SUR LA THÉORIE DE L'ÉQUATION INTÉGRODIFFÉRENTIELLE DE BOLTZMANN.

PAR

TORSTEN CARLEMAN

à STOCKHOLM.

Dédié à M. E. HOLMGREN à l'occasion de son soixantième anniversaire.

Table des matières.

Introduction.

Pour étudier l'état d'un gaz on introduit dans la théorie cinétique des gaz la fonction de distribution des vitesses

$$F(x, y, z, \xi, \eta, \zeta, t)$$

qui est définie de manière que

$$F(x, y, z, \xi, \eta, \zeta, t)\, dv\, d\omega$$

désigne le nombre des molécules dont les centres à l'instant t sont compris dans l'élément de volume $dv = dx\, dy\, dz$ et dont les vecteurs de vitesse (ξ, η, ζ) aboutissent dans l'élément $d\omega = d\xi\, d\eta\, d\zeta$ de l'espace des vitesses. En supposant que les molécules soient des sphères parfaitement élastiques de diamètre d et que les composantes des forces extérieures soient X, Y, Z, Boltzmann a démontré que F doit satisfaire à l'équation intégrodifférentielle non linéaire

$$\frac{\partial F}{\partial t} + \xi \frac{\partial F}{\partial x} + \eta \frac{\partial F}{\partial y} + \zeta \frac{\partial F}{\partial z} + X \frac{\partial F}{\partial \xi} + Y \frac{\partial F}{\partial \eta} + Z \frac{\partial F}{\partial \zeta} =$$

$$= \tfrac{1}{2} d^2 \int\limits_S \int\limits_{\Omega_1} (F' F'_1 - F F_1) |W| \, d\omega_1 \, d\sigma .$$

Dans le second membre on a posé: $d\sigma =$ élément de surface d'une sphère S de rayon un $(l^2 + m^2 + n^2 = 1)$, $d\omega_1 = d\xi_1\, d\eta_1\, d\zeta_1$, Ω_1 étant l'espace

$$-\infty < \begin{matrix} \xi_1 \\ \eta_1 \\ \zeta_1 \end{matrix} < \infty$$

entier,

$$\begin{aligned} F_1 &= F(x, y, z, \xi_1, \eta_1, \zeta_1, t) \\ F' &= F(x, y, z, \xi', \eta', \zeta', t) \\ F'_1 &= F(x, y, z, \xi'_1, \eta'_1, \zeta'_1, t), \end{aligned}$$

où les quantités $\xi', \eta', \zeta', \xi'_1, \eta'_1, \zeta'_1, W$ sont définies par les formules

$$\begin{aligned} \xi' &= \xi + l\, W & \xi'_1 &= \xi_1 - l\, W \\ \eta' &= \eta + m\, W & \eta'_1 &= \eta_1 - m\, W \\ \zeta' &= \zeta + n\, W & \zeta'_1 &= \zeta_1 - n\, W \end{aligned}$$
$$W = l(\xi_1 - \xi) + m(\eta_1 - \eta) + n(\zeta_1 - \zeta).$$

Ajoutons que la fonction F doit satisfaire à certaines conditions aux limites linéaires sur la surface qui limite le gaz considéré.

Malgré les résultats classiques de Boltzmann, Maxwell, Lorentz etc. et malgré les travaux importants de M. Hilbert et de ses successeurs nous pouvons dire que l'étude mathématique de l'équation de Boltzmann est trop peu avancée pour donner une base solide de la théorie cinétique d'un gaz qui n'est pas en équilibre.

Nous nous proposons d'étudier d'une manière rigoureuse l'équation de Boltzmann et de démontrer l'existence, pour toutes les valeurs positives de t, d'une solution positive unique qui se réduit, pour $t = 0$, à une fonction positive F_0 donnée. Pour simplifier l'exposition nous traiterons dans ce mémoire préliminaire le cas particulier où F est indépendante de x, y, z et ne dépend que de t et de $\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2$. Les méthodes utilisées s'appliquent aussi dans le cas général que je me propose d'étudier dans un travail prochain.

§ 1.

Formules fondamentales classiques.

Si l'on suppose que F soit une fonction $F(r, t)$ ne dépendant que de $r = \sqrt{\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2}$ et de t, on obtient par un calcul facile que l'équation de Boltzmann prend la forme suivante:

$$(1) \quad \frac{\partial F}{\partial t} = 2\pi^2 d^2 \int_0^\infty \int_0^\pi \int_0^\pi [F(\sqrt{r^2 \sin^2\theta + r_1^2 \cos^2\theta_1}, t) F(\sqrt{r_1^2 \sin^2\theta_1 + r^2 \cos^2\theta}, t) - \\ - F(r, t) F(r_1, t)] \, V(r, r_1, \theta, \theta_1) r_1^2 \, d\theta \, d\theta_1 \, dr_1$$

où lon a posé

$$V(r, r_1, \theta, \theta_1) = |r_1 \cos\theta_1 - r\cos\theta| \sin\theta \sin\theta_1 .$$

En introduisant la transformation

$$(2) \quad \begin{aligned} r' \cos\theta' &= r_1 \cos\theta_1 & \qquad r' \sin\theta' &= r \sin\theta \\ r'_1 \cos\theta'_1 &= r \cos\theta & \qquad r'_1 \sin\theta'_1 &= r_1 \sin\theta_1 \end{aligned}$$

qui transforme les variables r, r_1, θ, θ_1 en $r', r'_1, \theta', \theta'_1$, et en remplaçant F par $\frac{F}{2\pi^2 d^2}$, on trouve l'équation simplifiée:

$$(3) \quad \frac{\partial F}{\partial t} = \int_0^\infty \int_0^\pi \int_0^\pi (F(r', t) F(r'_1, t) - F(r, t) F(r_1, t)) \, V(r, r_1, \theta, \theta_1) r_1^2 \, d\theta \, d\theta_1 \, dr_1 .$$

Nous abrègerons encore l'écriture en écrivant

$$F(r', t) = F', \quad F(r'_1, t) = F'_1, \quad F(r_1, t) = F_1$$

$$(4) \quad \frac{\partial F}{\partial t} = \int_0^\infty \int_0^\pi \int_0^\pi (F' F'_1 - F F_1) \, V r_1^2 \, d\theta \, d\theta_1 \, dr_1 .$$

On vérifie facilement la formule

$$\left|\frac{D(r', r'_1, \theta', \theta'_1)}{D(r, r_1, \theta, \theta_1)}\right| = \frac{r r_1}{r' r'_1}. \tag{5}$$

Nous pouvons considérer le second membre de (3) comme une transformation fonctionnelle $T(F)$. Ceci posé nous allons étudier l'intégrale[1]

$$\int_0^\infty \Phi\, T(F)\, r^2\, dr$$

où $\Phi = \Phi(r, t)$ est une fonction de r et de t.

On trouve

$$\int_0^\infty \Phi\, T(F)\, r^2\, dr = \int_0^\infty\int_0^\infty\int_0^\pi\int_0^\pi \Phi\, F' F'_1\, V r^2 r_1^2\, d\theta\, d\theta_1\, dr_1\, dr -$$

$$- \int_0^\infty\int_0^\infty\int_0^\pi\int_0^\pi \Phi\, F F_1\, V r^2 r_1^2\, d\theta\, d\theta_1\, dr_1\, dr.$$

En effectuant le changement de variables (2) et en utilisant la formule (5), on trouve que le premier terme du second membre est égal à

$$\int_0^\infty\int_0^\infty\int_0^\pi\int_0^\pi \Phi\, F' F'_1\, V' r'^2 r'^2_1\, d\theta'\, d\theta'_1\, dr'\, dr'_1 =$$

$$= \int_0^\infty\int_0^\infty\int_0^\pi\int_0^\pi \Phi'\, F F_1\, V r^2 r_1^2\, d\theta\, d\theta_1\, dr\, dr_1.$$

On a donc

$$\int_0^\infty \Phi\, T(F)\, r^2\, dr = \int_0^\infty\int_0^\infty\int_0^\pi\int_0^\pi F F_1 (\Phi' - \Phi)\, V r^2 r_1^2\, d\theta\, d\theta_1\, dr\, dr_1. \tag{6}$$

En échangeant r et r_1, θ et θ_1, on en déduit

[1] Nous supposons que toutes les intégrales considérées dans ce paragraphe soient absolument et uniformément convergentes.

$$(7)\qquad \int_0^\infty \Phi\, T(F)\, r^2\, dr = \int_0^\infty\int_0^\infty\int_0^\pi\int_0^\pi F F_1 (\Phi'_1 - \Phi_1)\, V r^2 r_1^2\, d\theta\, d\theta_1\, dr\, dr_1.$$

En combinant les formules (6) et (7) il vient

$$(8)\qquad \int_0^\infty \Phi\, T(F)\, r^2\, dr = \frac{1}{2}\int_0^\infty\int_0^\infty\int_0^\pi\int_0^\pi F F_1 (\Phi' + \Phi'_1 - \Phi - \Phi_1)\, V r^2 r_1^2\, d\theta\, d\theta_1\, dr\, dr_1 =$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^\infty\int_0^\infty\int_0^\pi\int_0^\pi F' F'_1 (\Phi + \Phi_1 - \Phi' - \Phi'_1)\, V r^2 r_1^2\, d\theta\, d\theta_1\, dr\, dr_1$$

$$= -\frac{1}{4}\int_0^\infty\int_0^\infty\int_0^\pi\int_0^\pi (F' F'_1 - F F_1)(\Phi' + \Phi'_1 - \Phi - \Phi_1)\, V r^2 r_1^2\, d\theta\, d\theta_1\, dr\, dr_1.$$

Si l'on pose $\Phi = 1$ ou $\Phi = r^2$ on trouve

$$\Phi' + \Phi'_1 - \Phi - \Phi_1 = 0.$$

Il s'ensuit

$$(9)\qquad \int_0^\infty T(F)\, r^2\, dr = 0$$

$$(10)\qquad \int_0^\infty T(F)\, r^4\, dr = 0$$

quelle que soit F.

En posant $\Phi = \log F$ il vient

$$(11)\qquad \int_0^\infty \log F \cdot T(F)\, r^2\, dr =$$

$$= -\frac{1}{4}\int_0^\infty\int_0^\infty\int_0^\pi\int_0^\pi (F' F'_1 - F F_1) \log \frac{F' F'_1}{F F_1}\, V r^2 r_1^2\, d\theta\, d\theta_1\, dr\, dr_1.$$

Comme la fonction sous le signe d'intégration dans le second membre est toujours non négative, on trouve

$$(12)\qquad \int_0^\infty \log F .\, T(F)\, r^2\, dr \leq 0.$$

Corollaires: Soit $F(r,t)$ une solution de l'équation de Boltzmann

$$\frac{\partial F}{\partial t} = T(F).$$

On déduit de (9) et (10) que les intégrales

$$\int_0^\infty F(r,t)\, r^2\, dr \qquad \int_0^\infty F(r,t)\, r^4\, dr$$

conservent une valeur constante indépendante de t.

La formule (12) montre que l'expression

$$H = \int_0^\infty F \log F \cdot r^2\, dr$$

ne peut pas augmenter lorsque t croît. C'est le célèbre H-théorème de Boltzmann pour le cas particulier qui nous occupe.

On peut aussi utiliser la formule (11) pour rechercher toutes les solutions positives de $T(F) = 0$, c'est-à-dire toutes les fonctions de distribution des vitesses qui correspondent à l'état de l'équilibre. Pour que le second membre de (11) soit égal à zéro il faut, en effet, qu'on ait

$$F' F'_1 - F F_1 = 0$$

quelles que soient θ, θ_1, r, r_1. On en déduit aisément

$$F = C e^{-\alpha r^2}$$

où C et α sont des constantes.

§ 2.

Transformation de l'équation de Boltzmann.

Nous allons dans ce numéro transformer l'équation (3) en une forme qui jouera un rôle fondamental pour les recherches qui vont suivre. Posons d'abord dans l'intégrale

$$J = \int_0^\infty \int_0^\pi \int_0^\pi F(\sqrt{r^2 \sin^2\theta + r_1^2 \cos^2\theta_1}, t)\, F(\sqrt{r_1^2 \sin^2\theta_1 + r^2\cos^2\theta}, t)\cdot$$
$$\cdot \, |r_1 \cos\theta_1 - r\cos\theta| \sin\theta \sin\theta_1 r_1^2 \, d\theta\, d\theta_1\, dr_1$$

$x = \cos\theta$, $y = \cos\theta_1$. On obtient ainsi

$$J = \int_0^\infty \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 F(\sqrt{r^2 - r^2x^2 + r_1^2y^2}, t)\, F(\sqrt{r_1^2 - r_1^2y^2 + r^2x^2}, t)\, |r_1 y - r x|\, r_1^2\, dy\, dx\, dr_1 =$$

$$= 2\int_0^\infty \int_0^1 \int_0^1 F(\sqrt{r^2 - r^2x^2 + r_1^2y^2}, t)\, F(\sqrt{r_1^2 - r_1^2y^2 + r^2x^2}, t)\cdot$$
$$\cdot\, (|r_1 y - r x| + |r_1 y + r x|)\, r_1^2\, dy\, dx\, dr_1 .$$

Prenons maintenant les quantités

$$u = \sqrt{r^2 - r^2x^2 + r_1^2y^2}, \qquad v = \sqrt{r_1^2 - r_1^2y^2 + r^2x^2} \ \text{ et } \ y$$

comme nouvelles variables d'intégration. En effectuant les calculs on trouve

$$J = 4\int_0^\infty \int_0^\infty G(r, u, v)\, u\, v\, F(u, t)\, F(v, t)\, du\, dv \tag{13}$$

où G est une fonction symétrique de u et de v définie comme il suit:

$$\begin{aligned}
&G = 0 && \text{pour } u^2 + v^2 \leq r^2 \\
&G = 1 && \text{»} \quad u \geq r,\ v \geq r \\
&G = \frac{v}{r} && \text{»} \quad u \geq r,\ v \leq r \\
&G = \frac{u}{r} && \text{»} \quad u \leq r,\ v \geq r \\
&G = \frac{\sqrt{u^2 + v^2 - r^2}}{r} && \text{»} \quad u^2 + v^2 \geq r^2,\ u \leq r,\ v \leq r.
\end{aligned} \tag{14}$$

(Cf. le diagramme ci-joint.)

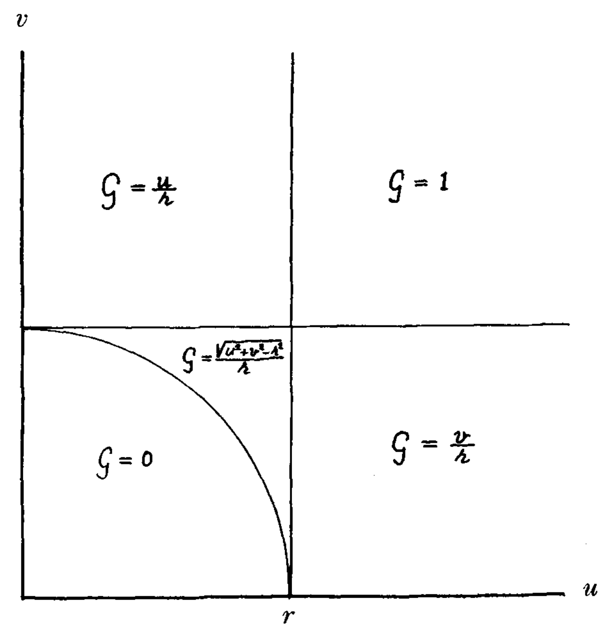

Fig. 1.

On obtient d'une manière analogue

$$\int_0^\pi \int_0^\pi |r_1 \cos\theta_1 - r\cos\theta| \sin\theta \sin\theta_1 \, d\theta \, d\theta_1 = P(r, r_1)$$

où la fonction symétrique P est définie par les formules

$$(15) \qquad \begin{aligned} P(r, r_1) &= 2r + \frac{2}{3}\frac{r_1^2}{r} && \text{pour } r_1 \leq r \\ P(r, r_1) &= 2r_1 + \frac{2}{3}\frac{r^2}{r_1} && \text{» } r_1 \geq r. \end{aligned}$$

En posant, pour abréger, $F(u, t) = F(u)$, $F(v, t) = F(v)$ nous pouvons donc écrire l'équation de Boltzmann sous la forme

$$(16) \qquad \frac{\partial F}{\partial t} = 4 \int_0^\infty \int_0^\infty G(r, u, v)\, u\, v\, F(u)\, F(v)\, du\, dv - F(r) \int_0^\infty P(r, r_1)\, F(r_1)\, r_1^2\, dr_1.$$

Dans les cas où il est utile de sousligner que l'expression J, définie par la formule (13), dépend de F nous écrirons dans la suite

$$J(F) = 4 \int_0^\infty \int_0^\infty G(r, u, v)\, u\, v\, F(u)\, F(v)\, du\, dv. \tag{17}$$

Nous utiliserons aussi la notation

$$J(F, \Phi) = 4 \int_0^\infty \int_0^\infty G(r, u, v)\, u\, v\, F(u)\, \Phi(v)\, du\, dv. \tag{18}$$

Indiquons finalement deux transformations de l'expression

$$L = L(F) = \int_0^\infty P(r, r_1)\, F(r_1)\, r_1^2\, dr_1.$$

On démontre facilement

$$L = 2r \int_0^\infty r_1^2 F(r_1)\, dr_1 + \frac{2}{3r} \int_0^\infty r_1^4 F(r_1)\, dr_1 - \frac{2}{3r} \int_r^\infty (r_1 - r)^3 r_1 F(r_1)\, dr_1.$$

$$L = 2r \int_0^\infty F(r_1)\, r_1^2\, dr_1 + \frac{2}{3r} \int_0^r r_1^4 F(r_1)\, dr_1 + \frac{2}{3} \int_r^\infty [(r_1 - r)^2 + (r_1 - r)\, r_1 + r_1^2]\, r_1 F(r_1)\, dr_1.$$

En introduisant les notations

$$\int_0^\infty F r^2\, dr = A, \tag{19}$$

$$\int_0^\infty F r^4\, dr = B, \tag{20}$$

$$S(F) = \frac{2}{3r} \int_0^r r_1^4 F(r_1)\, dr_1 + \frac{2}{3} \int_r^\infty [(r_1 - r)^2 + (r_1 - r)\, r_1 + r_1^2]\, r_1 F(r_1)\, dr_1 \tag{21}$$

nous pouvons donc écrire l'équation de Boltzmann sous les deux formes suivantes:

$$\frac{\partial F}{\partial t} + \left(2 A r + \frac{2}{3}\frac{B}{r}\right) F = J(F) + \frac{2 F(r)}{3 r} \int_r^\infty (r_1 - r)^3 r_1 F(r_1)\, d r_1, \tag{22}$$

$$\frac{\partial F}{\partial t} + [2 A r + S(F)] F = J(F). \tag{23}$$

§ 3.

Étude d'un système d'équations différentielles non linéaires.

Si l'on remplace la variable continue r par un indice qui ne prend qu'un nombre fini de valeurs on est conduit à comparer l'équation (16) à un système d'équations différentielles de la forme

$$\frac{d x_p}{d t} + x_p \sum_{q=1}^{n} a_{p\,q}\, x_q = \sum_{q=1}^{n} \sum_{r=1}^{n} b_{q\,r}^{(p)} x_q\, x_r \qquad p = 1, 2, \ldots n. \tag{24}$$

Pour pousser l'analogie avec l'équation (16) plus loin nous supposerons que les coefficients $b_{q\,r}^{(p)}$ soient tous positifs et que l'équation (24) admette une intégrale première de la forme

$$\sum_{\nu=1}^{n} a_\nu\, x_\nu = \text{constante} \tag{25}$$

où les a_ν sont des quantités positives. Ces hypothèses suffisent pour démontrer que tout système de solutions qui prennent des valeurs positives pour $t = 0$ est prolongeable d'une manière continue dans tout l'intervalle $0 \leq t < \infty$ et que ces solutions sont positives et bornées dans tout l'intervalle $0 \leq t < \infty$. Démontrons d'abord que les solutions $x_p(t)$ ne peuvent s'annuler dans un intervalle où elles sont continues. Supposons, par impossible, qu'on ait

$$\begin{aligned} x_p(t_0) &= 0 \qquad t_0 > 0 \\ x_\nu(t) &> 0 \qquad 0 \leq t < t_0 \qquad \nu = 1, 2, \ldots n. \end{aligned}$$

On a donc nécessairement

$$x'_p(t_0) \leq 0$$

et, par conséquent, à cause de (24)

$$\sum_{q=1}^{n} \sum_{r=1}^{n} b_{q\,r}^{(p)} x_q(t_0)\, x_r(t_0) \leq 0.$$

Comme tous les termes du premier membre sont positifs ou nuls il s'ensuit

$$x_\nu(t_0) = 0 \qquad\qquad \nu = 1, 2, \ldots n.$$

Mais ces conditions entraînent que $x_\nu(t)$ sont identiquement nuls ce qui contredit notre hypothèse sur les valeurs initiales. Il s'ensuit, en tenant compte de (25), que les solutions $x_p(t)$, dans tout leur domaine d'existence, sont comprises entre deux limites finies et indépendantes de t. Ceci entraîne, d'après un théorème bien connu, que les solutions existent et sont continues dans tout l'intervalle $0 < t < \infty$.

§ 4.

Bornes supérieures des expressions $T(F)$, $J(F)$, $J(F, \Phi)$.

Nous démontrerons dans ce paragraphe quelques lemmes sur les expressions $T(F)$, $J(F)$, $J(F, \Phi)$.

Lemme I: *Soit $F(r)$ une fonction mesurable pour $0 < r < \infty$ et satisfaisant à l'inégalité*

$$|F(r)| < \frac{c}{r^\alpha(1 + r)^\beta} \qquad 0 \leq \alpha < 3, \ \alpha + \beta > 4$$

(c = constante). *Ceci posé les expressions $J(F)$ et $T(F)$ sont absolument convergentes et l'on aura*

$$(26) \qquad |T(F)| < \frac{k_1 c^2}{r^\alpha(1 + r)^{\beta-1}}$$

où k_1 est une constante qui ne dépend que de α et de β.

Pour la démonstration nous remarquerons d'abord que

$$|T(F)| \leq J(|F|) + |F(r)| \cdot L(|F|).$$

En utilisant l'inégalité

$$0 < P(r, r_1) < 2(r + r_1),$$

on trouve immédiatement

$$L(|F|) < 2c \int_0^\infty \frac{r + r_1}{r_1^{\alpha-2}(1 + r_1)^\beta} dr_1 < 2c(1 + r) \int_0^\infty \frac{1}{r_1^{\alpha-2}(1 + r_1)^{\beta-1}} dr_1.$$

Il s'ensuit

$$|F(r)| \cdot L(|F|) < \frac{k_1' c^2}{r^\alpha(1 + r)^{\beta-1}}$$

où k_1' ne dépend que de α et de β. Pour trouver une borne supérieure de $J(|F|)$ nous allons remplacer $G(r,u,v)$ par une majorante $G_1(r,u,v)$ définie de la manière suivante:

$$G_1(r,u,v) = 0 \text{ pour } u < \frac{r}{\sqrt{2}},\ v < \frac{r}{\sqrt{2}},$$

$$G_1(r,u,v) = 1 \quad \text{»} \quad u > \frac{r}{\sqrt{2}},\ v > \frac{r}{\sqrt{2}},$$

$$G_1(r,u,v) = \frac{v}{r} \quad \text{»} \quad u > \frac{r}{\sqrt{2}},\ v < \frac{r}{\sqrt{2}},$$

$$G_1(r,u,v) = \frac{u}{r} \quad \text{»} \quad u < \frac{r}{\sqrt{2}},\ v > \frac{r}{\sqrt{2}}.$$

Il s'ensuit

$$J(|F|) < 4c^2\left\{\left[\int\limits_{\frac{r}{\sqrt{2}}}^{\infty} \frac{u}{u^\alpha(1+u)^\beta}\,du\right]^2 + \frac{2}{r}\int\limits_0^{\frac{r}{\sqrt{2}}} \frac{u^2}{u^\alpha(1+u)^\beta}\,du \cdot \int\limits_{\frac{r}{\sqrt{2}}}^{\infty} \frac{u}{u^\alpha(1+u)^\beta}\,du\right\}$$

d'où l'on conclut l'existence d'une constante $k_1'' = k_1''(\alpha,\beta)$ telle qu'on ait

$$J(|F|) < \frac{c^2 k_1''}{r^\alpha(1+r)^{\beta-1}}.$$

En posant $k_1 = k_1' + k_1''$, on trouve finalement

$$|T(F)| < \frac{k_1 c^2}{r^\alpha(1+r)^{\beta-1}}$$

C. Q. F. D.

Pour trouver une autre borne supérieure de $J(F)$ et de $J(F,\Phi)$ nous remarquerons les inégalités

$$G(r,u,v) \leq \frac{u}{r} \text{ pour } \sqrt{r^2-u^2} < v < r,\ 0 < u < \frac{r}{\sqrt{2}},$$

$$G(r,u,v) \leq \frac{v}{r} \quad \text{»} \quad \sqrt{r^2-v^2} < u < r,\ 0 < v < \frac{r}{\sqrt{2}},$$

$$G(r,u,v) \leq 1 \quad \text{»} \quad \frac{r}{\sqrt{2}} < u < r,\ \frac{r}{\sqrt{2}} < v < r.$$

On obtient ainsi:

$$|J(F,\Phi)| \leq \frac{4}{r}\int_0^{\frac{r}{\sqrt{2}}} |F(u)|\, u^2 \int_{\sqrt{r^2-u^2}}^{r} |\Phi(v)|\, v\, dv\, du + \frac{4}{r}\int_0^{\frac{r}{\sqrt{2}}} |\Phi(v)|\, v^2 \int_{\sqrt{r^2-v^2}}^{r} |F(u)|\, u\, du\, dv +$$

$$(27) \qquad + 4\int_{\frac{r}{\sqrt{2}}}^{r} |F(u)|\, u\, du \cdot \int_{\frac{r}{\sqrt{2}}}^{r} |\Phi(v)|\, v\, dv + 4\int_r^{\infty} |F(u)|\, u\, du \cdot \int_r^{\infty} |\Phi(v)|\, v\, dv +$$

$$+ \frac{4}{r}\int_0^{r} |\Phi(v)|\, v^2\, dv \cdot \int_r^{\infty} |F(u)|\, u\, du + \frac{4}{r}\int_0^{r} |F(u)|\, u^2\, du \cdot \int_r^{\infty} |\Phi(v)|\, v\, dv.$$

Il s'ensuit[1]

$$|J(F,\Phi)| \leq \frac{2}{r}\left(\operatorname*{Max}_{\frac{r}{\sqrt{2}}}^{r} |\Phi(v)|\right) \int_0^{\frac{r}{\sqrt{2}}} |F(u)|\, u^4\, du + \frac{2}{r}\left(\operatorname*{Max}_{\frac{r}{\sqrt{2}}}^{r} |F(u)|\right) \int_0^{\frac{r}{\sqrt{2}}} |\Phi(v)|\, v^4\, dv +$$

$$(28) \qquad + r^2 \cdot \left(\operatorname*{Max}_{\frac{r}{\sqrt{2}}}^{r} |F(u)|\right) \cdot \int_{\frac{r}{\sqrt{2}}}^{r} v\, |\Phi(v)|\, dv + 4\int_r^{\infty} |F(u)|\, u\, du \cdot \int_r^{\infty} |\Phi(v)|\, v\, dv +$$

$$+ \frac{4}{r}\int_0^{r} |F(u)|\, u^2\, du \cdot \int_r^{\infty} |\Phi(v)|\, v\, dv + \frac{4}{r}\int_0^{r} |\Phi(v)|\, v^2\, dv \cdot \int_r^{\infty} |F(u)|\, u\, du.$$

Énonçons maintenant le lemme fondamental suivant.

Lemme II: ***Si les fonctions F et Φ satisfont aux inégalités***

$$(29) \qquad |F(r)| < \frac{c}{(1+r)^{\varkappa}} \qquad\qquad \varkappa > 6$$

$$(30) \qquad |\Phi(r)| < \frac{c'}{(1+r)^{\varkappa}}$$

il existe une constante $k = k(\varkappa)$ ne dépendant que de $\varkappa$ telle qu'on ait

$$(31) \qquad |J(F,\Phi)| < \frac{4c\int_0^{\infty} |\Phi(v)|\, v^2\, dv}{(\varkappa-2)(1+r)^{\varkappa-1}} + \frac{4c'\int_0^{\infty} |F(u)|\, u^2\, du}{(\varkappa-2)(1+r)^{\varkappa-1}} + \frac{k(\varkappa)\, cc'}{(1+r)^{\varkappa}}.$$

[1] Nous désignerons par $\operatorname*{Max}_a^b f(u)$ le maximum de $f(u)$ dans l'intervalle (a, b).

Cette formule s'obtient immediatement de l'inégalité (28) si dans les quatre premiers termes on remplace F et Φ par les seconds membres de (29) et (30) et si on calcule une borne supérieure des deux derniers termes au moyen des inégalités suivantes

$$\frac{1}{r}\int_0^r |F(u)|\,u^2\,du = \left(\frac{1}{r+1} + \frac{1}{r(r+1)^2} + \frac{1}{(r+1)^2}\right)\int_0^r |F(u)|\,u^2\,du \leq$$

$$\leq \frac{1}{r+1}\int_0^r |F(u)|\,u^2\,du + \frac{\int_0^r |F(u)|\,u\,du}{(r+1)^2} + \frac{\int_0^r |F(u)|\,u^2\,du}{(r+1)^2} \leq$$

$$\leq \frac{1}{r+1}\int_0^\infty |F(u)|\,u^2\,du + \frac{c}{(r+1)^2}\left(\int_0^\infty \frac{u}{(1+u)^\varkappa}\,du + \int_0^\infty \frac{u^2}{(1+u)^\varkappa}\,du\right)$$

$$\int_r^\infty |\Phi(u)|\,u\,du \leq c' \int_r^\infty \frac{1}{(1+u)^{\varkappa-1}}\,du = \frac{c'}{(\varkappa-2)(1+r)^{\varkappa-2}}.$$

§ 5.

Propriétés générales des solutions de l'équation de Boltzmann.

Intégrales premières. Soit $F(r, t)$ une solution de l'équation de Boltzmann

$$\frac{\partial F}{\partial t} = T(F)$$

continue ainsi que la dérivée $\frac{\partial F}{\partial t}$ dans le domaine

$$0 < r < \infty$$

$$t_0 \leq t < t_1$$

et satisfaisant aux inégalités

$$(32) \qquad 0 \leq F(r, t) < \frac{c}{r^\alpha (1+r)^\beta} \qquad 0 \leq \alpha < 3,\ \alpha + \beta > 6$$

où c est une constante.

Ceci posé désignons par $h(r)$ une fonction telle que

$$\int_0^\infty |h(r)| \frac{1}{r^\alpha (1+r)^{\beta-1}} dr$$

converge. Cette condition entraîne la convergence uniforme de

$$\int_0^\infty h(r) \frac{\partial F}{\partial t} dr$$

d'où l'on conclut

$$\frac{d}{dt}\int_0^\infty h(r) F(r,t)\, dr = \int_0^\infty h(r)\, T(F)\, dr =$$

$$= 4\int_0^\infty h(r) \int_0^\infty\int_0^\infty G(r,u,v)\, uv\, F(u,t) F(v,t)\, du\, dv\, dr -$$

$$- \int_0^\infty h(r) F(r,t) \int_0^\infty P(r,r_1)\, r_1^2\, F(r_1,t)\, dr_1\, dr.$$

À cause de la convergence absolue nous pouvons effectuer d'abord l'intégration par rapport à r dans le premier des termes du second membre. On trouve ainsi la formule

$$\frac{d}{dt}\int_0^\infty h(r) F(r,t)\, dr = \int_0^\infty\int_0^\infty Q(u,v)\, F(u,t) F(v,t)\, du\, dv$$

où la fonction symétrique $Q(u,v)$ est définie par la relation

$$Q(u,v) = 4uv\left(\int_0^v h(r)\, dr + v\int_v^u \frac{h(r)}{r} dr + \int_u^{\sqrt{u^2+v^2}} \frac{\sqrt{u^2+v^2-r^2}}{r} h(r)\, dr\right) -$$

$$- P(u,v)\frac{h(u)v^2 + h(v)u^2}{2} \qquad \text{pour } v < u.$$

Si dans cette formule on pose $h(r) = r^2$ ou $h(r) = r^4$ on obtient

$$Q(u,v) = 0.$$

Il sensuit *que les intégrales*

$$\int_0^\infty r^2 F(r,t)\,dr \quad \text{et} \quad \int_0^\infty r^4 F(r,t)\,dr$$

restent indépendantes de t *dans tout intervalle* $t_0 \leq t \leq t_1$, *où la solution* $F(r,t)$ *satisfait à une inégalité de la forme*

$$|F(r,t)| < \frac{c}{r^\alpha (1+r)^\beta} \qquad 0 < \alpha < 3, \quad \alpha + \beta > 6.$$

Majorantes des solutions $F(r,t)$. Nous nous proposons maintenant de rechercher des bornes supérieures de $F(r,t)$ valables dans l'intervalle $(0, t_1)$ et ne dépendant que des valeurs initiales $f_0(r)$ que prend $F(r,t)$ pour $t=0$.

Désignons les invariants

$$\int_0^\infty r^2 F(r,t)\,dr \quad \text{et} \quad \int_0^\infty r^4 F(r,t)\,dr$$

par A respectivement B et écrivons l'équation de Boltzmann sous la forme (voir formule 23)

$$\frac{\partial F}{\partial t} + [2Ar + S(F)]\,F = J(F).$$

À cause de l'inégalité $S(F) \geq 0$ il s'ensuit

$$\frac{\partial F}{\partial t} + 2ArF \leq J(F)$$

d'où l'on conclut, en intégrant,

$$F(r,t) \leq f_0(r)\,e^{-2Art} + \int_0^t e^{-2Ar(t-\tau)} J(F(r,\tau))\,d\tau. \tag{33}$$

D'après les inégalités du § 4 nous avons

$$J(F) \leq \frac{8}{r}\int_0^{\frac{r}{\sqrt{2}}} v^2 F(v)\,dv \cdot \int_{\frac{r}{\sqrt{2}}}^\infty u F(u)\,du + 4\left(\int_{\frac{r}{\sqrt{2}}}^\infty u F(u)\,du\right)^2 \leq$$

$$\leq \frac{8A}{r}\int_{\frac{r}{\sqrt{2}}}^\infty u F(u)\,du + 4\left[\int_{\frac{r}{\sqrt{2}}}^\infty u F(u)\,du\right]^2.$$

En utilisant les relations

$$(34)\qquad \begin{aligned} &\int_{\frac{r}{\sqrt{2}}}^{\infty} u\,F(u)\,du \leq \frac{\sqrt{2}}{r}\int_{\frac{r}{\sqrt{2}}}^{\infty} u^2\,F(u)\,du \leq \frac{A\sqrt{2}}{r} \\ &\int_{\frac{r}{\sqrt{2}}}^{\infty} u\,F(u)\,du \leq \frac{1}{\left(\frac{r}{\sqrt{2}}\right)^3}\int_{\frac{r}{\sqrt{2}}}^{\infty} u^4\,F(u)\,du \leq \frac{2\,B\sqrt{2}}{r^3} \end{aligned}$$

on en déduit

$$(35)\qquad J(F) \leq 8\,(\sqrt{2}+1)\,\frac{A^2}{r^2}.$$

$$(36)\qquad J(F) \leq \frac{16\sqrt{2}\,A\,B}{r^4} + \frac{32\,B^2}{r^6}.$$

Il est aisé de voir que ces inégalités entraînent l'existence d'une constante $C(A, B)$ ne dépendant que de A et de B telle qu'on ait

$$(37)\qquad J(F) < \frac{C(A, B)}{r^2\,(1+r)^2}.$$

En portant cette majorante pour J dans le second membre de (33) on trouve l'inégalité importante

$$(38)\qquad F(r, t) \leq f_0(r) + \frac{C(A, B)}{2\,A\,r^3\,(1+r)^2}.$$

Si, dans la formule (33), on remplace la fonction exponentielle sous le signe d'intégration par 1 il viendra d'une manière analogue

$$(39)\qquad F(r, t) \leq f_0(r) + \frac{C(A, B)\,t}{r^2\,(1+r)^2}.$$

La formule (38) met en evidence le fait important suivant: Chaque solution $F(r, t)$ qui satisfait aux inégalités (32) admet une majorante indépendante de t et ne dépendant que des valeurs initiales de $F(r, t)$.

Nous nous proposons maintenant de démontrer le théorème suivant.

Théorème I: Soit $F(r,t)$ une solution de l'équation $\frac{\partial F}{\partial t} = T(F)$ satisfaisant pour $0 \leq t < t_1$ aux inégalités

$$0 \leqq F(r,t) \leq \frac{C}{r^{\alpha}(1+r)^{\beta}} \qquad 0 \leq \alpha < 3, \ \alpha + \beta = \gamma > 6$$

et prenant pour $t = 0$ des valeurs initiales $f_0(r)$ soumises aux conditions

$$0 \leq f_0(r) \leq \frac{a}{r^{\varkappa}} \qquad\qquad \varkappa \geq \gamma > 6$$

où a et C sont des constantes. Ceci posé il existe une constante $K = K(a, A, B, \varkappa)$ ne dépendant que de $a, A, B, \varkappa$ telle qu'on ait

$$F(r,t) \leq \frac{K}{r^{\varkappa}}$$

pour $0 \leq t \leq t_1$.

Pour la démonstration nous allons introduire la notation

$$M(\varrho, \sigma) = \text{borne supérieure de } r^{\sigma} F(r,t)$$

dans le domaine $\varrho < r < \infty$, $0 < t < t_1$.

Désignons en outre par $K_1, K_2, \ldots$ etc. des constantes ne dépendant que de $a, \varkappa, A, B$.

On déduit de la formule (33) l'inégalité

$$F(r,t) \leq f_0(r) + \frac{1}{2Ar} \operatorname*{Max}_{t=0}^{t_1} J(F(r,t)). \tag{40}$$

En posant dans (28) $\Phi = F$ et en utilisant les inégalités

$$\int_{\frac{r}{\sqrt{2}}}^{r} v F(v)\, dv \leqq \left(\frac{\sqrt{2}}{r}\right)^3 \int_{\frac{r}{\sqrt{2}}}^{r} v^4 F(v)\, dv \leq \frac{B \cdot 2\sqrt{2}}{r^3}$$

$$\int_{r}^{\infty} v F(v)\, dv \leq \frac{1}{r^3} \int_{r}^{\infty} v^4 F(v)\, dv \leq \frac{B}{r^3}$$

on trouve aisément la relation

$$J(F) \leq \frac{4B}{r}\left[\operatorname*{Max}_{\frac{r}{\sqrt{2}}}^{r} F(u)\right] + \frac{K_1}{r}\left[\operatorname*{Max}_{\frac{r}{\sqrt{2}}}^{r} F(u)\right] + \frac{K_2}{r^3}\int_r^\infty F(u)\,u\,du +$$

$$(41) \qquad + \frac{8A}{r}\int_r^\infty F(u)\,u\,du =$$

$$= \frac{K_3}{r}\left(\operatorname*{Max}_{\frac{r}{\sqrt{2}}}^{r} F(u)\right) + \frac{K_2}{r^3}\int_r^\infty F(u)\,u\,du + \frac{8A}{r}\int_r^\infty F(u)\,u\,du.$$

En portant cette expression dans la formule (40) et en remplaçant $f_0(r)$ par $\frac{a}{r^\varkappa}$ nous obtenons

$$(42) \quad F(r,t) \leq \frac{a}{r^\varkappa} + \operatorname*{Max}_{t=0}^{t_1}\left\{\frac{4}{r^2}\int_r^\infty F(u,t)\,u\,du + \frac{K_4}{r^2}\left(\operatorname*{Max}_{u=\frac{r}{\sqrt{2}}}^{r} F(u,t)\right) + \frac{K_5}{r^4}\int_r^\infty F(u,t)\,u\,du\right\}.$$

À chaque nombre positif ε nous pouvons déterminer des nombres r et t situés dans les intervalles

$$0 < t < t_1, \qquad \varrho < r < \infty$$

telles qu'on ait

$$F(r,t) > \frac{M(\varrho,\gamma) - \varepsilon}{r^\gamma}.$$

Ceci posé on obtient par la formule (42)

$$\frac{M(\varrho,\gamma) - \varepsilon}{r^\gamma} \leq \frac{a}{r^\varkappa} + \frac{4}{\gamma - 2}\,\frac{M(\varrho,\gamma)}{r^\gamma} + \frac{K_4(\sqrt{2})^\gamma}{r^{\gamma+2}} \cdot M\left(\frac{\varrho}{\sqrt{2}},\gamma\right) + \frac{K_5}{\gamma - 2}\,\frac{M(\varrho,\gamma)}{r^{\gamma+2}}.$$

Comme $M(\varrho,\gamma) \leqq M\left(\frac{\varrho}{\sqrt{2}},\gamma\right)$ on en déduit

$$(43) \qquad M(\varrho,\gamma) - \varepsilon \leq \frac{a}{r^{\varkappa-\gamma}} + \frac{4}{\gamma-2}M(\varrho,\gamma) + \frac{K'}{r^2}M\left(\frac{\varrho}{\sqrt{2}},\gamma\right)$$

où l'on a posé

$$K' = K_4(\sqrt{2})^\gamma + \frac{K_5}{\gamma - 2}.$$

r étant $> \varrho$ il suit de la formule (43)

$$\frac{\gamma-6}{\gamma-2} M(\varrho, \gamma) - \varepsilon \leq \frac{a}{\varrho^{\varkappa-\gamma}} + \frac{K'}{\varrho^2} M\left(\frac{\varrho}{\sqrt{2}}, \gamma\right).$$

Ceci ayant lieu quelque petit que soit ε on trouve finalement

$$M(\varrho, \gamma) \leq \frac{c_1}{\varrho^{\varkappa-\gamma}} + \frac{K'_1}{\varrho^2} M\left(\frac{\varrho}{\sqrt{2}}, \gamma\right)$$

où c_1 et K'_1 sont des constantes ne dépendant que de a, γ, A, B.

En itérant cette inégalite n fois de suite il viendra

$$(44) \qquad M(\varrho, \gamma) \leq \frac{c_1}{\varrho^{\varkappa-\gamma}} \left[1 + \frac{K'_2}{\varrho^2} + \left(\frac{K'_2}{\varrho^2}\right)^2 2 + \left(\frac{K'_2}{\varrho^2}\right)^3 2^{1+2} + \cdots + \left(\frac{K'_2}{\varrho^2}\right)^n 2^{1+2+\cdots n-1}\right] + \left(\frac{K'_1}{\varrho^2}\right)^{n+1} 2^{\frac{n(n+1)}{2}} M\left(\frac{\varrho}{(\sqrt{2})^{n+1}}, \gamma\right)$$

où l'on a posé

$$K'_2 = K'_1 2^{\frac{\varkappa-\gamma}{2}}.$$

On a évidemment $M\left(\frac{\varrho}{(\sqrt{2})^{n+1}}, \gamma\right) \leq M(0, \gamma)$. Si l'on prend n plus grand que $\frac{\varkappa-\gamma}{2} - 1$ on voit qu'il existe une constante C' indépendante de ϱ telle qu'on ait

$$M(\varrho, \gamma) < \frac{C'}{\varrho^{\varkappa-\gamma}}.$$

Il s'ensuit

$$F(r, t) < \frac{C'}{r^{\varkappa}} \qquad \begin{array}{l} 0 < r < \infty \\ 0 < t < t_1. \end{array}$$

Cette formule montre que $M(\varrho, \varkappa)$ est fini. Nous pouvons donc appliquer l'inégalité (44) pour $\gamma = \varkappa$ et nous obtenons, en posant $c_1 = K_6$, $K'_1 = K_7$

$$(45) \qquad M(\varrho, \varkappa) \leq K_6 \left[1 + \frac{K_7}{\varrho^2} + \left(\frac{K_7}{\varrho^2}\right)^2 2 + \cdots + \left(\frac{K_7}{\varrho^2}\right)^n 2^{1+2+\cdots n-1}\right] + \left(\frac{K_7}{\varrho^2}\right)^{n+1} 2^{\frac{n(n+1)}{2}} M\left(\frac{\varrho}{(\sqrt{2})^{n+1}}, \varkappa\right).$$

On en déduit pour $\varrho > \sqrt{K_7}$

(46) $$M(\varrho, \varkappa) \leq 2^{\frac{n(n+1)}{2}}\left[K_6 + \left(\frac{K_7}{\varrho^2}\right)^{n+1} M\left(\frac{\varrho}{(\sqrt{2})^{n+1}}, \varkappa\right)\right].$$

On a évidemment

$$M\left(\frac{\varrho}{(\sqrt{2})^{n+1}}, \varkappa\right) < M(\varrho, \varkappa) + \operatorname*{Max}_{r=\frac{\varrho}{(\sqrt{2})^{n+1}}}^{\varrho}(r^{\varkappa} F(r)).$$

Or il existe d'après (38) une constante K_8 telle qu'on ait

(47) $$F(r, t) < \frac{K_8}{r^5} + \frac{a}{r^4}.$$

Donc

$$\operatorname*{Max}_{r=\frac{\varrho}{(\sqrt{2})^{n+1}}}^{\varrho}(r^{\varkappa} F(r, t) < K_8 \varrho^{\varkappa-5} + a$$

$$M\left(\frac{\varrho}{(\sqrt{2})^{n+1}}, \varkappa\right) < M(\varrho, \varkappa) + K_8 \varrho^{\varkappa-5} + a$$

et par conséquent à cause de (46)

$$M(\varrho, \varkappa) < 2^{\frac{n(n+1)}{2}}\left(K_6 + a + \left(\frac{K_7}{\varrho^2}\right)^{n+1}(M(\varrho, \varkappa) + K_8 \varrho^{\varkappa-5})\right)$$

$$M(\varrho, \varkappa)\left(1 - 2^{\frac{n(n+1)}{2}}\left(\frac{K_7}{\varrho^2}\right)^{n+1}\right) < (K_6 + a)\, 2^{\frac{n(n+1)}{2}} + \frac{K_8 K_7^{n+1} \cdot 2^{\frac{n(n+1)}{2}}}{\varrho^{2n+7-\varkappa}}.$$

Prenons maintenant pour n un nombre entier $> \frac{\varkappa - 7}{2}$ et fixons après un nombre K_9 tel qu'on ait

$$1 - 2^{\frac{n(n+1)}{2}}\left(\frac{K_7}{\varrho^2}\right)^{n+1} > \frac{1}{2} \qquad \text{pour } \varrho > K_9.$$

Il s'ensuit

$$M(\varrho, \varkappa) < 2(K_6 + a)\, 2^{\frac{n(n+1)}{2}} + \frac{2 K_8 K_7^{n+1} \cdot 2^{\frac{n(n+1)}{2}}}{K_9^{2n+7-\varkappa}} \qquad \text{pour } \varrho > K_9.$$

Si l'on remarque que, d'après (47), la borne supérieure de $r^{\varkappa} F(r, t)$ dans l'intervalle $0 < r < K_9$ est inférieure à

$$K_8 K_9^{\varkappa-5} + a$$

on trouve donc finalement

$$M(\varrho, \varkappa) < K_8 K_9^{\varkappa - 5} + a + 2(K_6 + a)\, 2^{\frac{n(n+1)}{2}} + \frac{2 K_8 K_7^{n+1} \cdot 2^{\frac{n(n+1)}{2}}}{K_9^{2n+7-\varkappa}}$$

pour toutes les valeurs de ϱ. En désignant le second membre de l'inégalité précédente par K nous obtiendrons

$$F(r, t) \leq \frac{M(r, \varkappa)}{r^\varkappa} \leq \frac{K}{r^\varkappa} \qquad \text{pour} \quad \begin{matrix} 0 < r < \infty \\ 0 < t < t_1 \end{matrix}$$

C. Q. F. D.

Les bornes supérieures de $F(r, t)$ que nous avons obtenues jusqu'ici tendent toutes vers l'infini lorsque r tend vers zéro. Nous allons maintenant démontrer le théorème suivant qui montre que $F(r, t)$ reste uniformément borné même dans le voisinage de $r = 0$ lorsque $f_0(r)$ est borné.

Théorème II. Soit $F(r, t)$ une solution de l'équation $\frac{\partial F}{\partial t} = T(F)$ satisfaisant aux inégalités (32) *dans le domaine $0 \leq t < t_1$ et prenant pour $t = 0$ des valeurs initiales $f_0(r)$ soumises aux conditions*

$$(48) \qquad 0 \leq f_0(r) \leq \frac{a}{(1 + r)^\varkappa} \qquad \varkappa > 6$$

où a est une constante. Il existe une constante c indépendant de t et ne dépendant que de a, A, B, $\varkappa$ telle qu'on ait

$$(49) \qquad F(r, t) < \frac{c}{(1 + r)^\varkappa}.$$

Remarquons d'abord que

$$\int_0^\infty F(r, t)\, r^3\, dr$$

reste supérieure à un nombre positif $3E$ qui ne dépend que de a, A, B, $\varkappa$. Nous avons, en effet, en tenant compte du théorème I,

$$B = \int_0^\infty F r^4\, dr \leq l \int_0^l F r^3\, dr + \int_l^\infty F r^4\, dr < l \int_0^\infty F r^3\, dr + K \int_l^\infty \frac{1}{r^{\varkappa - 4}}\, dr =$$

$$= l \int_0^\infty F r^3\, dr + \frac{K}{(\varkappa - 5)\, l^{\varkappa - 5}}.$$

Si l'on prend

$$l = \left(\frac{2K}{B(\varkappa - 5)}\right)^{\frac{1}{\varkappa-5}}$$

on trouve

$$(50) \qquad \int_0^\infty F r^3\, dr > \frac{B}{2}\left(\frac{2K}{B(\varkappa - 5)}\right)^{-\frac{1}{\varkappa-5}} = 3E.$$

En partant de l'équation (23) et en tenant compte de l'inégalité

$$S(F) \geq \frac{2}{3}\int_r^\infty r_1^3 F(r_1, t)\, dr_1,$$

qui découle immédiatement de la formule (21), on obtient

$$\frac{\partial F}{\partial t} + \frac{2}{3}\int_r^\infty F r^3\, dr \cdot F \leq J(F).$$

Il s'ensuit à cause de (50)

$$\frac{\partial F}{\partial t} + \left(2E - \frac{2}{3}\int_0^r F r^3\, dr\right) F \leq J(F).$$

Nous avons

$$\frac{2}{3}\int_0^r F r^3\, dr \leq \frac{2r}{3}\int_0^r F r^2\, dr \leq \frac{2Ar}{3}.$$

Si l'on prend $l_1 = \dfrac{3E}{2A}$ on a donc

$$(51) \qquad \frac{\partial F}{\partial t} + EF \leq J(F) \qquad \text{pour } 0 < r < l_1.$$

Il s'ensuit d'après (35)

$$\frac{\partial F}{\partial t} + EF \leq 8(\sqrt{2} + 1)\frac{A^2}{r^2}.$$

En multipliant par r^2 et en intégrant, on trouve

$$(52) \qquad \frac{\partial \int_0^r F r^2\, dr}{\partial t} + E\int_0^r F r^2\, dr \leq 8(\sqrt{2} + 1)A^2 r \qquad 0 < r < l_1.$$

On déduit de là

$$\int_0^r F r^2\,dr \leq e^{-Et}\int_0^r f_0(r)\,r^2\,dr + \frac{1-e^{-Et}}{E}\cdot 8(\sqrt{2}+1)A^2 r \qquad 0 < r < l_1$$

et enfin

$$(53)\qquad \int_0^r F r^2\,dr \leq b_1 r \qquad 0 < r < l_1$$

où b_1 est une constante ne dépendant que de a, A, B, $\varkappa$. Nous utiliserons dans les formules suivantes les symboles $b_2, b_3, \ldots$ etc. pour désigner d'autres constantes ayant la même propriété. Nous pouvons employer l'inégalité (53) pour trouver une nouvelle borne supérieure de $J(F)$.

On a

$$(54)\qquad \int_r^\infty F(u)\,u\,du \leq \int_r^{l_1} F(u)\,u\,du + \frac{A}{l_1} \qquad 0 < r < l_1.$$

Écrivons

$$\omega(r) = \int_0^r F(u)\,u^2\,du$$

et intégrons par parties dans l'intégrale du second membre:

$$(55)\qquad \int_r^{l_1} F(u)\,u\,du = \left[\frac{\omega(u)}{u}\right]_r^{l_1} + \int_r^{l_1}\frac{\omega(u)}{u^2}\,du \leq$$

$$\leq b_1 + b_1\int_r^{l_1}\frac{du}{u} < b_2\log\frac{2\,l_1}{r}.$$

En utilisant l'inégalité

$$(56)\qquad J(F) \leq \frac{8}{r}\int_0^{\frac{r}{\sqrt{2}}} F(u)\,u^2\,du\cdot\int_{\frac{r}{\sqrt{2}}}^\infty F(u)\,u\,du + 4\left[\int_{\frac{r}{\sqrt{2}}}^\infty F(u)\,u\,du\right]^2$$

qui s'obtient au moyen de la fonction $G_1(r,u,v)$ du paragraphe 4, on trouve

$$J(F) < b_3\left(\log\frac{2\,l_1}{r}\right)^2 < b_4\frac{1}{r} \qquad 0 < r < l_1.$$

En nous reportant à la relation (51) il s'ensuit que l'inégalité (52) peut être remplacée par

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + E\omega < \frac{b_4 r^2}{2}$$

d'où l'on conclut

$$(57) \qquad \omega(r) < b_5 r^2 \qquad r < l_1.$$

Si dans la formule (55) on remplace $\omega(r)$ par le second membre de (57) nous trouverons

$$\int_r^\infty F(u)\, u\, du < b_6$$

et à cause de (56)

$$J(F) < b_7 \qquad r < l_1.$$

On a donc d'après (51)

$$\frac{\partial F}{\partial t} + EF < b_7 \qquad \text{pour } r < l_1$$

et en intégrant

$$F < b_8 \qquad \text{pour } r < l_1$$

où b_8 et l_1 sont des constantes qui ne dépendent que de $a, A, B, \varkappa$. Il suffit de combiner ce résultat avec le théorème I pour avoir la démonstration complète du théorème II.

Minorantes de $F(r, t)$. Nous nous proposons de trouver aussi une borne inférieure de $F(r, t)$ en supposant que les conditions du théorème II et l'inégalité

$$(58) \qquad f_0(r) \geq k > 0 \qquad \text{pour } r_0 \leq r \leq r_0 + d$$

soient remplies. En appliquant l'inégalité (49) on trouve

$$L = \int_0^\infty P(r, r_1) F(r_1) r_1^2\, dr_1 < A_1 r + B_1 = L_1$$

où A_1 et B_1 sont des constantes finies qui ne dépendent que de la fonction $f_0(r)$. Il s'ensuit

$$\frac{\partial F}{\partial t} + (A_1 r + B_1) F \geq J(F)$$

et par conséquent

$$F \geq f_0(r)\, e^{-(A_1 r + B_1) t} + \int_0^t e^{-(A_1 r + B_1)(t-\tau)} J(F(r, \tau))\, d\tau$$

d'où l'on conclut

$$F \geq f_0(r)\, e^{-(A_1 r + B_1) t} = f_0\, e^{-L_1 t}. \tag{59}$$

$$F \geq e^{-(A_1 r + B_1) t} \int_0^t J(F(r, \tau))\, d\tau. \tag{60}$$

La formule (59) donne déjà une minorante entièrement déterminée par la connaissance de $f_0(r)$ mais celle-ci a la désavantage de s'annuler pour $t > 0$ lorsque $f_0(r)$ s'annule. Nous pouvons obtenir une nouvelle minorante en remplaçant $F(r, \tau)$ dans le second membre de (60) par $f_0(r)\, e^{-(A_1 r + B_1)\tau}$. On trouve ainsi

$$\begin{aligned} F &\geq e^{-L_1 t} \int_0^t J(f_0\, e^{-L_1 \tau})\, d\tau \geq e^{-L_1 t} \int_0^t J(f_0\, e^{-L_1 t})\, d\tau = \\ &= 4\, t\, e^{-(A_1 r + B_1) t} \int_0^\infty \int_0^\infty G(r, u, v)\, u\, v\, f_0(u)\, e^{-(A_1 u + B_1) t} f_0(v)\, e^{-(A_1 v + B_1) t}\, du\, dv. \end{aligned} \tag{61}$$

Soit γ un nombre satisfaisant à l'inégalité

$$1 < \gamma < \sqrt{2} \tag{62}$$

et désignons par b la borne inférieure de $G(r, u, v)$ dans le domaine

$$\frac{r}{\gamma} \leq u < \infty, \quad \frac{r}{\gamma} \leq v < \infty.$$

Cela posé on déduit de (61)

$$F \geq 4\, b\, t\, e^{-(A_1 r + B_1) t} \left(\int_{\frac{r}{\gamma}}^{\infty} e^{-(A_1 u + B_1) t} f_0(u)\, u\, du \right)^2. \tag{63}$$

Cette formule montre, si l'on tient compte de l'hypothèse (58), que $F(r, t)$ ne peut pas s'annuler pour $0 \leq r < \gamma (r_0 + d)$, $t > 0$. Pour trouver une borne inférieure dans un domaine plus étendu nous partagerons l'intervalle $(0, t)$ en n parties égales (n étant un nombre entier dont la valeur sera precisée plus loin) et appliquerons successivement les inégalités

$$F\left(r, \frac{\nu t}{n}\right) \geq 4 b \frac{t}{n} e^{-(A_1 r + B_1)\frac{t}{n}} \left[\int_{\frac{r}{\gamma}}^{\infty} e^{-(A_1 u + B_1)\frac{t}{n}} F\left(u, \frac{(\nu - 1)t}{n}\right) u\, du\right]^2 \tag{64}$$

$$\nu = 1, 2, \ldots n$$

qui découlent de (63). On trouve d'abord en posant $\gamma r_0 = r_1$

$$F\left(r, \frac{t}{n}\right) > 4 b \frac{t}{n} e^{-(A_1 r_1 + B_1)\frac{t}{n}} [r_0 k e^{-(A_1(r_0+d)+B_1)\frac{t}{n}} d]^2 = k_1 \tag{65}$$

pour $0 < r < r_1$.

Prenons maintenant un nombre α satisfaisant aux inégalités

$$1 < \alpha < \gamma \tag{66}$$

et posons

$$\frac{\alpha}{\gamma} = \beta.$$

En supposant

$$0 < r < \alpha r_1$$

on a

$$F\left(r, \frac{2t}{n}\right) > 4 b \frac{t}{n} e^{-(A_1 \alpha r_1 + B_1)\frac{t}{n}} \left[\int_{\beta r_1}^{r_1} e^{-(A_1 r_1 + B_1)\frac{t}{n}} k_1 u\, du\right]^2 >$$

$$> 4 b \frac{t}{n} e^{-3(A_1 \alpha r_1 + B_1)\frac{t}{n}} \cdot [k_1 \beta (1 - \beta) r_1^2]^2 =$$

$$= h e^{-3 A_1 r_1 \alpha \frac{t}{n}} k_1^2 = k_2$$

où l'on a posé

$$h = 4 b \frac{t}{n} \beta^2 (1 - \beta)^2 r_1^4 e^{-3\frac{B_1 t}{n}}. \tag{67}$$

Pour $\nu = 3$ on obtient de (64)

$$F\left(r, \frac{3t}{n}\right) > 4 b \frac{t}{n} e^{-(A_1 \alpha^2 r_1 + B_1)\frac{t}{n}} \left[\int_{\beta \alpha r_1}^{\alpha r_1} e^{-(A_1 \alpha r_1 + B_1)\frac{t}{n}} k_2 u\, du\right]^2 >$$

$$> 4 b \frac{t}{n} e^{-3(A_1 \alpha^2 r_1 + B_1)\frac{t}{n}} [\beta (1 - \beta) \alpha^2 r_1^2 k_2]^2 =$$

$$= h \alpha^4 e^{-3 A_1 \alpha^2 r_1 \frac{t}{n}} k_2^2 = k_3$$

pour $0 < r < \alpha^2 r_1$.

Par le même procédé on trouve, d'une manière générale

$$F\left(r, \frac{\nu t}{n}\right) > k_\nu \quad \text{pour } 0 < r < \alpha^{\nu-1} r_1 \quad \nu = 1, 2, \ldots n.$$

$$(68) \qquad k_{\nu+1} = h\, \alpha^{4(\nu-1)} e^{-3 A_1 \alpha^\nu r_1 \frac{t}{n}} \cdot k_\nu^2 \qquad \nu = 1, 2, \ldots n-1.$$

En désignant par $g_1, g_2, \ldots$ etc. des constantes positives finies qui ne dépendent que de $f_0(r)$ nous pouvons écrire (d'après (65) et (67))

$$(69) \qquad \log k_1 > \log \frac{t}{n} - g_1 \frac{t}{n} - g_2.$$

$$(70) \qquad \log h > \log \frac{t}{n} - g_3 \frac{t}{n} - g_4.$$

Comme α est > 1 on déduit de (68)

$$\log k_{\nu+1} > \log h - g_5 \frac{t}{n} \alpha^\nu + 2 \log k_\nu \qquad \nu = 1, 2, \ldots n-1.$$

On tire de là

$$(71) \quad \sum_{\nu=1}^{n-1} \frac{1}{2^{\nu+1}} \log k_{\nu+1} > \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{2^{n-1}}\right) \log h - g_5 \frac{t}{n} \sum_{\nu=1}^{n-1} \frac{1}{2^\nu}\left(\frac{\alpha}{2}\right)^\nu + \sum_{\nu=1}^{n-1} \frac{1}{2^\nu} \log k_\nu$$

et par conséquent

$$\frac{1}{2^n} \log k_n > \frac{1}{2} \log h + \frac{1}{2} \log k_1 - g_6 \frac{t}{n} - \frac{1}{2^n} \log h.$$

On a évidemment

$$\log h < \log \frac{t}{n} + g_7.$$

$$\frac{1}{2^n} \log h < \frac{1}{2^n} \log \frac{t}{n} + g_7.$$

Il s'ensuit à cause de (69) et (70)

$$\frac{1}{2^n} \log k_n > \left(1 - \frac{1}{2^n}\right) \log \frac{t}{n} - g_8 \frac{t}{n} - g_9 >$$

$$> \left(1 - \frac{1}{2^n}\right)\left(\log \frac{t}{n} - \frac{t}{n}\right) - g_8 \frac{t}{n} - g_9 >$$

$$> \log \frac{t}{n} - \frac{t}{n} - g_8 \frac{t}{n} - g_9 > \log \frac{t}{n} - (g_8 + 1)\, t - g_9.$$

Prenons maintenant pour n un nombre entier > 1 satisfaisant à l'inégalité

$$\alpha^{n-1} r_1 > r.$$

On voit qu'il existe une constante g_{10} telle que cette condition soit remplie si l'on prend $n =$ le plus grand entier qui ne dépasse pas

$$\frac{\log (r+1)}{\log \alpha} + g_{10}.$$

On trouve ainsi

$$\begin{aligned}\log F(r, t) &> \log k_n > \\ &> \left(\log t - (g_8+1)t - g_9 - \log\left(\frac{\log (r+1)}{\log \alpha} + g_{10}\right)\right) 2^{\frac{\log(r+1)}{\log \alpha} + g_{10}} = \\ &= -\left(\log \frac{1}{t} + (g_8+1)t + g_9 + \log\left(\frac{\log (r+1)}{\log \alpha} + g_{10}\right)\right) 2^{g_{10}} (r+1)^{\frac{\log 2}{\log \alpha}}.\end{aligned}$$

En remarquant que α peut être choisi aussi voisin de $\sqrt{2}$ que l'on veut on voit que cette formule conduit au théorème suivant.

Théorème III. Soit $F(r, t)$ une solution non négative de l'équation de Boltzmann satisfaisant aux conditions du théorème II pour $0 \leq t < t_1$ et se réduisant pour $t = 0$ à une fonction continue $f_0(r)$ qui n'est pas identiquement nulle. Étant donnés deux nombres positifs ε et t_0 aussi petits que l'on veut, on a

$$\log F(r, t) > -c_1 (1+r)^{2+\varepsilon} \tag{72}$$

pour

$$t_0 \leq t < t_1$$

où c_1 est une constante finie ne dépendant que de $f_0(r)$, t_0, t_1 et ε.

En combinant les inégalités (49) et (72) on trouve

$$|\log F(r, t)| < c_2 (1+r)^{2+\varepsilon} \qquad t_0 \leq t < t_1 \tag{73}$$

où c_2 est une constante analogue à c_1.

Cela entraîne que les intégrales

$$H = \int_0^\infty F \log F \cdot r^2\, dr.$$

$$\int_0^\infty (\log F + 1)\, T(F) r^2\, dr = \int_0^\infty \log F \cdot T(F) r^2\, dr$$

sont absolument et uniformément convergentes. Il s'ensuit que H admet une dérivée par rapport à t et que l'on a

$$\frac{dH}{dt} = \int_0^\infty \log F \cdot T(F) r^2 \, dr.$$

L'inégalité (73) entraîne aussi que les conditions de convergence qui sont nécessaires pour arriver à la formule (11) § 1 sont remplies. On obtient ainsi une démonstration rigoureuse du H-théorème de Boltzmann.

Signalons finalement le corollaire suivant du théorème III: Si, à l'instant initial, les vitesses de toutes les molécules du gaz sont comprises dans des intervalles finis on trouvera néanmoins que instantanément après toutes les vitesses seront représentées dans l'ensemble des vitesses des molécules.

Continuité uniforme de $F(r, t)$. Pour l'étude qui fera l'objet du paragraphe 8 nous aurons à nous servir du théorème suivant:

Théorème IV. Soit $F(r, t)$ une solution de l'équation $\frac{\partial F}{\partial t} = T(F)$ satisfaisant aux conditions du théorème II dans tout l'intervalle $0 \leq t < \infty$ et se réduisant pour $t = 0$ à une fonction $f_0(r)$ continue pour $0 \leq r < \infty$. Étant donné un nombre positif ε aussi petit que l'on veut nous pouvons trouver un nombre positif δ tel qu'on ait

$$|F(r', t) - F(r, t)| < \varepsilon$$

pour

$$|r' - r| < \delta$$

$$0 \leq {r \atop r'} < \infty$$

$$0 < t < \infty.$$

Pour la démonstration nous allons écrire l'équation de Boltzmann sous la forme

$$\frac{\partial F}{\partial t} + L(F) F = J(F). \tag{74}$$

A fin d'indiquer explicitément que les expressions $L(F)$ et $J(F)$ dépendent de r et de t nous utiliserons les notations

$$L(F) = L(F \mid r, t), \quad J(F) = J(F \mid r, t).$$

Posons

$$F(r, t) - F(r', t) = \Omega.$$

En remplaçant dans (74) r par r' et en retranchant l'équation ainsi obtenue de (74) nous obtenons

$$(75)\qquad \begin{aligned} \frac{\partial \Omega}{\partial t} + L(F)\,\Omega &= J(F\,|\,r, t) - J(F\,|\,r', t) + \\ &+ F(r', t)\left(L(F\,|\,r', t) - L(F\,|\,r, t)\right) = \\ &= (r - r')\left(\left[\frac{\partial J(F\,|\,r, t)}{\partial r}\right]_{r=\varrho} - F(r', t)\left[\frac{\partial L(F\,|\,r, t)}{\partial r}\right]_{r=\varrho}\right) \end{aligned}$$

où ϱ est une valeur comprise entre r et r'. Nous avons

$$(76)\qquad \frac{\partial L(F\,|\,r, t)}{\partial r} = \int_0^r \left(2 - \frac{2}{3}\frac{r_1^2}{r^2}\right) F(r_1)\, r_1^2\, dr_1 + \frac{4r}{3}\int_r^\infty F(r_1)\, r_1\, dr_1.$$

$$(77)\qquad \frac{\partial J(F\,|\,r, t)}{\partial r} = 4\int_0^\infty\int_0^\infty G'_r(r, u, v)\, uv\, F(u)\, F(v)\, du\, dv =$$

$$= -\frac{8}{r^2}\int_0^r F(u)\, u^2\, du \cdot \int_r^\infty F(v)\, v\, dv - \frac{4}{r^2}\int_0^r F(u)\, u \int_{\sqrt{r^2-u^2}}^r \frac{u^2 + v^2}{\sqrt{u^2 + v^2 - r^2}} F(v)\, v\, dv\, du.$$

En prenant les valeurs absolues et en remplaçant F par le second membre de l'inégalité (49) on trouve que les valeurs absolues des expressions (76) et (77) restent inférieures à des constantes finies et indépendantes de r et de t. Il s'ensuit que le second membre de (75) est inférieur à

$$k\,|\,r - r'\,|$$

où k est une constante finie indépendante de r et de t. Nous avons, d'autre part, d'après les développements aux p. p. 99 et 113

$$L(F\,|\,r, t) > k_1$$

où k_1 est une constante positive indépendante de r et de t. Cela posé on trouve, en intégrant l'équation différentielle (75) qui est linéaire en Ω

$$|\,\Omega\,| < |f_0(r) - f_0(r')\,| + \frac{k}{k_1}\,|\,r - r'\,|.$$

D'après nos hypothèses nous pouvons déterminer un nombre δ_1 tel qu'on ait

$$|f_0(r) - f_0(r')| < \frac{\varepsilon}{2} \qquad \text{pour } |r - r'| < \delta_1.$$

En prenant δ égal au plus petit des nombres δ_1 et $\frac{\varepsilon k_1}{2k}$ on trouve donc

$$|F(r', t) - F(r, t)| < \varepsilon \qquad \text{pour } |r' < r| < \delta,$$

ce qui démontre notre proposition.

§ 6.

Théorèmes d'existence et d'unicité.

Pour démontrer l'existence de solutions de l'équation de Boltzmann nous allons appliquer un procédé d'approximations successives qui permet en même temps de conclure que la solution obtenue est positive.

Soit $f_0(r)$ une fonction continue de r satisfaisant aux inégalités

$$0 \leq f_0(r) \leq \frac{a}{(1 + r)^{\varkappa}} \qquad (\varkappa > 6)$$

et définissons successivement une suite de fonctions $F_n = F_n(r, t)$, $(n = 0, 1, 2, \ldots)$ par les relations

$$F_0(r, t) = e^{\gamma t} f_0(r).$$

$$(78) \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial F_n}{\partial t} + [2Ar + S(F_{n-1})]\, F_n = J(F_{n-1}) \\ F_n(r, 0) = f_0(r). \end{cases} \qquad n = 1, 2, \ldots$$

Cela posé nous allons d'abord chercher une borne supérieure de $F_1(r, t)$. On a

$$J(F_0) = e^{2\gamma t} J(f_0), \quad S(F_0) \geq 0.$$

Il s'ensuit, en intégrant l'équation (78) pour $n = 1$

$$(79) \qquad \begin{aligned} 0 \leq F_1 &\leq f_0(r)\, e^{-2Art} + \int_0^t e^{-2Ar(t-\tau)} e^{2\gamma\tau} J(f_0)\, d\tau \leq \\ &\leq f_0(r)\, e^{-2Art} + e^{\gamma t} \int_0^t e^{-2Ar(t-\tau)} e^{\gamma\tau} J(f_0)\, d\tau = \\ &= f_0(r)\, e^{-2Art} + J(f_0)\, e^{\gamma t} \frac{e^{\gamma t} - e^{-2Art}}{2Ar + \gamma}. \end{aligned}$$

Appliquons maintenant le lemme II (p. 103) à $J(f_0)$ en utilisant l'inégalité

$$f_0(r) < \frac{c}{(1+r)^{\varkappa}} \tag{80}$$

où c est la constante qui figure dans la formule (49) du théorème II (p. 112). En posant

$$\int_0^\infty f_0(r)\, r^2\, dr = A$$

nous trouverons ainsi

$$J(f_0) \leq \frac{8\,A\,c}{(\varkappa - 2)(1+r)^{\varkappa-1}} + \frac{k(\varkappa)\,c^2}{(1+r)^{\varkappa}}$$

et, par conséquent,

$$\frac{J(f_0)}{2\,A\,r+\gamma} \leq \frac{4}{\varkappa-2} \cdot \frac{c}{(1+r)^{\varkappa-1}\left(r+\frac{\gamma}{2\,A}\right)} + \frac{k(\varkappa)\,c^2}{(1+r)^{\varkappa}(2\,A\,r+\gamma)}. \tag{81}$$

Posons

$$\frac{4}{\varkappa-2} = 1 - \alpha.$$

Il suit de la formule (81) que nous pouvons déterminer un nombre γ ne dépendant que de c, A et $\varkappa$ tel qu'on ait

$$\frac{J(f_0)}{2\,A\,r+\gamma} < \left(1-\frac{\alpha}{2}\right)^2 \frac{c}{(1+r)^{\varkappa}}. \tag{82}$$

On trouve ainsi à cause de (79), (80) et (81)

$$F_1 < \frac{c\,e^{\gamma t}}{(1+r)^{\varkappa}}\left(e^{-(2\,A\,r+\gamma)t} + [1 - e^{-(2\,A\,r+\gamma)t}]\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)e^{\gamma t}\right). \tag{83}$$

En désignant par δ la solution (par rapport à t) de l'équation

$$\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)e^{\gamma t} = 1$$

on tire de (83) l'inégalité

$$F_1 < \frac{c\, e^{\gamma t}}{(1+r)^{\varkappa}}\left[e^{-(2Ar+\gamma)t} + \left(1 - e^{-(2Ar+\gamma)t}\right)\right] =$$

$$= \frac{c\, e^{\gamma t}}{(1+r)^{\varkappa}} \qquad \text{pour } 0 \leq t \leq \delta.$$

Calculons maintenant une borne supérieure de

$$\int_0^{\infty} F_1 r^2\, dr - A = \int_0^t \int_0^{\infty} \frac{\partial F_1}{\partial t} r^2\, dr\, dt.$$

En utilisant la formule

$$\frac{\partial F_1}{\partial t} = J(F_0) - (2\,A\,r + S(F_0))\,F_1$$

et les inégalités établies à la page (103) on trouve

$$\left|\frac{\partial F_1}{\partial t}\right| < e^{2\gamma t} c^2 \left\{ J\left(\frac{1}{(1+r)^{\varkappa}}\right) + \frac{1}{(1+r)^{\varkappa}}\left(2\,r \int_0^{\infty} \frac{r^2}{(1+r)^{\varkappa}}\, dr + S\left(\frac{1}{(1+r)^{\varkappa}}\right)\right)\right\} <$$

$$< e^{2\gamma t} c^2\, C_1(\varkappa)\, \frac{1}{(1+r)^{\varkappa-1}}$$

où $C_1(\varkappa)$ est une constante qui ne dépend que de $\varkappa$. On en déduit

$$\left|\int_0^{\infty} F_1 r^2\, dr - A\right| < t\, e^{2\gamma t} c^2\, C_2(\varkappa)$$

où l'on a posé

$$C_2(\varkappa) = C_1(\varkappa) \int_0^{\infty} \frac{r^2}{(1+r)^{\varkappa-1}}\, dr.$$

Soit δ' la solution (par rapport à t) de l'équation

$$t\, e^{2\gamma t} c^2\, C_2(\varkappa) = \frac{\alpha}{2} A$$

et désignons par δ_1 la plus petite des quantités δ et δ'. Nous avons ainsi obtenu les inégalités suivantes pour la fonction $F_1(r, t)$

$$0 \leq F_1 < \frac{c\, e^{\gamma t}}{(1 + r)^{\varkappa}},$$

$$A\left(1 - \frac{\alpha}{2}\right) < \int_0^\infty F_1 r^2\, dr < A\left(1 + \frac{\alpha}{2}\right)$$

$$\text{pour } 0 \leq t \leq \delta_1 .$$

Je dis que les mêmes inégalités sont valables aussi pour toutes les fonctions $F_n(r, t)$. Nous pouvons démontrer cette proposition par induction de la manière suivante. Supposons qu'on ait

$$0 \leq F_{n-1} < \frac{c\, e^{\gamma t}}{(1 + r)^{\varkappa}}. \tag{84}$$

$$A\left(1 - \frac{\alpha}{2}\right) < \int_0^\infty F_{n-1} r^2\, dr < A\left(1 + \frac{\alpha}{2}\right) \tag{85}$$

$$\text{pour } 0 \leq t \leq \delta_1 .$$

En tenant compte de l'inégalité $S(F_{n-1}) \geq 0$ on déduit de (78)

$$F_n \leq f_0(r)\, e^{-2Art} + \int_0^t e^{-2Ar(t-\tau)} J(F_{n-1})\, d\tau . \tag{86}$$

En appliquant l'inégalité (31) nous trouverons

$$J(F_{n-1}) < \frac{8 c\, e^{\gamma t} \int_0^\infty F_{n-1} r^2\, dr}{(\varkappa - 2)(1 + r)^{\varkappa - 1}} + \frac{k(\varkappa)\, c^2 e^{2\gamma t}}{(1 + r)^{\varkappa}} <$$

$$< c\, e^{2\gamma t}\left[\frac{8\left(1 + \frac{\alpha}{2}\right) A}{(\varkappa - 2)(1 + r)^{\varkappa - 1}} + \frac{k(\varkappa)\, c}{(1 + r)^{\varkappa}}\right].$$

On en déduit (en utilisant que le second membre de (81) est inférieur au second membre de (82))

$$\int_0^t e^{-2Ar(t-\tau)} J(F_{n-1})\, d\tau < \frac{e^{\gamma t}(e^{\gamma t} - e^{-2Art})}{2Ar + \gamma} \cdot \left[\frac{8\left(1 + \frac{\alpha}{2}\right) A c}{(\varkappa - 2)(1 + r)^{\varkappa - 1}} + \frac{k(\varkappa)\, c^2}{(1 + r)^{\varkappa}}\right] <$$

$$< e^{\gamma t}(e^{\gamma t} - e^{-2Art})\left(1 + \frac{\alpha}{2}\right) \cdot \left[\frac{4c}{(\varkappa - 2)\left(r + \frac{\gamma}{2A}\right)(1 + r)^{\varkappa - 1}} + \frac{k(\varkappa)\, c^2}{(1 + r)^{\varkappa}(2Ar + \gamma)}\right] <$$

$$< \frac{c\, e^{\gamma t}}{(1+r)^{\varkappa}} \left(e^{\gamma t} - e^{-2Art}\right)\left(1+\frac{\alpha}{2}\right)\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)^2 <$$

$$< \frac{c\, e^{\gamma t}}{(1+r)^{\varkappa}} \left(e^{\gamma t} - e^{-2Art}\right)\left(1-\frac{\alpha}{2}\right).$$

Nous avons donc en vertu de (86)

$$F_n < \frac{c\, e^{\gamma t}}{(1+r)^{\varkappa}} \left[e^{-(2Ar+\gamma)t} + \left[1 - e^{-(2Ar+\gamma)t}\right] e^{\gamma t}\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)\right] <$$

$$< \frac{c\, e^{\gamma t}}{(1+r)^{\varkappa}} \qquad \text{pour } 0 \leq t \leq \delta_1.$$

Nous avons aussi en vertu de (78) et (80)

$$\left|\frac{\partial F_n}{\partial t}\right| < e^{2\gamma t} c^2 \left\{J\left(\frac{1}{(1+r)^{\varkappa}}\right) + \frac{1}{(1+r)^{\varkappa}}\left(2r\int_0^{\infty}\frac{r^2}{(1+r)^{\varkappa}}\,dr + S\left(\frac{1}{(1+r)^{\varkappa}}\right)\right)\right\} <$$

$$< e^{2\gamma t} c^2\, C_1(\varkappa)\frac{1}{(1+r)^{\varkappa-1}}.$$

Cela posé l'inégalité

$$A\left(1-\frac{\alpha}{2}\right) < \int_0^{\infty} F_n r^2\,dr < A\left(1+\frac{\alpha}{2}\right) \qquad 0 \leq t < \delta_1$$

s'établit exactement de la même manière que l'inégalité correspondante pour F_1. Notre proposition est donc vraie pour F_n si elle est vraie pour F_{n-1}.

Nous pouvons résumer le résultat obtenu de la manière suivante: *Les approximations successives définies par les équations* (78) *satisfont aux inégalités:*

$$0 \leq F_n < \frac{c\, e^{\gamma t}}{(1+r)^{\varkappa}}, \tag{87}$$

$$n = 1, 2 \ldots$$

$$\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)A < \int_0^{\infty} F_n r^2\,dr < \left(1+\frac{\alpha}{2}\right)A \tag{88}$$

pour $\qquad 0 \leq t \leq \delta_1$

où γ *et* δ_1 *sont des constantes qui ne dépendent que de* $\varkappa, c, A$.

Convergence de la suite F_n. En retranchant les deux équations

$$\frac{\partial F_{n+1}}{\partial t} + [2\,A\,r + S(F_n)]\,F_{n+1} = J(F_n),$$

$$\frac{\partial F_n}{\partial t} + [2\,A\,r + S(F_{n-1})]\,F_n = J(F_{n-1})$$

on obtient

$$\frac{\partial (F_{n+1} - F_n)}{\partial t} + (2\,A\,r + S(F_n))(F_{n+1} - F_n) = J(F_n + F_{n-1}, F_n - F_{n-1}) - - F_n\,S(F_n - F_{n-1}). \tag{89}$$

Posons

$$F_n - F_{n-1} = \varphi_n \frac{e^{(\gamma+\beta)\,t}}{(1 + r)^{\varkappa}}, \tag{90}$$

$$\int_0^\infty |F_n(u) - F_{n-1}(u)|\,u^2\,du = \psi_n\,e^{(\gamma+\beta)\,t}. \tag{91}$$

Soient ω_n la borne supérieure de $|\varphi_n|$ dans le domaine $0 < r < \infty$, $0 \leq t \leq \delta_1$ et θ_n la borne supérieure de ψ_n pour $0 \leq t \leq \delta_1$.

En portant l'expression (90) dans le premier membre de (89) on obtient

$$\frac{\partial \varphi_{n+1}}{\partial t} + (2\,A\,r + \beta + \gamma + \text{fonction positive})\,\varphi_{n+1} = = e^{-(\gamma+\beta)\,t}(1 + r)^{\varkappa}\,[J(F_n + F_{n-1}, F_n - F_{n-1}) - F_n\,S(F_n - F_{n-1})]. \tag{92}$$

En utilisant les inégalités

$$|F_n + F_{n-1}| < \frac{2\,c\,e^{\gamma t}}{(1 + r)^{\varkappa}},$$

$$|F_n - F_{n-1}| \leq \omega_n \frac{e^{(\gamma+\beta)\,t}}{(1 + r)^{\varkappa}},$$

$$\int_0^\infty (F_n + F_{n-1})\,r^2\,dr < 2\,A\left(1 + \frac{\alpha}{2}\right)$$

$$\int_0^\infty |F_n - F_{n-1}|\,r^2\,dr = \psi_n\,e^{(\gamma+\beta)\,t} \leq \theta_n\,e^{(\gamma+\beta)t}$$

on trouve en vertu du lemme II (p. 103)

$$|J(F_n + F_{n-1}, F_n - F_{n-1})| \leq \frac{8\left(1+\frac{\alpha}{2}\right) A\, \omega_n\, e^{(\gamma+\beta)t}}{(\varkappa-2)(1+r)^{\varkappa-1}} + \frac{8\, c\, \theta_n\, e^{\gamma t} e^{(\gamma+\beta)t}}{(\varkappa-2)(1+r)^{\varkappa-1}} + \\ + \frac{2\, k(\varkappa)\, c\, \omega_n\, e^{(2\gamma+\beta)t}}{(1+r)^{\varkappa}}.$$

Nous avons aussi, à cause de la formule (21),

$$|S(F_n - F_{n-1})| \leq e^{(\gamma+\beta)t} \omega_n \left[\frac{2}{3\, r} \int_0^r \frac{r_1^4}{(1+r_1)^{\varkappa}} dr_1 + 2 \int_0^\infty \frac{r_1^3}{(1+r_1)^{\varkappa}} dr_1\right] < \\ < C_3(\varkappa)\, \omega_n\, e^{(\gamma+\beta)t}$$

où $C_3(\varkappa)$ est une constante qui ne dépend que de $\varkappa$. La valeur absolue du second membre de (92) est donc inférieure à

$$\frac{8\left(1+\frac{\alpha}{2}\right) A\, \omega_n (1+r)}{\varkappa-2} + \frac{8\, c\, \theta_n\, e^{\gamma\delta_1}(1+r)}{\varkappa-2} + 2\, k(\varkappa)\, c\, \omega_n\, e^{\gamma\delta_1} + c\, C_3(\varkappa)\, \omega_n\, e^{\gamma\delta_1}.$$

En intégrant l'équation (92) on trouve

$$(93) \qquad |\varphi_{n+1}| \leq \omega_n \left(\frac{8\left(1+\frac{\alpha}{2}\right) A(1+r)}{(\varkappa-2)(2\, A\, r+\beta+\gamma)} + \frac{2\, k(\varkappa)\, c\, e^{\gamma\delta_1} + c\, C_3(\varkappa)\, e^{\gamma\delta_1}}{2\, A\, r+\beta+\gamma}\right) + \\ + \theta_n \cdot \frac{8\, c\, e^{\gamma\delta_1}(1+r)}{(\varkappa-2)(2\, A\, r+\beta+\gamma)}.$$

Nous avons aussi

$$\theta_{n+1} \leq \int_0^\infty \frac{|\varphi_{n+1}|\, r^2}{(1+r)^{\varkappa}} dr \leq$$

$$(94) \qquad \leq \omega_n \int_0^\infty \left[\frac{8\left(1+\frac{\alpha}{2}\right) A(1+r)}{(\varkappa-2)(2\, A\, r+\beta+\gamma)} + \frac{2\, k(\varkappa)\, c\, e^{\gamma\delta_1} + c\, C_3(\varkappa)\, e^{\gamma\delta_1}}{2\, A\, r+\beta+\gamma}\right] \frac{r^2}{(1+r)^{\varkappa}} dr + \\ + \theta_n \int_0^\infty \frac{8\, c\, e^{\gamma\delta_1}(1+r)}{(\varkappa-2)(2\, A\, r+\beta+\gamma)} \frac{r^2}{(1+r)^{\varkappa}} dr.$$

Les valeurs maxima des coefficients de ω_n et θ_n dans (93) tendent vers

$$\frac{4}{\varkappa - 2}\left(1 + \frac{\alpha}{2}\right) = (1 - \alpha)\left(1 + \frac{\alpha}{2}\right) < 1 - \frac{\alpha}{2}$$

respectivement

$$\frac{4\, c\, e^{\gamma \delta_1}}{A\,(\varkappa - 2)} = K$$

lorsque β tend vers $+\infty$. On voit, d'autre part, que les coefficients de ω_n et θ_n dans l'inégalité (94) tendent vers zéro pour $\beta \to \infty$. Nous pouvons donc fixer un nombre positif β de manière qu'on ait

$$\begin{aligned} \omega_{n+1} &\leq \left(1 - \frac{\alpha}{2}\right)\omega_n + 2\,K\,\theta_n \\ \theta_{n+1} &\leq \varepsilon\,(\omega_n + \theta_n), \end{aligned} \tag{95}$$

ε étant un nombre donné aussi petit que l'on veut. On déduit de (95)

$$\omega_{n+1} + \frac{2\,K}{1 - \alpha}\theta_{n+1} \leq \left(1 - \frac{\alpha}{2} + \frac{2\,K\,\varepsilon}{1 - \alpha}\right)\omega_n + 2\,K\left(1 + \frac{\varepsilon}{1 - \alpha}\right)\theta_n.$$

En prenant pour ε un nombre positif satisfaisant aux inégalités

$$\frac{2\,\varepsilon K}{1 - \alpha} < \frac{\alpha}{4}, \qquad \varepsilon < \frac{3\,\alpha}{4}$$

on trouve

$$\omega_{n+1} + \frac{2\,K}{1 - \alpha}\theta_{n+1} \leq \left(1 - \frac{\alpha}{4}\right)\left(\omega_n + \frac{2\,K}{1 - \alpha}\,\theta_n\right).$$

Il s'ensuit

$$\omega_n + \frac{2\,K}{1 - \alpha}\theta_n < h\left(1 - \frac{\alpha}{4}\right)^n \tag{96}$$

où h est une constante.

(96) entraîne l'inégalité

$$\omega_n < h\left(1 - \frac{\alpha}{4}\right)^n. \tag{97}$$

La série

$$\sum (F_n(r, t) - F_{n-1}(r, t))$$

admet donc la majorante

$$\sum \frac{h\, e^{(\beta+\gamma)t}\left(1-\frac{\alpha}{4}\right)^{n}}{(1+r)^{\varkappa}}$$

d'où l'on conclut que $F_n(r, t)$ tend uniformément (pour $0 \leq t \leq \delta_1$) vers une limite $F(r, t)$.

En utilisant l'inégalité

$$|F - F_n| < \frac{4\, h\, e^{(\beta+\gamma)t}\left(1-\frac{\alpha}{4}\right)^{n+1}}{\alpha(1+r)^{\varkappa}}$$

on démontre aisément

$$\lim_{n\to\infty} J(F_n) = J(F),$$

$$\lim_{n\to\infty} S(F_n) = S(F)$$

uniformément dans l'intervalle $0 \leq t \leq \delta_1$. Cela entraîne à cause de (78) que $F(r, t) = \lim\limits_{n\to\infty} F_n(r, t)$ admet une dérivée continue $\frac{\partial F}{\partial t}$ qui satisfait aux relations

$$\frac{\partial F}{\partial t} + [2\, A\, r + S(F)]\, F = J(F),$$

$$F(r, t) = f_0(r).$$

Nous avons ainsi trouvé une solution non négative de l'équation de Boltzmann valable dans l'intervalle $0 \leq t \leq \delta_1$ et prenant pour $t = 0$ les valeurs données $f_0(r)$.

Remarquons maintenant que nous avons, d'après le théorème II (p. 112)

$$0 \leq F(r, \delta_1) < \frac{c}{(1+r)^{\varkappa}},$$

$$\int_0^\infty F(r, \delta_1)\, r^2\, dr = A$$

où c et A sont les mêmes constantes qui figurent dans les calculs précédents. Cela posé, si l'on forme les approximations successives qui correspondent à la fonction initiale $F(r, \delta_1)$ on obtient un prolongement de la solution dans l'intervalle $\delta_1 \leq t \leq 2\,\delta_1$. En répétant le même procédé n fois de suite on trouve une solution dans l'intervalle $0 \leq t \leq n\delta_1$. Comme n est arbitraire il résulte que la solution est prolongeable d'une manière continue pour toutes les valeurs positives de t.

Unicité de la solution. — Nous nous proposons de démontrer que la solution $F(r, t)$ que nous venons d'obtenir est la seule qui prend les valeurs $f_0(r)$ pour $t = 0$ et qui satisfait à une inégalité de la forme

$$(98) \qquad |F(r,t)| < \frac{C}{(1+r)^\varkappa}, \quad \varkappa > 6 \qquad (C = \text{constante})$$

dans un intervalle $0 \leq t < t_1$. Supposons, par impossible, l'existence d'une autre solution Φ satisfaisant à ces conditions. On a

$$(99) \qquad \frac{\partial(F-\Phi)}{\partial t} + (2Ar + S(F))(F-\Phi) = J(F+\Phi, F-\Phi) - \Phi S(F-\Phi).$$

Posons

$$F - \Phi = \frac{e^{\beta t}}{(1+r)^\varkappa}\varphi,$$

$$\int_0^\infty |F-\Phi| r^2 dr = \psi e^{\beta t},$$

$$\omega = \text{borne supérieure de } |\varphi| \text{ pour } \begin{cases} 0 \leq t \leq t_1 \\ 0 < r < \infty, \end{cases}$$

$$\theta = \text{borne supérieure de } \psi \text{ pour } 0 \leq t \leq t_1.$$

L'équation (99) peut maintenant s'écrire

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + (2Ar + \beta + S(F))\varphi = e^{-\beta t}(1+r)^\varkappa (J(F+\Phi, F-\Phi) - \Phi S(F-\Phi)).$$

Nous trouverons en appliquant le lemme II p. (103)

$$|J(F+\Phi, F-\Phi)| \leq |J(2F, F-\Phi)| + |J(F-\Phi)| \leq$$

$$\leq \frac{8A\omega e^{\beta t}}{(\varkappa-2)(1+r)^{\varkappa-1}} + \frac{24\theta C e^{\beta t}}{(\varkappa-2)(1+r)^{\varkappa-1}} + \frac{4k(\varkappa)C\omega e^{\beta t}}{(1+r)^\varkappa}$$

d'où l'on conclut

$$e^{-\beta t}(1+r)^\varkappa |J(F+\Phi, F-\Phi)| \leq \left(\frac{8A(1+r)}{\varkappa-2} + 4k(\varkappa)C\right)\omega + \frac{24C(1+r)}{\varkappa-2}\cdot\theta.$$

On a aussi

$$|e^{-\beta t}(1+r)^{\varkappa}\Phi S(F-\Phi)| < C\omega\left[\frac{2}{3r}\int_0^r \frac{r^4}{(1+r)^{\varkappa}}dr + 2\int_0^\infty \frac{r^3}{(1+r)^{\varkappa}}dr\right] <$$

$$< 3C\omega\int_0^\infty \frac{r^3}{(1+r)^{\varkappa}}dr = C'\omega.$$

En tenant compte de l'inégalité $S(F)\geq 0$ on tire de l'équation différentielle (99)

$$(100)\qquad |\varphi| \leq \frac{1}{2Ar+\beta}\left[\frac{8A(1+r)}{\varkappa-2} + 4k(\varkappa)C + C'\right]\omega + \frac{24C(1+r)}{(\varkappa-2)(2Ar+\beta)}\cdot\theta.$$

Nous avons aussi

$$\psi \leq \int_0^\infty \frac{r^2}{(1+r)^{\varkappa}}|\varphi|\,dr \leq$$

$$(101)\qquad \leq \omega\int_0^\infty\left[\frac{8A(1+r)}{\varkappa-2} + 4k(\varkappa)C + C'\right]\frac{r^2}{(2Ar+\beta)(1+r)^{\varkappa}}dr +$$

$$+\theta\cdot\frac{24C}{\varkappa-2}\int_0^\infty \frac{r^2}{(1+r)^{\varkappa-1}(2Ar+\beta)}dr.$$

Les bornes supérieures des coefficients de ω et θ dans l'équation (100) tendent vers les limites

$$\frac{4}{\varkappa-2} = 1-\alpha \quad \text{et} \quad \frac{12C}{A(\varkappa-2)} = K'$$

lorsque β tend vers l'infini. On trouve d'autre part que les coefficients de ω et de θ dans (101) tendent vers zéro pour $\beta\to\infty$. Nous pouvons donc déterminer un nombre positif β tel qu'on ait

$$\omega \leq \left(1-\frac{\alpha}{2}\right)\omega + 2K'\theta,$$

$$\theta \leq \frac{\alpha}{16K'}\omega + \frac{\theta}{2}.$$

Il s'ensuit

$$\theta \leq \frac{\alpha}{8K'}\omega.$$

$$0 \leq \omega \leq \left(1 - \frac{\alpha}{2}\right)\omega + \frac{\alpha}{4}\omega = \left(1 - \frac{\alpha}{4}\right)\omega$$

d'où l'on conclut

$$\omega = 0.$$

C'est-à-dire $F = \Phi$ pour $0 \leq t \leq t_1$. C. Q. F. D.

Nous résumerons les résultats obtenus dans le théorème suivant. *Étant donnée une fonction continue $f_0(r)$ assujettie aux conditions*

$$0 \leq f_0(r) \leq \frac{a}{(1+r)^{\varkappa}}, \text{ pour } 0 \leq r < \infty \qquad (\varkappa > 6)$$

il existe une solution $F(r, t)$ de l'équation $\frac{\partial F}{\partial t} = T(F)$ continue dans tout le domaine $0 \leq r < \infty$, $0 \leq t < \infty$ et se réduisant pour $t = 0$ à la fonction $f_0(r)$. $F(r, t)$ satisfait aux inégalités

$$0 \leq F(r, t) < \frac{c}{(1+r)^{\varkappa}} \text{ pour } 0 \leq \frac{r}{t} < \infty$$

où c est une constante indépendante de t et de r. Il n'existe pas d'autre solution prenant les mêmes valeurs initiales et satisfaisant à une inégalité de la forme

$$|F| < \frac{C}{(1+r)^{\varkappa}}, \qquad (C = \text{constante}, \ \varkappa > 6)$$

dans un intervalle $0 \leq t < t_1$. Si $f_0(r)$ n'est pas identiquement nul on a

$$F(r, t) > 0 \qquad \text{pour } t > 0.$$

§ 7.

Étude d'un problème du calcul de variations.

Nous nous proposons de déterminer le minimum de l'intégrale[1]

$$I(f) = \int_0^\infty f \log f \cdot r^2 \, dr$$

[1] Si $f = 0$ nous poserons $f \log f = 0$.

lorsque f parcourt l'ensemble des fonctions mesurables (dans l'intervalle $0 < r < \infty$) qui satisfont aux conditions

$$f(r) \geq 0,$$

$$\int_0^\infty f r^2 \, dr = A,$$

$$\int_0^\infty f r^4 \, dr \leq B,$$

où A et B sont des constantes positives données.

Si nous posons, pour simplifier,

$$\frac{r^3}{3} = x, \quad f(\sqrt[3]{3x}) = \varphi(x) \tag{102}$$

les formules ci-dessus seront remplacées par les suivantes:

$$I(f) = I_1(\varphi) = \int_0^\infty \varphi \log \varphi \, dx,$$

$$\varphi(x) \geq 0,$$

$$\int_0^\infty \varphi \, dx = A,$$

$$\int_0^\infty \varphi x^{\frac{2}{3}} \, dx \leq B \, 3^{-\frac{2}{3}} = B_1.$$

Désignons par $\omega(s)$ la mesure de l'ensemble des points x pour lesquels $\varphi(x) > s$. $\omega(s)$ est une fonction non-croissante de s. On démontre qu'il existe une fonction non-croissante $\varphi^*(x)$ qui est »equimesurable» à $\varphi(x)$, c'est-à-dire admet la même fonction $\omega(s)$ que $\varphi(x)$.[1] $\varphi^*(x)$ est déterminée d'une manière unique si l'on ajoute la condition $\varphi^*(x) = \varphi^*(x+0)$. Il est clair que nous avons

[1] Voir G. H. Hardy and J. E. Littlewood, Acta matematica 54 (1930) p. 81—116, et F. Riesz, The Journal of the London matematical Society, Vol. 7, p. 10—13.

$$\int_0^\infty \varphi^*(x)\,dx = \int_0^\infty \varphi(x)\,dx,$$

$$\int_0^\infty \varphi^*(x)\log\varphi^*(x)\,dx = \int_0^\infty \varphi(x)\log\varphi(x)\,dx.$$

Comme $x^{\frac{2}{3}}$ est une fonction croissante on trouve

$$\int_0^\infty \varphi^*(x)\,x^{\frac{2}{3}}\,dx \leq \int_0^\infty \varphi(x)\,x^{\frac{2}{3}}\,dx$$

l'égalité n'ayant pas lieu à moins que $\varphi(x)$ soit égale à $\varphi^*(x)$ presque partout. Il s'ensuit

$$\int_0^\infty \varphi^*(x)\,x^{\frac{2}{3}}\,dx \leq B_1.$$

Pour résoudre le problème qui nous occupe il suffit donc de considérer des fonctions $\varphi(x)$ non croissantes.

Cela posé, soit $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \ldots \varphi_n(x), \ldots$ une suite de fonctions telle que $I_1(\varphi_n)$ tend vers la borne inférieure de $I_1(\varphi)$. Les fonctions $\varphi_n(x)$ sont uniformément bornées pour $\delta < x < \infty$ $(\delta > 0)$. Nous avons, en effet,

$$A = \int_0^\infty \varphi_n(x)\,dx \geq x\,\varphi_n(x),$$

$$B_1 \geq \int_0^\infty \varphi_n(x)\,x^{\frac{2}{3}}\,dx \geq \frac{3}{5}\,x^{\frac{5}{3}}\,\varphi_n(x)$$

d'où l'on conclut

$$\varphi_n(x) \leq \frac{A}{x}, \tag{103}$$

$$\varphi_n(x) \leq \frac{5\,B_1}{3\,x^{\frac{5}{3}}}. \tag{104}$$

D'après un théorème connu il est donc possible de choisir une suite d'indices $n_1, n_2, \ldots n_\nu, \ldots$ telle quela limite

$$\lim_{\nu \to \infty} \varphi_{n_\nu}(x) = \psi(x)$$

existe pour toutes les valeurs de x dans l'intervalle $0 < x < \infty$. Il est clair que $\psi(x)$ est une fonction non négative et non croissante. L'inégalité (104) montre que $\varphi_{n_\nu}(x)$ admet une majorante indépendante de ν et intégrable dans l'intervalle (d, ∞), $d > 0$. Il s'ensuit à cause d'un théorème fondamental de la théorie de Lesbesgue

$$\lim_{\nu \to \infty} \int_d^\infty \varphi_{n_\nu}(x)\, dx = \int_d^\infty \psi(x)\, dx \qquad (d > 0). \tag{105}$$

Nous avons aussi, par un téorème de Fatou

$$\lim_{\nu \to \infty} \int_0^\infty \varphi_{n_\nu}(x)\, x^{\frac{2}{3}}\, dx \geq \int_0^\infty \psi(x)\, x^{\frac{2}{3}}\, dx$$

d'où l'on conclut

$$\int_0^\infty \psi(x)\, x^{\frac{2}{3}}\, dx \leq B_1. \tag{106}$$

Introduisons maintenant le symbole $\overset{+}{\log}\, \varphi$ de la manière suivante

$$\overset{+}{\log}\, \varphi = \log \varphi \quad \text{pour} \quad \varphi \geq 1,$$

$$\overset{+}{\log}\, \varphi = 0 \qquad \text{pour} \quad 0 \leq \varphi \leq 1 \quad \text{et pour} \quad \varphi = \infty.$$

Nous pouvons écrire $I_1(\varphi_n)$ sous la forme suivante.

$$I_1(\varphi_n) = \int_0^\infty \varphi_n \overset{+}{\log}\, \varphi_n\, dx - \int_0^\infty \varphi_n \overset{+}{\log} \frac{1}{\varphi_n}\, dx. \tag{107}$$

Il est clair que $I_1(\varphi_n)$ est inférieur à une constante C indépendante de n. Il en est de même de

$$\int_0^\infty \varphi_n \overset{+}{\log} \frac{1}{\varphi_n}\, dx.$$

Nous avons, en effet, en tenant compte de l'inégalité

$$\varphi \overset{+}{\log} \frac{1}{\varphi} \leq \frac{1}{e},$$

$$\int_0^\infty \varphi_n \overset{+}{\log} \frac{1}{\varphi_n}\, dx \leq \frac{\varrho}{e} + \int_\varrho^\infty \varphi_n \overset{+}{\log} \frac{1}{\varphi_n}\, dx.$$

Soit ϱ la solution positive de l'équation

$$\frac{5}{3} \frac{B_1}{x^{\frac{5}{3}}} = \frac{1}{e}.$$

En remarquant que $\varphi \overset{+}{\log} \frac{1}{\varphi}$ est une fonction croissante de φ dans l'intervalle $0 < \varphi < \frac{1}{e}$ on trouve en vertu de (104)

$$\int_\varrho^\infty \varphi_n \overset{+}{\log} \frac{1}{\varphi_n}\, dx \leq \int_\varrho^\infty \frac{5 B_1}{3 x^{\frac{5}{3}}} \log \frac{3 x^{\frac{5}{3}}}{5 B_1}\, dx = \frac{21}{4} \left(\frac{5 B_1}{3}\right)^{\frac{3}{5}} e^{-\frac{2}{5}}.$$

Il s'ensuit

$$\int_0^\infty \varphi_n \overset{+}{\log} \frac{1}{\varphi_n}\, dx \leq \left[\frac{5 B_1 e}{3}\right]^{\frac{3}{5}} \cdot \frac{1}{e} + \frac{21}{4} \left(\frac{5 B_1}{3}\right)^{\frac{3}{5}} e^{-\frac{2}{5}} = C_1 \tag{108}$$

d'où l'on conclut, en vertu de (107),

$$\int_0^\infty \varphi_n \overset{+}{\log} \varphi_n\, dx \leq C + C_1 = C_2.$$

En désignant par E_s l'ensemble des points x pour lesquels $\varphi_n \geq s > 1$ on tire de cette inégalité

$$\int_{E_s} \varphi_n\, dx \leq \frac{C_2}{\log s}.$$

Il s'ensuit

$$\int_0^d \varphi_n\, dx \leq \frac{C_2}{\log s} + s d.$$

Supposons $d < 1$ et posons $s = \frac{1}{\sqrt{d}}$. On trouve ainsi

$$\int_0^d \varphi_n \, dx \leq \frac{2\, C_2}{\log \frac{1}{d}} + \sqrt{d} \qquad d < 1\,.$$

Nous pouvons donc déterminer un nombre positif d tel qu'on ait

$$\int_0^d \varphi_n(x)\, dx < \varepsilon$$

quel que soit n, ε étant un nombre positif donné aussi petit que l'on veut. En combinant ce résultat avec la relation (105) on obtient

$$A = \lim_{\nu \to \infty} \int_0^\infty \varphi_{n_\nu}(x)\, dx = \int_0^\infty \psi(x)\, dx\,. \tag{109}$$

Les formules (107) et (108) montrent que la borne inférieure de $I_1(\varphi)$ est finie et $\geq -C_1$.

La fonction

$$\varphi_{n_\nu} \overset{+}{\log} \frac{1}{\varphi_{n_\nu}}$$

admet une majorante indépendante de n intégrable dans l'intervalle $(0, \infty)$. Nous avons, en effet,

$$\varphi_{n_\nu} \overset{+}{\log} \frac{1}{\varphi_{n_\nu}} \leq \frac{1}{e} \qquad \text{pour } 0 < x < \varrho,$$

$$\varphi_{n_\nu} \overset{+}{\log} \frac{1}{\varphi_{n_\nu}} \leq \frac{5\, B_1}{3\, x^{\frac{5}{3}}} \log \left(\frac{3\, x^{\frac{5}{3}}}{5\, B_1} \right) \qquad \text{pour } x \geq \varrho.$$

Il s'ensuit

$$\lim_{\nu \to \infty} \int_0^\infty \varphi_{n_\nu} \overset{+}{\log} \frac{1}{\varphi_{n_\nu}}\, dx = \int_0^\infty \psi \overset{+}{\log} \frac{1}{\psi}\, dx.$$

Comme $\varphi_{n_\nu} \overset{+}{\log} \varphi_{n_\nu}$ est ≥ 0 nous avons

$$\lim_{\nu \to \infty} \int_0^\infty \varphi_{n_\nu} \overset{+}{\log} \varphi_{n_\nu} \, dx \geq \int_0^\infty \psi \overset{+}{\log} \psi \, dx .$$

Donc

$$k = \lim_{\nu \to \infty} I_1(\varphi_{n_\nu}) \geq \int_0^\infty \psi \overset{+}{\log} \psi \, dx - \int_0^\infty \psi \overset{+}{\log} \frac{1}{\psi} \, dx = \int_0^\infty \psi \log \psi \, dx . \tag{110}$$

Comme la fonction $\psi(x)$ satisfait aux relations (109) et (106) nous avons, d'autre part

$$\int_0^\infty \psi \log \psi \, dx \geq k .$$

En combinant cette relation avec (110) on trouve finalement

$$\int_0^\infty \psi \log \psi \, dx = k .$$

Il est donc démontré que la borne inférieure de $I_1(\varphi)$ est atteinte pour une fonction non décroissante $\psi(x)$ satisfaisant aux conditions

$$\psi(x) \geq 0, \quad \int_0^\infty \psi(x) \, dx = A, \quad \int_0^\infty \psi(x) x^{\frac{2}{3}} \, dx \leq B_1 .$$

Je dis qu'il faut prendre le signe d'égalité dans la dernière relation. En effet, si nous supposons par impossible

$$\int_0^\infty \psi(x) x^{\frac{2}{3}} \, dx = B_2 < B_1$$

nous trouverons en posant $\psi_1(x) = \alpha \psi(\alpha x)$, $\alpha = \left(\frac{B_2}{B_1}\right)^{\frac{3}{2}}$

$$\int_0^\infty \psi_1(x) \, dx = A ,$$

$$\int_0^\infty \psi_1(x) x^{\frac{2}{3}} \, dx = B_1 .$$

$$I_1(\psi_1) = \int_0^\infty \alpha\,\psi(\alpha x)(\log\psi(\alpha x) + \log\alpha)\,dx =$$

$$= \int_0^\infty \psi(x)\log\psi(x)\,dx + \log\alpha\int_0^\infty \psi(x)\,dx =$$

$$= I_1(\psi) + A\log\alpha.$$

α étant inférieur à 1 il s'ensuit

$$I_1(\psi_1) < I_1(\psi).$$

Or cette inégalité est impossible à cause du fait que $I_1(\psi)$ est la borne inférieure de $I(\varphi)$. Il faut donc que la relation

$$\int_0^\infty \psi(x)\,x^{\frac{2}{3}}\,dx = B_1 \tag{111}$$

ait lieu.

Cela posé nous pouvons appliquer les méthodes habituelles du calcul de variations pour déterminer la fonction $\psi(x)$. Soient ξ, ξ_1, ξ_2 trois points quelconques où la fonction $\psi(x)$ est positive et continue. Soit $h_\delta(x)$ la fonction suivante

$$h_\delta(x) = 1 \qquad \text{pour } |x| \leq \delta,$$

$$h_\delta(x) = 0 \qquad \text{pour } |x| > \delta.$$

Posons

$$\Psi(x) = \psi(x) + \alpha\,h_\delta(x-\xi) + \beta\,h_\delta(x-\xi_1) + \gamma\,h_\delta(x-\xi_2) \tag{112}$$

et prenons β et γ comme fonctions de α de manière qu'on ait

$$\int_0^\infty \Psi(x)\,dx = A, \quad \int_0^\infty \Psi(x)\,x^{\frac{2}{3}}\,dx = B_1.$$

Cela entraîne

$$\begin{aligned} &\alpha\int_{\xi-\delta}^{\xi+\delta} dx + \beta\int_{\xi_1-\delta}^{\xi_1+\delta} dx + \gamma\int_{\xi_2-\delta}^{\xi_2+\delta} dx = 0, \\ &\alpha\int_{\xi-\delta}^{\xi+\delta} x^{\frac{2}{3}}\,dx + \beta\int_{\xi_1-\delta}^{\xi_1+\delta} x^{\frac{2}{3}}\,dx + \gamma\int_{\xi_2-\delta}^{\xi_2+\delta} x^{\frac{2}{3}}\,dx = 0. \end{aligned} \tag{113}$$

On a aussi

$$\left[\frac{d}{d\alpha} I_1(\Psi)\right]_{\alpha=0} = \int\limits_{\xi-\delta}^{\xi+\delta} (\log\psi + 1)\, dx + \frac{d\beta}{d\alpha} \int\limits_{\xi_1-\delta}^{\xi_1+\delta} (\log\psi + 1)\, dx + \\ + \frac{d\gamma}{d\alpha} \int\limits_{\xi_2-\delta}^{\xi_2+\delta} (\log\psi + 1)\, dx = 0.$$

En dérivant les équations (113) par rapport à α on en déduit

$$\begin{vmatrix} \int\limits_{\xi-\delta}^{\xi+\delta} \log\psi\, dx, & \int\limits_{\xi_1-\delta}^{\xi_1-\delta} \log\psi\, dx, & \int\limits_{\xi_2-\delta}^{\xi_2+\delta} \log\psi\, dx \\ \int\limits_{\xi-\delta}^{\xi+\delta} dx, & \int\limits_{\xi_1-\delta}^{\xi_1+\delta} dx, & \int\limits_{\xi_2-\delta}^{\xi_2+\delta} dx \\ \int\limits_{\xi-\delta}^{\xi+\delta} x^{\frac{2}{3}}\, dx, & \int\limits_{\xi_1-\delta}^{\xi_1+\delta} x^{\frac{2}{3}}\, dx, & \int\limits_{\xi_2-\delta}^{\xi_2-\delta} x^{\frac{2}{3}}\, dx \end{vmatrix} = 0.$$

En divisant par δ^3 et en faisant tendre δ vers zéro on obtient

$$\begin{vmatrix} \log\psi(\xi), & \log\psi(\xi_1), & \log\psi(\xi_2) \\ 1 & 1 & 1 \\ \xi^{\frac{2}{3}} & \xi_1^{\frac{2}{3}} & \xi_2^{\frac{2}{3}} \end{vmatrix} = 0.$$

Si nous laissons les points ξ_1 et ξ_2 invariables il s'ensuit

$$(114) \qquad \log\psi(\xi) = -a\,\xi^{\frac{2}{3}} + b,$$

où a et b sont des constantes. Cette formule est valable en tous les points de continuité où $\psi(\xi)$ est positive. Je dis que $\psi(x)$ est positive pour toutes les valeurs finies et positives de x. Sinon il existerait, en effet, un nombre fini l tel qu'on aurait

$$\psi(x) = 0. \qquad \text{pour } x > l.$$

En supposant dans (112) $\xi > l$ nous obtenons pour δ suffisamment petit

$$I_1(\Psi) = I_1(\psi + \beta h_\delta(x-\xi_1) + \gamma h_\delta(x-\xi_2)) + 2\alpha\log\alpha\cdot\delta.$$

La dérivée par rapport à α du premier terme dans le second membre est bornée dans le voisinage de $\alpha = 0$ tandis que la dérivée de $\alpha \log \alpha \cdot \delta$ tend vers $-\infty$ lorsque α tend vers zéro par des valeurs positives. Il s'ensuit que $I_1(\Psi)$ décroît lorsqu'on fait croître α en partant de $\alpha = 0$. Or cela est en contradiction avec l'hypothèse que $I_1(\psi)$ soit la borne inférieure de $I_1(\varphi)$.

Il est ainsi démontré que la relation (114) a lieu en tous les points de continuité de $\psi(\xi)$, c'est-à-dire presque partout. La borne inférieure k de $I_1(\varphi)$ est donc atteinte pour une fonction de la forme

$$e^{-a x^{\frac{2}{3}} + b}. \tag{115}$$

Les valeurs de a et b se déterminent au moyen des relations (109) et (111).

Si nous convenons de considérer deux fonctions qui ne diffèrent que sur un ensemble de mesure nulle comme identiques nous pouvons affirmer que la fonction (115) est la seule qui donne à $I_1(\varphi)$ sa valeur minimum. Cela est déjà démontré si l'on se borne à considérer des fonctions non croissantes. Or une fonction φ qui n'est pas non croissante (si l'on exclut s'il y a lieu un ensemble de mesure nulle) ne peut pas donner à $I_1(\varphi)$ sa valeur minimum k. En introduisant la fonction φ^* non croissante et équimesurable à φ nous aurions, en effet, dans ce cas

$$k = I_1(\varphi) = I_1(\varphi^*). \tag{116}$$

Si $\varphi^* \neq \varphi$ sur un ensemble de mesure non nulle nous avons

$$\int_0^\infty \varphi^* x^{\frac{2}{3}}\, dx < B_1.$$

Or cela entraîne d'après un résultat etabli à la page 139

$$I_1(\varphi^*) > k$$

ce qui est en contradiction avec la relation (116). Il faut donc que chaque fonction qui donne à $I_1(\varphi)$ sa valeur minimum coïncide presque partout avec la fonction associée non croissante $\varphi^*(x)$.

En revenant à la variable $r = \sqrt[3]{3x}$ nous trouverons le théorème suivant: *Le minimum de l'intégrale*

$$I(f) = \int_0^\infty f \log f \cdot r^2 \, dr$$

lorsque f parcourt l'ensemble des fonctions mesurables (pour $0 < r < \infty$) qui satisfont aux conditions

(117) $$f(r) \geq 0,$$

(118) $$\int_0^\infty f(r) r^2 \, dr = A, \quad \int_0^\infty f(r) r^4 \, dr = B$$

est fini et s'obtient pour une fonction f de la forme

(119) $$f = C e^{-\alpha r^2}$$

où C et α sont des constantes déterminées par les relations (118). *La fonction* (119) *est la seule fonction continue qui donne à $I(f)$ sa valeur minimum sous les conditions* (117), (118).

§ 8.

Allure de la solution pour $t \to \infty$.

Nous nous proposons d'étudier l'allure pour $t \to \infty$ de la solution $F(r, t)$ dont nous avons établi l'existence dans le § 6. Considérons la fonction de Boltzmann

$$H(t) = \int_0^\infty F(r, t) \log F(r, t) \cdot r^2 \, dr.$$

Celle-ci est, d'après les résultats énoncés à la page (120) une fonction continue de t admettant (pour $t > 0$) la dérivée continue et non positive

$$H'(t) = \int_0^\infty \log F \cdot T(F) r^2 \, dr.$$

En tenant compte des relations

(120) $$\int_0^\infty F(r, t) r^2 \, dr = A, \quad \int_0^\infty F(r, t) r^4 \, dr = B$$

où A et B sont des constantes nous savons par les résultats du § 7, que $H(t)$ admet une borne inférieure finie. Il s'ensuit (en tenant compte de la relation $H'(t) \leq 0$)

$$(121) \qquad \overline{\lim_{t \to \infty}} H'(t) = 0.$$

Nous pouvons donc choisir une suite $t_1, t_2, \ldots t_n, \ldots$ telle qu'on ait

$$(122) \qquad \lim_{n \to \infty} H'(t_n) = 0.$$

En utilisant le théorème IV (§ 5) on voit qu'il est possible d'extraire de $t_1, t_2, \ldots t_n, \ldots$ une suite partielle t_{n_ν} $(\nu = 1, 2, \ldots)$ de manière que $F(r, t_{n_\nu})$ converge uniformément vers une fonction continue $f(r)$ lorsque ν tend vers l'infini. Nous avons à cause de (120) et l'inégalité (49)

$$(123) \qquad \int_0^\infty f(r) r^2 \, dr = A, \quad \int_0^\infty f(r) r^4 \, dr = B.$$

Je dis que l'expression

$$f' f'_1 - f f_1 = f(r') f(r'_1) - f(r) f(r_1),$$

où r' et r'_1 sont les quantités introduites dans le § 1 est identiquement nulle dans tout le domaine à quatre dimensions défini par les inégalités

$$(124) \qquad 0 < \frac{r}{r_1} < \infty, \quad 0 \leq \frac{\theta}{\theta_1} < \pi.$$

Si non, en effet, on pourrait trouver un domaine D de mesure positive où

$$|f' f'_1 - f f_1| > \varrho > 0$$

ϱ étant une constante. On en conclut qu'il est possible de choisir un nombre ν_0 tel que

$$(125) \qquad |F(r', t_{n_\nu}) F(r'_1, t_{n_\nu}) - F(r, t_{n_\nu}) F(r_1, t_{n_\nu})| > \frac{\varrho}{2},$$

dans D pour $\nu > \nu_0$. En appliquant la formule (11) § 1 on obtient

$$(126) \quad H'(t_{n_\nu}) < -\frac{1}{4} \iiiint\limits_D \left[(F' F'_1 - F F_1) \log \frac{F' F'_1}{F F_1} \right]_{t = t_{n_\nu}} V r^2 r_1^2 \, d\theta \, d\theta_1 \, dr \, dr_1.$$

Désignons par M la borne supérieure de $F(r, t)$ dans le domaine $0 < r < \infty$, $0 < t < \infty$. Cela posé nous avons en vertu de (125)

$$\left[(F' F'_1 - F F_1) \log \frac{F' F'_1}{F F_1}\right]_{t=t_{n_\nu}} \geq \frac{\varrho}{2} \log\left(1 + \frac{\varrho}{2 M^2}\right),$$

dans D. Il s'ensuit à l'aide de la formule (126)

$$H'(t_{n_\nu}) < -\frac{\varrho}{8} \log\left(1 + \frac{\varrho}{2 M^2}\right) \int\int_D\int\int V r^2 r_1^2 \, d\theta \, d\theta_1 \, dr \, dr_1 .$$

On en déduit en faisant tendre ν vers l'infini

$$0 \leq -\frac{\varrho}{8} \log\left(1 + \frac{\varrho}{2 M^2}\right) \int\int_D\int\int V r^2 r_1^2 \, d\theta \, d\theta_1 \, dr \, dr_1$$

ce qui est impossible. Il est donc nécessaire qu'on ait

$$f(r) f(r'_1) - f(r) f(r_1) = 0$$

pour toutes les valeurs r, r_1, θ, θ_1 qui satisfont aux inégalités (124). Or nous avons déjà remarqué que cette relation entraîne

$$f(r) = C e^{-\alpha r^2} \tag{127}$$

où C et α sont des constantes déterminées par les relations (123).

Nous pouvons maintenant démontrer que $F(r, t)$ tend vers $C e^{-\alpha r^2}$ lorsque t tend vers l'infini d'une manière quelconque. Dans le cas contraire on pourrait, en effet, trouver une suite $\tau_1, \tau_2, \ldots \tau_\nu, \ldots$ indéfiniment croissante telle que $F(r, \tau_\nu)$ converge uniformément vers une fonction non négative $\psi(r)$ différente de $C e^{-\alpha r^2}$ lorsque ν tend vers l'infini. Soit k la borne inférieure qui figure dans le problème du calcul de variations traité dans le § 7. Il suit du résultat que nous venons de démontrer que

$$\lim_{t \to \infty} H(t) = k.$$

Nous avons donc

$$\lim_{\nu \to \infty} \int_0^\infty F(r, \tau_\nu) \log F(r, \tau_\nu) \cdot r^2 \, dr = k.$$

On a, d'autre part, par les raisonnements exposées aux pages 138 et 139 (formule 110)

$$(128) \qquad k = \lim_{\nu \to \infty} \int_0^\infty F(r, \tau_\nu) \log F(r, \tau_\nu) \cdot r^2 \, dr \geq \int_0^\infty \psi \log \psi \cdot r^2 \, d r.$$

D'après l'inégalité (49) nous pouvons dans les relations évidentes

$$\lim_{\nu \to \infty} \int_0^\infty F(r, \tau_\nu) \, r^2 \, dr = A,$$

$$\lim_{\nu \to \infty} \int_0^\infty F(r, \tau_\nu) \, r^4 \, dr = B$$

effectuer le passage à la limite sous le signe d'intégration, ce qui donne

$$\int_0^\infty \psi \, r^2 \, dr = A,$$

$$\int_0^\infty \psi \, r^4 \, dr = B.$$

Il faut donc d'après le théorème énoncé à la page (143) que le signe d'égalité ait lieu dans la relation (128) et

$$\psi = C e^{-\alpha r^2}$$

contrairement à l'hypothèse.

Il est donc démontré que la solution $F(r, t)$ de l'équation de Boltzmann tend uniformément[1] *vers la fonction de Maxwell*

$$C e^{-\alpha r^2}$$

pour $t \to \infty$.

Djursholm le 2 Juillet 1932.

---

[1] L'uniformité de la convergence est une conséquence de la continuité uniforme de $F(r, t)$ (voir p. 120).