# ÜBER DIE BEDEUTUNG DES PRINCIPS DER LEBENDIGEN KRAFT FÜR DIE FRAGE VON DER STABILITÄT DYNAMISCHER SYSTEME

VON

KARL BOHLIN
in STOCKHOLM.

Sehr viele mechanische Probleme, und zwar alle solche, wo die wirkenden Kräfte als partielle Ableitungen eines von der expliciten Zeit unabhängigen Potentials betrachtet werden können, führen auf Differentialgleichungen, zu welchen ein erstes Integral — die Gleichung der lebendigen Kraft — sich unmittelbar ergiebt. Nicht selten erhält man auch aus den Differentialgleichungen einer Aufgabe, es sei einer mechanischen oder irgend welcher anderen, ein erstes Integral, welches, wenn es auch mit dem Namen der lebendigen Kraft nicht zu bezeichnen ist, doch den Charakter des so benannten Integrales besitzt, hauptsächlich insofern die linke Seite der Gleichung unter quadratischer Form auftritt. In solchen Fällen, wo die Veränderlichen, wie bei mechanischen Aufgaben, nur reelle Werthe annehmen können, erlaubt die besagte Form der Gleichung eine Betrachtungsweise, wodurch man oft über die Grenzen der Veränderlichen eine Entscheidung treffen kann. Handelt es sich um die Bewegungen eines Systems materieller Punkte, so ist die Zeit als unabhängige Veränderliche ganz unbeschränkt, die Koordinaten der beweglichen Punkte können aber durch die Natur des Integrals der lebendigen Kraft oder einer entsprechenden Gleichung zwischen endlichen Grenzen eingeschlossen sein. In den Fällen, wo es gelingt solche Grenzen anzugeben, hat man auf die Frage von der Stabilität der Bewegung, unabhängig von der vollständigen Lösung der Differentialgleichungen, eine Antwort gefunden. Eine solche Antwort wird nun im allgemeinen möglich sein, so oft das anzuwendende Integral, kurzweg die Gleichung der lebendigen Kraft, nur die Koordinaten eines einzigen Punktes als Veränderliche enthält. Ausser den Fällen, wo nur *ein* beweglicher Punkt in Frage kommt, gehört hierher ein komplicirterer Fall, welcher einigen Kombinationen von drei Körpern in unserem Sonnensysteme sehr nahe entspricht. Aber auch wenn das Princip der lebendigen Kraft zur vollständigen Entscheidung über die Stabilitätsfrage nicht ausreicht, lassen sich doch im allgemeinen aus demselben gewisse Betrachtungen über die Grenzen der Bewegung ziehen.

Indem wir uns erlauben die erwähnte Betrachtungsweise nebst einigen Beispielen in den folgenden Seiten mitzutheilen, werden wir voraussetzen, dass die Bewegungen in einer Ebene stattfinden. Man überzeugt sich leicht, dass diese Annahme keine wesentliche Beschränkung enthält und dass man nachher ohne Schwierigkeit auf die dritte Dimension Rücksicht nehmen kann.

Um die Begriffe festzuhalten, betrachten wir den folgenden einfachen Fall. Wir nehmen nämlich an, dass die Bewegungsgleichungen eines in der Ebene freien materiellen Punktes $P$ auf ein erstes Integral von der Form

$$\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 - f(x, y) + h = 0$$

führen. Hier bezeichnet $ds$ das Differential von dem Wege des Punktes, $x$ und $y$ seine rechtwinkligen Koordinaten und $h$ die Integrationskonstante. In der Function $f(x, y)$ treten aber im allgemeinen die $x$ und $y$ nicht unmittelbar als Koordinaten auf, sondern diese Function ergiebt sich zunächst unter der Form $F(r, \rho)$, wo $r$ und $\rho$ die beiden Abstände des Punktes $P$ von zwei anderen Punkten bedeuten. Da die letztere Form sich als einfacher für die Diskussion erweist, werden wir dieselbe beibehalten, indem wir $r$ und $\rho$ als Koordinaten wählen und folgende Form des Integrals annehmen

$$(1) \qquad \left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = R,$$

wo die Bezeichnung

$$(2) \qquad R = F(r,\ \rho) - h$$

angewandt ist. Wir stellen jetzt die Gleichung

$$(3) \qquad R = 0$$

auf. Dieselbe bezeichnet im allgemeinen eine Kurve, welche nach (1) so beschaffen ist, dass die Geschwindigkeit des Punktes $m$ gleich Null ist, so oft der Punkt sich auf dieser Kurve befindet. Ebenso stellt die Gleichung

$$R = c^2$$

eine Kurve dar, wo die Geschwindigkeit des Punktes $m$ den Werth $c$ hat. Es ist einleuchtend, dass diese Kurven in Bezug auf die Verbindungslinie der beiden Anfangspunkte des bipolaren Koordinatsystemes symmetrisch sind. Durch die Kurve (3) wird nun die Ebene in Theile zerlegt und im allgemeinen in solcher Weise, dass die Function $R$ ihr Zeichen ändert, wenn der Punkt $(r,\ \rho)$ die Kurve überschreitet. Der Zeichenwechsel trifft immer zu, sobald die Kurve (3) nicht eine s. g. Minimikurve ist, welche dadurch charakterisirt wird, dass die Gleichungen

$$\frac{\partial R}{\partial r} = 0, \qquad \frac{\partial R}{\partial \rho} = 0$$

gleichzeitig mit (3) bestehen. Abgesehen von solchen Ausnahmefällen nimmt also die Function $R$ in einigen von den Theilen, in welche die Ebene durch (3) zerfällt, positive, in Anderen sicher negative Werthe an. Negative Werthe kann aber die Function $R$ nach (1) niemals annehmen, insofern die $r$ und $\rho$ die Koordinaten des beweglichen Punktes $P$ bezeichnen. Der letztere muss sich also immer in einem positiven Gebiete der Ebene befinden und seine Bewegung wird in solcher Weise durch die Kurve (3) begrenzt. Ist diese Kurve eine geschlossene, so bleibt die Bewegung im gewöhnlichen Sinne stabil. Nun ist es ja mit dem Angeführten keineswegs gesagt, dass der Punkt $P$ diese Grenze je erreichen soll. Wenn er sie aber erreicht, so wird seine Bewegungskurve in dem bezüglichen Punkte im allgemeinen eine Spitze beschreiben, indem die Geschwindigkeit auf dieser Kurve (3) gleich Null ist. Die Existenz und die

Natur der Grenzkurve hängen von der Form der Function $F(r, \rho)$ und von dem Werthe der Integrationskonstante $h$ ab. Die letztere ihrerseits wird durch die Anfangslage und den numerischen Werth (nicht die Richtung) der Anfangsgeschwindigkeit folgendermassen

$$h = F(r_0, \rho_0) - \left(\frac{ds}{dt}\right)_0^2$$

bestimmt.

Als erstes Beispiel für diese Betrachtungen wählen wir das Zweikörperproblem. Die Gleichung der lebendigen Kraft hat hier die Form

$$\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 - \frac{2\mu}{r} + \frac{\mu}{a} = 0,$$

wo $\frac{\mu}{a}$ statt $h$ steht. Die Gleichung (3) wird in diesem Falle von der einfachsten Gestalt; man erhält in der That

$$r = 2a.$$

Wenn $a$ positif ist, so bezeichnet diess einen Kreis, um den einen der materiellen Punkte als Mittelpunkt beschrieben und mit dem Radius $2a$. Nach dem Vorhergehenden, sehen wir sofort ein, dass die Bewegung des zweiten Punktes stets innerhalb dieses Kreises stattfinden muss. Dies ist auch, was von der vollständigen Lösung der Aufgabe bestätigt wird, da ja in der That alle Ellipsen mit der halben grossen Axe $a$ innerhalb des Kreises

$$r = 2a$$

fallen müssen. Wenn die Excentricität der Ellipse gleich Eins wird, so geht diese in eine gerade Linie von der Länge $2a$ über — eine Kurve, welche in der That an dem Kreise eine Spitze macht. Wenn $a$ unendlich oder negativ wird, so existirt die Grenzkurve nicht mehr. In diesen Fällen ist ja auch die Bahn entweder eine Parabel oder eine Hyperbel. Den verschiedenen Annahmen über $a$ entsprechen die bekannten Anfangsbedingungen

$$\left(\frac{ds}{dt}\right)_0^2 \lesseqgtr \frac{2\mu}{r_0}.$$

Gehen wir jetzt zu dem Probleme von der Bewegung eines Punktes, welcher von zwei festen Centra angezogen wird, über, so erhalten wir aus dem Princip der lebendigen Kraft für diesen Fall, oder

$$\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = \frac{2m}{r} + \frac{2\mu}{\rho} - h,$$

die folgende Form der Gleichung (3)

$$\frac{2m}{r} + \frac{2\mu}{\rho} = h,$$

wo $r$ und $\rho$ die beiden Abstände des beweglichen Punktes von den festen Anziehungscentra $m$ und $\mu$ bedeuten. Wenn die Integrationskonstante $h$ einen positiven Werth hat, so bezeichnet diese Gleichung eine Kurve von der allgemeinen Natur einer Lemniskate. Ihre Form ist von den Konstanten der Gleichung abhängig; je nachdem $h$ einen hinlänglich grossen oder hinlänglich kleinen Werth besitzt, besteht die Begrenzung der Bewegung entweder aus zwei geschlossenen und ausserhalb einander fallenden Konturen, welche jeden der Punkte $m$ und $\mu$ umgeben, oder aus einer einzigen geschlossenen Linie, welche beide diese Punkte umfasst. Diese beiden Formen gehen in einem Grenzfalle in einander über, nämlich wenn die beiden $m$ und $\mu$ resp. umschliessenden Gebiete, in einem Punkte der Verbindungslinie dieser beiden Centra, zusammenhängen. Innerhalb eines auf solche Weise abgegrenzten Raumes muss nun der bewegliche Punkt bleiben; die Stabilität seiner Bewegung ist also durch einen positiven Werth von $h$ gesichert.[1] Da die fragliche mechanische Aufgabe vollständig gelöst worden ist, so kann man sich *a posteriori* von der Richtigkeit unserer Schlüsse überzeugen. Wir kommen aber nun zu Fällen, wo diese Kontrolle nicht möglich ist, indem die vollständige Integration der bezüglichen Differentialgleichungen bis jetzt nicht geleistet worden ist.

Wir stellen uns vor, dass ein materieller Punkt $\mu$, mit gleichförmiger Winkelgeschwindigkeit $n$, einen Kreis von dem Radius $a$ um einen zweiten, festen Punkt $m$ beschreibt. Die beiden Punkte attrahiren einen dritten

[1] Mit einem Verfahren, welches JACOBI in seiner vierten Vorlesung »Über Dynamik» auf das $n$-Körperproblem angewandt hat, zeigt man leicht dass die Bewegung nothwendig instabil ist, wenn $h$ einen negativen Werth hat.

Punkt $P$, von welchem aber vorausgesetzt wird, dass er auf die Vorigen keine Einwirkung ausübt. Man sucht die Bedingungen dafür, dass die Bewegung des letzteren in Bezug auf die beiden anziehenden Punkte stabil sein soll. Es ist überflüssig zu bemerken, dass die Bewegungen des so fingirten Systemes denjenigen eines eigentlichen Dreikörperproblemes nicht gleich werden können, da es, abgesehen von einem bekannten Specialfalle dieses Problemes, augenscheinlich unmöglich ist, dass Einer von drei einander anziehenden Körpern einen Kreis um einen Anderen beschreibt. Das angenommene System entspricht aber in der That *sehr nahe* einigen Kombinationen im Sonnensysteme, z. B. den beiden Körpern, Jupiter und Sonne, in ihrer gleichzeitigen Anziehung an einen dritten Körper, dessen Masse, wie diejenigen der Kometen oder der kleinen Planeten, zu vernachlässigen ist. Ausserdem scheint der gestellten Aufgabe durch den Umstand einiges Interesse verliehen zu werden, dass die vollständige Bestimmung der Bewegung auf Schwierigkeiten stösst, welche denjenigen des Dreikörperproblems nahe verwandt sind.

Bezeichnet man mit $\xi$, $\eta$ die Koordinaten des Punktes $P$ in Bezug auf ein festes Koordinatensystem mit dem Anfangspunkte in $m$, mit $r$ und $\rho$ die Abstände des Punktes $P$ von $m$ und $\mu$ resp. und mit

$$x' = a\cos(nt + A), \qquad y' = a\sin(nt + A)$$

die Koordinaten von $\mu$, so bekommen die Bewegungsgleichungen von $P$ die folgende Gestalt

$$\frac{d^2\xi}{dt^2} + \frac{m\xi}{r^3} + \frac{\mu(\xi - x')}{\rho^3} = 0$$

$$\frac{d^2\eta}{dt^2} + \frac{m\eta}{r^3} + \frac{\mu(\eta - y')}{\rho^3} = 0.$$

Beziehen wir nun durch die Substitutionen

$$\xi = x\cos(nt + A) - y\sin(nt + A)$$

$$\eta = x\sin(nt + A) + y\cos(nt + A)$$

die Lage von $P$ auf ein bewegliches Koordinatensystem, dessen $x$-Axe mit der Richtung von $m$ nach $\mu$ zusammenfällt, so erhalten wir für die relative Bewegung die Gleichungen

$$\frac{d^2x}{dt^2} - 2n\frac{dy}{dt} - n^2x + \frac{mx}{r^3} + \frac{\mu(x-a)}{\rho^3} = 0$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} + 2n\frac{dx}{dt} - n^2y + \frac{my}{r^3} + \frac{\mu y}{\rho^3} = 0,$$

woraus, der Gleichung der lebendigen Kraft entsprechend, folgendes Integral

$$(4)\qquad \left(\frac{ds}{dt}\right)^2 - n^2r^2 - \frac{2m}{r} - \frac{2\mu}{\rho} + h = 0$$

fliesst. Dasselbe Resultat ergiebt sich auch durch Anwendung der obigen Substitution auf eine von Jacobi gegebene Formel.[1] Die Gleichung (3) bekommt also in unserem Falle die Form

$$(5)\qquad n^2r^2 + \frac{2m}{r} + \frac{2\mu}{\rho} = h.$$

Wenn hierdurch eine Grenzkurve repräsentirt werden soll, ist zunächst erforderlich, dass die Integrationskonstante $h$ einen positiven Wert hat. Hierzu ist aber nach (4) nur nöthig dass entweder die Anfangsgeschwindigkeit nicht zu gross ist oder dass die Anfangswerthe der Abstände $r$, $\rho$ hinlänglich klein sind. Um die weiteren Bedingungen für die Realität der Kurve zu untersuchen, können wir am besten $r$ und $\rho$ zunächst als rechtwinklige Koordinaten eines Punktes ansehen. Es ist dabei nur zu bemerken, dass der Umstand, dass die gegenseitigen Abstände ein Dreieck bilden, durch die Ungleichheiten

$$a + r > \rho$$
$$r + \rho > a$$
$$\rho + a > r$$

vertreten werden muss, so wie dass $r$ und $\rho$ nur positive Werthe annehmen können. Es folgt hieraus, dass von allen Punkten der Ebene $r\rho$

[1] *Über Dynamik,* fünfte Vorlesung, Gl. (11).

nur diejenigen in Frage kommen können, welche innerhalb eines durch die Geraden

$$
\begin{aligned}
a + r &= \rho \\
r + \rho &= a \qquad (6)\\
\rho + a &= r
\end{aligned}
$$

begrenzten Bandes fallen. Hierzu kommt die Gleichung (5), welche wir zunächst unter der Annahme

$$m = 0$$

ins Auge fassen wollen. Führen wir die Bezeichnungen

$$\varkappa^3 = \frac{2\mu}{n^2}; \qquad \alpha^2 = \frac{h}{n^2}$$

ein, so folgt also aus (5)

$$
\begin{aligned}
\rho &= -\frac{\varkappa^3}{r^2 - \alpha^2} \qquad (7)\\
\frac{dr}{d\rho} &= \frac{1}{2\varkappa^3} \cdot \frac{(r^2 - \alpha^2)^2}{r}.
\end{aligned}
$$

Mit Hülfe dieser Formeln ist es leicht zu sehen, dass die Kurve, welche übrigens in Bezug auf die $\rho$-Axe symmetrisch sein muss, einen positiven Zweig hat, welcher die Asymptote

$$r = \alpha$$

besitzt und die $\rho$-Axe in dem Abstande $\frac{\varkappa^3}{\alpha^2}$ von dem Origo senkrecht schneidet. Wegen der Gleichung (4) werden nun von der Ebene $r\rho$ alle Punkte ausgeschlossen, welche auf die konkave Seite der Kurve (5) fallen. Je nach den Werthen von $a$, $\alpha$ und $\varkappa$ wird die letztere die Geraden (6) entweder gar nicht treffen oder eine oder mehrere derselben schneiden. — Stellt man sich in dieser Weise die Gleichungen (6) und (7) geometrisch vor und führt man dann das Bild in bipolare Koordinaten über, so erhellt sofort, dass die Bewegung von $P$ entweder in der ganzen Ebene stattfinden kann oder in irgend einer Weise beschränkt ist. Es giebt im letzteren Falle verschiedene Möglichkeiten. Wenn $\alpha$

oder, was dasselbe ist, $h$ hinreichend gross ist, zerfällt der für die Bewegung abgegrenzte Raum in zwei Gebiete, von welchen das eine, $B$, sicher den Punkt $\mu$, möglicherweise auch $m$ umschliesst, während das andere, $C$, sich von dem Unendlichen aus bis zu einer geschlossenen Grenze streckt, welche ausserhalb des Gebietes $B$ fällt. Die beiden Gebiete können für kleinere Werthe von $h$ durch einen Kanal zusammenfliessen, welcher sich um die Verlängerung der Linie von $m$ nach $\mu$ eröffnet. Bei abnehmendem $h$ erweitert sich diese Öffnung mehr und mehr und das ausgeschlossene Gebiet der Ebene drängt sich mehr und mehr zusammen, bis von demselben zuletzt nur ein Punkt zurückbleibt. Von da an ist die Bewegung von $P$ ganz unbeschränkt.

Gehen wir nun zu dem allgemeinen Falle, wo $m$ von Null verschieden ist, über, so erhält man aus (5), indem noch folgende Bezeichnung

$$k^3 = \frac{2m}{n^2}$$

angewandt wird, zur Diskussion der Kurve die Gleichungen

$$\rho = -\chi^3 \frac{r}{r^3 - a^2 r + k^3}$$

und

$$\frac{dr}{d\rho} = \frac{1}{\chi^3} \cdot \frac{(r^3 - a^2 r + k^3)^2}{2r^3 - k^3}.$$

Ein positiver Theil der Kurve existirt nun immer, sobald

$$\left(\frac{a}{k}\right)^6 > \frac{27}{4},$$

und ist zwischen zwei mit der $\rho$-Axe parallelen Asymptoten eingeschlossen. Nach dem Vorgange der oben angeführten Betrachtung ist es auch in diesem allgemeinen Falle leicht zu sehen, wie sich die Grenzkurve in der Bewegungsebene gestaltet. Für gewisse Werthe der Konstanten zerfällt das Gebiet der Bewegung in drei Theile, von denen zwei, $A$ und $B$, die Massenpunkte $m$ und $\mu$ resp. umschliessen und gegenseitig ausserhalb einander fallen, während das dritte, $C$, sich, wie im vorigen Falle, von einer rings um $A$ und $B$ geschlossenen Linie nach dem Unendlichen hin erstreckt. Je nach den Umständen können $A$ mit $B$ und $B$ mit dem äusseren Gebiete $C$ zusammenfliessen.

Als Resultat dieser an anderer Stelle[1] näher ausgeführten Diskussion können wir also behaupten, dass solche Werthe der Integrationskonstante $h$ wirklich beigelegt werden können, dass eine stabile Bewegung des Punktes $P$ sowohl in der Nähe von $m$ als in der Umgebung von $\mu$ möglich wird. Dies ist auch, was unserer apriorischen Vorstellung von der Sache entspricht, eine Vorstellung welche ohne Zweifel in unseren Erfahrungen auf dem Gebiete der celesten Bewegungen wurzelt.

Die Möglichkeit der vorhergehenden Schlüsse war davon abhängig, dass die Gleichung (3) in jedem Falle nur die Koordinaten eines einzigen Punktes enthielt. Derselbe Umstand ermöglicht nun in der That im folgenden Specialfalle des Dreikörperproblems eine ähnliche Grenzbestimmung. Wir stellen uns ein festes Koordinatensystem vor und nehmen an, dass die Geschwindigkeit eines materiellen Punktes $\mu$ in einem gewissen Augenblicke längs der $y$-Axe gerichtet ist. Wir denken uns ferner zwei andere Punkte, jeder von der Masse $m$, deren Lagen und Geschwindigkeiten in demselben Augenblicke in Bezug auf die $y$-Axe symmetrisch sind. Es ist einleuchtend, dass diese Bedingungen, wenn sie in einem gewissen Momente gelten, auch in jedem beliebigen Augenblicke der Bewegung bestehen bleiben. In Folge dessen nimmt die Gleichung der lebendigen Kraft des Systemes die folgende Gestalt an

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \frac{1}{2}\frac{\mu}{m}\left(\frac{dy_0}{dt}\right)^2 - \frac{2\mu}{r} - \frac{m}{2x} + h = 0$$

wo man mit $x$, $y$ die Koordinaten z. B. desjenigen, der beiden symmetrisch gelegenen Punkte, $P$, welcher rechts von der $y$-Axe ist, mit $y_0$ die Koordinate von $\mu$ und mit $r$ den gegenseitigen Abstand von $P$ und $\mu$ bezeichnet hat. Die Gleichung der Grenzkurve für den Punkt $P$ wird also

$$\frac{2\mu}{r} + \frac{m}{2x} - h = 0$$

oder, wenn man

$$x = r\cos v$$

setzt und die Bezeichnungen

$$\frac{2\mu}{h} = a, \qquad \frac{m}{4\mu} = e$$

---

[1] Bihang till Kongl. Svenska Vetenskapsakademiens handlingar, B. 13, N° 1.

einführt,

$$r = a\left[1 + \frac{e}{\cos v}\right].$$

Diess ist die Gleichung einer Konchoide, welche auf ein mit dem Punkte $\mu$ bewegliches Koordinatensystem bezogen ist. Wenn $e > 1$ ist, so existirt nur der offene Zweig, welcher rechts von der $y$-Axe liegt. Hat man $e < 1$, so giebt es auch links von der $y$-Axe ein geschlossener Zweig mit einer Spitze im Origo. Wir brauchen aber den letzteren nicht zu betrachten; denn bevor der Punkt $P$ zu der linken Seite der $y$-Axe übergeht stösst er mit dem symmetrischen Punkte auf der $y$-Axe selbst zusammen und wir werden die Bewegung nicht länger als bis zu einem solchen Momente verfolgen. Wie es leicht zu sehen ist, findet also die Bewegung von $P$ stets innerhalb desjenigen Gebietes der Ebene statt, welches einerseits von der $y$-Axe und anderseits von der Konchoide eingeschränkt ist. Der Punkt kann sich mithin zwar unendlich weit von $\mu$ entfernen aber nur in die Richtung der $y$-Axe. Man könnte diess so ausdrücken, dass die Bewegung in der Richtung der $x$-Axe stabil wäre.

Wenn die Anfangsbedingungen im Dreikörperprobleme ganz beliebig sind, hat man von der Gleichung

$$(8) \qquad m\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 + m'\left(\frac{ds'}{dt}\right)^2 + m''\left(\frac{ds''}{dt}\right)^2 - \frac{c}{r} - \frac{c'}{r'} - \frac{c''}{r''} + h = 0$$

auszugehen. In derselben sind $\frac{ds}{dt}, \frac{ds'}{dt}, \frac{ds''}{dt}$ die Geschwindigkeiten der drei Massen $m, m', m''$; $r, r', r''$ diejenigen Seiten des von denselben gebildeten Dreiecks, welche $m, m', m''$ resp. gegenüber stehen; schliesslich haben wir

$$c = 2m'm''$$

$$c' = 2m''m$$

$$c'' = 2mm'$$

gesetzt. Wir stellen jetzt die Gleichung

$$(9) \qquad \frac{c}{r} + \frac{c'}{r'} + \frac{c''}{r''} = h$$

auf, welche nach Einführung von der Bezeichnung

$$H' = h - \frac{c'}{r'} \tag{10}$$

auch so geschrieben werden kann

$$\frac{c}{r} + \frac{c''}{r''} = H'. \tag{9'}$$

Wenn $H'$ positiv ist, bezeichnet diese Gleichung, wie im Falle von der Anziehung eines Punktes nach zwei festen Centra, eine lemniskatenähnliche Kurve, welche indessen jetzt einen veränderlichen Parameter enthält und auf die beweglichen Punkte $m$ und $m''$ als Anfangspunkte der Koordinaten bezogen ist. Setzen wir voraus, dass $r'$ immer zwischen zwei endlichen Grenzen liegt, kann man einen so grossen Werth von $h$ wählen, dass $H'$ stets positiv bleibt. Es existirt somit immer die Kurve (9') und der Gleichung (8) zufolge muss der Punkt $m'$ stets innerhalb derselben bleiben. Die Voraussetzung, dass $r'$ eine obere Grenze hat, kann man aber fallen lassen, indem, für grosse Werthe von $r'$, $H'$ das Zeichen von $h$ erhält, d. h. positiv bleibt. Wenn indessen $r'$ sehr viel anwächst, muss die Kurve (9') schliesslich diejenige ihrer Formen annehmen, welche in zwei um jeden der Punkte $m$ und $m''$ geschlossenen Gebieten besteht. Wenn $h$ positiv ist und wenn $m$ und $m''$ sich unendlich weit von einander entfernen, so muss also schliesslich $m'$ in der Nähe von dem einen dieser beiden Punkte bleiben. Ganz allgemein können wir also sagen dass, wenn

$$h > \frac{c'}{r'}$$

ist, so ist die Bewegung von $m'$ entweder in Bezug auf $m$ oder in Bezug auf $m''$ stabil. Für die Punkte $m$ und $m''$ kann man nun ganz ähnliche Betrachtungen wie für $m'$ machen. Durch Zusammenstellung derselben schliesst man dann unmittelbar, dass die drei Punkte stets in endlichen Abständen von einander liegen müssen, so lange oder sobald die Beziehungen

$$h > \frac{c}{r}, \qquad h > \frac{c'}{r'}, \qquad h > \frac{c''}{r''} \tag{11}$$

gleichzeitig bestehen. — Diese Betrachtungen können nun in verschiedenen

Weisen variirt werden. An der Stelle der Bedingungen (11) könnte man z. B. auch die folgenden

$$h > \frac{c}{r} - m'\left(\frac{ds'}{dt}\right)^2 - m''\left(\frac{ds''}{dt}\right)^2$$

$$h > \frac{c'}{r'} - m''\left(\frac{ds''}{dt}\right)^2 - m\left(\frac{ds}{dt}\right)^2$$

$$h > \frac{c''}{r''} - m\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 - m'\left(\frac{ds'}{dt}\right)^2$$

treten lassen.

Wenn die gegenseitigen Lagen der drei Punkte so beschaffen sind, dass die Gleichung (9) stattfindet, so ist nach (8) die Geschwindigkeit eines jeden derselben gleich Null. In einem solchen Augenblicke machen ihre Bewegungskurven Spitzen; es ist ja in der That einleuchtend, dass jeder Punkt von diesem Augenblicke an in demselben Weg zurückkehren wird, welchen er vorher, bis zu dem fraglichen Zeitmomente, gefolgt hat. Das Integral der Flächen giebt uns leicht eine Bedingung für die Möglichkeit dieser Art von Bewegung. Wenn die Geschwindigkeiten aller drei Punkte gleichzeitig Null werden, so kann nämlich dem fraglichen Integrale oder der Gleichung

$$mR^2\frac{dv}{dt} + m'R'^2\frac{dv'}{dt} + m''R''^2\frac{dv''}{dt} = k$$

nur in dem Falle Genüge geleistet werden, wenn die Konstante der Flächen, $k$, selbst gleich Null ist. Diess ist nun eine Bedingung, welche in dem oben angeführten Specialfalle des Dreikörperproblems stattfindet, die aber z. B. im Sonnensysteme, wo alle Bewegungen in derselben Richtung vor sich gehen, nicht erfüllt ist.

Wir haben bei den angeführten Beispielen alle Bewegungen als in der Ebene stattfindend angenommen. Es ist aber leicht einzusehen, dass diess eine unwesentliche Beschränkung war und dass die Schlüsse ebenso leicht in drei Dimensionen gemacht werden können. Die aufgestellten Grenzkurven werden dann durch solche Grenzflächen ersetzt, die durch die Drehung der vorigen um ihre resp. Symmetrieaxen entstehen. Dass die Schlüsse ebenso leicht für andere Attraktionsgesetze als das NEWTON'sche gemacht werden können, ist auch ohne weiteres klar.

Bevor wir diese Mittheilung abschliessen, wollen wir noch ein Paar Worte über die Anwendung der angeführten Betrachtungsweise bei einer speciellen Aufgabe der Störungstheorie zufügen, nämlich bei der Untersuchung über die Existenz der s. g. Libration in der Länge eines Planeten. Bekanntlich wird die gestörte mittlere Länge, $\zeta$, eines Planeten durch Annäherungen bestimmt, deren Grundlage folgende Gleichung

$$\frac{d^2\zeta}{dt^2} = -\Sigma\alpha_{i,i'}\sin(i\zeta - i'\zeta' + A_{i,i'}) \tag{12}$$

bildet. Hier bedeutet $\zeta'$ die mittlere Länge des störenden Planeten; die $A_{i,i'}$ wie die $\alpha_{i,i'}$ sind von den Elementen abhängige Grössen, von welchen die letzteren mit der störenden Masse multiplicirt sind; $i$ und $i'$ nehmen die Werthe aller ganzen positiven und negativen Zahlen an. Setzt man die störende Masse gleich Null, so erhält man

$$\zeta = nt + c$$

wo $n$ und $c$ die elliptischen Integrationskonstanten bezeichnen, $n$ die »mittlere Bewegung» und $c$ die »mittlere Epochenlänge». Ebenso erfolgt für den störenden Planeten

$$\zeta' = n't + c'.$$

Diese beiden Ausdrücke werden nun als Anfangswerthe benutzt, welche man in der rechten Seite von (12) einsetzt. Man erhält so

$$\frac{d^2\zeta}{dt^2} = -\Sigma\alpha_{i,i'}\sin(int - i'n't + ic - i'c' + A_{i,i'})$$

woraus man durch directe Integration als erste Annäherung

$$\zeta = nt + c + \sum\frac{\alpha_{i,i'}}{(in - i'n')^2}\sin(int - i'n't + ic - i'c' + A_{i,i'}) \tag{13}$$

bekommt. Die zweite Annäherung erfolgt durch Einsetzung von eben diesem Ausdrucke und dem entsprechenden für $\zeta'$ in (12), u. s. w. Bei der ersten Annäherung sind die $\alpha_{i,i'}$ und $A_{i,i'}$ als Konstanten zu betrachten. Wir werden sie auch hier, wo es sich nur um ein typisches Beispiel handelt, als solche ansehen. Im allgemeinen sind sie doch veränderlich und zwar müssen aus dieser Ursache in einer beliebigen Annäherung statt der $A_{i,i'}$ Ausdrücke von der Form $\sigma_{i,i'}t + A_{i,i'}$ in den Argumenten von (12) auftreten, wo die $\sigma_{i,i'}$ kleine von den Bewegungen der Apsiden und Knoten abhängige Koefficienten sind. In einer neuen Abhandlung[1] über eben diese Fragen hat Herr GYLDÉN auf diese Verallgemeinerung Rücksicht genommen.

Es kann nun aber bekanntlich die angeführte Folge der Annäherungen divergent werden. Die Ursache hievon ist der Umstand, dass die $n$ und $n'$ zwei ganzen Zahlen $i'_0$ und $i_0$ so nahe proportional sind, dass die entsprechenden Koefficienten in (13)

$$\frac{\alpha_{i_0, i'_0}}{(i_0 n - i'_0 n')^2}$$

sehr grosse Werthe annehmen. Wie diese Wirkung der kleinen Divisoren $(i_0 n - i'_0 n')$ durch Vorhandensein der s. g. *Libration* kompensirt werden kann, hat Herr GYLDÉN vor längerer Zeit gezeigt und in der citirten Abhandlung näher auseinandergesetzt.

Die typische Form der bezüglichen Annäherungsmetode könnte in folgender Weise dargestellt werden.

Man geht von der nachstehenden Gleichung

$$\frac{d^2\zeta}{dt^2} = -\sum \alpha_{i,i'} \sin(i\zeta - i'n't + A_{i,i'})$$

aus. Vorausgesetzt, dass

$$\zeta = nt + c + P$$

ist, wo $P$ nur periodische Glieder enthält, so geht dieselbe in die folgende

$$\frac{d^2P}{dt^2} = -\sum \alpha_{i,i'} \sin(int - i'n't + ic + iP + A_{i,i'})$$

über. Führt man hier statt $P$ eine Grösse $V$ ein, welche durch folgende Gleichung definirt ist

$$(14) \qquad 2V = i_0 nt - i'_0 n't + i_0 c + i_0 P + A_{i_0, i'_0},$$

[1] *Untersuchungen über die Convergenz der Reihen, welche zur Darstellung der Coordinaten der Planeten angewendet werden.* Acta mathematica 9, p. 185—294.

wo $i_0$ und $i'_0$ einem kritischen Gliede entsprechen, so erhält man zur Bestimmung von $V$ die Gleichung

$$(14') \qquad 2\frac{d^2V}{dt^2} = -\Sigma i_0\alpha_{i,i'}\sin(int - i'n't + ic + iP + A_{i,i'}).$$

Vernachlässigt man hier alle Glieder ausser demjenigen, welches den ganzen Zahlen $i_0$ und $i'_0$ entspricht, so erhält man, wenn noch

$$\alpha^2 = i_0\alpha_{i_0,i'_0}$$

gesetzt wird, die folgende Gleichung

$$(15) \qquad \frac{d^2V}{dt^2} = -\alpha^2\sin V\cos V$$

woraus nach einmaliger Integration

$$(16) \qquad \left(\frac{dV}{dt}\right)^2 = \gamma^2 - \alpha^2\sin^2 V$$

kommt. Es bedeutet hier $\gamma^2$ die Integrationskonstante. Diese Gleichung bestimmt $V$ als eine elliptische Function von $t$ mit dem Modul

$$k = \frac{\alpha}{\gamma}$$

Je nach dem Werthe von $k$, mithin von der Integrationskonstante $\gamma$, ist nun die Entwicklung von $V$ verschieden. Wenn

$$k < 1$$

ist, so enthält die Entwicklung von $V$, wie in (14) vorausgesetzt ist, wirklich ein sekulares Glied, dessen von $k$ abhängiger Koefficient dem Werthe von $i_0n - i'_0n'$ gleich sein muss. Von den Grössen $\gamma$ und $n$ kann man also in diesem Falle nach Belieben die eine oder die andere als die unabhängige Konstante ansehen. Im Falle dagegen, wo

$$k > 1$$

ist, kann die Entwicklung von $V$ nur periodische Glieder enthalten. Nach (14) muss also die Gleichung

$$(17) \qquad i_0n - i'_0n' = 0$$

genau erfüllt sein. Das hierdurch ausgesagte Verhältniss ist es, was man Libration nennt. Die mittlere Bewegung $n$ bleibt also in diesem Falle nicht willkürlich, sondern muss so bestimmt werden, dass zwischen $n$ und $n'$ eine vollständige Kommensurabilität herrscht. Die willkürliche Konstante tritt stattdem in dem Koefficienten eines periodischen Gliedes auf.

Diese Schlüsse, welche durch Anwendung bekannter Reihenentwicklungen der elliptischen Functionen gefolgert werden, lassen sich nun auch, durch Anwendung unserer mehrerwähnten Betrachtung auf die Gleichung (16), ohne weiteres machen. Bei diesem Verfahren ist man auch keineswegs auf die beiden Glieder an der rechten Seite von (16) beschränkt, sondern man kann aus (14′) auf einmal alle Glieder mitnehmen, welche nur von $V$ abhängen. Auf solche Weise tritt an die Stelle von (16) eine Gleichung

$$\left(\frac{dV}{dt}\right)^2 = F(V) \tag{18}$$

wo $F(V)$ ausser der Integrationskonstante ein Aggregat von periodischen Gliedern enthält.

Es sei nun $F(V)$ eine beliebige Function, welche so beschaffen ist, dass die Gleichung

$$F(V) = 0 \tag{19}$$

zwei reelle Wurzeln, $V_0$ und $V_1$ besitzt. Es wird ferner angenommen, dass zwischen diesen Wurzeln keine dritte Wurzel liegt und dass $F(V)$ eine positive Grösse ist für Werthe von $V$ zwischen $V_0$ und $V_1$. Wenn die Anfangsbedingungen so beschaffen sind, dass, für $t = 0$, $V$ zwischen $V_0$ und $V_1$ liegt, so folgt aus den Voraussetzungen, dass $V$ für immer zwischen diesen Grenzen in einem Zustande von Libration bleiben muss, wenigstens insofern die Gleichungen

$$F'(V_0) = 0, \qquad F'(V_1) = 0$$

nicht gleichzeitig mit

$$F(V_0) = 0, \qquad F(V_1) = 0$$

bestehen. Denn für Werthe von $V$, welche unmittelbar ausserhalb den

Grenzen $V_0$ und $V_1$ liegen, würde die Function $F(V)$ negative Werthe annehmen, was nach (18) nicht zulässig ist. — Wenn dagegen die Gleichung (19) keine reellen Wurzeln hat, so muss ja in der That $V$ mit $t$ entweder beständig wachsen oder beständig abnehmen. — In dem Falle, dass $F(V)$ gleich einer periodischen Function

$$\begin{aligned} \alpha_0 + \alpha_1 \cos V + \ldots \\ + \beta_1 \sin V + \ldots \end{aligned}$$

wäre, ist es hinreichend die Wurzeln, welche zwischen 0 und $2\pi$ fallen, zu untersuchen. Aus der Periodicität der Function $F(V)$ folgt ausserdem dass, wenn $V_0$ eine zwischen 0 und $2\pi$ liegende Wurzel der Gleichung

$$F(V) = 0$$

ist, zwischen diesen Grenzen wenigstens noch *eine* Wurzel $V_1$ liegen muss, vorausgesetzt dass

$$F'(V_0) \gtrless 0$$

ist.

Mit Anwendung von einem durch Herrn WEIERSTRASS gegebenen Verfahren,[1] ist es leicht zu zeigen, dass für den Fall, wo die Gleichung (19) zwei Wurzeln $V_0$ und $V_1$ hat, $V$ als eine periodische Function von $t$ darstellbar ist.

Angenommen, dass $V_0$ und $V_1$ zwei auf einander folgende reelle Wurzeln der Gleichung

$$F(V) = 0$$

sind, dass aber $F'(V)$ für diese Werthe nicht verschwindet, so folgt, dass

$$F(V) = (V - V_0)(V_1 - V)F_1(V)$$

ist, wo $F_1(V)$ weder für die Werthe $V_0$, $V_1$ noch für die dazwischenliegenden Werthe von $V$ Null werden kann. Da nun, wenn der Anfangs-

[1] Sitzungsberichte der Akademie der Wissenschaften zu Berlin, Februar 1866.

werth von $V$ zwischen $V_0$ und $V_1$ liegt, nach dem Angeführten folgt, dass folgende Relationen immer bestehen müssen

$$V_0 \leqq V \leqq V_1,$$

so ist man berechtigt, statt $V$ eine neue Veränderliche $v$, durch die folgende Gleichung einzuführen:

$$V = \alpha + \beta \cos v,$$

wo

$$\alpha = \frac{V_0 + V_1}{2}, \qquad \beta = \frac{V_0 - V_1}{2}.$$

Man erhält nun

$$\left(\frac{dV}{dt}\right)^2 = \beta^2 \sin^2 v \left(\frac{dv}{dt}\right)^2$$

und anderseits

$$(V - V_0)(V_1 - V) = \beta^2 \sin^2 v,$$

so dass aus (18)

$$(20) \qquad \left(\frac{dv}{dt}\right)^2 = F_1(\alpha + \beta \cos v)$$

folgt. Da die rechte Seite für alle Werthe von $v$ sicher nie Null wird, so muss, dieser Gleichung gemäss, $v$ mit $t$ entweder beständig wachsen oder beständig abnehmen, und zwar so, dass wenn $t$ von $-\infty$ bis $+\infty$ übergeht, $v$ zwischen denselben Grenzen läuft. Es ist also sowohl $v$ eine eindeutige Function $\mathbf{v}(t)$ von $t$, als umgekehrt $t$ eine eindeutige Function $\mathbf{t}(v)$ von $v$.

Es ist nun

$$\frac{d\mathbf{t}(v)}{dv} = \frac{1}{\sqrt{F_1(\alpha + \beta \cos v)}} = \frac{d\mathbf{t}(v + 2\pi)}{dv},$$

$$(21) \qquad \mathbf{t}(v) = \int_0^v \frac{dv}{\sqrt{F_1(\alpha + \beta \cos v)}},$$

folglich

$$(22) \qquad \mathbf{t}(v + 2\pi) = \mathbf{t}(v) + 2\omega$$

indem $2\omega$ eine gewisse Konstante bezeichnet. Hieraus erhält man

$$\mathsf{v}(t + 2\omega) = \mathsf{v}(t) + 2\pi.$$

und also

$$\cos[\mathsf{v}(t + 2\omega)] = \cos \mathsf{v}(t).$$

Man sieht also, dass $\cos v$, und somit auch $V$, eine periodische Function von $t$ ist mit der Periode $2\omega$. Um die letztere zu bestimmen setzen wir in (22)

$$v = -\pi.$$

Dann erhält man

$$\mathsf{t}(\pi) = \mathsf{t}(-\pi) + 2\omega$$

und bedenkt man jetzt, dass nach (21)

$$\mathsf{t}(-\pi) = -\mathsf{t}(\pi),$$

so folgt

$$\omega = \mathsf{t}(\pi) = \int\limits_0^\pi \frac{dv}{\sqrt{F_1(\alpha + \beta \cos v)}} = \int\limits_{V_0}^{V_1} \frac{dV}{\sqrt{F(V)}}.$$

Als eine überall endliche periodische Function von $t$, welche ausserdem gerade ist, kann $\cos v$ in folgender Weise entwickelt werden

$$\cos v = A_0 + A_1 \cos u + A_2 \cos 2u + \ldots,$$

wo

$$u = \frac{\pi}{\omega} t$$

ist. Zur Bestimmung der Koefficienten haben wir Gleichungen von der Form

$$(23) \qquad \pi A_n = \int\limits_0^\pi \cos v \cos nu \, du$$

oder, da

$$du = \frac{\pi}{\omega} \cdot \frac{dv}{\sqrt{F_1(\alpha + \beta \cos v)}}$$

ist

$$\omega A_n = \int_0^\pi \cos v \,.\, \cos\left[\frac{n\pi}{\omega} \cdot \int_0^v \frac{dv}{\sqrt{F_1(\alpha + \beta \cos v)}}\right] \cdot \frac{dv}{\sqrt{F_1(\alpha + \beta \cos v)}}.$$

Statt dieser Formel, kann man auch die aus (23) durch partielle Integration abzuleitende

$$A_n = \frac{1}{n\pi} \cdot \int_0^\pi \sin\left[n\frac{\pi}{\omega}\int_0^v \frac{dv}{\sqrt{F_1(\alpha + \beta \cos v)}}\right] \sin v\, dv$$

benutzen. Das Integral

$$\int_0^v \frac{dv}{\sqrt{F_1(\alpha + \beta \cos v)}}$$

kann man sich in folgender Weise bestimmt denken. Da die Function

$$\frac{1}{\sqrt{F_1(\alpha + \beta \cos v)}}$$

eine überall endliche, gerade, und periodische Function ist, so lässt sich dieselbe folgendermassen entwickeln

$$\frac{1}{F_1(\alpha + \beta \cos v)} = \alpha_0 + \alpha_1 \cos v + \alpha_2 \cos 2v + \ldots,$$

und die Koefficienten sind durch die Formel

$$\pi \alpha_n = \int_0^\pi \frac{\cos n v}{F_1(\alpha + \beta \cos v)} dv$$

bestimmt.

Dieselben kann man also immer, wenigstens durch mechanische Quadratur, berechnen. Hiernach ergiebt sich

$$\int_0^v \frac{dv}{\sqrt{F_1(\alpha + \beta \cos v)}} = \alpha_0 v + \alpha_1 \sin v + \frac{\alpha_2}{2} \sin 2v + \ldots .$$

Die Koefficienten $A_n$ lassen sich sodann bestimmen entweder durch mechanische Quadratur oder auch analytisch mittels Entwicklungen nach Cylinderfunctionen.