden die erste Faserung des Quaternionenraums. Es gibt drei zweifache Ausnahmefasern, die eine ist die Achse, die beiden anderen sind die Diagonalen der paarweise zugeordneten Seitenflächen.

Die zweite Faserung geht aus dieser ersten durch Spiegelung an einer durch die Achse gehenden Ebene hervor, wird also von Rechtsschraubenlinien gebildet. Ausnahmefasern treten nicht auf (Fig. 17).

Dass die beiden Zerlegungsflächen wirklich verschieden sind, sieht man daran, dass im ersten Falle sich die Fasern gleichmässig orientieren lassen, was im zweiten Falle nicht möglich ist. Nach Satz 9 ist also die Zerlegungsfläche der ersten Faserung die Kugel, die der zweiten die projektive Ebene. Das kann man auch direkt bestätigen. Im ersten Falle kann man als Zerlegungsfläche einen Halbkreis der Grundfläche ansehen, in welchem die begrenzenden Radien und Viertelkreise einander zugeordnet sind. Im andern Falle ist es die ganze Grundfläche, in der Diametralpunkte des Randes zu identifizieren sind.

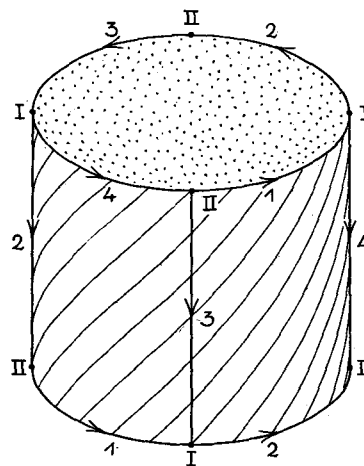


Fig. 17.

Anhang: Verzweigte Überlagerungen.

1. Definition der verzweigten Überlagerung.

Zwei euklidische Kugeln E und \tilde{E} vom Radius 1 seien auf Polarkoordinaten bezogen: φ geographische Länge, ϑ Polhöhe und ϱ Radius sind die Koordinaten von E ,

$$0 \leq \varphi < 2\pi, \quad -\frac{\pi}{2} \leq \vartheta \leq +\frac{\pi}{2}, \quad 0 \leq \varrho \leq 1,$$

und durch Cirkumflexe mögen die Koordinaten von \tilde{E} bezeichnet sein. Wir

nennen \tilde{E} eine p -fache verzweigte Überlagerung von E , wenn E und \tilde{E} durch folgende Abbildungsfunktionen auf einander bezogen sind:

$$e = \tilde{e}, \quad \vartheta = \tilde{\vartheta}, \quad \varphi \equiv p\tilde{\varphi} \pmod{2\pi} \quad (p > 1).$$

Den Durchmesser zwischen Südpol und Nordpol bezeichnen wir in E sowohl wie in \tilde{E} als Verzweigungsachse. Sind K und \tilde{K} homöomorphe Bilder von E und \tilde{E} , so ist \tilde{K} auf dem Umwege über \tilde{E} und E auf K eindeutig und stetig abgebildet. Wir nennen dann auch \tilde{K} eine p -fache verzweigte Überlagerung von K und die Linien in K bzw. \tilde{K} , die bei der topologischen Abbildung auf E bzw. \tilde{E} in die Verzweigungsachsen von E und \tilde{E} übergehen, heissen die Verzweigungsachsen von K bzw. \tilde{K} . Ist \tilde{K} auf K topologisch abgebildet, so sprechen wir auch von einer unverzweigten Überlagerung von K durch \tilde{K} .

In einer dreidimensionalen Mannigfaltigkeit M mögen endlich viele geschlossene Kurven k_1, \dots, k_x liegen, die wir Knoten nennen und die folgende Eigenschaft haben: Zu jedem Punkt P eines Knotens k_i gibt es eine Umgebung U_P in M , die ausser mit k_i mit keinem anderen Knoten Punkte gemeinsam hat und die sich auf das Innere einer euklidischen Vollkugel topologisch so abbilden lässt, dass die Punkte, die k_i mit U_P gemeinsam hat, einen Durchmesser dieser Vollkugel ausmachen. U_P heisse dann eine normale Umgebung von P und das Stück von k_i , das zu U_P gehört, der Durchmesser von U_P . Liegt P nicht auf einem Knoten, so verstehen wir unter einer normalen Umgebung jede Umgebung, die homöomorph dem Innern einer Vollkugel ist und mit keinem Knoten Punkte gemeinsam hat. Unter einem zulässigen Wege in M verstehen wir das eindeutige, stetige Bild einer gerichteten Strecke, von der höchstens der Endpunkt sich in einen Knotenpunkt abbildet.

Sei \tilde{M} eine dreidimensionale Mannigfaltigkeit, die auf M vermöge einer eindeutigen und stetigen Abbildung \mathfrak{A} abgebildet ist. Wir sagen, der Punkt \tilde{P} von \tilde{M} liegt über dem Punkt P von M und P ist der Spurpunkt von \tilde{P} , wenn \tilde{P} durch \mathfrak{A} in P übergeht. Ein zulässiger Weg in \tilde{M} ist ein Weg, der sich durch \mathfrak{A} in einen zulässigen Weg von M abbildet. \tilde{M} heisst eine verzweigte Überlagerung von M mit den Verzweigungslinien k_1, \dots, k_x , wenn Folgendes zutrifft (vgl. auch S. 194):

- I. Über jedem Punkt P von M liegt mindestens ein Punkt \tilde{P} von \tilde{M} .
- II. Sind $\tilde{P}_1, \tilde{P}_2, \dots$ die sämtlichen über P liegenden Punkte, so gibt es eine normale Umgebung U_P in M und Umgebungen $U_{\tilde{P}_1}, U_{\tilde{P}_2}, \dots$ in \tilde{M} , die alle

über U_P liegenden Punkte erschöpfen und noch folgende Eigenschaft haben:
 a) Ist P Knotenpunkt, so wird U_P von $U_{\tilde{P}_i}$ verzweigt oder unverzweigt überlagert, wobei der Durchmesser von U_P Verzweigungslinie wird. b) Ist P kein Knotenpunkt, so ist die Abbildung \mathfrak{A} von $U_{\tilde{P}_i}$ auf U_P topologisch.

Neben M betrachten wir die offene Teilmannigfaltigkeit N , die aus M durch Fortlassen aller Knotenpunkte hervorgeht, neben \tilde{M} die Teilmannigfaltigkeit \tilde{N} von \tilde{M} , aus der alle sich in Knotenpunkte abbildenden Punkte entfernt sind. Dann gelten die folgenden Sätze, die wir ohne Beweis anführen:

1. N wird unverzweigt von \tilde{N} überlagert (§ 9).
2. Ist $P=P(t)$, $0 \leq t \leq 1$, ein zulässiger Weg in M , der von einem Punkt $P(0)$ nach einem Punkt $P(1)$ führt, und ist $\tilde{P}(0)$ ein über $P(0)$ liegender Punkt, so gibt es genau einen von $\tilde{P}(0)$ auslaufenden Weg $\tilde{P}(t)$ in \tilde{M} der Art, dass $\tilde{P}(t)$ über $P(t)$ liegt.
3. Ist \tilde{w} ein geschlossener Weg von \tilde{N} und ist der entsprechende Weg von N in einen Punkt deformierbar, so ist auch \tilde{w} in \tilde{N} in einen Punkt deformierbar.
4. Liegen über einem Punkt von N genau n Punkte, so liegen über jedem Punkt von N genau n Punkte (n -blättrige Überlagerung).

2. Die Untergruppe \mathfrak{S} der Fundamentalgruppe \mathfrak{F} .

\mathfrak{F} sei die Fundamentalgruppe von N , $\tilde{\mathfrak{F}}$ die von \tilde{N} . Wählt man den Anfangspunkt \tilde{O} für die geschlossenen Wege in \tilde{N} über dem Anfangspunkt O der geschlossenen Wege in N , so bildet sich eine Klasse ineinander deformierbarer Wege von \tilde{N} in eine ebensolche Klasse von \tilde{N} ab. $\tilde{\mathfrak{F}}$ wird damit isomorph auf eine Untergruppe \mathfrak{S} von \mathfrak{F} bezogen. \mathfrak{S} wird die zur gegebenen Überlagerung gehörige Untergruppe von \mathfrak{F} genannt. Freilich ist dabei zu bedenken, dass \mathfrak{S} noch von der Auswahl des über O gelegenen Anfangspunktes \tilde{O} abhängt; diesen denken wir uns ein für allemal festgewählt. (Übergang zu einem anderen der über O liegenden Punkte würde Übergang von \mathfrak{S} zu einer ähnlichen (konjugierten) Untergruppe von \mathfrak{F} bedeuten.) Ein geschlossener, von O ausgehender Weg in N gehört dann und nur dann zu \mathfrak{S} , wenn der darüber liegende, vom Punkt \tilde{O} ausgehende Weg in \tilde{N} geschlossen ist. Zerlegt man \mathfrak{F} in die Restklassen nach \mathfrak{S} ,

$$\mathfrak{F} = \mathfrak{S} + \mathfrak{S}F_2 + \mathfrak{S}F_3 + \dots,$$

so lassen sich diese Restklassen umkehrbar eindeutig den über O liegenden Punkten folgendermassen zuordnen: Man wähle einen Weg w aus der Restklasse $\mathfrak{S} F_i$ aus und konstruiere den darüber liegenden von \tilde{O} ausgehenden Weg \tilde{w} . Sein Endpunkt ist der der Restklasse $\mathfrak{S} F_i$ entsprechende Punkt. Die Zuordnung ist offenbar unabhängig von der Auswahl des Grundweges w innerhalb der Restklasse $\mathfrak{S} F_i$. Ist insbesondere die Überlagerung von N durch \tilde{N} endlichblättrig, so ist die Blätterzahl hiernach gleich dem Index von \mathfrak{S} in \mathfrak{F} .

3. Eindeutige Bestimmtheit von \tilde{M} durch \mathfrak{S} .

Es ist für die folgende Betrachtung zweckmässig, sich auf ein bestimmtes Umgebungssystem des Überlagerungsraumes zu beschränken. Im Überlagerungsraum gibt es zu jedem Punkt eine Kugelumgebung, die eine normale Umgebung des Grundraumes verzweigt oder unverzweigt überlagert. Als Umgebungen eines Punktes \tilde{P} im Überlagerungsraum betrachten wir nun nur alle zu einer solchen Kugel konzentrischen (kleineren) Kugeln, deren jede ebenfalls eine normale Umgebung des Spurpunktes P verzweigt oder unverzweigt überlagert. Diese konzentrischen Kugeln, gebildet für alle Punkte des Überlagerungsraumes, machen ein Umgebungssystem aus, das dem Umgebungssystem aller offenen Mengen des Überlagerungsraumes äquivalent ist.

Sind \tilde{M}_1 und \tilde{M}_2 zwei verzweigte Überlagerungen von M , zu denen dieselbe Untergruppe \mathfrak{S} von \mathfrak{F} gehört, so sind sie homöomorph, genauer lassen sie sich so topologisch aufeinander abbilden, dass entsprechende Punkte den gleichen Spurpunkt in M haben. Der Bildpunkt \tilde{P}_2 eines Punktes \tilde{P}_1 von \tilde{M}_1 wird in \tilde{M}_2 dadurch erhalten, dass man \tilde{P}_1 auf irgend einem zulässigen Wege \tilde{a}_1 mit \tilde{O}_1 verbindet und über dem Spurwege a von \tilde{a}_1 in M den von \tilde{O}_2 ausgehenden Überlagerungsweg in \tilde{M}_2 zieht; sein Endpunkt ist \tilde{P}_2 . Der Punkt \tilde{P}_2 ist durch \tilde{P}_1 eindeutig bestimmt und hängt nicht von der Wahl des Verbindungsweges \tilde{a}_1 ab. Liegt nämlich \tilde{P}_1 nicht über einem Knotenpunkt, und ist \tilde{b}_1 ein zweiter Verbindungsweg von \tilde{P}_1 mit \tilde{O}_1 , so ist der Weg $\tilde{a}_1 \tilde{b}_1^{-1}$ in \tilde{M}_1 geschlossen, sein Spurweg in M ist also in der Untergruppe \mathfrak{S} von \mathfrak{F} enthalten, und da zu \tilde{M}_2 dieselbe Untergruppe gehört, ist auch der Überlagerungsweg $\tilde{a}_2 \tilde{b}_1^{-1}$ in \tilde{M}_2 geschlossen; man gelangt also von \tilde{O}_2 auf \tilde{a}_2 zum selben Endpunkt wie auf \tilde{b}_2 . Liegt aber \tilde{P}_1 über einem Knotenpunkt, so deformiert man den Weg $\tilde{a}_1 \tilde{b}_1^{-1}$ innerhalb einer beliebig kleinen Kugelumgebung \tilde{U}_1 von \tilde{P}_1 in einen zulässigen Weg und zwar folgendermassen: Man wählt auf \tilde{a}_1 kurz vor \tilde{P}_1 einen Punkt \tilde{A}_1 , sodass die

Strecke $\tilde{A}_1\tilde{P}_1$ auf \tilde{a}_1 ganz zu \tilde{U}_1 gehört, ebenso auf \tilde{b}_1 einen Punkt \tilde{B}_1 kurz vor \tilde{P}_1 und verbindet \tilde{A}_1 mit \tilde{B}_1 durch einen Weg \tilde{v} , der ganz innerhalb \tilde{U}_1 verläuft und die Punkte der Verzweigungsachse der Kugelumgebung vermeidet. Die entsprechende Ablösung kann man im Grundraum M vornehmen. Die Kugelumgebung \tilde{U}_1 bildet sich in eine normale Umgebung ab, die Punkte \tilde{A}_1 und \tilde{B}_1 in zwei auf a und b kurz vor P gelegene Punkte, und der abgelöste Spurweg gehört als Bild eines zulässigen geschlossenen Weges in \tilde{M}_1 zu \S . Da man die Umgebung \tilde{U}_1 beliebig klein wählen kann, so lässt sich also der Weg ab^{-1} innerhalb jeder beliebig kleinen normalen Umgebung von P in einen Weg von \S ablösen. Angenommen, \tilde{a}_2 und \tilde{b}_2 führen von \tilde{O}_2 zu verschiedenen Endpunkten \tilde{P}_2 und \tilde{Q}_2 , so kann man zwei punktfremde Kugelumgebungen \tilde{U}_2 und \tilde{V}_2 von \tilde{P}_2 und \tilde{Q}_2 angeben. Die entsprechenden normalen Bildumgebungen U und V von P in M haben eine Umgebung W gemeinsam, innerhalb deren man die Ablösung des Weges ab^{-1} vornimmt. Überträgt man nun den Weg a von O bis A in den Überlagerungsraum \tilde{M}_2 , so erhält man einen Weg, der von \tilde{O}_2 nach einem Punkt \tilde{A}_2 führt. Läuft man von A weiter auf v nach B , so gelangt man in \tilde{M}_2 nach einem Punkt \tilde{B}_2 , der zu \tilde{U}_2 gehört. Läuft man anderseits von O auf b nach B , so führt der darüberliegende Weg in \tilde{M}_2 von \tilde{O}_2 nach einem Punkt von \tilde{V}_2 . Dieser Punkt muss aber, da der abgelöste Weg ab^{-1} zu \S gehört, mit \tilde{B}_2 übereinstimmen. Es können also die Umgebungen \tilde{U}_2 und \tilde{V}_2 nicht punktfremd sein, und daher muss \tilde{Q}_2 mit \tilde{P}_2 zusammenfallen.

Damit ist gezeigt, dass die konstruierte Abbildung von \tilde{M}_1 auf \tilde{M}_2 umkehrbar eindeutig ist. Um zu zeigen, dass sie topologisch ist, muss man zu einer vorgegebenen Umgebung \tilde{U}_1 von \tilde{P}_1 eine Umgebung \tilde{U}_2 des Bildpunktes \tilde{P}_2 angeben, die bei der eineindeutigen Abbildung in eine Teilmenge von \tilde{U}_1 übergeht. Ist U_1 die normale Umgebung von P in M , die von \tilde{U}_1 verzweigt oder unverzweigt überlagert wird und a ein Weg von O nach P , dem in \tilde{M}_1 ein Weg von \tilde{O}_1 nach \tilde{P}_1 entspricht, so führt jeder Weg von O nach einem Punkt P' von U_1 , der mit a bis zu einem Punkt A kurz vor P übereinstimmt und dann ganz in U_1 bleibt, in \tilde{M}_1 von \tilde{O}_1 nach einem Punkt von \tilde{U}_1 . Man wähle nun als \tilde{U}_2 eine Kugelumgebung, die sich in eine normale Teilumgebung U_2 von U_1 abbildet. Der über a liegende in \tilde{O}_2 beginnende Weg \tilde{a}_2 führt nach \tilde{P}_2 , und man kann jeden Punkt \tilde{P}'_2 von \tilde{U}_2 erreichen auf einem Wege, der mit \tilde{a}_2 bis kurz vor \tilde{P}_2 übereinstimmt und dann ganz in \tilde{U}_2 verläuft. Im Grundraum gehört dieser Weg zu den zuvor erwähnten Wegen von O nach einem Punkt P' . Ihm entspricht daher in \tilde{M}_1 ein Weg von \tilde{O}_1 nach einem Punkt von \tilde{U}_1 . Die Ab-

bildung von \tilde{M}_2 auf \tilde{M}_1 ist also stetig, und da man dieselbe Überlegung in Richtung von \tilde{M}_1 auf \tilde{M}_2 vornehmen kann, ist sie topologisch.

Hiermit ist die eindeutige Bestimmtheit der Überlagerung \tilde{M} von M durch die Untergruppe \mathfrak{S} bewiesen. Die Existenz einer Überlagerung \tilde{M} , zu der eine vorgegebene Untergruppe \mathfrak{S} von endlichem Index gehört, lässt sich ebenso nachweisen. Wir unterdrücken den Beweis, da wir im Text von den Überlagerungsmannigfaltigkeiten ausgehen.

4. Reguläre Überlagerungen.

Eine *Deckbewegung* von \tilde{M} ist eine topologische Selbstabbildung, bei der jeder Punkt \tilde{P} über seinem Spurpunkt P liegen bleibt. Sind $1, 2, \dots$ die über O liegenden Punkte (\tilde{O} möge mit 1 zusammenfallen), so ist eine Decktransformation D vollkommen bestimmt, wenn man weiss, in welchen Punkt i sie den Punkt 1 überführt. Ist nämlich \tilde{P} ein beliebiger Punkt von \tilde{M} , so verbinde man ihn mit 1 durch einen zulässigen Weg \tilde{w}_1 . \tilde{w}_1 geht bei der Deckbewegung in einen von i ausgehenden Weg \tilde{w}_i über, der über dem gleichen Weg w von M liegt wie \tilde{w}_1 . Dann ist aber \tilde{w}_i eindeutig durch seinen Anfangspunkt i und w bestimmt. Der Bildpunkt von \tilde{P} ist also der eindeutig bestimmte Endpunkt von \tilde{w}_i . Die Gesamtheit der Deckbewegungen, die \tilde{M} zulässt, bildet offenbar eine Gruppe, die *Deckbewegungsgruppe*. Gibt es nach Auswahl eines beliebigen Punktes i immer (genau) eine Deckbewegung, die den Punkt 1 in i überführt, so heisst die Überlagerung *regulär*.

Ist \tilde{M} reguläre Überlagerung von M , so ist die zu \tilde{M} gehörige Untergruppe \mathfrak{S} invariant in \mathfrak{F} enthalten. Ist nämlich w ein Weg aus \mathfrak{S} , t ein beliebiger Weg aus \mathfrak{F} , so ist der über $tw t^{-1}$ liegende im Punkte 1 begonnene Weg in \tilde{M} geschlossen. Man durchläuft zunächst in 1 beginnend den über t liegenden Weg \tilde{t} bis zum Punkt i , dann den über w liegenden Weg \tilde{w}_i , der nach i zurückführt, da \tilde{w}_i aus dem über w liegenden, von 1 ausgehenden geschlossenen Wege w_1 durch eine Deckbewegung hervorgeht, schliesslich läuft man von i auf dem Wege \tilde{t}^{-1} nach 1 zurück. $tw t^{-1}$ ist also wieder ein Weg aus \mathfrak{S} , d. h. \mathfrak{S} ist invariante Untergruppe von \mathfrak{F} .

Die *Deckbewegungsgruppe* \mathfrak{D} ist 1-isomorph zur Quotientengruppe $\mathfrak{F}/\mathfrak{S}$. Wir haben gesehen, dass die Restklassen der Zerlegung $\mathfrak{F} = \mathfrak{S} + \mathfrak{S}F_2 + \mathfrak{S}F_3 + \dots$ umkehrbar eindeutig den Punkten $1, 2, \dots$ entsprechen: $i \leftrightarrow \mathfrak{S}F_i$. Andererseits gehört zu i die Deckbewegung D_i , die 1 in i überführt, sodass man eine Zuordnung

$$D_i \leftarrow \rightarrow \mathfrak{S} F_i \tag{1}$$

hat. Sind nun w_i, w_j Wege aus $\mathfrak{S} F_i$ bzw. $\mathfrak{S} F_j$, so führen die in $\mathfrak{1}$ beginnenden Wege \tilde{w}_i, \tilde{w}_j nach i bzw. j ; der über $w_i w_j$ liegende, in $\mathfrak{1}$ beginnende Weg wird also erhalten, wenn man erst \tilde{w}_i von $\mathfrak{1}$ bis i , dann den Weg \tilde{w}_j durchläuft, der aus \tilde{w}_j durch die Deckbewegung D_i entsteht. Der Endpunkt von $\tilde{w}_i \tilde{w}_j$ ist also derselbe Punkt x , in den $\mathfrak{1}$ übergeht, wenn man erst D_j und dann D_i ausübt. Es ist also einerseits $D_x = D_i D_j$ (erst D_j , dann D_i), andererseits führt der über $w_i w_j$ liegende Weg von $\mathfrak{1}$ nach x , d. h. $w_i w_j$ gehört der Restklasse $\mathfrak{S} F_x$ an, $w_i w_j$ liegt aber in der Restklasse $\mathfrak{S} F_i \cdot \mathfrak{S} F_j$. Die Zuordnung (1) ist also isomorph, denn sie ordnet dem Produkt $D_i D_j = D_x$ das Produkt $\mathfrak{S} F_i \cdot \mathfrak{S} F_j = \mathfrak{S} F_x$ zu.

5. Hilfssatz über verzweigte Überlagerungen der Hypersphäre mit abelscher Deckbewegungsgruppe.

M sei die Hypersphäre mit den Knoten k_1, \dots, k_x und \tilde{M} eine reguläre endlichblättrige verzweigte Überlagerung mit abelscher Deckbewegungsgruppe der Ordnung $g = \alpha_1 \dots \alpha_x$. Ist C_i ein kleiner Kreis, der k_i gerade einmal umschlingt, so seien die über $C_i^{\alpha_i}$ liegenden Wege von \tilde{M} geschlossen.³² Dann folgt:

Ein Weg \tilde{w} von \tilde{M} , der über einem die Knoten nicht treffenden geschlossenen Wege w von M liegt, ist dann und nur dann geschlossen, wenn für jedes i die Verschlingungszahl χ_i von w mit k_i durch α_i teilbar ist. Da hiernach die zu \tilde{M} gehörige Untergruppe \mathfrak{S} von \mathfrak{F} festliegt, so gibt es nach Nr. 3 nur eine Überlagerung \tilde{M} mit der obigen Eigenschaft.

Beweis: Jeder Weg von \mathfrak{F} liegt in einer bestimmten Restklasse von \mathfrak{S} in \mathfrak{F} . Ein nullhomologer Weg w aus \mathfrak{F} gehört immer zu \mathfrak{S} . Er ist nämlich Produkt von Kommutatoren, und jeder Kommutator von \mathfrak{F} liegt in \mathfrak{S} , da $\mathfrak{F}/\mathfrak{S}$ abelsch ist. Damit liegen je zwei homologe Wege aus \mathfrak{F} in derselben Restklasse. Nun ist die Homologiegruppe von N die freie Abelsche Gruppe mit den Erzeugenden C_1, \dots, C_x . Jeder geschlossene Weg w von N ist also homolog einer linearen Kombination $\sum_{i=1}^x \chi_i C_i$, worin χ_i die eindeutig bestimmte Verschlingungszahl von w mit k_i darstellt (bei richtiger Orientierung von k_i). Insbesondere ist w dann und nur dann nullhomolog in N , wenn alle seine Verschlingungszahlen verschwin-

³² Es genügt zu verlangen, dass es wenigstens einen über $C_i^{\alpha_i}$ liegenden geschlossenen Weg gibt, wegen der Regularität der Überlagerung sind dann alle anderen ebenfalls geschlossen.

den. Wir können also sagen: Wege aus \mathfrak{F} mit denselben Verschlingungszahlen χ_i liegen in derselben Restklasse von \mathfrak{S} in \mathfrak{F} . Die Wege C_i gehen im allgemeinen noch nicht von O aus und gehören daher nicht zu \mathfrak{F} ; deshalb verbinden wir O mit einem Punkt von C_i durch einen zulässigen Weg v_i und gewinnen in $v_i C_i v_i^{-1}$ einen Weg c_i von \mathfrak{F} , der in N homolog C_i ist und dessen α_i -te Potenz zu \mathfrak{S} gehört. $c_i^{\alpha_i}$ hat aber mit k_i die Verschlingungszahl α_i , mit allen übrigen Knoten die Verschlingungszahl 0. Infolgedessen gehören alle Wege von \mathfrak{F} , deren Verschlingungszahl χ_i durch α_i teilbar ist (für jedes i) zu \mathfrak{S} . Zwei Wege w und w' , deren sämtliche x Verschlingungszahlen kongruent sind:

$$\chi_i \equiv \chi_i' \pmod{\alpha_i} \quad (i=1, \dots, x)$$

liegen daher in derselben Restklasse von \mathfrak{S} in \mathfrak{F} . Da es im ganzen $\alpha_1 \dots \alpha_x$ inkongruente Systeme von Verschlingungszahlen gibt, und ebensoviele Restklassen, so erfüllen die sämtlichen Wege von \mathfrak{F} , deren Verschlingungszahlen mit den Knoten k_1, \dots, k_x Stück für Stück einander kongruent sind, eine Restklasse von \mathfrak{S} in \mathfrak{F} . Insbesondere besteht \mathfrak{S} selbst aus der Gesamtheit der Wege, deren Verschlingungszahlen χ_1, \dots, χ_x durch α_1 , bzw. α_2, \dots bzw. α_x teilbar sind. Der Satz ist also richtig für die von O ausgehenden Wege w . Dann gilt er aber auch für die übrigen Wege, denn man kann jeden Weg w aus N ohne Überschreitung der Knoten in einen durch O gehenden Weg deformieren, und dabei ändert sich weder seine Verschlingungszahl mit k_i , noch seine Eigenschaft, Spurweg eines im Überlagerungsraum geschlossenen Weges zu sein.