RIBAUCOURTRANSFORMATIONEN UND SPHÄRISCHE ABBILDUNG.

VON

HANS HAMBURGER
in KÖLN.

Inhalt:

Definitionen und abkürzende Bezeichnungen:

1. $\mathfrak{x}$ sei ein Vektor, dessen drei zueinander rechtwinklige Komponenten x, y, z als zweimal stetig differentiierbare Funktionen von zwei Veränderlichen α, β gegeben seien.

Die partiellen Ableitungen einer Funktion oder eines Vektors bezeichnen wir fast immer wie üblich durch Indices und setzen

$$x_\alpha = \frac{\partial x}{\partial \alpha}, \quad x_\beta = \frac{\partial x}{\partial \beta},$$

$$\mathfrak{x}_\alpha = \frac{\partial \mathfrak{x}}{\partial \alpha}, \quad \mathfrak{x}_\beta = \frac{\partial \mathfrak{x}}{\partial \beta} \quad \text{u. s. f.}$$

Die Matrix

$$\begin{pmatrix} x_\alpha, & y_\alpha, & z_\alpha \\ x_\beta, & y_\beta, & z_\beta \end{pmatrix}$$

habe für jedes Wertesystem der Veränderlichen α, β den Rang 2. Hält man den Anfangspunkt des Vektors $\mathfrak{x} = \mathfrak{x}(\alpha, \beta)$ fest, so beschreibt der Endpunkt von $\mathfrak{x}$ ein singularitätenfreies Flächenstück, das wir kurz »Fläche $\mathfrak{x}$« nennen wollen.

2. Definition 1: *Es sei $\mathfrak{x}(\alpha, \beta)$ eine Fläche, deren Krümmungslinien mit den Parameterkurven $\alpha =$ const., $\beta =$ const. zusammenfallen.*

Es sei

$$\mathfrak{u}(\alpha, \beta) = -\frac{\mathfrak{x}_\alpha \times \mathfrak{x}_\beta}{\sqrt{(\mathfrak{x}_\alpha \times \mathfrak{x}_\beta)^2}}$$

gleich dem mit -1 multiplizierten Normaleinheitsvektor von $\mathfrak{x}$. Dann nennen wir $\mathfrak{u}(\alpha, \beta)$ das auf die Krümmungslinien bezogene sphärische Bild[1] *von $\mathfrak{x}$, oder kürzer, das sphärische Bild der Krümmungslinien von $\mathfrak{x}$.*

Die durch den Vektor $\mathfrak{u}(\alpha, \beta)$ bestimmten Parameterkurven $\alpha =$ const., $\beta =$ const. bilden ein ortogonales Kurvensystem auf der Einheitskugel. Ferner gelten die Rodriguesschen Formeln:

$$(1) \qquad \mathfrak{x}_\alpha = r_1 \mathfrak{u}_\alpha, \quad \mathfrak{x}_\beta = r_2 \mathfrak{u}_\beta,$$

unter r_1 und r_2 die Hauptkrümmungsradien von $\mathfrak{x}$ verstanden.

Definition 2: *Durch den Einheitsvektor $\mathfrak{u}(\alpha, \beta)$ sei auf der Einheitskugel ein orthogonales Kurvensystem definiert. Es sei somit*

$$\mathfrak{u}^2 = 1, \quad \mathfrak{u}_\alpha \mathfrak{u}_\beta = 0.$$

---

[1] Wir definieren das sphärische Bild durch den *negativen* Normaleinheitsvektor, weil, wie aus den Rodrigues'schen Formeln hervorgeht, diese Definitionsweise bei konvexen Flächen anschaulicher ist.

Dann verstehen wir unter dem zu $\mathfrak{u}(\alpha, \beta)$ *gehörigen Problem der sphärischen Abbildung die Frage nach allen Flächen* $\mathfrak{x}$, *deren auf die Krümmungslinien bezogenes sphärisches Bild gleich dem vorgegebenen Vektor* $\mathfrak{u}(\alpha, \beta)$ *ist.*

3. Definition 3: *Sind zwei Flächen* $\mathfrak{x}(\alpha, \beta)$ *und* $\mathfrak{y}(\alpha,\beta)$ *gegeben, so sagen wir, die Flächen* $\mathfrak{x}$ *und* $\mathfrak{y}$ *sind zueinander parallel, wenn die beiden auf die Krümmungslinien bezogenen sphärischen Bilder von* $\mathfrak{x}$ *und* $\mathfrak{y}$ *übereinstimmen.*[1]

Bestimmen die Parameterkurven $\alpha = \text{const.}$, $\beta = \text{const.}$ die Krümmungslinien auf beiden Flächen $\mathfrak{x}(\alpha, \beta)$ und $\mathfrak{y}(\alpha, \beta)$ und ist $\mathfrak{u}(\alpha, \beta)$ das gemeinsame sphärische Bild von $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{y}$, so ist nach den Rodriguesschen Formeln (1)

$$\mathfrak{u}_\alpha \| \mathfrak{x}_\alpha \| \mathfrak{y}_\alpha, \quad \mathfrak{u}_\beta \| \mathfrak{x}_\beta \| \mathfrak{y}_\beta. \tag{2}$$

Hierbei bedeutet das Zeichen $\mathfrak{x}_\alpha \| \mathfrak{y}_\alpha$ in üblicher Weise, dass die beiden Vektoren $\mathfrak{x}_\alpha$ und $\mathfrak{y}_\alpha$ zueinander parallel sind und somit

$$\mathfrak{x}_\alpha = \lambda \mathfrak{y}_\alpha$$

ist.

Die Beziehungen (2) enthalten demnach die hinreichenden und notwendigen Bedingungen dafür, dass die Flächen $\mathfrak{x}(\alpha, \beta)$ und $\mathfrak{y}(\alpha, \beta)$ in dem oben angegebenen Sinne untereinander parallel sind.

Definition 4: *Wir sagen, die Fläche* $\mathfrak{y}$ *ist Parallelfläche im engeren Sinne von* $\mathfrak{x}$, *wenn* $\mathfrak{y}$ *auf die Form*

$$\mathfrak{y} = \mathfrak{a} + \mathfrak{x}(\alpha, \beta) + t\mathfrak{u}(\alpha, \beta)$$

gebracht werden kann. Hierbei sind der Vektor $\mathfrak{a}$ *und die Grösse* t *von* α *und* β *unabhängig;* $\mathfrak{u}$ *bezeichnet wie in Definition* 1 *den mit* -1 *multiplizierten Normaleinheitsvektor von* $\mathfrak{x}$.

Sind zwei Flächen $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{y}$ im engeren Sinne zueinander parallel, so sind sie um so mehr im Sinne der Definition 3 zueinander parallel.

4. Definition 5: *Es sei* $\mathfrak{X}(\alpha, \beta)$ *ein Vektor, der für alle Werte der Veränderlichen* α, β *einer festen Ebene* ε *parallel bleibt.* (Solche Vektoren werden im folgenden ein für alle Mal mit grossen gotischen Buchstaben bezeichnet.) *Wir verstehen unter dem in* ε *gelegenen ebenen Kurvensystem* $\mathfrak{X}(\alpha, \beta)$ *die Schar der*

[1] Man sagt auch, vor allem in der französischen Literatur, $\mathfrak{y}$ ist durch eine Combescuretransformation aus $\mathfrak{x}$ hervorgegangen.

Kurven, welche der Endpunkt des Vektors bei festgehaltenem Anfangspunkt für $\alpha = \text{const.}$ *und für* $\beta = \text{const.}$ *beschreibt. Insbesondere nennen wir das Kurvensystem* $\mathfrak{X}(\alpha, \beta)$ *orthogonal, wenn*

$$\mathfrak{X}_\alpha \mathfrak{X}_\beta = 0$$

ist.

Definition 6: *Zwei ebene Kurvensysteme* $\mathfrak{X}(\alpha, \beta)$ *und* $\mathfrak{Y}(\alpha, \beta)$ *heissen zueinander parallel, wenn*

$$\mathfrak{X}_\alpha \parallel \mathfrak{Y}_\alpha, \quad \mathfrak{X}_\beta \parallel \mathfrak{Y}_\beta$$

ist.

5. Es sei α_0, β_0 ein festes Wertepaar der Veränderlichen α, β. Dann schreiben wir abkürzend

(3) $$\mathfrak{x}_0 = \mathfrak{x}(\alpha_0, \beta_0), \quad \mathfrak{X}_0 = \mathfrak{X}(\alpha_0, \beta_0) \quad \text{u. s. w.}$$

Ferner setzen wir zur Abkürzung

(4) $$\mathfrak{x}^{-1} = \frac{\mathfrak{x}}{\mathfrak{x}^2}, \quad \mathfrak{X}^{-1} = \frac{\mathfrak{X}}{\mathfrak{X}^2},$$

d. h. $\mathfrak{x}^{-1}(\alpha, \beta)$ ist die durch Inversion aus $\mathfrak{x}(\alpha, \beta)$ entstandene Fläche, $\mathfrak{X}^{-1}(\alpha, \beta)$ das durch Inversion aus $\mathfrak{X}(\alpha, \beta)$ entstandene ebene Kurvensystem.

6. Im folgenden werden wir oft die beiden grossen geometrischen Werke von Darboux und Bianchi zu zitieren haben: G. Darboux, Leçons sur la théorie générale des surfaces. I, 2. Aufl., Paris (1914), II, 2. Aufl., Paris (1914), IV, 1. Aufl., Paris (1896). (Kurz als »Darboux, I, II, IV» zitiert.) — L. Bianchi, Lezioni di geometria differenziale, 3. Aufl., vol. II, parte prima. Pisa (1923). (Kurz als »Bianchi» zitiert.)

Einleitung.

7. In der vorliegenden Arbeit haben wir uns das Ziel gesetzt, den Zusammenhang zwischen der Theorie der Ribaucourtransformationen und dem Problem der sphärischen Abbildung (vgl. Definition 2) zu klären. Dabei ist das Interesse des Verfassers mehr dem Problem der sphärischen Abbildung zugewandt, das, wenn man es im Grossen studiert, zu einer Fülle neuer und bemerkenswerter Fragestellungen führt.[1] Auf sie konnte naturgemäss in dieser Arbeit nicht eingegangen werden. So wird denn hier in erster Linie versucht, die notwendigen Hilfsmittel für weitere Untersuchungen auf dem Gebiete der sphärischen Abbildung im Grossen zu gewinnen.

8. Ribaucour hat die Theorie seiner Transformationen, die übrigens mit den Spiegelungen der geometrischen Optik in engem Zusammenhang steht[2], in einer grossen Reihe von kürzeren Noten in den Jahren 1869 bis 1876 entwickelt. 1876 hat er seine Untersuchungen in einer umfangreichen Abhandlung zusammengefasst und sie als Preisschrift der Pariser Akademie vorgelegt. Erst 1891 ist diese Abhandlung veröffentlicht worden.[3] Ausserdem hat Darboux die Theorie in seinen geometrischen Vorlesungen mehrfach dargestellt.[4] 1919 ist Bianchi[5] auf sie in anderem Zusammenhang von neuem zurückgekommen und hat für ihre analytische Darstellung Formeln abgeleitet, welche nach Einführung von Vektoren eine besonders einfache Gestalt annehmen. Auf diesen in § 1 abgeleiteten Formeln werden sich unsere weiteren Untersuchungen aufbauen, um in den §§ 3 und 4 auch zu einigen neuen Ergebnissen über Ribaucourtransformationen zu führen.

In Kap. II wird zunächst in § 5 mit Hilfe einer speziellen Ribaucourtransformation das Problem der sphärischen Abbildung in ein einfaches Problem der ebenen Geometrie transformiert. Dann wird in § 6 die Lösung dieses Problems auf die Integration einer Differentialgleichung vom Moutardschen Typus zurückgeführt. So wird für diese Differentialgleichung, welche schon Darboux[6] zur Lösung des Problems der sphärischen Abbildung benutzt hat, eine neue, besonders einfache und elementare geometrische Deutung gewonnen. In den §§ 8 und 9 wird eine bekannte von Moutard angegebene Integralformel als ebene Ribaucourtransformation erkannt. In § 10 wird eine wichtige zuerst von Darboux be-

---

[1] Vgl. z. B. H. Hamburger, Zur Theorie der sphärischen Abbildung im Grossen, I, Konvexe Flächen mit zwei Nabelpunkten. Math. Ztschr. 31 (1930), S. 629—708.

[2] Dieser Zusammenhang wird in § 1, Abschn. **26.**—**29.** entwickelt.

[3] A. Ribaucour, Mémoire sur la théorie générale des surfaces courbes. Journ. de Liouville. **7**, 4ième série (1891), S. 5—108, und S. 219—270.

[4] Vgl. z. B. G. Darboux, Leçons sur les systèmes orthogonaux et les coordonnées curvilignes, 2. Aufl., Paris (1910), S. 397—402.

[5] L. Bianchi, Ricerce sulle congruenze di sfere e sul rotalmento di superficie applicabili. Memorie delle R. Acc. de Lincei, vol. **12**, Serie 5a (1919), S. 413—536. Seine Theorie hat Bianchi noch einmal in seinem oben erwähnten Lehrbuch dargestellt, nach dem wir ausschliesslich zitieren werden.

[6] Vgl. Darboux, IV, S. 169—171 und S. 178.

handelte Anwendung der Moutardschen Integralformel untersucht, die zu einem neuen geometrischen Satze führt.

Der Vollständigkeit halber wird dann noch in dem kürzeren Kapitel III auf die Darstellung allgemeiner (§ 11) und spezieller (§§ 12, 13) zyklischer Systeme von Ribaucour durch Ribaucourtransformationen eingegangen.

Zur Bequemlichkeit des Lesers lassen wir jetzt erst einen kurzen Bericht[1] über die wichtigsten Ergebnisse folgen, welche in der vorliegenden Arbeit gewonnen werden.

9. Es sei eine Fläche $\mathfrak{x}(\alpha, \beta)$ vorgelegt, deren Parameterlinien $\alpha = \text{const.}$, $\beta = \text{const.}$ mit den Krümmungslinien zusammenfallen. Dann sagt man, eine Fläche $\hat{\mathfrak{x}}(\alpha, \beta)$ sei durch Ribaucourtransformation aus $\mathfrak{x}(\alpha, \beta)$ hervorgegangen, wenn

erstens die beiden Flächen $\mathfrak{x}(\alpha, \beta)$ und $\hat{\mathfrak{x}}(\alpha, \beta)$ als die beiden Mäntel der Hüllfläche einer zweiparametrigen Kugelschar erscheinen,

zweitens die Krümmungslinien von $\mathfrak{x}$ und $\hat{\mathfrak{x}}$ sich bei der Transformation gegenseitig entsprechen.[2]

Ist eine der beiden Flächen $\mathfrak{x}$ und $\hat{\mathfrak{x}}$, etwa $\hat{\mathfrak{x}}$, eine Ebene (oder eine Kugel), $\mathfrak{x}$ aber eine beliebige Fläche, so ist die zweite Bedingung dahin aufzufassen, dass die Krümmungslinien von $\mathfrak{x}$ durch die Transformation in ein orthogonales Kurvensystem von $\hat{\mathfrak{x}}$ übergeführt werden.

Somit ist die Ribaucourtransformation offenbar umkehrbar, d. h. es geht auch $\mathfrak{x}$ aus $\hat{\mathfrak{x}}$ durch eine Ribaucourtransformation hervor. Die bei der Ribaucourtransformation auftretende zweiparametrige Kugelschar nennt man eine Ribaucoursche Kugelkongruenz.

10. Nachdem wir einige bekannte Eigenschaften der Ribaucourtransformationen zusammengestellt haben, leiten wir in § 1, gestützt auf eine Bianchische Formel, einen Ausdruck für die allgemeinste Fläche $\hat{\mathfrak{x}}$ ab, welche durch Ribaucourtransformation aus $\mathfrak{x}$ hervorgeht, und zwar ergibt sich

---

[1] Einen ausführlicheren Bericht über die Ergebnisse der vorliegenden Arbeit findet man in drei Noten des Verfassers in den Rendiconti d. R. Acc. N. dei Lincei: La transformation de Ribaucour et la représentation sphérique, I, Remarques sur la théorie générale de la transformation de Ribaucour. Vol. XV, série 6ª (1932), S. 936—941. II, Applications de la transformation de Ribaucour à la représentation sphérique, Vol. XVI, Serie 6ª (1932), S. 200—205. III, Les systèmes cycliques de Ribaucour, Vol. XVI, serie 6ª (1932), S. 296—298.

[2] Vgl. die ausführliche Erklärung der Ribaucourtransformation in Abschn. **29**, § 1.

$$\hat{\mathfrak{x}} = \mathfrak{x} - 2\left(c + \int\limits_{\alpha_0, \beta_0}^{\alpha, \beta} \mathfrak{y}\, d\mathfrak{x}\right) \frac{\mathfrak{y}}{\mathfrak{y}^2}, \tag{5}$$

wobei c eine beliebige Konstante, $\mathfrak{y}$ eine beliebige zu $\mathfrak{x}$ parallele Fläche (vgl. Definition 3) bezeichnet. Sind nämlich $\mathfrak{y}$ und $\mathfrak{x}$ zueinander parallel, so ist, wie man leicht verifiziert,

$$\mathfrak{y}\, d\mathfrak{x} = \mathfrak{y}\mathfrak{x}_\alpha d\alpha + \mathfrak{y}\mathfrak{x}_\beta d\beta$$

ein vollständiges Differential. Ausserdem bemerkt Bianchi, dass die beiden Flächen $\hat{\mathfrak{x}}$ und $\mathfrak{y}^{-1}$ (vgl. Formel (4)) zueinander parallel sind. Für den fundamentalen Ausdruck (5) wird nun die symbolische Abkürzung

$$\hat{\mathfrak{x}} = \{\mathfrak{x}, \mathfrak{y}\}_c$$

eingeführt, da ja die Fläche $\hat{\mathfrak{x}}$ durch die Integrationskonstante c und die beiden Parallelflächen $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{y}$ eindeutig bestimmt ist.

11. In § 2 beweisen wir zunächst einen für sämtliche Untersuchungen des Kapitels I fundamentalen Hilfssatz, und leiten dann einen Teil der Bianchischen Formeln mit wenig Mühe von neuem ab. Nach einigen weiteren Überlegungen gelangt man so schliesslich zur Formulierung von

Satz 1: *Es sei der Ausdruck*

$$\hat{\mathfrak{x}} = \{\mathfrak{x}, \mathfrak{y}\}_c \tag{6}$$

vorgelegt (vergl. Formel (5)).

Ist $\mathfrak{x}$ eine feste Fläche und lässt man $\mathfrak{y}$ alle Parallelflächen zu $\mathfrak{x}$ durchlaufen, so sind durch (6) *alle Flächen $\hat{\mathfrak{x}}$ bestimmt, welche aus $\mathfrak{x}$ durch Ribaucourtransformation hervorgehen.*

Ist aber $\mathfrak{y}$ eine feste Fläche und lässt man $\mathfrak{x}$ alle Parallelflächen zu $\mathfrak{y}$ durchlaufen, so liefert der Ausdruck (6) *für $\hat{\mathfrak{x}}$ alle Parallelflächen zu $\mathfrak{y}^{-1}$.*

Dieser Satz lehrt uns zweierlei:

Erstens: Bezeichnet $\mathfrak{u}(\alpha, \beta)$ das sphärische Bild der Krümmungslinien der Fläche $\mathfrak{x}$, so kann man alle Flächen $\hat{\mathfrak{x}}$ angeben, welche aus $\mathfrak{x}$ durch Ribaucourtransformation hervorgehen, wenn man das zu $\mathfrak{u}(\alpha, \beta)$ gehörige Problem der sphärischen Abbildung gelöst hat (vgl. Definition 2).

Zweitens: Kennt man alle Lösungen des zu $\mathfrak{u}(\alpha, \beta)$ gehörigen Problems der sphärischen Abbildung und ist $\mathfrak{y}$ eine beliebige partikuläre Lösung dieses Problems, so kennt man auch alle Flächen, welche zu $\mathfrak{y}^{-1}$ parallel sind.

Durch den Satz 1 ist somit die Konstruktion der Ribaucourtransformationen auf das Problem der sphärischen Abbildung zurückgeführt, das in Kap. II näher untersucht werden soll.

12. In § 3 werden zwei neue Sätze bewiesen, die aus der Frage entspringen, wie sich das Symbol $\{\mathfrak{x}, \mathfrak{y}\}_c$ bei Vertauschung der Flächen $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{y}$ verhält.

Satz 2. *Setzt man*

$$\hat{\mathfrak{x}} = \{\mathfrak{x}, \mathfrak{y}\}_c, \quad \hat{\mathfrak{y}} = \{\mathfrak{y}, \mathfrak{x}\}_{\mathfrak{x}_0 \mathfrak{y}_0 \cdot c},$$

(vgl. Formel (3)), *so sind die beiden Flächen* $\hat{\mathfrak{x}}^{-1}$ *und* $\hat{\mathfrak{y}}^{-1}$ (vgl. Formel (4)) *zueinander parallel.*

Genaueres über den Zusammenhang zwischen den Flächen $\hat{\mathfrak{x}}^{-1}$ und $\hat{\mathfrak{y}}^{-1}$ besagt

Satz 3. *Es ist*

$$\hat{\mathfrak{x}}^{-1} = \{\mathfrak{x}^{-1}, \hat{\mathfrak{y}}\}_{\frac{c}{\mathfrak{x}_0^2}}.$$

13. Mit Hilfe von Satz 3 beweisen wir in § 4 einen merkwürdigen Vertauschungssatz:

Satz 4. *Sind* $\mathfrak{x}, \mathfrak{y}_1, \mathfrak{y}_2$ *drei zueinander parallele Flächen, so ist*

$$\big\{\{\mathfrak{x}, \mathfrak{y}_1\}_{c_1}, \{\mathfrak{y}_2, \mathfrak{y}_1\}_{c_2}\big\}_{c_3} = \big\{\{\mathfrak{x}, \mathfrak{y}_2\}_{c'_1}, \{\mathfrak{y}_1, \mathfrak{y}_2\}_{c'_2}\big\}_{c'_3}.$$

Hierbei bezeichnen die c_1, c_2, c_3 *willkürliche Konstante, während die* c'_1, c'_2, c'_3 *in bestimmter Weise von den* c_1, c_2, c_3 *abhängen.*

Einen solchen Vertauschungssatz hat bereits Bianchi gesucht. Dieser ging von der Bemerkung aus, dass durch die bekannte Liesche Geraden — Kugeltransformation die sogenannten W-Kongruenzen (das sind Geraden-Kongruenzen, bei denen sich die Asymptotenlinien der beiden Brennflächen entsprechen) in die von uns betrachteten Ribaucourschen Kugelkongruenzen übergeführt werden.[1] Für W-Kongruenzen hatte nun Bianchi einen Vertauschungssatz angegeben, der

[1] Bianchi, S. 200.

genau unserem Satz 4 entspricht.[1] Für Ribaucourkongruenzen hat aber Bianchi wesentlich weniger bewiesen: er geht dabei aus von der Schar von Flächen

$$\hat{\mathfrak{x}} = \{\mathfrak{x},\ t_1\mathfrak{y}_1 + t_2\mathfrak{y}_2\}_{t_1c_1+t_2c_2},$$

unter t_1 und t_2 beliebige reelle Parameter verstanden, und zeigt die Existenz einer zweiten Flächenschar

$$\hat{\mathfrak{z}} = \{\mathfrak{z},\ s_1\mathfrak{w}_1 + s_2\mathfrak{w}_2\}_{s_1c'_1+s_2c'_2},$$

derart dass

erstens: $$\{\mathfrak{z},\ \mathfrak{w}_1\}_{c'_1} = \mathfrak{x},$$

zweitens: jede Fläche der Schar $\hat{\mathfrak{z}}$ aus jeder Fläche der Schar $\hat{\mathfrak{x}}$ durch eine geeignete Ribaucourtransformation hervorgeht.[2]

In den Abschnitten **46.** und **47.** des § 4 werden die Beziehungen des Bianchischen Satzes zu unserem Satz 4 genau klargestellt.

14. Während in Kapitel I, § 1 die Bestimmung aller Ribaucourtransformationen der Fläche $\mathfrak{x}$ auf die vollständige Lösung eines Problems der sphärischen Abbildung zurückgeführt wird, benutzen wir in Kapitel II die Ribaucourtransformationen, um das Problem der sphärischen Abbildung in ein Problem der ebenen Geometrie umzuwandeln; und zwar beweisen wir in § 5 den Satz:

Durch den Einheitsvektor $\mathfrak{u}(\alpha, \beta)$ sei auf der Einheitskugel ein orthogonales Kurvensystem gegeben. Es sei ferner ε eine feste Ebene durch den Nullpunkt des Koordinatensystems mit dem Normaleinheitsvektor $\mathfrak{e}$, endlich sei $\mathfrak{U}(\alpha, \beta)$ das in ε gelegene orthogonale ebene Kurvensystem (vgl. Definition 5), *welches durch stereographische Projektion von $\mathfrak{u}(\alpha, \beta)$ auf die Ebene ε hervorgeht.*

Setzt man jetzt

$$\mathfrak{x} = \{\mathfrak{X},\ \mathfrak{U} - \mathfrak{e}\}_c, \tag{7}$$

so liefert der Ausdruck (7) *alle Lösungen des zu $\mathfrak{u}(\alpha, \beta)$ gehörigen Problems der sphärischen Abbildung, wenn c alle reellen Werte durchläuft und $\mathfrak{X}(\alpha, \beta)$ alle ebenen Kurvensysteme, welche zu $\mathfrak{U}(\alpha, \beta)$ parallel sind* (vgl. Definition 6).

Um die geometrische Beziehung der Fläche $\mathfrak{x}$ zu dem ebenen orthogonalen Kurvensystem $\mathfrak{X}(\alpha, \beta)$ zu durchschauen, betrachte man die spezielle Ribaucour-

[1] Bianchi, S. 45—48 u. 58—61.

[2] Bianchi, S. 207—212.

2—33617. *Acta mathematica.* 62. Imprimé le 18 octobre 1933.

transformation[1], welche die Fläche $\mathfrak{x}$ in die Ebene ε überführt,

$$\mathfrak{X} = \{\mathfrak{x},\, \mathfrak{e} - \mathfrak{u}\}_{\mathfrak{e}\,\mathfrak{x}_0} = \mathfrak{x} - 2(\mathfrak{e}\mathfrak{x})(\mathfrak{e} - \mathfrak{u})^{-1};$$

dann erscheint $\mathfrak{X}(\alpha,\beta)$ als Bild der Krümmungslinien der Fläche $\mathfrak{x}$ auf ε.

Das zu $\mathfrak{u}(\alpha,\beta)$ gehörige Problem der sphärischen Abbildung ist somit zurückgeführt auf das einfachere

Problem I: *Alle ebenen Kurvensysteme $\mathfrak{X}(\alpha,\beta)$ zu bestimmen, welche zu einem gegebenen ebenen orthogonalen Kurvensystem $\mathfrak{U}(\alpha,\beta)$ parallel sind.*

15. In § 6 leiten wir die Differentialgleichung ab, deren Integrale die Lösung des Problems I liefern. Zu diesem Zwecke führen wir die in ε gelegenen beiden Komponenten $U(\alpha,\beta)$, $V(\alpha,\beta)$ des Vektors $\mathfrak{U}$ und den Winkel $\vartheta(\alpha,\beta)$ ein, welchen die Kurven $\beta = \text{const.}$ des ebenen Kurvensystems $\mathfrak{U}(\alpha,\beta)$ mit der Abszissenachse bilden, sodass

$$\frac{U_\alpha}{\sqrt{\mathfrak{U}^2}} = \cos\vartheta, \quad \frac{V_\alpha}{\sqrt{\mathfrak{U}^2}} = \sin\vartheta.$$

Ferner setzen wir

$$\omega = e^{-i\vartheta},$$
$$\mathring{z} = U + iV, \quad z = X + iY,$$

unter X und Y die beiden Komponenten des gesuchten Vektors $\mathfrak{X}$ verstanden.

Dann bestimmt jedes Integral z der partiellen Differentialgleichung

$$D(z) = z_{\alpha\beta} + \frac{\omega_\beta}{\omega} z_\alpha + \frac{\omega_\alpha}{\omega} z_\beta = 0 \tag{8}$$

ein zu $\mathfrak{U}(\alpha,\beta)$ paralleles Kurvensystem $\mathfrak{X}(\alpha,\beta)$, wenn ausserdem noch die beiden Grössen

$$\omega z_\alpha \quad \text{und} \quad i\omega z_\beta$$

reell sind. Endlich ergibt sich auch noch

$$D(\mathring{z}) = 0.$$

[1] Die Ribaucourtransformationen, welche eine Fläche $\mathfrak{x}$ in eine Ebene (oder Kugel) überführen, haben einen besonders einfachen Charakter. Man kann sie leicht bestimmen, ohne die komplizierten Bianchischen Formeln des § 1 zu benutzen. Somit gibt es für den hier im Text angegebenen Satz auch einen elementaren geometrischen Beweis, den wir an anderer Stelle veröffentlichen werden.

16. Die partielle lineare homogene Differentialgleichung (8) ist vom hyperbolischen Typus und hat gleiche »Laplacesche Invarianten», d. h. sie lässt sich durch die Substitution

$$u = \omega z$$

auf die Moutardsche Form

$$M(u) = u_{\alpha\beta} - \frac{\omega_{\alpha\beta}}{\omega} u = 0 \tag{9}$$

bringen.

Bereits Darboux hat die Lösung des Problems der sphärischen Abbildung auf die Integration der Differentialgleichung (9) zurückgeführt. Doch ist seine geometrische Deutung der in (9) auftretenden Grössen komplizierter und weniger anschaulich. Sie benutzt wesentlich die komplexen Bonnetschen Kugelkoordinaten und die Ebenenkoordinaten der Fläche $\mathfrak{x}$. Der Zusammenhang zwischen der Darbouxschen und unserer Auffassung wird in den Abschnitten **58.** und **59.** § 6 auseinandergesetzt.

17. Die Koeffizienten der Differentialgleichungen (8) und (9), durch deren Integration unser Problem I vollständig gelöst ist, hängen nun aber garnicht von der Funktion $\mathring{z}$, d. h. vom Kurvensystem $\mathfrak{U}(\alpha, \beta)$, sondern nur von seinem Tangentenwinkel $\vartheta(\alpha, \beta)$ ab; andererseits ist $\mathring{z}$ selbst ein Integral der Differentialgleichung (8). Dieser Umstand führt dazu, das Problem I durch ein allgemeineres zu ersetzen:

Problem II: *Gegeben sei eine Funktion $\vartheta(\alpha, \beta)$. Gesucht werden sämtliche ebenen, orthogonalen Kurvensysteme $\mathfrak{X}(\alpha, \beta)$, deren Tangenten im Punkte α, β an die Kurven $\beta =$ const. mit der Abszissenachse einen Winkel gleich der vorgegebenen Funktion $\vartheta(\alpha, \beta)$ bilden.*

Auch die Lösung von Problem II führt auf die Integration der Differentialgleichung (8) bezw. (9). Ausserdem sind zusammen mit einem einzigen zu einer bestimmten Funktion $\vartheta(\alpha, \beta)$ gehörigen Problem II unendlich viele Probleme sphärischer Abbildung gelöst. Es sei nämlich das Kurvensystem $\mathring{\mathfrak{X}}(\alpha, \beta)$ der Ebene ε eine beliebige Lösung des vorgegebenen Problems II, und es sei $\mathring{\mathfrak{x}}(\alpha, \beta)$ (mit $\mathring{\mathfrak{x}}^2 = 1$) das orthogonale Kurvensystem, welches man durch stereographische Projektion von ε auf die Einheitskugel aus $\mathring{\mathfrak{X}}(\alpha, \beta)$ erhält. Dann ist nach den vorhergehenden Betrachtungen gleichzeitig mit dem vorgegebenen Problem II auch das zu $\mathring{\mathfrak{x}}(\alpha, \beta)$ gehörige Problem der sphärischen Abbildung vollständig gelöst.

18. Dieser Sachverhalt führt nun aber auf die Fragestellung des § 7. Es seien in ε zwei zueinander parallele, orthogonale Kurvensysteme $\mathfrak{X}(\alpha,\beta)$ und $\mathfrak{Y}(\alpha,\beta)$ gegeben. Man setze nunmehr

$$(10) \qquad \mathfrak{x} = \{\mathfrak{X}, \mathfrak{Y} - \mathfrak{e}\}_{c_0}, \quad \mathfrak{x}^* = \{\mathfrak{Y}, \mathfrak{X} - \mathfrak{e}\}_{c_0},$$

mit

$$c_0 = \frac{\mathfrak{X}_0 \mathfrak{Y}_0 - 1}{2}.$$

Dann führen, wenn man mit $\mathfrak{u}$ (bezw. $\mathfrak{u}^*$) die Normaleinheitsvektoren der Flächen $\mathfrak{x}$ (bezw. $\mathfrak{x}^*$) bezeichnet, nach dem Vorhergehenden die beiden zu $\mathfrak{u}$ und $\mathfrak{u}^*$ gehörigen Probleme der sphärischen Abbildung auf das gleiche Problem II. Ein Vergleich der Ausdrücke (10) mit Formel (7) ergibt nämlich, dass man das sphärische Bild $\mathfrak{u}(\alpha,\beta)$ der Krümmungslinien von $\mathfrak{x}$ (bezw. das Bild $\mathfrak{u}^*$ von $\mathfrak{x}^*$), erhält, wenn man das Kurvensystem $\mathfrak{Y}(\alpha,\beta)$ (bezw. $\mathfrak{X}(\alpha,\beta)$) auf die Einheitskugel stereographisch projiziert. Wir fragen nun: Welches ist die geometrische Beziehung zwischen den beiden Flächen $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{x}^*$, die wir miteinander assoziiert nennen wollen. Indem man den Satz 3 aus Kapitel I heranzieht, beweist man: *die beiden Flächen*

$$(\mathfrak{x} - \mathfrak{u})^{-1} \quad \text{und} \quad -(\mathfrak{x}^* - \mathfrak{u}^*)^{-1}$$

sind Parallelflächen im engeren Sinne (vgl. Definition 4).[1]

19. Sind wieder $\mathfrak{X}(\alpha,\beta)$ und $\mathfrak{Y}(\alpha,\beta)$ zwei zueinander parallele orthogonale Kurvensysteme, so hat der Ausdruck

$$(11) \qquad \hat{\mathfrak{X}} = \{\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}\}_c = \mathfrak{X} - 2\left(c + \int_{\alpha_0,\beta_0}^{\alpha,\beta} \mathfrak{Y}\, d\mathfrak{X}\right)\mathfrak{Y}^{-1}$$

einen wohlbestimmten Sinn, da $\mathfrak{Y}\, d\mathfrak{X}$ ein vollständiges Differential ist. Durch (11) wird ein ebenes orthogonales Kurvensystem $\hat{\mathfrak{X}}(\alpha,\beta)$ bestimmt, und wir fragen im § 8: welches ist der geometrische Zusammenhang zwischen den Kurvensystemen $\mathfrak{X}$ und $\hat{\mathfrak{X}}$. Als Antwort auf diese Frage beweisen wir, dass zwei entsprechende Kurven $\beta =$ const. der beiden Systeme $\mathfrak{X}$ und $\hat{\mathfrak{X}}$ als die beiden Zweige

[1] Den oben angegebenen Satz hat Verfasser bereits im Jahre 1926 gefunden und durch Rechnung verifiziert. Auf der Suche nach dem wahren Grunde dieser merkwürdigen Beziehung fand Verfasser die Sätze 2, 3, 4 des Kapitels I.

der Einhüllenden einer in ε gelegenen Kreisschar erscheinen, wobei ein Kreis dieser Schar die beiden Kurven von $\mathfrak{X}$ und $\hat{\mathfrak{X}}$ in entsprechenden Punkten berührt. Ein Gleiches gilt für zwei entsprechende Kurven $\alpha = \text{const.}$ der Systeme $\mathfrak{X}$ und $\hat{\mathfrak{X}}$. Die Transformation, welche das Kurvensystem $\mathfrak{X}$ in $\hat{\mathfrak{X}}$ überführt, nennen wir eine *ebene Ribaucourtransformation.*

Nachdem man bemerkt hat, dass $\hat{\mathfrak{X}}$ zum Kurvensystem $\mathfrak{Y}^{-1}$ parallel ist, beweist man eine Übertragung des Satzes 1 auf ebene Kurvensysteme, nämlich, dass man alle zu $\mathfrak{Y}^{-1}$ parallelen Kurvensysteme erhält, wenn in dem Ausdruck (11) c alle reellen Werte annimmt und $\mathfrak{X}$ alle zu $\mathfrak{Y}$ parallelen Kurvensysteme durchläuft. Ausserdem wird in § 8 gezeigt, dass auch die Sätze 2, 3, 4 aus Kap. I mutatis mutandis für ebene Ribaucourtransformationen gelten.

20. Im § 9 beschäftigen wir uns mit einem bekannten Satz von Moutard[1]: *Es sei $\mathring{u}(\alpha,\beta)$ ein partikuläres Integral der partiellen Differentialgleichung von Moutardschem Typus*

$$M(u) = u_{\alpha\beta} - h(\alpha,\beta)u = 0 \tag{12}$$

und $u(\alpha,\beta)$ ihr allgemeines Integral.

Man setze

$$\hat{h} = u\frac{\partial^2}{\partial\alpha\partial\beta}\left(\frac{1}{\mathring{u}}\right).$$

Dann ist, unter c eine willkürliche Integrationskonstante verstanden,

$$\hat{u} = \frac{1}{\mathring{u}}\left(c - \int\limits_{\alpha_0,\beta_0}^{\alpha,\beta}(\mathring{u}u_\alpha - u\mathring{u}_\alpha)\,d\alpha - (\mathring{u}u_\beta - u\mathring{u}_\beta)\,d\beta\right) \tag{13}$$

das allgemeine Integral der Differentialgleichung

$$\hat{M}(\hat{u}) = \hat{u}_{\alpha\beta} - \hat{h}\hat{u} = 0; \tag{14}$$

dabei ist der Ausdruck unter dem Integralzeichen von (13) *ein vollständiges Differential.* Wir haben es nun aber beim Problem der sphärischen Abbildung

[1] M. Moutard, Sur la construction des équations de la forme

$$\frac{1}{z}\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y} = \lambda(x,y)$$

qui admettent une intégrale explicite. Jour. de l'école polyt. **45** (1878), S. 1—11.

(vgl. Gleichung (9)) nur mit solchen Differentialgleichungen vom Moutardschen Typus zu tun, bei denen der Koeffizient $h(\alpha, \beta)$ die spezielle Form

$$h = \frac{\omega_{\alpha\beta}}{\omega}, \quad |\omega| = 1 \tag{15}$$

hat. Unter diesen speziellen Voraussetzungen zeigen wir in § 9, dass die Moutardsche Integralformel (13) als ebene Ribaucourtransformation aufgefasst werden kann. Dieses Ergebnis ist nach dem Bisherigen zu erwarten. Denn bezeichnet $\mathring{\mathfrak{X}}(\alpha, \beta)$ das ebene orthogonale Kurvensystem, das dem partikulären Integral $\mathring{u}$ von (9) entspricht, so erhält man, wie oben hervorgehoben wurde, durch die ebene Ribaucourtransformation

$$\hat{\mathfrak{X}} = \{\mathfrak{X}, \mathring{\mathfrak{X}}\}_c$$

alle Kurvensysteme, welche zu $\mathring{\mathfrak{X}}^{-1}$ parallel sind. Diese Kurvensysteme können aber andererseits auch durch die Integration der Differentialgleichung (14) bestimmt werden, deren allgemeines Integral in dem Ausdruck (13) gegeben ist.

21. Bevor wir diesen Gegenstand verlassen, sei es uns gestattet, auf eine wichtige Anwendung des Moutardschen Theorems hinzuweisen, die unser Interesse an ihm erklärt. Seit einer berühmten Arbeit von Laplace aus dem Jahre 1773[1] hat man besonders solche Differentialgleichungen der Form (12) studiert, bei denen sich das allgemeine Integral mit Hilfe der Laplaceschen Kaskadenmethode explicit angeben lässt. Wir wollen eine solche Differentialgleichung vom »Laplaceschen Typus« nennen.

Ebenso soll auch die Lösung $\mathfrak{x}(\alpha, \beta)$ eines Problems der sphärischen Abbildung, welches auf eine Differentialgleichung (12) *vom Laplaceschen Typus führt, eine Fläche vom Laplaceschen Typus heissen.* Darboux hat diese Flächen in ganz bestimmter Weise geometrisch charakterisiert.[2] Seine geometrische Konstruktion haben wir in den Abschnitten **75.** und **76.** des § 10 kurz dargestellt.

Bei den Untersuchungen über sphärische Abbildung im Grossen zeigen sich von neuem besonders einfache Eigenschaften der nach Laplace integrablen Fälle.[3] Und so wird man zu der noch ungelösten allgemeinen Fragestellung im Grossen

---

[1] Laplace, Recherches sur le calcul intégral aux différences partielles. Mém. de math. et de phys. de l'Ac. des Sciences pour 1773, S. 341 (gedruckt 1770), wieder abgedruckt in Œuvres complètes, pub. par l'ac. des Sc. **9** (1893), S. 5—68.

[2] Darboux, II, S. 16—22.

[3] Vgl. z. B. H. Hamburger, l. c., S. 5, Fussnote 1, S. 664—667.

geführt: *Es sei auf der Einheitskugel ein orthogonales Kurvensystem* $\mathfrak{u}(\alpha, \beta)$ *gegeben, das die Einheitskugel lückenlos überdeckt. Welches sind die hinreichenden und notwendigen Bedingungen für das Kurvensystem* $\mathfrak{u}(\alpha, \beta)$, *damit man* $\mathfrak{u}(\alpha, \beta)$ *durch solche die Einheitskugel ganz überdeckenden orthogonalen Kurvensysteme* $\mathfrak{u}_n(\alpha, \beta)$ *gleichmässig approximieren kann, deren zugehörige Probleme der sphärischen Abbildungen auf Differentialgleichungen vom Laplaceschen Typus führen.*[1]

22. Moutard[2] hat sich nun die Aufgabe gestellt, alle Differentialgleichungen der Gestalt (12) vom Laplaceschen Typus zu bestimmen. Das von ihm angegebene Konstruktionsverfahren folgt unmittelbar aus einem von ihm bewiesenen Satze:

Es sei eine Differentialgleichung

$$M(u) = u_{\alpha\beta} - hu = 0$$

vom Laplaceschen Typus vorgelegt. Dann lässt sich eine endliche Anzahl von $n+1$ *Differentialgleichungen*

$$M_0(u_0) = \frac{\partial^2 u_0}{\partial\alpha\partial\beta} = 0,$$

$$M_\nu(u_\nu) = \frac{\partial^2 u_\nu}{\partial\alpha\partial\beta} - h_\nu u_\nu = 0 \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n)$$

bestimmen, derart, dass

$$h_\nu = \mathring{u}_{\nu-1}\frac{\partial^2}{\partial\alpha\partial\beta}\left(\frac{1}{\mathring{u}_{\nu-1}}\right) \ (\nu = 1, 2, \ldots, n), \ \ h = \mathring{u}_n \frac{\partial^2}{\partial\alpha\partial\beta}\left(\frac{1}{\mathring{u}_n}\right)$$

wird, wobei $\mathring{u}_\nu$ (für $\nu = 0, 1, 2, \ldots, n$) *ein geeignet gewähltes partikuläres Integral der Differentialgleichung* $M_\nu(u_\nu) = 0$ *bezeichnet.*

Moutard zeigt ferner, dass alle Differentialgleichungen $M_\nu(u_\nu) = 0$ vom Laplaceschen Typus sind. Endlich folgt aus der Integralformel (13), dass mit dem allgemeinen Integral von $M_{\nu-1}(u_{\nu-1}) = 0$ auch das allgemeine Integral von $M_\nu(u_\nu) = 0$ bekannt ist, dass mithin, da die triviale Differentialgleichung $M_0(u_0) = 0$ integrabel ist, sich auch das allgemeine Integral von $M(u) = 0$ durch das allgemeine Integral von $M_0(u_0) = 0$ ausdrücken lässt.

---

[1] Man vergleiche die Arbeit des Verfassers »Über die partielle, lineare, homogene Differentialgleichung 2. Ordnung vom hyperbolischen Typus, deren Koeffizienten in einer Veränderlichen periodisch sind», Teil II: Das Umkehrungsproblem und der Approximationssatz. Math. Annalen **106** (1932), S. 503—535. In ihr ist ein Teil der Frage ohne Berücksichtigung der durch die geometrische Anwendung entstehenden neuen Schwierigkeiten beantwortet.

[2] Moutard, l. c., S. 13 Fussnote 1, vgl. auch Darboux, II, S. 38—53 u. S. 144—163,

23. Wie Darboux weiter gezeigt hat[1], lassen sich nun aber, wenn der Koeffizient h der vorgelegten Differentialgleichung den Bedingungen (15) genügt, alle partikulären Integrale $\mathring{u}_\nu$ ($\nu = 0, 1, \ldots, n$) so wählen, dass auch alle h_ν die Bedingungen (15) erfüllen; d. h. aber, dass alle $n + 2$ Differentialgleichungen $M_\nu(u_\nu) = 0$ ($\nu = 0, 1, \ldots, n$) und $M(u) = 0$ zu wohlbestimmten in Abschnitt **17.** formulierten Problemen II gehören. Nun hat aber, wie man sich leicht überzeugt, das Problem II, welches zur Differentialgleichung $M_0(u_0) = 0$ führt, alle diejenigen orthogonalen Kurvensysteme als Lösung, deren eine Kurvenschar sich aus Geraden zusammensetzt. Berücksichtigt man ausserdem, dass, wenn h_ν der Bedingung (15) genügt, die Moutardsche Integralformel (13) mit einer ebenen Ribaucourtransformation identisch ist, so erhält man schliesslich eine geometrische Formulierung des Moutard-Darbouxschen Satzes[2]:

Es sei ein Problem II vorgelegt, welches auf eine Differentialgleichung $M(u) = 0$ vom Laplaceschen Typus führt. Dann lässt sich jede Lösung dieses Problems aus einem orthogonalen Kurvensystem, dessen eine Kurvenschar aus Geraden besteht, durch eine endliche Anzahl ebener Ribaucourtransformationen gewinnen.

Dieser Satz lässt vermuten, dass die Moutardsche Integralformel (13) oder, was dasselbe ist, die ebene Ribaucourtransformation, den natürlichen Zugang zu der in Abschnitt **21.** erwähnten allgemeinen Fragestellung aus der Theorie der sphärischen Abbildung im Grossen bildet.

24. Aus dem Satze vom Moutard-Darboux, so wie wir ihn im vorigen Abschnitt formuliert haben, folgern wir schliesslich in § 10 mit Hilfe unseres Vertauschungssatzes 4. aus § 4 einen Satz über Flächen vom Laplaceschen Typus: *Es sei $\mathfrak{x}(\alpha, \beta)$ eine Fläche vom Laplaceschen Typus. Dann lässt sich $\mathfrak{x}(\alpha, \beta)$ aus einer Fläche $\mathring{\mathfrak{x}}(\alpha, \beta)$ mit einer Schar ebener Krümmungslinien durch eine endliche Anzahl von Ribaucourtransformationen gewinnen; ausserdem enthält das sphärische Bild der Krümmungslinien von $\mathring{\mathfrak{x}}$ eine Schar von Kreisen, welche sämtlich durch einen festen Punkt der Einheitskugel hindurchgehen.*

25. In Kapitel III werden zunächst in § 11 die zyklischen Systeme von Ribaucour im Anschluss an eine Betrachtung von Bianchi[3] durch Ribaucour-

[1] Darboux, IV, S. 181—197.

[2] Ein neuer Beweis dieses Satzes soll an anderer Stelle veröffentlicht werden. Dieser Beweis stützt sich wesentlich auf Methoden aus der Arbeit des Verfassers: »Über die Laplacesche Kaskadenmethode. Math. Annalen **104** (1930), S. 96—138; er ist völlig verschieden vom Darbouxschen Beweis und wesentlich kürzer als dieser. Der Darbouxsche Beweis erstreckt sich mit der Entwicklung aller Hilfsmittel über mehr als 70 Seiten seines oben zitierten Werkes.

[3] Bianchi, S. 228—230.

transformationen in unserer Symbolik dargestellt. In den beiden letzten §§ werden spezielle zyklische Systeme untersucht, und zwar in § 12 (bezw. § 13) diejenigen zyklischen Systeme, deren Kreise auf einer festen Ebene (bezw. einer festen Kugel) senkrecht stehen. Auf die einen zyklischen Systeme (des § 12) wird man durch Laguerre-Inversionen, auf die anderen (des § 13) durch Lie-Inversionen geführt. Aus der in § 12 gewonnenen Darstellung für Laguerre-Inversionen werden ihre wichtigsten bekannten Eigenschaften von neuem abgelesen. Zum Schluss werden in § 13 Ribaucourtransformationen und Laguerre-Inversionen oder Lie-Inversionen miteinander gekoppelt. Eine Anwendung von Satz 4 aus Kap. I auf diesen Fall ergibt dann wieder neue Darstellungen für die dabei auftretenden zusammengesetzten Ribaucourtransformationen.

Kap. I. Allgemeine Sätze zur Theorie der Ribaucourtransformationen.

§ 1. Bekannte Eigenschaften der Ribaucourtransformationen.

26. Ein Vektor $\mathfrak{s} = \mathfrak{s}(\alpha, \beta)$, dessen drei Komponenten als zweimal stetig differenziierbaren Funktionen zweier Parameter α und β gegeben sind, definiere die Fläche $\mathfrak{s}$. Es sei ferner $\mathfrak{u} = \mathfrak{u}(\alpha, \beta)$ ein beliebiger, zwei mal stetig differenziierbarer Einheitsvektor, dann wird durch

$$\mathfrak{s}(\alpha, \beta) + t\mathfrak{u}(\alpha, \beta), \tag{16}$$

unter t ein frei veränderlicher Parameter verstanden, eine Geradenkongruenz dargestellt, wobei durch jeden Punkt der Fläche $\mathfrak{s}$ eine Gerade der Kongruenz mit der Richtung $\mathfrak{u}$ hindurchgeht. Wir setzen voraus, dass die Geradenschar (16) ein Normalensystem bildet.

Bezeichnet $\mathfrak{v}$ den Normaleinheitsvektor der Fläche $\mathfrak{s}$, so setze man

$$\hat{\mathfrak{u}} = \mathfrak{u} - 2(\mathfrak{u}\mathfrak{v})\mathfrak{v}. \tag{17}$$

Es ist dann offenbar

$$\hat{\mathfrak{u}}^2 = 1, \quad \hat{\mathfrak{u}}\mathfrak{v} = -\mathfrak{u}\mathfrak{v};$$

durch

$$\mathfrak{s}(\alpha, \beta) + t\hat{\mathfrak{u}}(\alpha, \beta) \tag{18}$$

wird dann eine zweite Geradenkongruenz definiert, die man erhält, indem man die Schar (16) an der Fläche $\mathfrak{S}$ spiegelt.

Nach einem bekannten Satz von Dupin-Malus bildet die Geradenschar (18) gleichzeitig mit der Schar (16) ein Normalensystem.

Wir setzen jetzt voraus, dass nach geeigneter Wahl der Parameter α, β die beiden Scharen geradliniger Flächen, die wir aus (16) erhalten, wenn wir $\alpha = \text{const.}$ oder $\beta = \text{const.}$ setzen, die abwickelbaren zueinander orthogonalen, Flächen des Normalensystems (16) sind.

27. Dupin hat nun weiter die Frage untersucht, unter welchen Bedingungen auch in dem gespiegelten Normalensystem (18) die beiden Scharen geradliniger Flächen $\alpha = \text{const.}$, oder $\beta = \text{const.}$ abwickelbar sind, und er hat den Satz bewiesen:

Satz von Dupin[1]: *Damit die beiden Scharen abwickelbarer Flächen eines Normalensystems durch Spiegelung an einer Fläche $\mathfrak{S}$ wieder in Scharen abwickelbarer Flächen übergeführt werden, ist notwendig und hinreichend, dass die Schnitte der abwickelbaren Flächen mit der Spiegelfläche $\mathfrak{S}$ dort ein konjugiertes Kurvensystem bestimmen.*

Zusatz zum Dupinschen Satze: *Ist von zwei durch Spiegelung an einer Fläche $\mathfrak{S}$ aufeinander bezogenen Normalensystemen I und II etwa das System II eine Schar paralleler Graden* (uneigentliches Geradenbündel) *oder ein Geradenbündel durch einen Punkt, so werden die abwickelbaren Flächen des Systems I durch Spiegelung an $\mathfrak{S}$ von selbst in abwickelbare Flächen* (Zylinder- oder Kegelflächen) *des Geradenbündels übergeführt. Ausserdem bestimmen die Schnitte der abwickelbaren Flächen des Systems I mit der Fläche $\mathfrak{S}$ immer ein System konjugierter Kurven auf $\mathfrak{S}$ und endlich stehen die beiden Scharen abwickelbarer Flächen des Systems II, welche den abwickelbaren Flächen des Systems I entsprechen, aufeinander senkrecht.*

Ist umgekehrt im eigentlichen (oder uneigentlichen) Geradenbündel ein System von zueinander orthogonalen Kegelflächen (oder Zylinderflächen) gegeben, welches die Spiegelfläche $\mathfrak{S}$ in einem konjugierten Kurvensysteme schneidet, so gehen die Kegelflächen (oder Zylinderflächen) nach der Spiegelung in die abwickelbaren Flächen des Normalensystems I über.

---

[1] Vgl. z. B. Darboux, II, S. 294—296.

28. Durch den Vektor

$$(19) \qquad \mathfrak{x}(\alpha, \beta) = \mathfrak{s}(\alpha, \beta) - R(\alpha, \beta)\mathfrak{u}(\alpha, \beta)$$

werde jetzt eine Fläche dargestellt, welche das Normalensystem (16) orthogonal schneidet. Aus der Forderung $\mathfrak{u}\,d\mathfrak{x} = 0$ folgt jetzt

$$(20) \qquad dR = \mathfrak{u}\,d\mathfrak{s} = \mathfrak{u}\mathfrak{s}_\alpha d\alpha + \mathfrak{u}\mathfrak{s}_\beta d\beta;$$

$\mathfrak{u}\,d\mathfrak{s}$ muss mithin ein vollständiges Differential sein. Das ist das bekannte Kriterium dafür, dass die gegebene Geradenkongruenz (16) ein Normalensystem bildet. Durch die Gleichung (20) ist R bis auf eine additive Konstante eindeutig bestimmt.

Da andererseits wegen (17)

$$\hat{\mathfrak{u}}\,d\mathfrak{s} = \mathfrak{u}\,d\mathfrak{s}$$

ist, so schneidet auch die durch den Vektor

$$(21) \qquad \hat{\mathfrak{x}}(\alpha, \beta) = \mathfrak{s}(\alpha, \beta) - R(\alpha, \beta)\hat{\mathfrak{u}}(\alpha, \beta)$$

dargestellte Fläche das Normalensystem (18) orthogonal.

Aus unserer Voraussetzung über die spezielle Wahl der Parameter α, β folgt unmittelbar, dass die Kurven $\alpha = \text{const.}$, $\beta = \text{const.}$ das System der Krümmungslinien der Fläche $\mathfrak{x}(\alpha, \beta)$ liefern. Ein gleiches gilt für die entsprechenden Linien auf $\hat{\mathfrak{x}}$ offenbar dann und nur dann, wenn das Kriterium des Dupinschen Satzes erfüllt ist.

Es ist $\mathfrak{u}$ der Normaleinheitsvektor von $\mathfrak{x}$, $\hat{\mathfrak{u}}$ der Normalvektor von $\hat{\mathfrak{x}}$. Ferner werde wegen $\mathfrak{u}_\alpha \mathfrak{u}_\beta = 0$

$$(22) \qquad (d\mathfrak{u})^2 = h_1^2\,d\alpha^2 + h_2^2\,d\beta^2 \qquad (h_1 > 0,\ h_2 > 0)$$

gesetzt, sodass auch

$$(23) \qquad \mathfrak{u}_1 = \frac{\mathfrak{u}_\alpha}{h_1}, \quad \mathfrak{u}_2 = \frac{\mathfrak{u}_\beta}{h_2}$$

Einheitsvektoren sind. Ausserdem bilden die drei Vektoren $\mathfrak{u}_1, \mathfrak{u}_2, \mathfrak{u}$ ein Orthogonalsystem, und zwar sei das Vorzeichen von $\mathfrak{u}$ so gewählt, dass

$$\mathfrak{u} = -\,\mathfrak{u}_1 \times \mathfrak{u}_2$$

ist. Dann gelten die Rodrigueschen Formeln (1).

29. Die beiden Flächen $\mathfrak{x}$ und $\hat{\mathfrak{x}}$ kann man sich auch noch anders entstanden denken. Man betrachte die zweiparametrige Schar Σ von Kugeln, deren Mittelpunkte auf der Fläche $\mathfrak{s}$ gelegen und deren Radien R durch die Formel (20) bestimmt sind. Dann erscheinen die Flächen $\mathfrak{x}$ und $\hat{\mathfrak{x}}$ als die beiden Mäntel der Hüllfläche der Kugelschar Σ und die Fläche $\hat{\mathfrak{x}}$ lässt sich als die durch Σ Transformierte der Fläche $\mathfrak{x}$, oder umgekehrt $\mathfrak{x}$ als Transformierte von $\hat{\mathfrak{x}}$ auffassen. Man nennt ferner, wenn die Fläche $\mathfrak{x}$ weder eine Ebene noch eine Kugel ist[1], diese Transformation dann und nur dann eine Ribaucourtransformation, wenn durch sie die Krümmungslinien von $\mathfrak{x}$ in die Krümmungslinien von $\hat{\mathfrak{x}}$ übergeführt werden. Offenbar ist die Ribaucourtransformation umkehrbar, denn geht durch sie die Fläche $\hat{\mathfrak{x}}$ aus $\mathfrak{x}$ hervor, so lässt sich auch umgekehrt $\hat{\mathfrak{x}}$ durch Ribaucourtransformation in $\mathfrak{x}$ überführen. Bei dieser neuen Auffassung der Beziehung zwischen den Flächen $\mathfrak{x}$ und $\hat{\mathfrak{x}}$ geht der Dupinsche Satz nebst Zusatz unmittelbar über in den

Satz von Ribaucour[2]: *Eine zweiparametrige Kugelschar Σ bestimmt dann und nur dann eine Ribaucourtransformation, wenn den Krümmungslinien des einen Mantels $\mathfrak{x}$ der Hüllfläche von Σ auf der Fläche $\mathfrak{s}$ der Kugelmittelpunkte ein konjugiertes Kurvensystem entspricht.*

Zusatz zum Satz von Ribaucour: *Es sei von den beiden Mänteln $\mathfrak{x}$ und $\hat{\mathfrak{x}}$ der Hüllfläche einer Kugelschar Σ der eine der beiden Mäntel, etwa $\hat{\mathfrak{x}}$, eine Ebene oder eine Kugel. Dann entspricht dem System der Krümmungslinien von $\mathfrak{x}$ auf der Fläche $\mathfrak{s}$ der Kugelmittelpunkte von Σ ein System konjugierter Kurven und auf der Ebene (oder Kugel) $\hat{\mathfrak{x}}$ ein System orthogonaler Kurven.*

Beschreibt umgekehrt der Vektor $\hat{\mathfrak{x}}(\alpha, \beta)$ ein orthogonales Kurvensystem auf der Ebene (oder Kugel) welchem auf der Fläche $\mathfrak{s}$ ein konjugiertes Kurvensystem entspricht, so wird das orthogonale Kurvensystem $\hat{\mathfrak{x}}(\alpha, \beta)$ in das System der Krümmungslinien von $\mathfrak{x}$ übergeführt.

Die Abbildung der Fläche $\mathfrak{x}$ auf die Ebene (oder Kugel) $\hat{\mathfrak{x}}$ durch die Kugelschar Σ ist immer eine Ribaucourtransformation. Entsprechendes gilt, wenn $\mathfrak{x}$ eine Ebene (oder Kugel) und $\hat{\mathfrak{x}}$ eine beliebige Fläche ist.

30. Wenn wir anstelle von $\mathfrak{s}$ von der Fläche $\mathfrak{x}$ ausgehen, so liegt es nahe, nach allen Flächen $\hat{\mathfrak{x}}$ zu fragen, welche durch Ribaucourtransformation aus $\mathfrak{x}$

---

[1] Über den Spezialfall, dass die Fläche $\mathfrak{x}$ eine Ebene oder eine Kugel ist, vergl. weiter unten den Zusatz zum Satz von Ribaucour.

[2] Vgl. z. B. Bianchi, S. 105.

hervorgehen. Dann ist somit nach Formel (19) und (21)

$$\mathfrak{x} + R\mathfrak{u} = \hat{\mathfrak{x}} + R\hat{\mathfrak{u}} = \mathfrak{s}. \tag{24}$$

Dieses Problem ist bereits von Ribaucour vollständig gelöst worden. Wir geben hier diejenige Form der Lösung an, welche man Bianchi verdankt, und welche sich für uns im folgenden als besonders handlich erweist.

Durch die Kurven $\alpha = \text{const.}$, $\beta = \text{const.}$ werde wieder auf $\mathfrak{x}$ das System der Krümmungslinien bestimmt. Dann ist nach Bianchi[1]

$$\hat{\mathfrak{x}} = \mathfrak{x} - 2\varphi \frac{\xi\mathfrak{u}_1 + \eta\mathfrak{u}_2 + \zeta\mathfrak{u}}{\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2}; \tag{25}$$

dabei bedeutet ζ ein beliebiges Integral der partiellen Differentialgleichung

$$\zeta_{\alpha\beta} - \frac{h_{1\beta}}{h_1}\zeta_\alpha - \frac{h_{2\alpha}}{h_2}\zeta_\beta = 0. \tag{26}$$

Ausserdem ist gesetzt

$$\xi = \frac{\zeta_\alpha}{h_1}, \quad \eta = \frac{\zeta_\beta}{h_2}, \tag{27}$$

$$\varphi = \varphi_0 + \int\limits_{\alpha_0, \beta_0}^{\alpha, \beta} r_1\zeta_\alpha d\alpha + r_2\zeta_\beta d\beta, \tag{28}$$

und zwar sind hier unter $\mathfrak{u}_1$, $\mathfrak{u}_2$, r_1, r_2, h_1, h_2 die Grössen der Formeln (23), (1) und (22), unter φ_0 eine beliebige Konstante zu verstehen. Wenn ζ eine Lösung von (26) ist, so ist nämlich

$$r_1\zeta_\alpha d\alpha + r_2\zeta_\beta d\beta$$

immer ein vollständiges Differential; man verifiziert dies leicht, indem man berücksichtigt, dass r_1 und r_2 als Hauptkrümmungsradien dem System von partiellen Differentialgleichungen[2]

$$r_{1\beta} = \frac{h_{1\beta}}{h_1}(r_2 - r_1),$$

$$r_{2\alpha} = \frac{h_{2\alpha}}{h_2}(r_1 - r_2)$$

genügen.

[1] Bianchi, S. 167—175.

[2] Vgl. etwa H. Hamburger, l. c., S. 5 Fussnote 1, S. 645 und S. 647.

Der Ausdruck (25) liefert nach Bianchi jede Fläche $\hat{\mathfrak{x}}$, welche aus $\mathfrak{x}$ durch Ribaucourtransformation hervorgeht.

31. Um den Bianchischen Ausdruck (25) auf eine einfachere Form zu bringen, setze man

$$\mathfrak{y} = \xi \mathfrak{u}_1 + \eta \mathfrak{u}_2 + \zeta \mathfrak{u}. \tag{29}$$

Nach bekannten Sätzen[1] ist dann aber $\mathfrak{u}(\alpha, \beta)$ auch das auf die Krümmungslinien bezogene sphärische Bild von $\mathfrak{y}$, und zwar erhält man sämtliche Flächen $\mathfrak{y}$ die mit $\mathfrak{x}$ das gleiche sphärische Bild $\mathfrak{u}$ haben, oder wie wir nach Definition 3 sagen wollen, sämtliche Flächen $\mathfrak{y}$, welche mit $\mathfrak{x}$ parallel sind, wenn ζ alle Lösungen von (26) durchläuft und ξ und η durch die Formeln (27) bestimmt sind. Aus (29) folgt ferner

$$\mathfrak{y}^2 = \xi^2 + \eta^2 + \zeta^2.$$

Da offenbar

$$\zeta = \mathfrak{y}\mathfrak{u}, \quad \zeta_\alpha = \mathfrak{y}\mathfrak{u}_\alpha, \quad \zeta_\beta = \mathfrak{y}\mathfrak{u}_\beta \tag{30}$$

ist, so lässt sich auch der Ausdruck (28) für φ umformen, und zwar ergibt sich in Verbindung mit Formel (1) und (30)

$$\varphi = \varphi_0 + \int_{\alpha_0, \beta_0}^{\alpha, \beta} \mathfrak{y}\mathfrak{x}_\alpha d\alpha + \mathfrak{y}\mathfrak{x}_\beta d\beta = \varphi_0 + \int_{\alpha_0, \beta_0}^{\alpha, \beta} \mathfrak{y}\, d\mathfrak{x}, \tag{31}$$

und so erhält man schliesslich

$$\hat{\mathfrak{x}} = \mathfrak{x} - 2\left(\varphi_0 + \int_{\alpha_0, \beta_0}^{\alpha, \beta} \mathfrak{y}\, d\mathfrak{x}\right)\frac{\mathfrak{y}}{\mathfrak{y}^2}, \tag{32}$$

wo $\mathfrak{y}$ eine beliebige Fläche bedeutet, welche mit $\mathfrak{x}$ das gleiche sphärische Bild hat.

Wenn man somit alle Parallelflächen $\mathfrak{y}$ von $\mathfrak{x}$ kennt, so lassen sich auch alle Flächen $\hat{\mathfrak{x}}$ bestimmen, welche aus $\mathfrak{x}$ durch Ribaucourtransformation hervorgehen. In Abschnitt **37.** und **38.** § 2 werden wir noch einmal verifizieren, dass die durch den Ausdruck (32) dargestellte Fläche $\hat{\mathfrak{x}}$ wirklich durch Ribaucourtransformation aus $\mathfrak{x}$ hervorgeht. Wir entnehmen somit Bianchi nur die Tatsache, dass in der Form (25) die *sämtlichen* Ribaucourtransformierten von $\mathfrak{x}$ enthalten sind.

[1] Vgl. etwa Darboux, S. 292—294. Vgl. auch l. c. S. 5 Fussnote 1, S. 641—642.

32. Wir geben hier noch zwei wichtige Bianchische Formeln an, die wir in § 2 gleichfalls von neuem ableiten werden. Bezeichnet R den Radius der transformierenden Ribaucourkugel und $\hat{\mathfrak{u}}$ den Normaleinheitsvektor der transformierten Fläche $\hat{\mathfrak{x}}$, so ist nach Bianchi

$$R = -\frac{\varphi}{\zeta} = -\frac{\varphi_0 + \int\limits_{\alpha_0, \beta_0}^{\alpha, \beta} \mathfrak{y}\, d\mathfrak{x}}{\mathfrak{u}\mathfrak{y}}, \tag{33}$$

$$\hat{\mathfrak{u}} = \mathfrak{u} - 2(\mathfrak{u}\mathfrak{y})\frac{\mathfrak{y}}{\mathfrak{y}^2}. \tag{34}$$

Hierbei ist das Vorzeichen von $\hat{\mathfrak{u}}$ so gewählt, dass sich die Vektoren $\mathfrak{u}$ und $\hat{\mathfrak{u}}$ beide gleichzeitig entweder ins Innere oder Äussere der Ribaucourkugel erstrekken, welche die beiden Flächen $\mathfrak{x}$ und $\hat{\mathfrak{x}}$ in entsprechenden Punkten berührt; und zwar ins Innere für $R > 0$, ins Äussere für $R < 0$. (Vgl. Formel (24).)

Man bemerkt leicht, dass $\hat{\mathfrak{u}}(\alpha, \beta)$ ausserdem das sphärische Bild der Krümmungslinien $\alpha = \text{const.}$, $\beta = \text{const.}$ von $\frac{\mathfrak{y}}{\mathfrak{y}^2} = \mathfrak{y}^{-1}$ (vergl. Formel (4)) liefert.[1] Hieraus folgt aber ein Satz, der unseres Wissens zuerst von Darboux[2] ausgesprochen worden ist.

Satz von Darboux: *Bezeichnet $\hat{\mathfrak{x}}$ eine beliebige Fläche, welche aus $\mathfrak{x}$ durch Ribaucourtransformation hervorgeht, so existiert eine Parallelfläche $\mathfrak{y}$ von $\mathfrak{x}$, derart, dass die Fläche $\mathfrak{y}^{-1}$ auch zu $\hat{\mathfrak{x}}$ parallel ist.*

33. Für die Ribaucourtransformation führen wir jetzt ein abkürzendes Symbol ein und schreiben für den Ausdruck (32):

$$\hat{\mathfrak{x}} = \{\mathfrak{x}, \mathfrak{y}\}.$$

Dieses Symbol ist durch Formel (32) bis auf die Integrationskonstante φ_0 eindeutig bestimmt, wenn $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{y}$ zwei Parallelflächen bedeuten, welche beide auf die Krümmungslinien als Parameterkurven bezogen sind.

Will man der Integrationskonstanten φ_0 einen festen Wert c geben, so schreiben wir auch

$$\hat{\mathfrak{x}} = \{\mathfrak{x}, \mathfrak{y}\}_c. \tag{35}$$

[1] Vgl. Bianchi, S. 181—183.
[2] Darboux, l. c. S. 5 Fussnote 4, S. 401—402.

Mithin ist dann

$$\{\mathfrak{x}, \mathfrak{y}\}_{c_1+c_2} = \{\mathfrak{x}, \mathfrak{y}\}_{c_1} - 2c_2\mathfrak{y}^{-1} \tag{36}$$

Endlich benutzen wir noch die Abkürzungen

$$\{\mathfrak{x}, \mathfrak{y}\}_* \quad \text{bezw.} \quad \{\mathfrak{x}, \mathfrak{y}\}_{*+c}, \tag{37}$$

wenn $\varphi_0 = \mathfrak{x}_0\mathfrak{y}_0$ bezw. $\varphi_0 = \mathfrak{x}_0\mathfrak{y}_0 + c$ gesetzt werden soll, unter $\mathfrak{x}_0$ und $\mathfrak{y}_0$ die Abkürzungen aus Formel (3) verstanden.

34. Setzt man in Formel (32) $\mathfrak{y} = \mathfrak{x}$, so ergibt sich

$$\begin{gathered} \varphi = \varphi_0 + \frac{\mathfrak{x}^2 - \mathfrak{x}_0^2}{2}, \\ \hat{\mathfrak{x}} = (\mathfrak{x}_0^2 - 2\varphi_0)\mathfrak{x}^{-1}. \end{gathered} \tag{38}$$

Somit erscheint hier die Inversion als Spezialfall der Ribaucourttransformation. Speziell erhält man

$$\begin{cases} \hat{\mathfrak{x}} = 0 & \text{für} \quad \varphi_0 = \dfrac{\mathfrak{x}_0^2}{2}, \\ \hat{\mathfrak{x}} = \dfrac{\mathfrak{x}}{\mathfrak{x}^2} = \mathfrak{x}^{-1} & \text{für} \quad \varphi_0 = \dfrac{\mathfrak{x}_0^2 - 1}{2}. \end{cases} \tag{39}$$

Im Fall $\hat{\mathfrak{x}} = 0$ gehen offenbar alle Kugeln durch den o-Punkt, und zwar ist durch diese Bedingung die zugehörige Ribaucourttransformation eindeutig bestimmt.

In der symbolischen Schreibweise wird aus den Formeln (39) und (38):

$$\begin{cases} \dfrac{\mathfrak{x}}{\mathfrak{x}^2} = \{\mathfrak{x}, \mathfrak{x}\}_{\frac{\mathfrak{x}_0^2-1}{2}}, \quad 0 = \{\mathfrak{x}, \mathfrak{x}\}_{\frac{\mathfrak{x}_0^2}{2}}, \\ \{\mathfrak{x}, \mathfrak{x}\}_c = (\mathfrak{x}_0^2 - 2c)\dfrac{\mathfrak{x}}{\mathfrak{x}^2}. \end{cases} \tag{40}$$

Da ferner

$$d(\mathfrak{u}\mathfrak{y}) = \mathfrak{y}\, d\mathfrak{u}$$

ist, so folgt aus (34)

$$\hat{\mathfrak{u}} = \mathfrak{u} - 2\left(\mathfrak{u}_0\mathfrak{y}_0 + \int\limits_{\alpha_0, \beta_0}^{\alpha, \beta} \mathfrak{y}\, d\mathfrak{u}\right)\frac{\mathfrak{y}}{\mathfrak{y}^2} = \{\mathfrak{u}, \mathfrak{y}\}_*. \tag{41}$$

Andererseits ist offenbar wegen $\mathfrak{u}^2 = 1$, $\mathfrak{u}\, d\mathfrak{x} = 0$

$$\{\mathfrak{x}, \mathfrak{u}\}_c = \mathfrak{x} - 2c\mathfrak{u}, \tag{42}$$

d. h. aber: Der Ausdruck $\{\mathfrak{x}, \mathfrak{u}\}_c$ liefert die Parallelflächen im engeren Sinne von $\mathfrak{x}$ (vgl. Definition 4).

Eine weitere spezielle Ribaucourtransformation liefert der Ausdruck

$$\begin{aligned} \hat{\mathfrak{x}} &= \{\mathfrak{x}, \mathfrak{a}\}_{*+c} \\ &= \mathfrak{x} - 2(c + \mathfrak{a}\mathfrak{x})\frac{\mathfrak{a}}{\mathfrak{a}^2}, \end{aligned} \tag{43}$$

unter $\mathfrak{a}$ einen festen, von α und β unabhängigen Vektor verstanden. Eine leichte Überlegung zeigt, dass die in (43) definierte Fläche $\hat{\mathfrak{x}}$ aus $\mathfrak{x}$ durch Spiegelung an der Ebene ε, welche durch die Gleichung

$$\mathfrak{a}\mathfrak{y} + c = 0$$

bestimmt ist, hervorgeht; und zwar schneidet die Schar der Ribaucourkugeln die Ebene ε rechtwinklig.

35. Man bemerkt leicht, dass das Symbol $\{\mathfrak{x}, \mathfrak{y}\}$ einen in $\mathfrak{x}$ linearen Ausdruck bezeichnet, und man erhält die aus (32) folgenden Beziehungen

$$\begin{cases} t_1\{\mathfrak{x}_1, \mathfrak{y}\}_{c_1} + t_2\{\mathfrak{x}_2, \mathfrak{y}\}_{c_2} = \{t_1\mathfrak{x}_1 + t_2\mathfrak{x}_2, \mathfrak{y}\}_{t_1c_1+t_2c_2}, \\ t_1\{\mathfrak{x}_1, \mathfrak{y}\}_{*+c_1} + t_2\{\mathfrak{x}_2, \mathfrak{y}\}_{*+c_2} = \{t_1\mathfrak{x}_1 + t_2\mathfrak{x}_2, \mathfrak{y}\}_{*+t_1c_1+t_2c_2}, \end{cases} \tag{44}$$

wenn $\mathfrak{x}_1$ und $\mathfrak{x}_2$ Parallelflächen zur Fläche $\mathfrak{y}$ bezeichnen.

Ist wieder $\mathfrak{a}$ ein fester, von α und β unabhängiger Vektor, so hat man

$$\{\mathfrak{a} + \mathfrak{x}, \mathfrak{y}\}_c = \mathfrak{a} + \{\mathfrak{x}, \mathfrak{y}\}_c. \tag{45}$$

Nicht so einfach ist die Abhängigkeit des Symbols (35) von seinem zweiten Element $\mathfrak{y}$. Indessen leitet man auch hier unmittelbar aus (32) die Beziehungen

$$\begin{cases} \{\mathfrak{x}, \mathfrak{y}\}_c = \{\mathfrak{x}, t\mathfrak{y}\}_{tc}, \\ \{\mathfrak{x}, \mathfrak{y}\}_{*+c} = \{\mathfrak{x}, t\mathfrak{y}\}_{*+tc} \end{cases} \tag{46}$$

ab.

§ 2. Ribaucourttransformation und Inversion einer Fläche.

36. Bei der Ableitung der Sätze über Ribaucourttransformationen, die das Ziel der Betrachtungen dieses Kapitels sind, stützen wir uns auf einen Hilfssatz, dessen Beweis wir an die Spitze dieses Kapitels stellen wollen. Aus ihm folgert man auch leicht die in den Abschnitten **31**. und **32**. angegebenen Bianchischen Formeln.

Hilfssatz: *Es seien* $\mathfrak{x}(\alpha, \beta)$ *und* $\mathfrak{y}(\alpha, \beta)$ *zwei Parallelflächen, deren Krümmungslinien mit den Parameterlinien* $\alpha =$ const., $\beta =$ const. *zusammenfallen, und es sei ferner* $\varphi(\alpha, \beta)$ *eine stetig differenziierbare Funktion. Damit die Fläche*

$$\hat{\mathfrak{x}} = \mathfrak{x} - 2\varphi\mathfrak{y}^{-1} \tag{47}$$

zu der Fläche $\mathfrak{y}^{-1}$ *parallel ist, ist notwendig und hinreichend, dass*

$$\varphi = \varphi_0 + \int_{\alpha_0, \beta_0}^{\alpha, \beta} \mathfrak{y}\, d\mathfrak{x}, \tag{48}$$

d. h. dass

$$\hat{\mathfrak{x}} = \{\mathfrak{x}, \mathfrak{y}\}_{\varphi_0}.$$ [1]

Beweis: Aus der Voraussetzung

$$\mathfrak{x}_\alpha \quad \mathfrak{y}_\alpha, \quad \mathfrak{x}_\beta \quad \mathfrak{y}_\beta$$

folgt,

$$\mathfrak{x}_\alpha = \lambda\mathfrak{y}_\alpha, \quad \mathfrak{x}_\beta = \mu\mathfrak{y}_\beta. \tag{49}$$

Es sei ferner $\mathfrak{u}(\alpha, \beta)$ das auf die Krümmungslinien bezogene gemeinsame sphärische Bild von $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{y}$. Ausserdem werde gesetzt

$$(d\mathfrak{u})^2 = h_1^2 d\alpha^2 + h_2^2 d\beta^2,$$
$$(d\mathfrak{x})^2 = H_1^2 d\alpha^2 + H_2^2 d\beta^2,$$
$$\mathfrak{u}_1 = \frac{\mathfrak{u}_\alpha}{h_1}, \quad \mathfrak{u}_2 = \frac{\mathfrak{u}_\beta}{h_2}, \quad \mathfrak{u} = -\mathfrak{u}_1 \times \mathfrak{u}_2,$$
$$\mathfrak{u}\mathfrak{y} = \zeta, \quad \mathfrak{u}_1\mathfrak{y} = \xi, \quad \mathfrak{u}_2\mathfrak{y} = \eta. \tag{50}$$

---

[1] Dass die Bedingung hinreichend ist, folgt bereits aus dem Satze von Darboux in der Bianchischen Form (vgl. die Ausführungen in Abschn. **32** § 1); dies wird aber hier zur Bequemlichkeit des Lesers noch einmal gezeigt.

Dann ist

$$\mathfrak{x}_\alpha = H_1 \mathfrak{u}_1, \quad \mathfrak{x}_\beta = H_2 \mathfrak{u}_2$$

und wegen (49)

$$(51) \qquad \mathfrak{y}_\alpha = \frac{H_1}{\lambda} \mathfrak{u}_1, \quad \mathfrak{y}_\beta = \frac{H_2}{\mu} \mathfrak{u}_2 .$$

Endlich erhält man (vgl. Formel (27) und (29) in Abschn. **30.** und **31.**)

$$(52) \qquad \xi = \frac{\zeta_\alpha}{h_1}, \quad \eta = \frac{\zeta_\beta}{h_2},$$

$$(53) \qquad \mathfrak{y} = \xi \mathfrak{u}_1 + \eta \mathfrak{u}_2 + \zeta \mathfrak{u} .$$

Nunmehr folgt aus (47) und (49)

$$(54) \qquad \begin{cases} \hat{\mathfrak{x}}_\alpha = \left(\lambda - \dfrac{2\varphi}{\mathfrak{y}^2}\right) \mathfrak{y}_\alpha - 2\left(\varphi_\alpha - 2\varphi \dfrac{\mathfrak{y}\mathfrak{y}_\alpha}{\mathfrak{y}^2}\right) \dfrac{\mathfrak{y}}{\mathfrak{y}^2}, \\ \hat{\mathfrak{x}}_\beta = \left(\mu - \dfrac{2\varphi}{\mathfrak{y}^2}\right) \mathfrak{y}_\beta - 2\left(\varphi_\beta - 2\varphi \dfrac{\mathfrak{y}\mathfrak{y}_\beta}{\mathfrak{y}^2}\right) \dfrac{\mathfrak{y}}{\mathfrak{y}^2} . \end{cases}$$

Damit nun, wie es in der Voraussetzung unseres Hilfssatzes gefordert wird,

$$\hat{\mathfrak{x}}_\alpha \parallel \frac{\partial}{\partial \alpha}\left(\frac{\mathfrak{y}}{\mathfrak{y}^2}\right), \quad \hat{\mathfrak{x}}_\beta \parallel \frac{\partial}{\partial \beta}\left(\frac{\mathfrak{y}}{\mathfrak{y}^2}\right)$$

wird, ist notwendig und hinreichend, dass

$$(55) \quad \hat{\mathfrak{x}}_\alpha = \hat{\lambda} \frac{\partial}{\partial \alpha}\left(\frac{\mathfrak{y}}{\mathfrak{y}^2}\right) = \frac{\hat{\lambda}}{\mathfrak{y}^2}\left(\mathfrak{y}_\alpha - 2\mathfrak{y}\mathfrak{y}_\alpha \frac{\mathfrak{y}}{\mathfrak{y}^2}\right), \quad \hat{\mathfrak{x}}_\beta = \hat{\mu} \frac{\partial}{\partial \beta}\left(\frac{\mathfrak{y}}{\mathfrak{y}^2}\right) = \frac{\hat{\mu}}{\mathfrak{y}^2}\left(\mathfrak{y}_\beta - 2\mathfrak{y}\mathfrak{y}_\beta \frac{\mathfrak{y}}{\mathfrak{y}^2}\right) .$$

Vergleicht man die Koeffizienten von $\mathfrak{y}_\alpha$ bezw. $\mathfrak{y}_\beta$ in den Formeln (54) und (55) miteinander, so erkennt man, dass

$$\frac{\hat{\lambda}}{\mathfrak{y}^2} = \lambda - \frac{2\varphi}{\mathfrak{y}^2}, \quad \frac{\hat{\mu}}{\mathfrak{y}^2} = \mu - \frac{2\varphi}{\mathfrak{y}^2}$$

zu setzen ist. Dann ergeben sich aber für die Koeffizienten von $\dfrac{\mathfrak{y}}{\mathfrak{y}^2}$ in (54) die Beziehungen

$$(56) \qquad \begin{cases} \varphi_\alpha - 2\varphi \dfrac{\mathfrak{y}\mathfrak{y}_\alpha}{\mathfrak{y}^2} = \dfrac{\hat{\lambda}\mathfrak{y}\mathfrak{y}_\alpha}{\mathfrak{y}^2} = \mathfrak{y}\mathfrak{y}_\alpha\left(\lambda - \dfrac{2\varphi}{\mathfrak{y}^2}\right), \\ \varphi_\beta - 2\varphi \dfrac{\mathfrak{y}\mathfrak{y}_\beta}{\mathfrak{y}^2} = \dfrac{\hat{\mu}\mathfrak{y}\mathfrak{y}_\beta}{\mathfrak{y}^2} = \mathfrak{y}\mathfrak{y}_\beta\left(\mu - \dfrac{2\varphi}{\mathfrak{y}^2}\right), \end{cases}$$

d. h. aber

$$\varphi_\alpha = \lambda \mathfrak{y}\mathfrak{y}_\alpha = \mathfrak{y}\mathfrak{x}_\alpha, \quad \varphi_\beta = \mu \mathfrak{y}\mathfrak{y}_\beta = \mathfrak{y}\mathfrak{x}_\beta,$$

$$\varphi = \varphi_0 + \int\limits_{\alpha_0, \beta_0}^{\alpha, \beta} (\mathfrak{y}\mathfrak{x}_\alpha) d\alpha + (\mathfrak{y}\mathfrak{x}_\beta) d\beta = \varphi_0 + \int\limits_{\alpha_0, \beta_0}^{\alpha, \beta} \mathfrak{y}\, d\mathfrak{x} \qquad \text{w. z. b. w.}$$

37. Es lässt sich jetzt leicht von neuem zeigen, dass die durch die Formeln (47) und (48) bestimmte Fläche $\hat{\mathfrak{x}}$ durch Ribaucourtransformation aus der Fläche $\mathfrak{x}$ hervorgeht. Zu diesem Zwecke formen wir zunächst die Ausdrücke (54) für $\hat{\mathfrak{x}}_\alpha$ und $\hat{\mathfrak{x}}_\beta$ um.

Aus (51) und (53) folgt

$$\mathfrak{y}\mathfrak{y}_\alpha = \frac{H_1}{\lambda} \xi, \quad \mathfrak{y}\mathfrak{y}_\beta = \frac{H_2}{\mu} \eta. \tag{57}$$

Dies in (54) eingesetzt ergibt in Verbindung mit (51) und (56)

$$\left\{ \begin{aligned} \hat{\mathfrak{x}}_\alpha &= \frac{H_1}{\lambda} \left(\lambda - \frac{2\varphi}{\mathfrak{y}^2}\right) \left(\mathfrak{u}_1 - 2\xi \frac{\mathfrak{y}}{\mathfrak{y}^2}\right), \\ \hat{\mathfrak{x}}_\beta &= \frac{H_2}{\mu} \left(\mu - \frac{2\varphi}{\mathfrak{y}^2}\right) \left(\mathfrak{u}_2 - 2\eta \frac{\mathfrak{y}}{\mathfrak{y}^2}\right). \end{aligned} \right. \tag{58}$$

Setzt man

$$\hat{\mathfrak{u}}_1 = \mathfrak{u}_1 - 2\xi \frac{\mathfrak{y}}{\mathfrak{y}^2}, \quad \hat{\mathfrak{u}}_2 = \mathfrak{u}_2 - 2\eta \frac{\mathfrak{y}}{\mathfrak{y}^2},$$

so ist

$$\hat{\mathfrak{x}}_\alpha \;\; \hat{\mathfrak{u}}_1, \quad \hat{\mathfrak{x}}_\beta \;\; \hat{\mathfrak{u}}_2;$$

ausserdem bemerkt man leicht, dass

$$\hat{\mathfrak{u}}_1^2 = 1, \quad \hat{\mathfrak{u}}_2^2 = 1, \quad \hat{\mathfrak{u}}_1 \hat{\mathfrak{u}}_2 = 0$$

ist. Folglich ergibt sich für den Normaleinheitsvektor von $\hat{\mathfrak{x}}$

$$\hat{\mathfrak{u}} = \hat{\mathfrak{u}}_1 \times \hat{\mathfrak{u}}_2.^1$$

[1] Während $\mathfrak{u} = -\mathfrak{u}_1 \times \mathfrak{u}_2$ definiert war, wird hier $\hat{\mathfrak{u}} = \hat{\mathfrak{u}}_1 \times \hat{\mathfrak{u}}_2$ gesetzt. Diese Unsymmetrie in der Wahl des Vorzeichens von $\mathfrak{u}$ und $\hat{\mathfrak{u}}$ hat, wie schon in Abschnitt **32.** § 1 erwähnt wurde, den Zweck, dass sich die Normalvektoren $\mathfrak{u}$ und $\hat{\mathfrak{u}}$ beide ins innere der $\mathfrak{x}$ und $\hat{\mathfrak{x}}$ berührenden Ribaucourkugel erstrecken.

Eine einfache Rechnung, bei der man für $\mathfrak{y}$ den Ausdruck (53) einsetzt, ergibt

$$\hat{\mathfrak{u}} = \hat{\mathfrak{u}}_1 \times \hat{\mathfrak{u}}_2 = \mathfrak{u} - 2\zeta\frac{\mathfrak{y}}{\mathfrak{y}^2}, \tag{59}$$

in Übereinstimmung mit der Bianchischen Formel (34).

Differenziert man jetzt (59) nach α und β, so ergibt sich

$$\begin{aligned} \hat{\mathfrak{u}}_\alpha &= \mathfrak{u}_\alpha - 2\zeta\frac{\mathfrak{y}_\alpha}{\mathfrak{y}^2} - 2\left(\zeta_\alpha - 2\zeta\frac{\mathfrak{y}\mathfrak{y}_\alpha}{\mathfrak{y}^2}\right)\frac{\mathfrak{y}}{\mathfrak{y}^2} \\ &= \left(h_1 - \frac{2\zeta H_1}{\lambda\mathfrak{y}^2}\right)\left(\mathfrak{u}_1 - 2\xi\frac{\mathfrak{y}}{\mathfrak{y}^2}\right) \quad \text{wegen (23), (51), (52) und (57)} \\ &= \left(h_1 - \frac{2\zeta H_1}{\lambda\mathfrak{y}^2}\right)\hat{\mathfrak{u}}_1, \end{aligned}$$

und entsprechend

$$\hat{\mathfrak{u}}_\beta = \left(h_2 - \frac{2\zeta H_2}{\mu\mathfrak{y}^2}\right)\hat{\mathfrak{u}}_2,$$

d. h. aber es ist

$$\hat{\mathfrak{u}}_\alpha \parallel \hat{\mathfrak{u}}_1 \parallel \hat{\mathfrak{x}}_\alpha, \quad \hat{\mathfrak{u}}_\beta \parallel \hat{\mathfrak{u}}_2 \parallel \hat{\mathfrak{x}}_\beta.$$

Hieraus folgt aber unmittelbar, dass die Parameterlinien $\alpha = \text{const.}$, $\beta = \text{const.}$ der Fläche $\hat{\mathfrak{x}}$ mit ihren Krümmungslinien zusammenfallen.

38. Um jetzt zu beweisen, dass die Fläche $\hat{\mathfrak{x}}$ durch Ribaucourtransformation aus $\mathfrak{x}$ hervorgeht, haben wir noch zu zeigen, das $\mathfrak{x}$ und $\hat{\mathfrak{x}}$ als die beiden Mäntel der Hüllfläche einer Kugelkongruenz Σ erscheinen; d. h. wir haben eine Funktion $R(\alpha, \beta)$ zu bestimmen, derart, dass

$$\mathfrak{x} + R\mathfrak{u} = \hat{\mathfrak{x}} + R\hat{\mathfrak{u}} \tag{60}$$

wird. R ist dann der Radius der Kugeln von Σ und $\mathfrak{s} = \mathfrak{x} + R\mathfrak{u}$ die Fläche der Kugelmittelpunkte. Nun ist aber nach (47) und (59)

$$\hat{\mathfrak{x}} + R\hat{\mathfrak{u}} = \mathfrak{x} + R\mathfrak{u} - 2(\varphi + R\zeta)\mathfrak{y}^{-1}.$$

Für

$$R = -\frac{\varphi}{\zeta}$$

ist mithin die Bedingung (60) erfüllt. Damit ist auch gleichzeitig die Bianchische Formel (33) bewiesen.

Somit ist von neuem gezeigt, dass durch die Formeln (47) und (48) eine Ribaucourtransformation bestimmt wird, und wir entnehmen somit Bianchi nur die Tatsache, dass in der Form (47) die sämtlichen Ribaucourtransformationen von $\mathfrak{x}$ gegeben sind.

Setzt man noch

$$R_1 = -\frac{\varphi}{\xi}, \quad R_2 = -\frac{\varphi}{\eta},$$

so beweist man leicht die Gleichungen

$$\mathfrak{x} + R_1 \mathfrak{u}_1 = \hat{\mathfrak{x}} + R_1 \hat{\mathfrak{u}}_1, \quad \mathfrak{x} + R_2 \mathfrak{u}_2 = \hat{\mathfrak{x}} + R_2 \hat{\mathfrak{u}}_2, \tag{61}$$

deren anschauliche geometrische Deutung wir dem Leser überlassen.

39. Es sei wieder

$$\hat{\mathfrak{x}} = \{\mathfrak{x}, \mathfrak{y}\}_{\varphi_0}. \tag{62}$$

Wir machen eine erste Anwendung unseres Hilfssatzes indem wir diejenige zu (62) inverse Transformation zu bestimmen suchen, durch welche $\mathfrak{x}$ aus $\hat{\mathfrak{x}}$ hervorgeht. Aus (47) folgt

$$\mathfrak{x} = \hat{\mathfrak{x}} + \frac{2\varphi}{\mathfrak{y}^2}\mathfrak{y} = \hat{\mathfrak{x}} - 2\hat{\varphi}\mathfrak{y}, \quad \hat{\varphi} = -\frac{\varphi}{\mathfrak{y}^2}.$$

Nun ist aber $\hat{\mathfrak{x}}$ eine Parallelfläche zu $\mathfrak{y}^{-1}$, $\mathfrak{x}$ eine Parallelfläche zu $\mathfrak{y}$, es sind mithin die Voraussetzungen des Hilfssatzes erfüllt und es ergibt sich

$$\hat{\varphi} = -\frac{\varphi}{\mathfrak{y}^2} = -\frac{\varphi_0}{\mathfrak{y}_0^2} + \int\limits_{\alpha_0, \beta_0}^{\alpha, \beta} \mathfrak{y}^{-1} d\hat{\mathfrak{x}},$$

$$\mathfrak{x} = \{\hat{\mathfrak{x}}, \mathfrak{y}^{-1}\}_{\hat{\varphi}_0}, \quad \hat{\varphi}_0 = -\frac{\varphi_0}{\mathfrak{y}_0^2}. \tag{63}$$

40. Zu einer gegebenen Fläche $\mathfrak{y}$ seien alle Parallelflächen $\mathfrak{x}$ bekannt. Dann bestimmt der Ausdruck (62) nach dem Hilfssatz lauter Parallelflächen zu $\mathfrak{y}^{-1}$. Wir wollen zeigen, dass man sämtliche Parallelflächen zu $\mathfrak{y}^{-1}$ erhält, wenn man in dem Ausdruck (62) $\mathfrak{x}$ alle Parallelflächen von $\mathfrak{y}$ durchlaufen lässt.

Beweis: Es sei $\hat{\mathfrak{x}}$ eine beliebige Parallelfläche zu $\mathfrak{y}^{-1}$. Bildet man

$$\mathfrak{x} = \{\hat{\mathfrak{x}}, \mathfrak{y}^{-1}\}_{\varphi_0},$$

so ist nach dem Hilfssatz die Fläche $\mathfrak{x}$ eine Parallelfläche zu $\mathfrak{y}$. Dann ist aber auch umgekehrt nach den Ausführungen des vorigen Abschnitts (vgl. Formel (62) und (63))

$$\hat{\mathfrak{x}} = \{\mathfrak{x}, \mathfrak{y}\}_{\varphi_0}, \quad \varphi_0 = -\hat{\varphi}_0 \mathfrak{y}_0^2$$ w. z. b. w.

Zusammenfassend formulieren wir

Satz 1: *Es sei der Ausdruck*

(64) $$\hat{\mathfrak{x}} = \{\mathfrak{x}, \mathfrak{y}\}_c$$

vorgelegt.

Ist $\mathfrak{x}(\alpha, \beta)$ *eine feste Fläche, und lässt man* c *alle reellen Werte,* $\mathfrak{y}(\alpha, \beta)$ *alle Parallelflächen zu* $\mathfrak{x}(\alpha, \beta)$ *durchlaufen, so sind durch* (64) *alle Flächen* $\hat{\mathfrak{x}}$ *bestimmt, welche aus* $\mathfrak{x}$ *durch Ribaucourtransformation hervorgehen.*

Ist aber $\mathfrak{y}(\alpha, \beta)$ *eine feste Fläche, und lässt man* c *alle reellen Werte,* $\mathfrak{x}(\alpha, \beta)$ *alle Parallelflächen zu* $\mathfrak{y}(\alpha, \beta)$ *durchlaufen, so liefert der Ausdruck* (64) *für* $\hat{\mathfrak{x}}$ *alle Parallelflächen zu* $\mathfrak{y}^{-1}$.

§ 3. Die Inversion einer nach Ribaucour transformierten Fläche.

41. Es seien wieder $\mathfrak{x}(\alpha, \beta)$ und $\mathfrak{y}(\alpha, \beta)$ zwei zueinander parallele Flächen. Wir suchen jetzt zunächst nach einer Beziehung zwischen den beiden Flächen $\{\mathfrak{x}, \mathfrak{y}\}$ und $\{\mathfrak{y}, \mathfrak{x}\}$ und behaupten:

Satz 2: *Die beiden Flächen*

$$\hat{\mathfrak{x}}^{-1} = \{\mathfrak{x}, \mathfrak{y}\}_c^{-1} \quad \textit{und} \quad \hat{\mathfrak{y}}^{-1} = \{\mathfrak{y}, \mathfrak{x}\}_{*-c}^{-1}$$

sind zueinander parallel (vergl. Formel (37) § 1).

Beweis: Wir setzen

$$\varphi = c + \int_{\alpha_0, \beta_0}^{\alpha, \beta} \mathfrak{y}\, d\mathfrak{x},$$

$$(65)\quad\left\{\begin{aligned}\varphi^* &= \mathfrak{x}\mathfrak{y} - \varphi = \mathfrak{x}\mathfrak{y} - c - \int\limits_{\alpha_0,\beta_0}^{\alpha,\beta} \mathfrak{y}\,d\mathfrak{x}\\ &= \mathfrak{x}_0\mathfrak{y}_0 - c + \int\limits_{\alpha_0,\beta_0}^{\alpha,\beta} \mathfrak{x}\,d\mathfrak{y}.\end{aligned}\right.$$

Dann ist

$$\hat{\mathfrak{x}} = \{\mathfrak{x}, \mathfrak{y}\}_c \quad = \mathfrak{x} - 2\varphi\mathfrak{y}^{-1},$$
$$\hat{\mathfrak{y}} = \{\mathfrak{y}, \mathfrak{x}\}_{*-c} = \mathfrak{y} - 2\varphi^*\mathfrak{x}^{-1};$$

weiter ergibt sich

$$\begin{aligned}\hat{\mathfrak{x}}^2 &= \mathfrak{x}^2 - 4\varphi\frac{\mathfrak{x}\mathfrak{y}}{\mathfrak{y}^2} + \frac{4\varphi^2}{\mathfrak{y}^2}\\ &= \frac{\mathfrak{x}^2\mathfrak{y}^2 - 4\varphi\varphi^*}{\mathfrak{y}^2} \qquad \text{(wegen (65))}\end{aligned}$$

und entsprechend

$$\hat{\mathfrak{y}}^2 = \frac{\mathfrak{x}^2\mathfrak{y}^2 - 4\varphi\varphi^*}{\mathfrak{x}^2}.$$

Hieraus folgt aber

$$(66)\quad\left\{\begin{aligned}\hat{\mathfrak{x}}^{-1} &= \{\mathfrak{x}, \mathfrak{y}\}_c^{-1} = \frac{\mathfrak{y}^2\mathfrak{x} - 2\varphi\mathfrak{y}}{\mathfrak{x}^2\mathfrak{y}^2 - 4\varphi\varphi^*},\\ \hat{\mathfrak{y}}^{-1} &= \{\mathfrak{y}, \mathfrak{x}\}_{*-c}^{-1} = \frac{\mathfrak{x}^2\mathfrak{y} - 2\varphi^*\mathfrak{x}}{\mathfrak{x}^2\mathfrak{y}^2 - 4\varphi\varphi^*}.\end{aligned}\right.$$

Es sei ferner

$\mathfrak{u}$ der Normaleinheitsvektor von $\mathfrak{x}$,
$\hat{\mathfrak{u}}$ der Normaleinheitsvektor von $\hat{\mathfrak{x}}$,
$\hat{\hat{\mathfrak{u}}}$ der Normaleinheitsvektor von $\hat{\mathfrak{x}}^{-1}$,

dann ergibt sich nach Formel (34)

$$\hat{\mathfrak{u}} = \mathfrak{u} - 2(\mathfrak{u}\mathfrak{y})\mathfrak{y}^{-1},$$
$$\hat{\hat{\mathfrak{u}}} = \hat{\mathfrak{u}} - 2(\hat{\mathfrak{u}}\hat{\mathfrak{x}})\hat{\mathfrak{x}}^{-1}.$$

Andererseits ist

$$\begin{aligned}\hat{\mathfrak{u}}\hat{\mathfrak{x}} &= \mathfrak{u}\mathfrak{x} - 2\varphi\frac{\mathfrak{u}\mathfrak{y}}{\mathfrak{y}^2} - 2\mathfrak{u}\mathfrak{y}\frac{\mathfrak{x}\mathfrak{y}}{\mathfrak{y}^2} + 4\varphi\frac{\mathfrak{u}\mathfrak{y}}{\mathfrak{y}^2}\\ &= \mathfrak{u}\mathfrak{x} - 2\frac{\mathfrak{u}\mathfrak{y}}{\mathfrak{y}^2}\varphi^* \qquad \text{(wegen (65)).}\end{aligned}$$

Folglich

$$\hat{\hat{\mathfrak{u}}} = \mathfrak{u} - 2\frac{\mathfrak{u}\mathfrak{y}}{\mathfrak{y}^2}\mathfrak{y} - 2\left(\mathfrak{u}\mathfrak{x} - \frac{2\,\mathfrak{u}\mathfrak{y}}{\mathfrak{y}^2}\varphi^*\right)\frac{\mathfrak{y}^2\mathfrak{x} - 2\varphi\mathfrak{y}}{\mathfrak{x}^2\mathfrak{y}^2 - 4\varphi\varphi^*} \qquad \text{(wegen (66))}$$

$$(67) \qquad = \mathfrak{u} - 2\frac{((\mathfrak{u}\mathfrak{x})\mathfrak{y}^2 - 2(\mathfrak{u}\mathfrak{y})\varphi^*)\mathfrak{x} + ((\mathfrak{u}\mathfrak{y})\mathfrak{x}^2 - 2(\mathfrak{u}\mathfrak{x})\varphi)\mathfrak{y}}{\mathfrak{x}^2\mathfrak{y}^2 - 4\varphi\varphi^*}$$

Bezeichnet entsprechend $\mathfrak{u}^*$ bezw. $\hat{\mathfrak{u}}^*$ bezw. $\hat{\hat{\mathfrak{u}}}^*$ den Normaleinheitsvektor von $\mathfrak{y}$, bezw. $\hat{\mathfrak{y}}$ bezw. $\hat{\mathfrak{y}}^{-1}$, so erhält man $\hat{\hat{\mathfrak{u}}}^*$, indem man in Formel (67), $\mathfrak{x}$ mit $\mathfrak{y}$ und φ mit φ^* vertauscht. Man bemerkt nun aber, dass der Ausdruck (67) durch diese Substitution in sich selbst übergeht, d. h., es ist, wie behauptet,

$$\hat{\hat{\mathfrak{u}}} = \hat{\hat{\mathfrak{u}}}^*,$$

und die Flächen $\hat{\mathfrak{x}}^{-1}$ und $\hat{\mathfrak{y}}^{-1}$ sind zueinander parallel. W. z. b. w.

42. Die Frage der Vertauschung von zwei verschiedenen, hintereinander ausgeführten Inversionen führt auf eine einfache Anwendung von Satz 2. Man setze $\mathfrak{x} = \mathfrak{a} + \mathfrak{y}$, unter $\mathfrak{a}$ einen von α und β unabhängigen Vektor verstanden. Dann ist nach Formel (45) und (40)

$$(68) \qquad \{\mathfrak{a} + \mathfrak{y}, \mathfrak{y}\}_c = \mathfrak{a} + (\mathfrak{y}_0^2 - 2c)\frac{\mathfrak{y}}{\mathfrak{y}^2}\cdot$$

Andererseits ist

$$(69) \qquad \{\mathfrak{y}, \mathfrak{a} + \mathfrak{y}\}_{*-c} = -\mathfrak{a} + \{\mathfrak{a} + \mathfrak{y}, \mathfrak{a} + \mathfrak{y}\}_{c'} = -\mathfrak{a} + c''(\mathfrak{a} + \mathfrak{y})^{-1},$$

wobei nach Formel (37) und (40)

$$c' = \mathfrak{a}\mathfrak{y}_0 + \mathfrak{y}_0^2 - c,$$
$$c'' = (\mathfrak{a} + \mathfrak{y}_0)^2 - 2c' = \mathfrak{a}^2 - \mathfrak{y}_0^2 + 2c$$

zu setzen ist.

Jetzt folgt aber aus Satz 2, dass wegen (68) und (69) die beiden durch je zwei Inversionen aus $\mathfrak{y}$ entstandenen Flächen

$$(\mathfrak{a} + \gamma\mathfrak{y}^{-1})^{-1} \quad \text{und} \quad (-\mathfrak{a} + (\mathfrak{a}^2 - \gamma)(\mathfrak{a} + \mathfrak{y})^{-1})^{-1}$$
$$(\gamma = \mathfrak{y}_0^2 - 2c)$$

zueinander parallel sind.

43. Ist die Fläche $\hat{\mathfrak{x}}$ durch Ribaucourtransformation aus $\mathfrak{x}$ hervorgegangen, so muss auch $\hat{\mathfrak{x}}^{-1}$ durch Ribaucourtransformation aus $\mathfrak{x}^{-1}$ hervorgehen. Denn bei Inversion gehen Kugeln in Kugeln und Krümmungslinien in Krümmungslinien über. Zur näheren Bestimmung dieser Transformation dient der

Satz 3. *Es ist*

$$\{\mathfrak{x}, \mathfrak{y}\}_c^{-1} = \mathfrak{x}^{-1} - 2\frac{\varphi}{\mathfrak{x}^2}\{\mathfrak{y}, \mathfrak{x}\}_{*-c}^{-1} = \{\mathfrak{x}^{-1}, \{\mathfrak{y}, \mathfrak{x}\}_{*-c}\}_{\frac{c}{\mathfrak{x}_0^2}},$$

wobei

$$\varphi = c + \int\limits_{\alpha_0, \beta_0}^{\alpha, \beta} \mathfrak{y}\, d\mathfrak{x}$$

gesetzt ist.

Beweis: Wir gehen vom Beweise des Satzes 2 aus und folgern aus Formel (66)

$$\begin{aligned}\{\mathfrak{x}, \mathfrak{y}\}_c^{-1} - \mathfrak{x}^{-1} &= \frac{(\mathfrak{x}^2\mathfrak{y}^2 - \mathfrak{x}^2\mathfrak{y}^2 + 4\varphi\varphi^*)\,\mathfrak{x} - 2\varphi\mathfrak{x}^2\mathfrak{y}}{(\mathfrak{x}^2\mathfrak{y}^2 - 4\varphi\varphi^*)\mathfrak{x}^2} \\ &= -2\frac{\varphi}{\mathfrak{x}^2}\cdot\frac{\mathfrak{x}^2\mathfrak{y} - 2\varphi^*\mathfrak{x}}{\mathfrak{x}^2\mathfrak{y}^2 - 4\varphi\varphi^*},\end{aligned}$$

d. h. aber mit Rücksicht auf (66):

$$\{\mathfrak{x}, \mathfrak{y}\}_c^{-1} = \mathfrak{x}^{-1} - 2\frac{\varphi}{\mathfrak{x}^2}\{\mathfrak{y}, \mathfrak{x}\}_{*-c}^{-1}. \tag{70}$$

Nun sind aber nach Satz 2 die beiden Flächen

$$\{\mathfrak{x}, \mathfrak{y}\}_c^{-1} \quad \text{und} \quad \{\mathfrak{y}, \mathfrak{x}\}_{*-c}^{-1}$$

zueinander parallel, mithin sind die Voraussetzungen des Hilfssatzes erfüllt und es ergibt sich aus (70) (vgl. Formel (48))

$$\frac{\varphi}{\mathfrak{x}^2} = \frac{c}{\mathfrak{x}_0^2} + \int\limits_{\alpha_0, \beta_0}^{\alpha, \beta} \{\mathfrak{y}, \mathfrak{x}\}_{*-c}\, d(\mathfrak{x}^{-1}),$$

d. h. aber es ist

$$\{\mathfrak{x}, \mathfrak{y}\}_c^{-1} = \{\mathfrak{x}^{-1}, \{\mathfrak{y}, \mathfrak{x}\}_{*-c}\}_{\frac{c}{\mathfrak{x}_0^2}}.$$

W. z. b. w.

§ 4. Zusammensetzung von Ribaucourtransformationen.

44. Es seien $\mathfrak{x}(\alpha, \beta)$, $\mathfrak{y}(\alpha, \beta)$ und $\mathfrak{z}(\alpha, \beta)$ drei zueinander parallele Flächen, c_1 und c_2 zwei beliebige Konstanten.

Man bilde

$$\hat{\mathfrak{x}} = \{\mathfrak{x}, \mathfrak{z}\}_{c_1}, \quad \hat{\mathfrak{y}} = \{\mathfrak{y}, \mathfrak{z}\}_{c_2}.$$

Dann sind auch die Flächen $\hat{\mathfrak{x}}$, $\hat{\mathfrak{y}}$, $\mathfrak{z}^{-1}$ nach dem Hilfssatze des § 2 zueinander parallel. Man kann daher die Fläche $\hat{\mathfrak{x}}$ durch Ribaucourtransformation in die neue Fläche

$$\{\hat{\mathfrak{x}}, \hat{\mathfrak{y}}\}_{c_3} = \{\{\mathfrak{x}, \mathfrak{z}\}_{c_1}, \{\mathfrak{y}, \mathfrak{z}\}_{c_2}\}_{c_3} \tag{71}$$

überführen, unter c_3 eine neue Konstante verstanden. Das Symbol (71) besitzt nun aber eine merkwürdige Vertauschbarkeitseigenschaft, die wir jetzt ableiten wollen:

Satz 4. *Es ist*

$$\{\{\mathfrak{x}, \mathfrak{z}\}_{c_1}, \{\mathfrak{y}, \mathfrak{z}\}_{c_2}\}_{c_3} = \{\{\mathfrak{x}, \mathfrak{y}\}_{c_4}, \{\mathfrak{z}, \mathfrak{y}\}_{*-c_2}\}_{c_5}; \tag{72}$$

wobei c_1, c_2, c_3 *beliebige Konstanten sind, während*

$$c_4 = c_3 + 2\frac{(\mathfrak{y}_0\mathfrak{z}_0 - c_2)c_1}{\mathfrak{z}_0^2}, \tag{73}$$

$$c_5 = c_1 - 2\frac{c_4 c_2}{\mathfrak{y}_0^2} \tag{74}$$

zu setzen ist.

Für $c_2 = \mathfrak{y}_0\mathfrak{z}_0$ wird $c_4 = c_3$; dann vereinfacht sich die Beziehung (72), und man erhält

$$\{\{\mathfrak{x}, \mathfrak{z}\}_{c_1}, \{\mathfrak{y}, \mathfrak{z}\}_{*}\}_{c_3} = \{\{\mathfrak{x}, \mathfrak{y}\}_{c_3}, \{\mathfrak{z}, \mathfrak{y}\}_0\}_{c_1 - 2c_3\frac{\mathfrak{y}_0\mathfrak{z}_0}{\mathfrak{y}_0^2}}.$$

Beweis: Wir setzen

$$\hat{\mathfrak{x}} = \{\mathfrak{x}, \mathfrak{z}\}_{c_1} = \mathfrak{x} - 2\varphi_1\mathfrak{z}^{-1}, \quad \varphi_1 = c_1 + \int_{\alpha_0, \beta_0}^{\alpha, \beta} \mathfrak{z}\, d\mathfrak{x}, \tag{75}$$

$$\hat{\mathfrak{y}} = \{\mathfrak{y}, \mathfrak{z}\}_{c_2} = \mathfrak{y} - 2\varphi_2\mathfrak{z}^{-1}, \quad \varphi_2 = c_2 + \int_{\alpha_0, \beta_0}^{\alpha, \beta} \mathfrak{z}\, d\mathfrak{y}. \tag{76}$$

Dann folgt aus Satz 3, Formel (70),

$$\hat{\mathfrak{y}}^{-1} = \mathfrak{y}^{-1} - 2\,\frac{\varphi_2}{\mathfrak{y}^2}\,\{\mathfrak{z}, \mathfrak{y}\}^{-1}_{*-c_2}. \tag{77}$$

Setzt man weiter (vgl. Formel (65))

$$\varphi_2^* = \mathfrak{y}\mathfrak{z} - \varphi_2 = \mathfrak{y}_0\mathfrak{z}_0 - c_2 + \int\limits_{\alpha_0,\,\beta_0}^{\alpha,\,\beta} \mathfrak{y}\,d\mathfrak{z}, \tag{78}$$

so wird

$$\{\mathfrak{z}, \mathfrak{y}\}_{*-c_2} = \mathfrak{z} - 2\varphi_2^*\mathfrak{y}^{-1},$$

und nach Satz 3, Formel (70)

$$\{\mathfrak{z}, \mathfrak{y}\}^{-1}_{*-c_2} = \mathfrak{z}^{-1} - 2\,\frac{\varphi_2^*}{\mathfrak{z}^2}\,\{\mathfrak{y}, \mathfrak{z}\}^{-1}_{c_2} = \{\mathfrak{z}^{-1}, \hat{\mathfrak{y}}\}_{\frac{\mathfrak{y}_0\mathfrak{z}_0 - c_2}{\mathfrak{z}_0^2}}. \qquad \text{(vgl. Formel (76))} \tag{79}$$

Folglich ist

$$\frac{\varphi_2^*}{\mathfrak{z}^2} = \frac{\mathfrak{y}_0\mathfrak{z}_0 - c_2}{\mathfrak{z}_0^2} + \int\limits_{\alpha_0,\,\beta_0}^{\alpha,\,\beta} \hat{\mathfrak{y}}\,d(\mathfrak{z}^{-1}). \tag{80}$$

Um andererseits den Ausdruck linker Hand von (72) zu berechnen, bilde man

$$\hat{\mathfrak{y}}\mathfrak{z} = \mathfrak{y}\mathfrak{z} - 2\varphi_2 = \varphi_2^* - \varphi_2 \quad \text{wegen (76) und (78);} \tag{81}$$

ferner nach (75) und (76)

$$\begin{aligned}
\hat{\mathfrak{y}}\,d\hat{\mathfrak{x}} &= \hat{\mathfrak{y}}\,d\mathfrak{x} - 2\left(\frac{\hat{\mathfrak{y}}\mathfrak{z}}{\mathfrak{z}^2}\,d\varphi_1 + \varphi_1\hat{\mathfrak{y}}\,d(\mathfrak{z}^{-1})\right)\\
&= \hat{\mathfrak{y}}\,d\mathfrak{x} - 2\left((\varphi_2^* - \varphi_2)\,\frac{d\varphi_1}{\mathfrak{z}^2} + \varphi_1\,d\left(\frac{\varphi_2^*}{\mathfrak{z}^2}\right)\right) \qquad \text{wegen (81) und (80)}\\
&= \hat{\mathfrak{y}}\,d\mathfrak{x} - 2\left(d\left(\frac{\varphi_2^*\varphi_1}{\mathfrak{z}^2}\right) - \frac{\varphi_2}{\mathfrak{z}^2}\,d\varphi_1\right)\\
&= \mathfrak{y}\,d\mathfrak{x} - 2\,\frac{\varphi_2}{\mathfrak{z}^2}\,(\mathfrak{z}\,d\mathfrak{x}) - 2\left(d\left(\frac{\varphi_2^*\varphi_1}{\mathfrak{z}^2}\right) - \frac{\varphi_2}{\mathfrak{z}^2}\,d\varphi_1\right)\\
&= \mathfrak{y}\,d\mathfrak{x} - 2\,d\left(\frac{\varphi_2^*\varphi_1}{\mathfrak{z}^2}\right) \qquad \text{wegen } d\varphi_1 = \mathfrak{z}\,d\mathfrak{x}.
\end{aligned} \tag{82}$$

Ausserdem ist wegen (78) und (75)

$$\frac{\varphi_2^*\varphi_1}{\mathfrak{z}^2}\Bigg/_{\substack{\alpha=\alpha_0\\ \beta=\beta_0}} = \frac{(\mathfrak{y}_0\mathfrak{z}_0 - c_2)\,c_1}{\mathfrak{z}_0^2} = \frac{c_4 - c_3}{2} \qquad \text{wegen (73).} \tag{83}$$

Nunmehr ergibt sich aus (82) und (83)

$$\{\hat{\mathfrak{x}}, \hat{\mathfrak{y}}\}_{c_3} = \hat{\mathfrak{x}} - 2\left(c_3 + \int\limits_{\alpha_0,\beta_0}^{\alpha,\beta} \hat{\mathfrak{y}}\, d\hat{\mathfrak{x}}\right)\hat{\mathfrak{y}}^{-1}$$

$$= \hat{\mathfrak{x}} - 2\left(c_3 - 2\left(\frac{\varphi_2^* \varphi_1}{\mathfrak{z}^2} - \frac{c_4 - c_3}{2}\right) + \int\limits_{\alpha_0,\beta_0}^{\alpha,\beta} \mathfrak{y}\, d\mathfrak{x}\right)\hat{\mathfrak{y}}^{-1}$$

$$= \hat{\mathfrak{x}} - 2\left(c_4 - 2\frac{\varphi_2^* \varphi_1}{\mathfrak{z}^2} + \int\limits_{\alpha_0,\beta_0}^{\alpha,\beta} \mathfrak{y}\, d\mathfrak{x}\right)\hat{\mathfrak{y}}^{-1}.$$

Indem wir in diesem Ausdruck nach Formel (79)

$$-2\frac{\varphi_2^*}{\mathfrak{z}^2}\hat{\mathfrak{y}}^{-1} = \{\mathfrak{z}, \mathfrak{y}\}^{-1}_{*-c_2} - \mathfrak{z}^{-1}$$

einsetzen, erhalten wir

$$\{\hat{\mathfrak{x}}, \hat{\mathfrak{y}}\}_{c_3} = \hat{\mathfrak{x}} - 2\left(c_4 + \int\limits_{\alpha_0,\beta_0}^{\alpha,\beta} \mathfrak{y}\, d\mathfrak{x}\right)\hat{\mathfrak{y}}^{-1} - 2\varphi_1(\{\mathfrak{z}, \mathfrak{y}\}^{-1}_{*-c_2} - \mathfrak{z}^{-1})$$

(84)
$$= \mathfrak{x} - 2\left(c_4 + \int\limits_{\alpha_0,\beta_0}^{\alpha,\beta} \mathfrak{y}\, d\mathfrak{x}\right)\hat{\mathfrak{y}}^{-1} - 2\varphi_1\{\mathfrak{z}, \mathfrak{y}\}^{-1}_{*-c_2}, \qquad \text{wegen (75)}.$$

Es ist ferner

$$\{\mathfrak{x}, \mathfrak{y}\}_{c_4} = \mathfrak{x} - 2\left(c_4 + \int\limits_{\alpha_0,\beta_0}^{\alpha,\beta} \mathfrak{y}\, d\mathfrak{x}\right)\mathfrak{y}^{-1}.$$

Setzt man noch zur Abkürzung

(85)
$$\psi = c_4 + \int\limits_{\alpha_0,\beta_0}^{\alpha,\beta} \mathfrak{y}\, d\mathfrak{x},$$

so folgt aus (84)

(86)
$$\{\hat{\mathfrak{x}}, \hat{\mathfrak{y}}\}_{c_3} - \{\mathfrak{x}, \mathfrak{y}\}_{c_4} = -2\psi(\hat{\mathfrak{y}}^{-1} - \mathfrak{y}^{-1}) - 2\varphi_1\{\mathfrak{z}, \mathfrak{y}\}^{-1}_{*-c_2}.$$

Nach Formel (77) ist aber

$$\hat{\mathfrak{y}}^{-1} - \mathfrak{y}^{-1} = -2\frac{\varphi_2}{\mathfrak{y}^2}\{\mathfrak{z}, \mathfrak{y}\}^{-1}_{*-c_2}.$$

Dies in (86) eingesetzt ergibt

$$\{\hat{\mathfrak{x}}, \hat{\mathfrak{y}}\}_{c_3} - \{\mathfrak{x}, \mathfrak{y}\}_{c_4} = -2\left(\varphi_1 - 2\,\frac{\varphi_2 \psi}{\mathfrak{y}^2}\right)\{\mathfrak{z}, \mathfrak{y}\}^{-1}_{*-c_2}. \tag{87}$$

Ausserdem ist wegen (75), (76), (85) und (74)

$$\left(\varphi_1 - 2\,\frac{\varphi_2 \psi}{\mathfrak{y}^2}\right)\Big/_{\substack{\alpha=\alpha_0\\ \beta=\beta_0}} = c_1 - 2\,\frac{c_2 c_4}{\mathfrak{y}_0^2} = c_5. \tag{88}$$

Nun sind aber nach dem Hilfssatz des § 2 und nach Satz 2 die drei Flächen

$$\{\hat{\mathfrak{x}}, \hat{\mathfrak{y}}\}_c\,,\quad \hat{\mathfrak{y}}^{-1} = \{\mathfrak{y}, \mathfrak{z}\}^{-1}_{c_2}\,,\quad \{\mathfrak{z}, \mathfrak{y}\}^{-1}_{*-c_2}$$

zueinander parallel, und zweitens sind auch die Flächen

$$\{\mathfrak{x}, \mathfrak{y}\}_{c_4} \quad \text{und} \quad \{\mathfrak{z}, \mathfrak{y}\}^{-}_{*-c_2}$$

zueinander parallel. Die Beziehung (87) erfüllt somit alle Voraussetzungen des Hilfssatzes, und es ergibt sich aus Formel (87) wegen (88)

$$\varphi_1 - 2\,\frac{\varphi_2 \psi}{\mathfrak{y}^2} = c_5 + \int\limits_{\alpha_0, \beta_0}^{\alpha, \beta} \{\mathfrak{z}, \mathfrak{y}\}_{*-c_2}\, d(\{\mathfrak{x}, \mathfrak{y}\}_{c_4}).$$

Hieraus folgt aber in Verbindung mit (87)

$$\{\hat{\mathfrak{x}}, \hat{\mathfrak{y}}\}_{c_3} = \{\{\mathfrak{x}, \mathfrak{y}\}_{c_4},\ \{\mathfrak{z}, \mathfrak{y}\}_{*-c_2}\}_{c_5}, \qquad \text{w. z. b. w.}$$

45. Um den geometrischen Inhalt von Satz 4 recht deutlich zu machen, gehen wir von dem Problem aus, alle Parallelflächen zu einer durch mehrfache Inversion transformierten Fläche zu finden.

Es seien $\mathfrak{y}_1(\alpha, \beta)$ und $\mathfrak{y}_2(\alpha, \beta)$ zwei zueinander parallele Flächen. Nach Satz 1 findet man alle zu $\mathfrak{y}_1^{-1}$ parallelen Flächen, wenn man in dem Ausdruck[1]

$$\{\mathfrak{x}, \mathfrak{y}_1\}$$

$\mathfrak{x}$ sämtliche zu $\mathfrak{y}_1$ parallelen Flächen durchlaufen lässt. Greift man aus dieser Schar die Fläche $\{\mathfrak{y}_2, \mathfrak{y}_1\}$ heraus, so liefert der Ausdruck

$$\{\{\mathfrak{x}, \mathfrak{y}_1\},\ \{\mathfrak{y}_2, \mathfrak{y}_1\}\}$$

[1] Die Integrationskonstanten c_ν lassen wir in diesem Abschnitt fort, um die Rechnungen nicht unnötig zu komplizieren und die Aufmerksamkeit nicht vom wesentlichen abzulenken.

sämtliche Flächen, welche zur Fläche $\{\mathfrak{y}_2, \mathfrak{y}_1\}^{-1}$ parallel sind. Der Satz 4 besagt aber, bei geeigneter Bestimmung der Integrationskonstanten c_ν

$$\{\{\mathfrak{x}, \mathfrak{y}_1\}, \{\mathfrak{y}_2, \mathfrak{y}_1\}\} = \{\{\mathfrak{x}, \mathfrak{y}_2\}, \{\mathfrak{y}_1 \mathfrak{y}_2\}\},$$

d. h. in Worten: Man gelangt zur gleichen Flächenschar, wenn man, anstatt nacheinander die Parallelflächen zu $\mathfrak{y}_1^{-1}$ und $\{\mathfrak{y}_2, \mathfrak{y}_1\}^{-1}$ zu konstruieren, die Parallelflächen zu $\mathfrak{y}_2^{-1}$ und $\{\mathfrak{y}_1, \mathfrak{y}_2\}^{-1}$ bestimmt.

46. Unser Satz 4 steht in enger Beziehung zu einem wichtigen von Bianchi angegebenen Vertauschungssatz, welcher in unserer Bezeichnungsweise lautet:

Bianchischer Vertauschungssatz[1]: *Es seien $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}_1$, $\mathfrak{y}_2$ drei zueinander parallele Flächen, γ_1 und γ_2 zwei Konstante und t_1 und t_2 zwei veränderliche Parameter. Man betrachte die Flächenschar*

$$\hat{\mathfrak{x}} = \{\mathfrak{x}, t_1 \mathfrak{y}_1 + t_2 \mathfrak{y}_2\}_{t_1\gamma_1 + t_2\gamma_2}. \tag{89}$$

Dann existiert eine Fläche $\hat{\hat{\mathfrak{x}}}$, die aus jeder Fläche $\hat{\mathfrak{x}}$ der Schar (89) *durch Ribaucourtransformation hervorgeht.*

Dieser Satz nimmt einen Teil des Satzes 4 vorweg, wie man leicht erkennt, wenn man erst $t_1 = 1$, $t_2 = 0$ und dann $t_1 = 0$, $t_2 = 1$ setzt. Umgekehrt folgt der Bianchische Satz auch leicht aus Satz 4. Und zwar setze man, unter γ_3 (ebenso wie unter γ_1 und γ_2) eine willkürliche Konstante verstanden,

$$\left\{\begin{aligned} c_2 &= t_1 \frac{\mathfrak{y}_{1_0}^2}{2} + t_2 (\mathfrak{y}_{1_0} \mathfrak{y}_{2_0} - \gamma_3), \\ c_3 &= \gamma_1 - 2 \frac{\left(t_1 \frac{\mathfrak{y}_{1_0}^2}{2} + t_2 \gamma_3\right)(t_1 \gamma_1 + t_2 \gamma_2)}{(t_1 \mathfrak{y}_{1_0} + t_2 \mathfrak{y}_{2_0})^2} \end{aligned}\right. \tag{90}$$

und bilde mit diesen Integrationskonstanten die Fläche

$$\hat{\hat{\mathfrak{x}}} = \{\{\mathfrak{x}, t_1 \mathfrak{y}_1 + t_2 \mathfrak{y}_2\}_{t_1\gamma_1 + t_2\gamma_2}, \{\mathfrak{y}_1, t_1 \mathfrak{y}_1 + t_2 \mathfrak{y}_2\}_{c_2}\}_{c_3}. \tag{91}$$

Offenbar geht $\hat{\hat{\mathfrak{x}}}$ durch Ribaucourtransformation aus jeder Fläche $\hat{\mathfrak{x}}$ der Schar (89) hervor. Wir haben nur noch zu zeigen, dass die Fläche $\hat{\hat{\mathfrak{x}}}$ garnicht mehr von t_1 und t_2 abhängt, d. h. dass der Ausdruck (91) für jeden Wert von γ_3 eine feste Fläche liefert, welche gleichzeitig in jede Fläche der Schar (89) durch Ribaucourtransformation übergeführt werden kann.

[1] Bianchi, S. 207—212.

Nach Satz 4 ist nun aber

$$\hat{\hat{\mathfrak{x}}} = \{\{\mathfrak{x}, \mathfrak{y}_1\}_{\gamma_1}, \{t_1\mathfrak{y}_1 + t_2\mathfrak{y}_2, \mathfrak{y}_1\}_{t_1\frac{\mathfrak{y}^2_{1_0}}{2}+t_2\gamma_3}\}_{t_2 c_5} \qquad \text{wegen (90)}$$

$$= \{\{\mathfrak{x}, \mathfrak{y}_1\}_{\gamma_1}, t_1\{\mathfrak{y}_1, \mathfrak{y}_1\}_{\frac{\mathfrak{y}^2_{1_0}}{2}} + t_2\{\mathfrak{y}_2, \mathfrak{y}_1\}_{\gamma_3}\}_{t_2 c_5} \qquad \text{wegen (44) § 1}$$

(92) $$= \{\{\mathfrak{x}, \mathfrak{y}_1\}_{\gamma_1}, \{\mathfrak{y}_2, \mathfrak{y}_1\}_{\gamma_3}\}_{c_5} \qquad \text{wegen (40) und (46)}$$

mit

(93) $$c_5 = \gamma_2 - 2\frac{\gamma_1(\mathfrak{y}_{1_0}\mathfrak{y}_{2_0} - \gamma_3)}{\mathfrak{y}^2_{1_0}},$$

und damit ist gezeigt, dass die Fläche $\hat{\hat{\mathfrak{x}}}$ nicht mehr von t_1 und t_2 abhängt.

47. Bianchi hat noch weiter bewiesen, dass sogar eine ganze, von zwei neuen Parametern s_1 und s_2 abhängige Schar von Flächen $\hat{\hat{\mathfrak{x}}}$ existiert, von denen jede einzelne aus jeder Fläche $\hat{\mathfrak{x}}$ der Schar (89) durch Ribaucourtransformation hervorgeht; ausserdem enthält die Schar der Flächen $\hat{\hat{\mathfrak{x}}}$ die Fläche $\mathfrak{x}$ selbst. Bianchi nennt diese beiden Flächenscharen $\hat{\mathfrak{x}}$ und $\hat{\hat{\mathfrak{x}}}$ zueinander konjugiert.[1]

Auch dies lässt sich leicht mit Hilfe von Satz 4 zeigen, und zwar gehe man aus von den Flächen

(94) $$\hat{\hat{\mathfrak{x}}} = \{\{\mathfrak{x}, \mathfrak{y}_1\}_{\gamma_1}, s_1\mathfrak{y}_1^{-1} + s_2\{\mathfrak{y}_2, \mathfrak{y}_1\}_{\gamma_3}\}_{s_2 c'_5},$$

(95) $$c'_5 = -\frac{s_1}{s_2}\frac{\gamma_1}{\mathfrak{y}^2_{1_0}} + \left(\gamma_2 - 2\frac{\gamma_1(\mathfrak{y}_{1_0}\mathfrak{y}_{2_0} - \gamma_3)}{\mathfrak{y}^2_{1_0}}\right).$$

Diese Schar enthält für $s_1 = 1$, $s_2 = 0$ die Fläche $\mathfrak{x}$ selbst, denn es ist wegen (63) § 2

$$\hat{\hat{\mathfrak{x}}} = \{\{\mathfrak{x}, \mathfrak{y}_1\}_{\gamma_1}, \mathfrak{y}_1^{-1}\}_{-\frac{\gamma_1}{\mathfrak{y}^2_{1_0}}} = \mathfrak{x}.$$

Für $s_1 = 0$, $s_2 = 1$ erhält man wieder die Fläche (92).

Im allgemeinen Falle hat man wegen (36) § 1

$$s_1\mathfrak{y}_1^{-1} + s_2\{\mathfrak{y}_2, \mathfrak{y}_1\}_{\gamma_3} = s_2\{\mathfrak{y}_2, \mathfrak{y}_1\}_{\gamma_3 - \frac{s_1}{2 s_2}}.$$

Dies in (94) eingesetzt, ergibt wegen (46)

[1] l. c. S. 39 Fussnote 1.

$$(96)\qquad \hat{\hat{\mathfrak{x}}} = \{\{\mathfrak{x}, \mathfrak{y}_1\}_{\gamma_1}, \{\mathfrak{y}_2, \mathfrak{y}_1\}_{\gamma_3 - \frac{s_1}{2 s_2}}\}_{c'_5}.$$

Nun ist aber andererseits wegen (92) und (91)

$$(97)\qquad \hat{\hat{\mathfrak{x}}} = \{\{\mathfrak{x}, t_1\mathfrak{y}_1 + t_2\mathfrak{y}_2\}_{\gamma_1 t_1 + \gamma_2 t_2}, \{\mathfrak{y}_1, t_1\mathfrak{y}_1 + t_2\mathfrak{y}_2\}_{c'_2}\}_{c'_3}$$

mit

$$(98)\qquad \begin{cases} c'_2 = t_1 \dfrac{\mathfrak{y}_{1_0}^2}{2} + t_2\left(\mathfrak{y}_{1_0}\mathfrak{y}_{2_0} + \dfrac{s_1}{2 s_2} - \gamma_3\right), \\[2ex] c'_3 = \gamma_1 - 2\dfrac{\left(t_1\dfrac{\mathfrak{y}_{1_0}^2}{2} + t_2\left(\gamma_3 - \dfrac{s_1}{2 s_2}\right)\right)(t_1\gamma_1 + t_2\gamma_2)}{(t_1\mathfrak{y}_{1_0} + t_2\mathfrak{y}_{2_0})^2}; \end{cases}$$

und zwar erhält man (97) aus (92) und (91), wenn man in den Formeln (90) und (93) für γ_3 die Grösse $\gamma_3 - \dfrac{s_1}{2 s_2}$ substituiert und so von den Konstanten c_2, c_3, c_5 zu c'_2, c'_3, c'_5 geführt wird.

Der Ausdruck (94) lässt erkennen, dass die Schar der Flächen $\hat{\hat{\mathfrak{x}}}$ nur von s_1 und s_2 aber nicht von t_1 und t_2 abhängt, während aus (97) folgt, dass jede Fläche $\hat{\hat{\mathfrak{x}}}$ der Schar (94) aus jeder Fläche $\hat{\mathfrak{x}}$ der Schar (89) durch Ribaucourtransformation hervorgeht.

48. Um den in Abschnitt **45.** beschriebenen geometrischen Konstruktionsprozess bequem iterieren zu können, führen wir neue Symbole ein. Wir setzen

$$(99)\qquad (\mathfrak{x}; \mathfrak{y}_1) = \{\mathfrak{x}, \mathfrak{y}_1\}, \ (\mathfrak{x}; \mathfrak{y}_1, \mathfrak{y}_2) = \{\{\mathfrak{x}, \mathfrak{y}_1\}, \{\mathfrak{y}_2, \mathfrak{y}_1\}\}$$

und definieren rekursiv, wenn

$$\mathfrak{x}, \mathfrak{y}_1, \mathfrak{y}_2, \ldots, \mathfrak{y}_n$$

zueinander parallele Flächen bedeuten,

$$(100)\qquad (\mathfrak{x}; \mathfrak{y}_1, \mathfrak{y}_2, \ldots, \mathfrak{y}_n) = \{(\mathfrak{x}; \mathfrak{y}_1, \mathfrak{y}_2, \ldots, \mathfrak{y}_{n-1}), (\mathfrak{y}_n; \mathfrak{y}_1, \mathfrak{y}_2, \ldots, \mathfrak{y}_{n-1})\}.$$

Die hier auftretenden Integrationskonstanten wollen wir nicht besonders berücksichtigen; wir erwähnen nur, dass bei der Bildung des Ausdrucks (100) $\dfrac{n(n+1)}{2}$ verschiedene Integrationskonstanten auftreten; den Beweis überlassen wir dem Leser. Er folgt vielleicht am einfachsten aus Formel (101).

Wenn man nacheinander die Parallelflächen zu

$$\mathfrak{y}_1^{-1},\ \{\mathfrak{y}_2, \mathfrak{y}_1\}^{-1},\ (\mathfrak{y}_3; \mathfrak{y}_1, \mathfrak{y}_2)^{-1}, \ldots, (\mathfrak{y}_n; \mathfrak{y}_1, \mathfrak{y}_2, \ldots, \mathfrak{y}_{n-1})^{-1}$$

konstruiert, so liefert der Ausdruck $(\mathfrak{x}; \mathfrak{y}_1, \mathfrak{y}_2, \ldots, \mathfrak{y}_n)$ wegen (100) sämtliche Parallelflächen zu $(\mathfrak{y}_n; \mathfrak{y}_1, \mathfrak{y}_2, \ldots, \mathfrak{y}_{n-1})^{-1}$, welche man erhält, wenn $\mathfrak{x}$ alle Parallelflächen zu $\mathfrak{y}_1$ durchläuft.

49. Um eine wichtige Anwendung in § 10 vorzubereiten, beweisen wir die Formel

$$(\mathfrak{x}; \mathfrak{y}_1, \ldots, \mathfrak{y}_n) = (\{\mathfrak{x}, \mathfrak{y}_1\}; \{\mathfrak{y}_2, \mathfrak{y}_1\}, \ldots, \{\mathfrak{y}_n, \mathfrak{y}_1\}). \tag{101}$$

Beweis: Für $n = 2$ folgt die Behauptung (101) unmittelbar aus Formel (99). Wir setzen weiter zur Abkürzung

$$\mathfrak{x}' = \{\mathfrak{x}, \mathfrak{y}_1\}, \quad \mathfrak{y}'_\nu = \{\mathfrak{y}_\nu, \mathfrak{y}_1\}, \qquad \nu = 2, 3, \ldots, n. \tag{102}$$

Unter der Annahme, dass die Formel (101) für $n - 1$ bereits als richtig erkannt sei, ergibt sich aus (100)

$$\begin{aligned}(\mathfrak{x}; \mathfrak{y}_1, \mathfrak{y}_2, \ldots, \mathfrak{y}_n) &= \{(\mathfrak{x}; \mathfrak{y}_1, \ldots, \mathfrak{y}_{n-1}), (\mathfrak{y}_n; \mathfrak{y}_1, \ldots, \mathfrak{y}_{n-1})\} \\ &= \{(\mathfrak{x}'; \mathfrak{y}'_2, \ldots, \mathfrak{y}'_{n-1}), (\mathfrak{y}'_n; \mathfrak{y}'_2, \ldots, \mathfrak{y}'_{n-1})\} \\ &= (\mathfrak{x}'; \mathfrak{y}'_2, \ldots, \mathfrak{y}'_n),\end{aligned}$$

und dieser Ausdruck stimmt wegen (102) mit der rechten Seite von (101) überein. Damit ist die Behauptung (101) bewiesen.

50. Aus Satz 4 folgert man nun leicht ein

Korollar zu Satz 4: *Es seien* $\mathfrak{y}_1, \mathfrak{y}_2, \ldots, \mathfrak{y}_n$ *zueinander parallele Flächen; ferner sei*

$$h_1, h_2, \ldots, h_n$$

eine beliebige Permutation der Indices $1, 2, \ldots, n$. *Dann ist, wenn* $\mathfrak{x}$ *eine beliebige zu den n gegebenen Flächen parallele Fläche bezeichnet,*

$$(\mathfrak{x}; \mathfrak{y}_{h_1}, \mathfrak{y}_{h_2}, \ldots, \mathfrak{y}_{h_n}) = (\mathfrak{x}; \mathfrak{y}_1, \mathfrak{y}_2, \ldots, \mathfrak{y}_n), \tag{103}$$

und zwar lassen sich die bei dem Ausdruck rechter Hand auftretenden Integrationskonstanten geeignet bestimmen, nachdem die Integrationskonstanten linker Hand beliebig gewählt sind.

Beweis: Da sich jede Permutation durch eine endliche Folge nacheinander ausgeführter Transpositionen benachbarter Indices erzeugen lässt, genügt es, wenn wir die Beziehung (103) nur für diesen Spezialfall beweisen, und zwar behaupten wir zunächst:

$$(\mathfrak{x};\mathfrak{y}_1,\ldots,\mathfrak{y}_{n-2},\mathfrak{y}_{n-1},\mathfrak{y}_n)=(\mathfrak{x};\mathfrak{y}_1,\ldots,\mathfrak{y}_{n-2},\mathfrak{y}_n,\mathfrak{y}_{n-1}).\tag{104}$$

Und in der Tat ergibt sich nach mehrfacher Anwendung der Definitionsgleichung (100)

$$(\mathfrak{x};\mathfrak{y}_1,\ldots,\mathfrak{y}_{n-2},\mathfrak{y}_{n-1},\mathfrak{y}_n)$$
$$=\{\{(\mathfrak{x};\mathfrak{y}_1,\ldots,\mathfrak{y}_{n-2}),(\mathfrak{y}_{n-1};\mathfrak{y}_1,\ldots,\mathfrak{y}_{n-2})\},\{(\mathfrak{y}_n;\mathfrak{y}_1,\ldots,\mathfrak{y}_{n-2}),(\mathfrak{y}_{n-1};\mathfrak{y}_1,\ldots,\mathfrak{y}_{n-2})\}\},$$

und weiter nach Satz 4

$$=\{\{(\mathfrak{x};\mathfrak{y}_1,\ldots,\mathfrak{y}_{n-2}),(\mathfrak{y}_n;\mathfrak{y}_1,\ldots,\mathfrak{y}_{n-2})\},\{(\mathfrak{y}_{n-1};\mathfrak{y}_1,\ldots,\mathfrak{y}_{n-2}),(\mathfrak{y}_n;\mathfrak{y}_1,\ldots,\mathfrak{y}_{n-2})\}\},$$

bei geeigneter Bestimmung der hier auftretenden Integrationskonstanten; dies ist aber wieder nach der Definitionsgleichung (100)

$$=\{(\mathfrak{x};\mathfrak{y}_1,\ldots,\mathfrak{y}_{n-2},\mathfrak{y}_n),(\mathfrak{y}_{n-1};\mathfrak{y}_1,\ldots,\mathfrak{y}_{n-2},\mathfrak{y}_n)\}$$
$$=(\mathfrak{x};\mathfrak{y}_1,\ldots,\mathfrak{y}_{n-2},\mathfrak{y}_n,\mathfrak{y}_{n-1}),$$

und damit ist die Beziehung (104) bewiesen.

Es bleibt jetzt noch übrig zu zeigen, dass auch

$$(\mathfrak{x};\mathfrak{y}_1,\ldots,\mathfrak{y}_{k-1},\mathfrak{y}_k,\mathfrak{y}_{k+1},\ldots,\mathfrak{y}_n)=(\mathfrak{x};\mathfrak{y}_1,\ldots,\mathfrak{y}_{k-1},\mathfrak{y}_{k+1},\mathfrak{y}_k,\ldots,\mathfrak{y}_n)\tag{105}$$

ist, damit ist dann der Nachweis geführt, dass sich der Ausdruck (100) bei Transposition zweier beliebiger aufeinander folgender Indices nicht ändert.

Aus (104) folgt nun aber

$$(\mathfrak{x};\mathfrak{y}_1,\ldots,\mathfrak{y}_{k-1},\mathfrak{y}_k,\mathfrak{y}_{k+1})=(\mathfrak{x};\mathfrak{y}_1,\ldots,\mathfrak{y}_{k-1},\mathfrak{y}_{k+1},\mathfrak{y}_k);$$

dann ist, wie aus der Definitionsgleichung (100) unmittelbar folgt, auch

$$(\mathfrak{x};\mathfrak{y}_1,\ldots,\mathfrak{y}_{k-1},\mathfrak{y}_k,\mathfrak{y}_{k+1},\mathfrak{y}_{k+2})=(\mathfrak{x};\mathfrak{y}_1,\ldots,\mathfrak{y}_{k-1},\mathfrak{y}_{k+1},\mathfrak{y}_k,\mathfrak{y}_{k+2})$$

und weiter wird man, indem man nacheinander die übrigen Vektoren $\mathfrak{y}_{k+3}$, $\mathfrak{y}_{k+4},\ldots,\mathfrak{y}_n$ berücksichtigt, auf die behauptete Beziehung (105) geführt. Damit ist dann das Korollar zu Satz 4 vollständig bewiesen.

Kapitel II. Anwendung der Ribaucourttransformation auf das Problem der sphärischen Abbildung.

§ 5. Die Transformation des Problems der sphärischen Abbildung.

51. Es sei, wie im vorigem Kapitel $\mathfrak{x}(\alpha, \beta)$ eine Fläche, deren Parameterkurven $\alpha = \text{const.}$, $\beta = \text{const.}$ mit den Krümmungslinien zusammenfallen. $\mathfrak{u}(\alpha, \beta)$ sei das durch Definition 1. bestimmte sphärische Bild der Krümmungslinien von $\mathfrak{x}(\alpha, \beta)$. Endlich sei ε eine feste Ebene, die den Koordinatenanfangspunkt enthalten möge, und $\mathfrak{e}$ der Normaleinheitsvektor von ε.

Man bilde jetzt durch Ribaucourttransformation die beiden neuen Flächen

$$(106)\quad \begin{cases} \mathfrak{X}(\alpha, \beta) = \{\mathfrak{x}, \mathfrak{e} - \mathfrak{u}\}_{\mathfrak{e}\mathfrak{x}_0} \\ \qquad = \mathfrak{x} - 2\left(\mathfrak{e}\mathfrak{x}_0 + \int\limits_{\alpha_0, \beta_0}^{\alpha, \beta} (\mathfrak{e} - \mathfrak{u})\, d\mathfrak{x}\right)(\mathfrak{e} - \mathfrak{u})^{-1} \\ \qquad = \mathfrak{x} - 2(\mathfrak{e}\mathfrak{x})(\mathfrak{e} - \mathfrak{u})^{-1}, \end{cases}$$

$$(107)\quad \begin{cases} \mathfrak{U}(\alpha, \beta) = \{\mathfrak{u}, \mathfrak{e} - \mathfrak{u}\}_{\mathfrak{e}\mathfrak{u}_0} \\ \qquad = \mathfrak{u} - 2(\mathfrak{e}\mathfrak{u})(\mathfrak{e} - \mathfrak{u})^{-1} = \dfrac{\mathfrak{u} - (\mathfrak{u}\mathfrak{e})\mathfrak{e}}{1 - \mathfrak{u}\mathfrak{e}}. \end{cases}$$

Dann bemerkt man leicht, dass $\mathfrak{X}(\alpha, \beta)$ und $\mathfrak{U}(\alpha, \beta)$ drei Eigenschaften haben:

I. Eine einfache Rechnung ergibt

$$\mathfrak{X}\mathfrak{e} = 0, \quad \mathfrak{U}\mathfrak{e} = 0,$$

d. h., dass die Vektoren $\mathfrak{X}$ und $\mathfrak{U}$ für alle Werte von α und β der Ebene ε parallel sind. Somit definieren die Vektoren $\mathfrak{X}(\alpha, \beta)$ und $\mathfrak{U}(\alpha, \beta)$ nach Definition 5, Abschn. 4. zwei in ε gelegene ebene Kurvensysteme.

II. Die beiden Kurvensysteme $\mathfrak{X}(\alpha, \beta)$ und $\mathfrak{U}(\alpha, \beta)$ sind orthogonal; denn da $\mathfrak{X}(\alpha, \beta)$ bezw. $\mathfrak{U}(\alpha, \beta)$ durch Ribaucourttransformation aus $\mathfrak{x}(\alpha\beta)$ bezw. $\mathfrak{u}(\alpha\beta)$ hervorgegangen sind, folgt

$$\mathfrak{X}_\alpha \mathfrak{X}_\beta = 0, \quad \mathfrak{U}_\alpha \mathfrak{U}_\beta = 0.$$

Ferner folgt aus dem Hilfssatz des § 2: Es ist

$$\mathfrak{X}_\alpha \| \mathfrak{U}_\alpha \| \frac{\partial}{\partial \alpha}(\mathfrak{e} - \mathfrak{u})^{-1}, \quad \mathfrak{X}_\beta \| \mathfrak{U}_\beta \| \frac{\partial}{\partial \beta}(\mathfrak{e} - \mathfrak{u})^{-1},$$

d. h. die beiden Kurvensysteme $\mathfrak{X}(\alpha\beta)$ und $\mathfrak{U}(\alpha\beta)$ sind im Sinne der Definition 6 Abschnitt **4**. zueinander parallel.

III. Das in ε gelegene Kurvensystem $\mathfrak{U}$ entsteht durch stereographische Projektion des durch den Vektor $\mathfrak{u}(\alpha, \beta)$ auf der Einheitskugel bestimmten orthogonalen Kurvensystems, denn eine leichte Umformung ergibt aus (107)

$$\frac{\mathfrak{U} - \mathfrak{e}}{2} = (\mathfrak{u} - \mathfrak{e})^{-1}, \tag{108}$$

und weiter

$$\begin{cases} \mathfrak{u} = \mathfrak{e} + 2(\mathfrak{U} - \mathfrak{e})^{-1} = \dfrac{2\mathfrak{U} + (\mathfrak{U}^2 - 1)\mathfrak{e}}{\mathfrak{U}^2 + 1} \\ \quad = \{\mathfrak{U}, \mathfrak{U} - \mathfrak{e}\}_{\frac{\mathfrak{U}^2_0 - 1}{2}} \qquad \text{wegen (40) und (45).} \end{cases} \tag{109}$$

52. Damit zwei zueinander parallele Flächen $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{x}^*$ durch Ribaucourtransformation in das gleiche ebene Kurvensystem übergeführt werden, muss sein

$$\{\mathfrak{x}^*, \mathfrak{e} - \mathfrak{u}\}_{\mathfrak{e}\mathfrak{x}^*_0} - \{\mathfrak{x}, \mathfrak{e} - \mathfrak{u}\}_{\mathfrak{e}\mathfrak{x}_0} = 0,$$

oder wegen (44) § 1 und (106).

$$\{\mathfrak{x}^* - \mathfrak{x}, \mathfrak{e} - \mathfrak{u}\}_{\mathfrak{e}(\mathfrak{x}^*_0 - \mathfrak{x}_0)} = \mathfrak{x}^* - \mathfrak{x} - 2(\mathfrak{e}(\mathfrak{x}^* - \mathfrak{x}))(\mathfrak{e} - \mathfrak{u})^{-1} = 0. \tag{110}$$

Setzt man jetzt wegen (110)

$$\mathfrak{x}^* - \mathfrak{x} = \gamma(\mathfrak{e} - \mathfrak{u}), \quad \gamma = 2\frac{\mathfrak{e}(\mathfrak{x}^* - \mathfrak{x})}{(\mathfrak{e} - \mathfrak{u})^2},$$

so folgt, dass γ von α und β unabhängig sein muss, da doch nach Voraussetzung die beiden Flächen $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{x}^*$ zueinander parallel sind. Für $\mathfrak{x}^* - \mathfrak{x} = \gamma(\mathfrak{e} - \mathfrak{u})$, unter γ eine beliebige Konstante verstanden, verifiziert man aber leicht die Gleichung (110).

Somit ist

$$\mathfrak{x}^* = \mathfrak{x} + \gamma(\mathfrak{e} - \mathfrak{u}) \tag{111}$$

die allgemeinste Parallelfläche zu $\mathfrak{x}$, welche durch Ribaucourtransformation in das in Formel (106) definierte ebene Kurvensystem $\mathfrak{X}$ übergeführt wird. Nach Definition 4, Abschnitt **3**. ist $\mathfrak{x}^*$ eine Parallelfläche im engeren Sinne zu $\mathfrak{x}$.

53. Betrachtet man alle Flächen $\mathfrak{x}$, welche das gleiche vorgegebene sphärische Bild $\mathfrak{u}(\alpha,\beta)$ der Krümmungslinien von $\mathfrak{x}(\alpha,\beta)$ haben, so durchläuft nach Satz 1 das Kurvensystem $\mathfrak{X}(\alpha,\beta)$ wegen (106) und (108) alle zu $\mathfrak{U}(\alpha,\beta)$ parallelen Kurvensysteme.

Kennt man umgekehrt alle ebenen Kurvensysteme $\mathfrak{X}(\alpha,\beta)$, die zum Kurvensystem $\mathfrak{U}(\alpha,\beta)$ parallel sind, so lassen sich alle Flächen $\mathfrak{x}(\alpha,\beta)$ angeben, welche $\mathfrak{u}(\alpha,\beta)$ zum sphärischen Bild der Krümmungslinien haben. Man setze nämlich

$$(112)\qquad \begin{cases} \mathfrak{x} = \{\mathfrak{X}, \mathfrak{U}-\mathfrak{e}\}_{2c} = \{\mathfrak{X}, 2(\mathfrak{u}-\mathfrak{e})^{-1}\}_{2c} & \text{wegen (108)} \\ \quad = \{\mathfrak{X}, (\mathfrak{e}-\mathfrak{u})^{-1}\}_{-c} & \text{wegen (46) § 1,} \end{cases}$$

unter c eine willkürliche Konstante verstanden. Dann ist nach dem Hilfssatz des § 2 $\mathfrak{x}(\alpha,\beta)$ parallel zu $\mathfrak{u}(\alpha,\beta)-\mathfrak{e}$, d. h. aber $\mathfrak{u}(\alpha,\beta)$ ist das sphärische Bild der Krümmungslinien von $\mathfrak{x}(\alpha,\beta)$. Hält man $\mathfrak{X}$ fest, setzt $-c = c_0 - \frac{\gamma}{2}$ und lässt γ alle reellen Werte durchlaufen, so erhält man nach Formel (36) § 1, Abschnitt **33**. die Schar der Parallelflächen im engeren Sinne

$$\mathfrak{x}^* = \mathfrak{x} + \gamma(\mathfrak{e}-\mathfrak{u}) \qquad \text{(vgl. Formel (111)),}$$

welche — in Übereinstimmung mit einer Bemerkung zum Schluss des vorigen Abschnittes — nach der Ribaucourtransformation (106) auf das gleiche ebene Kurvensystem $\mathfrak{X}(\alpha,\beta)$ führen.

Indem man Formel (63) aus § 2, Abschn. **39**. heranzieht, erkennt man, dass der Ausdruck (112) nichts anderes als die zu (106) inverse Ribaucourtransformation angibt. Dabei wird

$$c = \frac{\mathfrak{e}\mathfrak{x}_0}{2(1-\mathfrak{u}_0\mathfrak{e})}.$$

Daraus folgt aber, dass in dem Ausdruck (112) die allgemeinste Fläche $\mathfrak{x}(\alpha,\beta)$ mit dem sphärischen Bild $\mathfrak{u}(\alpha,\beta)$ enthalten ist, denn durch die Ribaucourtransformation (106) lässt sich ja jede solche Fläche $\mathfrak{x}(\alpha,\beta)$ in ein ebenes Kurvensystem $\mathfrak{X}(\alpha,\beta)$ überführen.

54. Ist durch den Vektor $\mathfrak{u}(\alpha,\beta)$ auf der Einheitskugel ein orthogonales Kurvensystem gegeben, so lässt sich auf Grund der Betrachtungen des vorigen Abschnitts, das zu $\mathfrak{u}(\alpha,\beta)$ gehörige Problem der sphärischen Abbildung (vgl. Definition 2) auf ein einfaches Problem der ebenen Geometrie zurückführen:

Problem I. *Es sei*

$$\mathfrak{U}(\alpha, \beta) = \frac{\mathfrak{u} - (\mathfrak{u}\mathfrak{e})\mathfrak{e}}{1 - \mathfrak{u}\mathfrak{e}}$$

ein orthogonales Kurvensystem der Ebene ε, welches man durch stereographische Projektion des orthogonalen Kurvensystems $\mathfrak{u}(\alpha, \beta)$ der Einheitskugel auf ε erhält. Man suche sämtliche ebenen orthogonalen Kurvensysteme $\mathfrak{X}(\alpha, \beta)$ zu bestimmen, welche im Sinne der Definition 6 zu $\mathfrak{U}(\alpha, \beta)$ parallel sind. Man erhält dann vermittels des Ausdrucks (112) sämtliche Lösungen des gestellten Problems der sphärischen Abbildung.

55. Berücksichtigt man, dass gleichzeitig mit $\mathfrak{e}$ auch $\mathfrak{e}' = -\mathfrak{e}$ ein Normaleinheitsvektor der Ebene ε ist, so bemerkt man, dass sich die Fläche $\mathfrak{x}$ auch noch durch eine zweite Ribaucourtransformation in ein ebenes Kurvensystem $\mathfrak{X}'(\alpha, \beta)$ überführen lässt. Man erhält diese zweite Ribaucourtransformation, indem man in Formel (106) $\mathfrak{e}' = -\mathfrak{e}$ für $\mathfrak{e}$ substituiert. Auf diese Weise ergibt sich

$$(113)\qquad \begin{cases} \mathfrak{X}'(\alpha, \beta) = \{\mathfrak{x}, -\mathfrak{e} - \mathfrak{u}\}_{-\mathfrak{e}\mathfrak{x}_0} = \{\mathfrak{x}, \mathfrak{e} + \mathfrak{u}\}_{\mathfrak{e}\mathfrak{x}_0} \quad \text{wegen (46) § 1} \\ \qquad = \mathfrak{x} - 2(\mathfrak{e}\mathfrak{x})(\mathfrak{e} + \mathfrak{u})^{-1}, \end{cases}$$

$$(114)\qquad \begin{cases} \mathfrak{U}'(\alpha, \beta) = \{\mathfrak{u}, \mathfrak{e} + \mathfrak{u}\}_{\mathfrak{e}\mathfrak{u}_0} = \mathfrak{u} - 2(\mathfrak{e}\mathfrak{u})(\mathfrak{e} + \mathfrak{u})^{-1} \\ \qquad = \dfrac{\mathfrak{u} - (\mathfrak{u}\mathfrak{e})\mathfrak{e}}{1 + \mathfrak{u}\mathfrak{e}} = \mathfrak{U}^{-1}, \end{cases}$$

denn aus Formel (107) folgt durch Quadrieren

$$(115)\qquad \mathfrak{U}^2 = \frac{1 + \mathfrak{u}\mathfrak{e}}{1 - \mathfrak{u}\mathfrak{e}}, \quad \mathfrak{U}^2 + 1 = \frac{2}{1 - \mathfrak{u}\mathfrak{e}},$$

ferner folgt aus (114)

$$(116)\qquad \frac{\mathfrak{U}' + \mathfrak{e}}{2} = (\mathfrak{u} + \mathfrak{e})^{-1}.$$

$\mathfrak{U}'(\alpha, \beta)$ ist mithin dasjenige ebene Kurvensystem, welches durch stereographische Projektion mit dem Südpol der Einheitskugel als Projektionszentrum aus dem Kurvensystem $\mathfrak{u}(\alpha, \beta)$ hervorgeht. Endlich ergibt sich durch die zu (113) inverse Ribaucourtransformation

$$(117)\qquad \mathfrak{x} = \{\mathfrak{X}', (\mathfrak{u} + \mathfrak{e})^{-1}\}_{\mathfrak{e}} = \{\mathfrak{X}', \mathfrak{U}' + \mathfrak{e}\}_{2\mathfrak{e}}.$$

Durchläuft $\mathfrak{X}'(\alpha, \beta)$ alle zu $\mathfrak{U}'(\alpha, \beta)$ parallelen ebenen Kurvensysteme, so liefert der Ausdruck (117) ebenso wie (112) sämtliche Lösungen $\mathfrak{x}(\alpha,\beta)$ des zu dem Kurvensystem $\mathfrak{u}(\alpha,\beta)$ der Einheitskugel gehörigen Problems der sphärischen Abbildung.

Der Zusammenhang zwischen den beiden ebenen Kurvensysteme $\mathfrak{X}(\alpha,\beta)$ und $\mathfrak{X}'(\alpha,\beta)$, welche von derselben Fläche $\mathfrak{x}(\alpha,\beta)$ erzeugt werden, wird an anderer Stelle geklärt werden. (Vgl. § 8, Abschnitt **68**. und § 12, Abschnitt **88**.)

§ 6. Die Differentialgleichungen des Problems I.

56. Es seien U und V die beiden in ε gelegenen Komponenten des Vektors $\mathfrak{U}$; ferner setze man

$$(d\mathfrak{U})^2 = \mathring{A}^2 d\alpha^2 + \mathring{B}^2 d\beta^2,$$

$$(118)\qquad \begin{cases} U_\alpha = \mathring{A}\cos\vartheta, & V_\alpha = \mathring{A}\sin\vartheta, \\ U_\beta = -\mathring{B}\sin\vartheta, & V_\beta = \mathring{B}\cos\vartheta, \end{cases}$$

$\vartheta(\alpha,\beta)$ ist somit gleich dem Tangentenwinkel der Kurven $\beta = \text{const.}$ des durch den Vektor $\mathfrak{U}(\alpha,\beta)$ bestimmten ebenen orthogonalen Kurvensystems.

Ist $\mathfrak{X}(\alpha,\beta)$ eine Lösung des Problems I, d. h. beschreibt der Vektor $\mathfrak{X}(\alpha,\beta)$ ein zu $\mathfrak{U}(\alpha,\beta)$ paralleles orthogonales Kurvensystem, so sei

$$(119)\qquad (d\mathfrak{X})^2 = A^2 d\alpha^2 + B^2 d\beta^2.$$

Ausserdem seien X und Y die beiden in ε gelegenen Komponenten von $\mathfrak{X}$.

Endich setze man

$$(120)\qquad \begin{cases} U + iV = \mathring{z}, & U - iV = \bar{\mathring{z}}, \\ X + iY = z, & X - iY = \bar{z}, \end{cases}$$

$$e^{-i\vartheta} = \omega, \qquad e^{i\vartheta} = \bar{\omega},$$

dann wird (vgl. Formel (118))

$$(121)\qquad \mathring{z}_\alpha = \mathring{A}\bar{\omega}, \quad \mathring{z}_\beta = i\mathring{B}\bar{\omega},$$

und ferner wegen der geforderten Parallelität der Kurvensysteme $\mathfrak{X}(\alpha,\beta)$ und $\mathfrak{U}(\alpha,\beta)$ mit Rücksicht auf (119)

$$(122)\qquad z_\alpha = A\bar{\omega}, \quad z_\beta = iB\bar{\omega}.$$

Aus (121) und (122) folgt nun aber wegen

$$\bar{\mathring{z}}_\alpha = \mathring{A}\,\omega = \omega^2 \mathring{z}_\alpha, \quad \bar{\mathring{z}}_\beta = -\,i\,\mathring{B}\omega = \;\cdot\,\omega^2 \mathring{z}_\beta,$$

$$(123) \qquad \begin{cases} \bar{\mathring{z}}_\alpha = \omega^2 \mathring{z}_\alpha, & \bar{\mathring{z}}_\beta = -\,\omega^2 \mathring{z}_\beta, \\ \bar{z}_\alpha = \omega^2 z_\alpha, & \bar{z}_\beta = -\,\omega^2 z_\beta, \end{cases}$$

und hieraus ergibt sich

$$\frac{\partial}{\partial \beta}(\omega^2 z_\alpha) + \frac{\partial}{\partial \alpha}(\omega^2 z_\beta) = 0,$$

oder aber nach Ausführung der Differenziation und Division durch $2\omega^2$

$$(124) \qquad D(z) = z_{\alpha\beta} + \frac{\omega_\beta}{\omega} z_\alpha + \frac{\omega_\alpha}{\omega} z_\beta = 0.$$

Offenbar genügt wegen (123) auch $\mathring{z}$ der gleichen Differentialgleichung

$$D(\mathring{z}) = 0.$$

57. Umgekehrt liefert ein Integral $z = X + iY$ der Differentialgleichung $D(z) = 0$ wegen (122) nur dann eine Lösung unseres geometrischen Problems, wenn die Nebenbedingungen

$$(125) \qquad \omega z_\alpha = \text{reelle Grösse} = A, \quad -\,i\omega z_\beta = \text{reelle Grösse} = B$$

erfüllt sind.

Aus der Differentialgleichung (124) folgt andererseits

$$(126) \qquad \begin{cases} -\,i\,\dfrac{\partial(\omega z_\beta)}{\partial \alpha} = i\,\omega_\beta z_\alpha = \vartheta_\beta z_\alpha \omega, \\[2ex] \dfrac{\partial(\omega z_\alpha)}{\partial \beta} = -\,\omega_\alpha z_\beta = i\,\vartheta_\alpha z_\beta \omega, \end{cases}$$

d. h. aber: ist $-\,i\omega z_\beta$ reell, so ist $z_\alpha \omega$ von selbst reell, wofern ϑ_β nicht identisch verschwindet; ist umgekehrt $z_\alpha \omega$ reell, ohne dass ϑ_α identisch verschwindet, so ist auch $-\,i\omega z_\beta$ reell. Für eine Lösung $z = X + iY$ unseres geometrischen Problems I ist somit bereits hinreichend, dass die Nebenbedingungen (125) für eine der beiden Grössen erfüllt sind. Ausgenommen sind die trivialen Spezialfälle $\vartheta_\alpha \equiv 0$, oder $\vartheta_\beta \equiv 0$, in denen die Bedingungen (125) beide zu befriedigen sind.

Aus (126) ergibt sich noch eine wichtige Beziehung, wenn man für ωz_α und $-i\omega z_\beta$ die Grössen aus Gleichung (125) einsetzt. Man erhält dann

$$\vartheta_\beta = \frac{B_\alpha}{A} = \frac{\mathring{B}_\alpha}{\mathring{A}}, \quad \vartheta_\alpha = -\frac{A_\beta}{B} = -\frac{\mathring{A}_\beta}{\mathring{B}}, \tag{127}$$

da die Gleichungen (125) und (126) auch gelten, wenn man $\mathring{z}$ für z substituiert. Die Gleichungen (127) kann man auch direkt aus (122) ableiten, indem man

$$\frac{\partial}{\partial\beta}(A\bar{\omega}) = i\frac{\partial}{\partial\alpha}(B\bar{\omega})$$

setzt.

58. Die Gleichungen (123) treten bereits bei Darboux[1] auf, werden aber dort auf ganz anderem Wege hergeleitet und finden demgemäss auch eine andere geometrische Deutung. Um das zu $\mathfrak{u}(\alpha, \beta)$ gehörige Problem der sphärischen Abbildung zu lösen, geht Darboux von der Gleichung der Tangentialebene τ an die Fläche $\mathfrak{x}$ aus:

$$u x_1 + v x_2 + w x_3 = \zeta. \tag{128}$$

Hierbei bezeichnen x_1, x_2, x_3 die laufenden Koordinaten der Ebene τ, u, v, w die drei rechtwinkligen Komponenten des gegebenen Vektors $\mathfrak{u}$. Es ist somit

$$\zeta = \mathfrak{u}\mathfrak{x}.$$

Nunmehr führt Darboux Bonnetsche Koordinaten auf der Kugel ein und setzt[2]

$$u = \frac{\mathring{z} + \bar{\mathring{z}}}{1 + \mathring{z}\bar{\mathring{z}}}, \quad v = i\frac{\bar{\mathring{z}} - \mathring{z}}{1 + \mathring{z}\bar{\mathring{z}}}, \quad w = \frac{\mathring{z}\bar{\mathring{z}} - 1}{\mathring{z}\bar{\mathring{z}} + 1}. \tag{129}$$

Offenbar sind diese Formeln mit unserer Gleichung (109)

$$\mathfrak{u} = \frac{2\mathfrak{U} + (\mathfrak{U}^2 - 1)\mathfrak{e}}{1 + \mathfrak{U}^2}$$

identisch, denn es ist nach (120)

$$\mathring{z} + \bar{\mathring{z}} = 2U, \quad i(\bar{\mathring{z}} - \mathring{z}) = 2V, \quad \mathring{z}\bar{\mathring{z}} = U^2 + V^2 = \mathfrak{U}^2.$$

[1] Darboux, I, S. 295—298, IV, S. 169—170.

[2] Siehe Darboux, I, S. 297, die Formeln der 2. Zeile von oben. Bei Darboux ist ϱ für das $\mathring{z}$ unseres Textes geschrieben.

Substituiert man die Ausdrücke (129) für u, v, w in die Gleichung (128) der Tangentialebene τ, so erhält man[1] nach Multiplikation mit $1 + \mathring{z}\bar{\mathring{z}}$

$$(130)\qquad (\mathring{z} + \bar{\mathring{z}})x_1 + i(\bar{\mathring{z}} - \mathring{z})x_2 + (\mathring{z}\bar{\mathring{z}} - 1)x_3 = \lambda,$$

wobei

$$(131)\qquad \lambda = (1 + \mathring{z}\bar{\mathring{z}})\zeta = \mathfrak{u}\mathfrak{x}(1 + \mathfrak{U}^2)$$

gesetzt ist. Setzt man noch

$$p = \frac{\partial \lambda}{\partial \mathring{z}}, \quad \bar{p} = \frac{\partial \lambda}{\partial \bar{\mathring{z}}},$$

sodass

$$(132)\qquad \lambda = \lambda_0 + \int p\,d\mathring{z} + \bar{p}\,d\bar{\mathring{z}}$$

wird, dann ergibt die Differenziation von (130) nach $\mathring{z}$ und $\bar{\mathring{z}}$

$$(133)\qquad \begin{cases} x_1 - i x_2 + \bar{\mathring{z}} x_3 = p, \\ x_1 + i x_2 + \mathring{z} x_3 = \bar{p}. \end{cases}$$

Den drei Gleichungen (130) und (133) müssen offenbar die Koordinaten x_1, x_2, x_3 eines Flächenpunktes von $\mathfrak{x}$ genügen. Die Fläche $\mathfrak{x}$ ist somit bekannt, wenn $\mathring{z}$ und p als Funktionen zweier Parameter α, β bestimmt sind. Mit dem orthogonalen Kurvensystem auf der Einheitskugel ist aber die Funktion

$$\mathring{z}(\alpha, \beta) = U(\alpha, \beta) + i\,V(\alpha, \beta)$$

mitgegeben; es handelt sich somit nur noch darum, eine Funktion $p(\alpha, \beta)$ so zu konstruieren, dass die durch $\mathring{z}$ und p wegen der Gleichungen (130), (132) und (133) eindeutig bestimmte Fläche $\mathfrak{x}$ eine Lösung des vorgelegten Problems der sphärischen Abbildung liefert.

Zu diesem Zwecke gehen wir von der Differentialgleichung der Krümmungslinien aus. Diese lautet in den Grössen p und $\mathring{z}$:[2]

$$dp\,d\mathring{z} - d\bar{p}\,d\bar{\mathring{z}} = 0,$$

oder ausführlich geschrieben:

$$(p_\alpha \mathring{z}_\alpha - \bar{p}_\alpha \bar{\mathring{z}}_\alpha)d\alpha^2 + (p_\alpha \mathring{z}_\beta + p_\beta \mathring{z}_\alpha - \bar{p}_\alpha \bar{\mathring{z}}_\beta - \bar{p}_\beta \bar{\mathring{z}}_\alpha)d\alpha\,d\beta + (p_\beta \mathring{z}_\beta - \bar{p}_\beta \bar{\mathring{z}}_\beta)d\beta^2 = 0;$$

[1] Darboux, I, S. 297, Formel (30).
[2] Darboux, I, S. 295 und S. 297, Formel (32).

d. h. aber, die Kurven $\alpha = \text{const.}$, $\beta = \text{const.}$ sind dann und nur dann die Krümmungslinien der Fläche $\mathfrak{x}$, wenn gleichzeitig[1]

$$\begin{vmatrix} p_\alpha \bar{\mathring{z}}_\alpha \\ \bar{p}_\alpha \mathring{z}_\alpha \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} p_\beta \bar{\mathring{z}}_\beta \\ \bar{p}_\beta \mathring{z}_\beta \end{vmatrix} = 0 \tag{134}$$

sind. Aus den Gleichungen (134) in Verbindung mit der Beziehung

$$\mathfrak{U}_\alpha \mathfrak{U}_\beta = \mathring{z}_\alpha \mathring{z}_\beta + \mathring{z}_\alpha \mathring{z}_\beta = 0$$

folgt aber die Existenz einer Grösse ω^2 vom absoluten Betrage $|\omega^2| = 1$ derart, dass die Grössen $\bar{p}$ und $\mathring{z}$ den Differentialgleichungen (123) genügen müssen.[2]

Schreiben wir, wieder z für $\bar{p}$ und $\bar{z}$ für p, so ergibt sich aus (131) und (132)[3]

$$\begin{aligned} \lambda = \mathfrak{u}\mathfrak{x}(1 + \mathfrak{U}^2) &= \lambda_0 + \int\limits_{\alpha_0, \beta_0}^{\alpha, \beta} \bar{z}\, d\mathring{z} + z\, d\bar{\mathring{z}} \\ &= \lambda_0 + 2 \int\limits_{\alpha_0, \beta_0}^{\alpha, \beta} \mathfrak{X}\, d\mathfrak{U} \qquad \text{wegen (120).} \end{aligned} \tag{135}$$

Damit sind die Grössen $\mathring{z}$, $p = \bar{z}$ und λ als Funktionen von α und β bekannt und somit das Problem der sphärischen Abbildung gelöst.

59. Um zu zeigen, dass die von Darboux für $\lambda = \mathfrak{u}\mathfrak{x}(1 + \mathfrak{U}^2)$ angegebene Integraldarstellung (132) mit unseren Formeln übereinstimmt, setze man

$$\varphi = c + \int\limits_{\alpha_0, \beta_0}^{\alpha, \beta} \mathfrak{U}\, d\mathfrak{X}, \quad \varphi^* = \mathfrak{U}\mathfrak{X} - \varphi. \tag{136}$$

Dann ist offenbar

$$d\varphi^* = \mathfrak{U}\, d\mathfrak{X} + \mathfrak{X}\, d\mathfrak{U} - \mathfrak{U}\, d\mathfrak{X} = \mathfrak{X}\, d\mathfrak{U},$$

$$\varphi^* = \varphi^*_0 + \int\limits_{\alpha_0, \beta_0}^{\alpha, \beta} \mathfrak{X}\, d\mathfrak{U}.$$

[1] Darboux, IV, S. 170, Formel (3).
[2] Darboux, IV, S. 170, Formel (4) und (5).
[3] Darboux, IV, S. 170, Formel (6).

Ausserdem ist nach Formel (112) wegen $\mathfrak{e}\,d\mathfrak{X} = 0$

$$\begin{aligned} \mathfrak{x} &= \mathfrak{X} - 2\varphi(\mathfrak{U} - \mathfrak{e})^{-1} \\ &= \mathfrak{X} - \varphi(\mathfrak{u} - \mathfrak{e}) \end{aligned} \tag{137}$$

wegen (108).

Nach (135) haben wir zu beweisen, dass für $\lambda_0 = 2\varphi_0^*$

$$\lambda = 2\varphi^* \tag{138}$$

ist, oder aber, indem wir die Formeln (131) und (136) heranziehen und mit $1 + \mathfrak{U}^2$ dividieren:

$$\mathfrak{u}\mathfrak{x} = 2\frac{\mathfrak{U}\mathfrak{X} - \varphi}{1 + \mathfrak{U}^2}. \tag{139}$$

Nun ist andererseits

$$\begin{aligned} \mathfrak{u}\mathfrak{x} - \frac{2\mathfrak{U}\mathfrak{X}}{1 + \mathfrak{U}^2} &= \mathfrak{u}\mathfrak{x} - 2\frac{(\mathfrak{U} - \mathfrak{e})\mathfrak{X}}{(\mathfrak{U} - \mathfrak{e})^2} \\ &= \mathfrak{u}\mathfrak{x} - (\mathfrak{u} - \mathfrak{e})\mathfrak{X} && \text{(wegen (108))} \\ &= \mathfrak{u}(\mathfrak{x} - \mathfrak{X}) = -\varphi\mathfrak{u}(\mathfrak{u} - \mathfrak{e}) && \text{(wegen (137))} \\ &= -\varphi(1 - \mathfrak{u}\mathfrak{e}) = -2\frac{\varphi}{1 + \mathfrak{U}^2} && \text{(wegen (115)).} \end{aligned}$$

Damit sind die Formeln (139), (138), (135) und damit gleichzeitig die Darbouxsche Formel (132) auch mit unseren Hilfsmitteln bewiesen.

60. Die Differentialgleichung (124) $D(z) = 0$, durch deren Integration unser in Abschnitt **54**. formuliertes Problem I der ebenen Kurventheorie vollständig gelöst ist, hat die Besonderheit, dass ihre beiden Koeffizienten $\frac{\omega_\beta}{\omega}$ und $\frac{\omega_\alpha}{\omega}$ garnicht von der Funktion $\mathring{z}(\alpha, \beta)$ sondern nur von der Winkelgrösse $\vartheta(\alpha, \beta)$ abhängen, und dass vielmehr $\mathring{z}$ selbst ein Integral der Differentialgleichung $D(\mathring{z}) = 0$ ist. Dieser Umstand führt dazu, die Problemstellung I durch eine allgemeinere zu ersetzen.

Problem II. *Es sei ein Winkel $\vartheta = \vartheta(\alpha, \beta)$ als zweimal stetig differenzierbare Funktion von zwei Veränderlichen α und β gegeben. Gesucht werden sämtliche ebenen orthogonalen Kurvensysteme, welche, wenn man sie durch eine komplexe Funktion*

$$z(\alpha, \beta) = X(\alpha, \beta) + i\,Y(\alpha, \beta)$$

darstellt, der Bedingung

$$z_\alpha(\alpha, \beta) = |z_\alpha(\alpha, \beta)|\, e^{i\vartheta(\alpha, \beta)}$$

genügen, oder mit anderen Worten, sämtliche ebenen orthogonalen Kurvensysteme, deren Tangenten im Punkte α, β *an die Kurven* $\beta = \text{const.}$ *mit der X-Achse den vorgegebenen Winkel* $\vartheta(\alpha, \beta)$ *bilden.*

Dieses Problem II wird offenbar auch durch alle diejenigen Integrale der Differentialgleichung $D(z) = 0$, welche den Nebenbedingungen (125) genügen, vollständig gelöst. Gleichzeitig gehören aber zu einer gegebenen Funktion $\vartheta(\alpha, \beta)$ unendlich viele Probleme sphärischer Abbildung. Es sei nämlich das ebene, orthogonale Kurvensystem $\mathring{\mathfrak{X}}(\alpha, \beta)$ eine beliebige Lösung des Problems II; dann projiziere man das in der Ebene ε gelegene Kurvensystem $\mathring{\mathfrak{X}}(\alpha, \beta)$, dessen Komponenten $\mathring{X}$ und $\mathring{Y}$ sind, stereographisch vom Nordpol auf die Einheitskugel. Sei $\mathring{\mathfrak{x}}(\alpha, \beta)$ der Vektor, welcher das durch diese Projektion erzeugte orthogonale Kurvensystem auf der Einheitskugel beschreibt. Durchläuft jetzt das ebene Kurvensystem $\mathfrak{X}(\alpha, \beta)$ alle Lösungen des zu der gegebenen Funktion ϑ gehörigen Problems II, so liefert nach den Betrachtungen des Abschnitts **53.** der Ausdruck

$$\mathfrak{x} = \{\mathfrak{X}, \mathring{\mathfrak{X}} - \mathfrak{c}\}_c$$

sämtliche Flächen $\mathfrak{x}$, deren auf die Krümmungslinien bezogenes sphärisches Bild gleich $\mathring{\mathfrak{x}}(\alpha, \beta)$ wird.

61. Die Differentialgleichung (124) $D(z) = 0$ ist eine homogene, lineare, partielle Differentialgleichung zweiter Ordnung vom hyperbolischen Typus mit »gleichen Laplaceschen Invarianten». Diese kann man immer auf die bequemere Moutardsche Form bringen. Man setze

$$(140) \qquad u = \omega z\,, \quad h = \frac{\omega_{\alpha\beta}}{\omega}\,;$$

dann zeigt eine leichte Rechnung, dass u der Differentialgleichung

$$(141) \qquad M(u) = u_{\alpha\beta} - hu = 0$$ [1]

genügt.

Aus den Gleichungen (125) wird jetzt

[1] Vergl. Darboux, IV, S 178.

(142) $$A = \omega z_\alpha = u_\alpha - \frac{\omega_\alpha}{\omega} u, \quad iB = \omega z_\beta = u_\beta - \frac{\omega_\beta}{\omega} u;$$

d. h. aber, man erhält an Stelle von (125) die Nebenbedingungen

(143) $$u_\alpha - \frac{\omega_\alpha}{\omega} u = \text{reelle Grösse}, \quad -i\left(u_\beta - \frac{\omega_\beta}{\omega} u\right) = \text{reelle Grösse}.$$

Indem man in die Gleichungen (126) für ωz_α bezw. ωz_β die Ausdrücke in u aus Formel (142) einsetzt, zeigt man, dass von den beiden Bedingungen (143) nur eine einzige erfüllt zu sein braucht, damit die andere von selbst gilt.

62. Führt man die Lösung des Problems II auf die Integration der Differentialgleichung (124) bezw. (141) zurück, so hat dies den Nachteil, dass das Integral z bezw. u noch den Nebenbedingungen (125) bezw. (143) genügen muss. Man wird daher suchen, die Differentialgleichung (124) durch eine Differentialgleichung von reellen Grössen zu ersetzen. Zu diesem Zwecke geht man von dem System von Differentialgleichungen erster Ordnung (127) für die Grössen A und B aus und erhält durch Elimination, etwa von A zur Bestimmung von B die Differentialgleichung

(144) $$B_{\alpha\beta} - \frac{\vartheta_{\beta\beta}}{\vartheta_\beta} B_\alpha + \vartheta_\alpha \vartheta_\beta B = 0.$$

Ist jetzt B ein Integral dieser Differentialgleichung und setzt man weiter

(145) $$A = \frac{B_\alpha}{\vartheta_\beta},$$

so genügt dieses Funktionenpaar A, B offenbar dem System von Differentialgleichungen (127). Dann ist aber, wie man leicht verifiziert

$$A\overline{\omega}\,d\alpha + iB\overline{\omega}\,d\beta$$

ein vollständiges Differential, und das Integral

$$z = z_0 + \int\limits_{\alpha_0,\beta_0}^{\alpha,\beta} A\overline{\omega}\,d\alpha + iB\overline{\omega}\,d\beta$$

liefert offenbar wegen (122) eine Darstellung des gewünschten Kurvensystems.

Für manche Zwecke ist es vorteilhaft, die Differentialgleichung (144) zu transformieren, indem man in (144)

$$B = \vartheta_\beta C \tag{146}$$

substituiert. Dann genügt C der Differentialgleichung

$$C_{\alpha\beta} + \frac{\partial}{\partial\beta}\left(\frac{\vartheta_{\alpha\beta}}{\vartheta_\beta} C\right) + \vartheta_\alpha \vartheta_\beta C = 0.\text{[1]} \tag{147}$$

Aus jedem Integral C dieser Differentialgleichung erhält man B nach Gleichung (146); A wird durch die aus (145) abgeleitete Formel

$$A = C_\alpha + \frac{\vartheta_{\alpha\beta}}{\vartheta_\beta} C$$

bestimmt.

Die Differentialgleichungen (144) und (147) haben beide den Nachteil, dass ihre Koeffizienten die Funktion ϑ_β im Nenner enthalten. Sie sind mithin nur regulär, solange $\vartheta_\beta \neq 0$ ist, d. h. offenbar nur, wenn die gesuchten Kurven $\alpha = \text{const.}$ keinen Wendepunkt haben.

§ 7. Eine Gleichung zwischen assoziierten Flächen.

63. In der Ebene ε mit dem Normaleinheitsvektor $\mathfrak{e}$ seien zwei zueinander parallele orthogonale Kurvensysteme $\mathfrak{X}(\alpha, \beta)$ und $\mathfrak{Y}(\alpha, \beta)$ gegeben. Dann kann man nach den Ausführungen des Abschnitts **53.** § 5 aus diesen Kurvensystemen Flächen konstruieren, deren Parameterlinien $\alpha = \text{const.}$, $\beta = \text{const.}$ mit ihren Krümmungslinien zusammenfallen. Und zwar erhält man zwei ganz verschiedene Flächen, wenn man die Rolle von $\mathfrak{X}$ und $\mathfrak{Y}$ vertauscht.

Wir setzen (vgl. Formel (112) § 5)

$$\mathfrak{x} = \{\mathfrak{X}, \mathfrak{Y} - \mathfrak{e}\}_{c_0}, \quad \mathfrak{x}^* = \{\mathfrak{Y}, \mathfrak{X} - \mathfrak{e}\}_{c_0^*}. \tag{148}$$

Dann sind nach Formel (109)

---

[1] Diese Differentialgleichung ist in der Abhandlung des Verfassers: »Über die partielle, lineare, homogene Differentialgleichung 2. Ordnung vom hyperbolischen Typus, deren Koeffizienten in einer Veränderlichen periodisch sind, Teil I: Das Integrationsproblem«. Mathemat. Ann. 105 (1931), S. 437—498 auf S. 493—498 ausführlich untersucht worden.

$$(149)\qquad \begin{cases} \mathfrak{u} = \{\mathfrak{Y}, \mathfrak{Y} - \mathfrak{e}\}_{\frac{\mathfrak{Y}_0^2-1}{2}}, \\ \mathfrak{u}^* = \{\mathfrak{X}, \mathfrak{X} - \mathfrak{e}\}_{\frac{\mathfrak{X}_0^2-1}{2}} \end{cases}$$

die Normaleinheitsvektoren von $\mathfrak{x}$ bezw. $\mathfrak{x}^*$.

Ausserdem führen die beiden Probleme der sphärischen Abbildung, welche zu den beiden von den Vektoren $\mathfrak{u}$ und $\mathfrak{u}^*$ auf der Einheitskugel beschriebenen orthogonalen Kurvensystemen gehören, zu demselben Problem II (vgl. Abschn. **60**, § 6); denn die Kurven $\beta = \text{const.}$ der durch stereographische Projektion aus $\mathfrak{u}$ und $\mathfrak{u}^*$ hervorgegangenen ebenen Kurvensysteme (vergl. Formel (107) § 5)

$$\{\mathfrak{u}, \mathfrak{e} - \mathfrak{u}\}_{\mathfrak{e}\mathfrak{u}_0} = \mathfrak{Y}(\alpha, \beta), \quad \{\mathfrak{u}^*, \mathfrak{e} - \mathfrak{u}^*\}_{\mathfrak{e}\mathfrak{u}_0^*} = \mathfrak{X}(\alpha, \beta)$$

haben den gleichen Tangentenwinkel $\vartheta(\alpha, \beta)$.

Wir fragen nach einer Beziehung zwischen den Flächen $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{x}^*$, die wir nach geeigneter Bestimmung der Konstanten c_0 und c_0^* assoziierte Flächen nennen wollen; und zwar geben wir den Konstanten c_0 und c_0^* den festen Wert

$$(150)\qquad c_0 = c_0^* = \frac{\mathfrak{X}_0 \mathfrak{Y}_0 - 1}{2}.$$

64. Wir setzen ferner

$$(151)\qquad c_1 = \frac{\mathfrak{X}_0 \mathfrak{Y}_0 - \mathfrak{Y}_0^2}{2} + c, \quad c_1' = \frac{\mathfrak{X}_0^2 - \mathfrak{X}_0 \mathfrak{Y}_0}{2} + c, \quad c_1' - c_1 = \frac{(\mathfrak{X}_0 - \mathfrak{Y}_0)^2}{2},$$

unter c eine beliebige Konstante verstanden, und bilden die Flächen

$$(152)\qquad \mathfrak{y} = \{\mathfrak{X} - \mathfrak{Y}, \mathfrak{Y} - \mathfrak{e}\}_{c_1}, \quad \mathfrak{y}^* = \{\mathfrak{X} - \mathfrak{Y}, \mathfrak{X} - \mathfrak{e}\}_{c_1'}.$$

Dann wird wegen der distributiven Eigenschaft (44)

$$(153)\qquad \begin{aligned} \mathfrak{y} &= \{\mathfrak{X}, \mathfrak{Y} - \mathfrak{e}\}_{c_0 + c} - \{\mathfrak{Y}, \mathfrak{Y} - \mathfrak{e}\}_{\frac{\mathfrak{Y}_0^2-1}{2}} \\ &= \mathfrak{x} - \mathfrak{u} - c(\mathfrak{u} - \mathfrak{e}) \qquad \text{(vgl. Formel (36) und (108))} \end{aligned}$$

und entsprechend

$$(154)\qquad \begin{aligned} \mathfrak{y}^* &= \{\mathfrak{X}, \mathfrak{X} - \mathfrak{e}\}_{\frac{\mathfrak{X}_0^2-1}{2}} - \{\mathfrak{Y}, \mathfrak{X} - \mathfrak{e}\}_{c_0 - c} \\ &= \mathfrak{u}^* - \mathfrak{x}^* - c(\mathfrak{u}^* - \mathfrak{e}), \end{aligned}$$

d. h.: Für jeden Wert von c ist $\mathfrak{y}$ eine Parallelfläche in engerem Sinne von $\mathfrak{x}$ (vergl. Definition 4. Abschnitt 3.) und ebenso $-\mathfrak{y}^*$ von $\mathfrak{x}^*$.

Nun folgt aber aus (152) nach Satz 3 § 3

$$\mathfrak{y}^{-1} = \{(\mathfrak{X}-\mathfrak{Y})^{-1},\ \{\mathfrak{Y}-\mathfrak{e},\, \mathfrak{X}-\mathfrak{Y}\}_{*-c_1}\}_{c_2}, \tag{155}$$

$$c_2 = \frac{c_1}{(\mathfrak{X}_0-\mathfrak{Y}_0)^2} \tag{156}$$

und entsprechend aus (152)

$$\mathfrak{y}^{*-1} = \{(\mathfrak{X}-\mathfrak{Y})^{-1},\ \{\mathfrak{X}-\mathfrak{e},\, \mathfrak{X}-\mathfrak{Y}\}_{*-c_1'}\}_{c_2'}, \tag{157}$$

$$c_2' = \frac{c_1'}{(\mathfrak{X}_0-\mathfrak{Y}_0)^2} = \frac{1}{2} + c_2 \qquad \text{(wegen (151) und (156))}. \tag{158}$$

Andererseits ist

$$\begin{aligned}\{\mathfrak{X}-\mathfrak{e},\, \mathfrak{X}-\mathfrak{Y}\}_{*-c_1'} &= \{\mathfrak{X}-\mathfrak{Y}+\mathfrak{Y}-\mathfrak{e},\, \mathfrak{X}-\mathfrak{Y}\}_{*-c_1'}\\ &= \{\mathfrak{X}-\mathfrak{Y},\, \mathfrak{X}-\mathfrak{Y}\}_{\frac{(\mathfrak{X}_0-\mathfrak{Y}_0)^2}{2}} + \{\mathfrak{Y}-\mathfrak{e},\, \mathfrak{X}-\mathfrak{Y}\}_{c_1''},\end{aligned} \tag{159}$$

wobei

$$(\mathfrak{X}_0-\mathfrak{Y}_0+\mathfrak{Y}_0-\mathfrak{e})(\mathfrak{X}_0-\mathfrak{Y}_0) - c_1' = \frac{(\mathfrak{X}_0-\mathfrak{Y}_0)^2}{2} + c_1''$$

ist, d. h. aber

$$\begin{aligned}c_1'' &= \frac{(\mathfrak{X}_0-\mathfrak{Y}_0)^2}{2} + (\mathfrak{Y}_0-\mathfrak{e})(\mathfrak{X}_0-\mathfrak{Y}_0) - c_1'\\ &= (\mathfrak{Y}_0-\mathfrak{e})(\mathfrak{X}_0-\mathfrak{Y}_0) - c_1 \qquad \text{(wegen (151))}.\end{aligned} \tag{160}$$

Folglich ist wegen (159), (40) § 1 und (160)

$$\{\mathfrak{X}-\mathfrak{e},\, \mathfrak{X}-\mathfrak{Y}\}_{*-c_1'} = \{\mathfrak{Y}-\mathfrak{e},\, \mathfrak{X}-\mathfrak{Y}\}_{*-c_1}.$$

Es ergibt sich somit aus (157) wegen (158)

$$\mathfrak{y}^{*-1} = \{(\mathfrak{X}-\mathfrak{Y})^{-1},\ \{\mathfrak{Y}-\mathfrak{e},\, \mathfrak{X}-\mathfrak{Y}\}_{*-c_1}\}_{c_2+\frac{1}{2}}$$

und endlich wegen (155) und (36) § 1

$$\mathfrak{y}^{*-1} = \mathfrak{y}^{-1} - \{\mathfrak{Y}-\mathfrak{e},\, \mathfrak{X}-\mathfrak{Y}\}_{*-c_1}^{-1}. \tag{161}$$

Nach dem Hilfssatz des § 2 sind jetzt wegen (155) die drei Flächen

$$\mathfrak{y}^{*-1},\ \mathfrak{y}^{-1},\ \{\mathfrak{Y}-\mathfrak{e},\ \mathfrak{X}-\mathfrak{Y}\}^{-1}_{*-c_1}=\mathfrak{z}$$

zueinander parallel.

Andererseits ist nach Formel (160) und (45) § 1

$$\mathfrak{z}=(-\mathfrak{e}+\{\mathfrak{Y},\ \mathfrak{X}-\mathfrak{Y}\}_{c_1''})^{-1}.$$

Nun ist aber offenbar der Endpunkt des Vektors $-\mathfrak{e}+\{\mathfrak{Y},\ \mathfrak{X}-\mathfrak{Y}\}_{c_1''}$ in einer Ebene gelegen, welche im Abstand -1 zu der durch den o-Punkt laufenden Ebene ε gezogen ist; der Endpunkt des Vektors $\mathfrak{z}$ liegt somit auf einer Kugel vom Radius $\frac{1}{2}$, welche sich nach der negativen Seite der Ebene ε erstreckt und diese im o-Punkt berührt. Setzt man endlich

$$\mathfrak{v}=\mathfrak{e}+2\mathfrak{z}, \tag{162}$$

so durchläuft der Endpunkt von $\mathfrak{v}$ die Einheitskugel mit dem o-Punkt als Mittelpunkt. Da nun aber mit $\mathfrak{z}$ auch die Fläche $\mathfrak{v}$ zu den Flächen $\mathfrak{y}^{-1}$ und $\mathfrak{y}^{*-1}$ parallel ist, so ist $\mathfrak{v}$ das den Flächen $\mathfrak{y}^{-1}$ und $\mathfrak{y}^{*-1}$ gemeinsame sphärische Bild.

Substituieren wir in Formel (161) für $\mathfrak{y}$ und $\mathfrak{y}^*$ ihre Werte aus (153) und (154) und drücken wir $\mathfrak{z}$ nach Formel (162) durch den Normaleinheitsvektor $\mathfrak{v}$ aus, so erhalten wir zwischen den in Formel (148) und (150) definierten zu einander assoziierten Flächen $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{x}^*$ für jeden Wert von c die Beziehung

$$(\mathfrak{x}-\mathfrak{u}-c(\mathfrak{u}-\mathfrak{e}))^{-1}+(\mathfrak{x}^*-\mathfrak{u}^*+c(\mathfrak{u}^*-\mathfrak{e}))^{-1}=\frac{\mathfrak{v}-\mathfrak{e}}{2};$$

d. h. demnach, *die Flächen*

$$(\mathfrak{x}-\mathfrak{u}-c(\mathfrak{u}-\mathfrak{e}))^{-1} \quad \text{und} \quad -(\mathfrak{x}^*-\mathfrak{u}^*+c(\mathfrak{u}^*-\mathfrak{e}))^{-1}$$

sind zueinander parallel im engeren Sinne (vergl. Definition 4. aus Abschnitt **3.**).

Insbesondere erhält man für $c=0$

$$(\mathfrak{x}-\mathfrak{u})^{-1}+(\mathfrak{x}^*-\mathfrak{u}^*)^{-1}=\frac{\mathfrak{v}-\mathfrak{e}}{2}. \tag{163}$$

65. Die in der Relation (163) enthaltene Aussage lässt sich auch umkehren:

Es sei $\mathfrak{w}(\alpha,\beta)$ eine beliebige Fläche mit dem (positiv gerichteten) Normaleinheitsvektor $\mathfrak{v}$. Man bilde durch Inversion die Flächen

$$\mathfrak{w}^{-1} \text{ und } \left(\frac{\mathfrak{v}-\mathfrak{e}}{2}-\mathfrak{w}\right)^{-1};$$

ferner seien $\mathfrak{u}$ bezw. $\mathfrak{u}^*$ die mit -1 multiplizierten Normaleinheitsvektoren der Fläche $\mathfrak{w}^{-1}$ bezw. $\left(\frac{\mathfrak{v}-\mathfrak{e}}{2}-\mathfrak{w}\right)^{-1}$. Setzt man endlich

$$\mathfrak{x} = \mathfrak{w}^{-1} + \mathfrak{u}, \quad \mathfrak{x}^* = \left(\frac{\mathfrak{v}-\mathfrak{e}}{2}-\mathfrak{w}\right)^{-1} + \mathfrak{u}^*,$$

so ist

$$\{\mathfrak{x}, \mathfrak{e}-\mathfrak{u}\}_{\mathfrak{e}\mathfrak{x}_0} = \{\mathfrak{u}^*, \mathfrak{e}-\mathfrak{u}^*\}_{\mathfrak{e}\mathfrak{u}_0} = \mathfrak{X},$$
$$\{\mathfrak{x}^*, \mathfrak{e}-\mathfrak{u}^*\}_{\mathfrak{e}\mathfrak{x}_0^*} = \{\mathfrak{u}, \mathfrak{e}-\mathfrak{u}\}_{\mathfrak{e}\mathfrak{u}_0} = \mathfrak{Y}.$$

§ 8. Ribaucourtransformationen in der Ebene.

66. Es seien $\mathfrak{X}(\alpha,\beta)$ und $\mathfrak{Y}(\alpha,\beta)$ zwei zu einander parallele orthogonale Kurvensysteme der Ebene ε. Da dann $\mathfrak{Y}d\mathfrak{X}$ ein vollständiges Differenzial ist, lässt sich auch hier das Symbol

$$(164)\qquad \begin{cases} \hat{\mathfrak{X}} = \{\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}\}_c = \mathfrak{X} - 2\varphi\mathfrak{Y}^{-1}, \\ \varphi = c + \int\limits_{\alpha_0,\beta_0}^{\alpha,\beta} \mathfrak{Y}d\mathfrak{X} \end{cases}$$

definieren.

Um auch in diesem Falle eine geometrische Deutung der Transformation (164) anzugeben, setzen wir anstelle der Formeln (49) bis (57) des § 2:

$$\mathfrak{X}_\alpha = \lambda\mathfrak{Y}_\alpha, \quad \mathfrak{X}_\beta = \mu\mathfrak{Y}_\beta,$$
$$(d\mathfrak{X})^2 = A^2 d\alpha^2 + B^2 d\beta^2,$$
$$\mathfrak{X}_\alpha = A\mathfrak{U}_1, \quad \mathfrak{X}_\beta = B\mathfrak{U}_2,$$
$$\xi = \mathfrak{Y}\mathfrak{U}_1, \quad \eta = \mathfrak{Y}\mathfrak{U}_2.$$

Dann ist

$$\mathfrak{Y}_\alpha = \frac{A}{\lambda}\mathfrak{U}_1, \quad \mathfrak{Y}_\beta = \frac{B}{\mu}\mathfrak{U}_2,$$
$$\mathfrak{Y} = \xi\mathfrak{U}_1 + \eta\mathfrak{U}_2,$$

$$\mathfrak{Y}\mathfrak{Y}_\alpha = \xi \frac{A}{\lambda}, \quad \mathfrak{Y}\mathfrak{Y}_\beta = \eta \frac{B}{\mu},$$

$$\varphi_\alpha = \mathfrak{Y}\mathfrak{X}_\alpha = \xi A, \quad \varphi_\beta = \mathfrak{Y}\mathfrak{X}_\beta = \eta B.$$

Ferner ergibt sich durch Differentiation von (164) (vgl. Formel (58))

$$\hat{\mathfrak{X}}_\alpha = \frac{A}{\lambda}\left(\lambda - \frac{2\varphi}{\mathfrak{Y}^2}\right)(\mathfrak{U}_1 - 2\xi\mathfrak{Y}^{-1}),$$

$$\hat{\mathfrak{X}}_\beta = \frac{B}{\mu}\left(\mu - \frac{2\varphi}{\mathfrak{Y}^2}\right)(\mathfrak{U}_2 - 2\eta\mathfrak{Y}^{-1}).$$

Setzt man noch

$$\hat{\mathfrak{U}}_1 = \mathfrak{U}_1 - 2\xi\mathfrak{Y}^{-1}, \quad \hat{\mathfrak{U}}_2 = \mathfrak{U}_2 - 2\eta\mathfrak{Y}^{-1},$$

so ist

$$\hat{\mathfrak{X}}_\alpha \parallel \hat{\mathfrak{U}}_1, \quad \hat{\mathfrak{X}}_\beta \parallel \hat{\mathfrak{U}}_2,$$

und ferner, wie man leicht durch Rechnung verifiziert,

$$\hat{\mathfrak{U}}_1^2 = 1, \quad \hat{\mathfrak{U}}_2^2 = 1, \quad \hat{\mathfrak{U}}_1\hat{\mathfrak{U}}_2 = 0.$$

Endlich ergibt sich für

$$R_1 = -\frac{\varphi}{\xi}, \quad R_2 = -\frac{\varphi}{\eta}$$

entsprechend zu Formel (61)

$$\hat{\mathfrak{X}} + R_1\hat{\mathfrak{U}}_1 = \mathfrak{X} + R_1\mathfrak{U}_1, \quad \hat{\mathfrak{X}} + R_2\hat{\mathfrak{U}}_2 = \mathfrak{X} + R_2\mathfrak{U}_2,$$

d. h. aber geometrisch: Zwei entsprechende Kurven $\alpha = \text{const.}$ der beiden Systeme $\mathfrak{X}(\alpha, \beta)$ und $\hat{\mathfrak{X}}(\alpha, \beta)$ erscheinen als die beiden Zweige der Hüllkurve einer Schar von Kreisen mit $\mathfrak{X} + R_1\mathfrak{U}_1$ als Mittelpunkt und R_1 als Radius; und ebenso erscheinen zwei entsprechende Kurven $\beta = \text{const.}$ der Systeme $\mathfrak{X}(\alpha, \beta)$ und $\hat{\mathfrak{X}}(\alpha, \beta)$ als die beiden Zweige der Hüllkurve einer Schar von Kreisen mit $\mathfrak{X} + R_2\mathfrak{U}_2$ als Mittelpunkt und R_2 als Radius.

Wir wollen den Übergang von $\mathfrak{X}(\alpha, \beta)$ zu $\hat{\mathfrak{X}}(\alpha, \beta)$ eine *ebene Ribaucourtransformation* nennen und definieren:

Definition 7. *Wir sagen: Das orthogonale Kurvensystem $\hat{\mathfrak{X}}(\alpha, \beta)$ geht durch ebene Ribaucourtransformation aus dem orthogonalen System $\mathfrak{X}(\alpha, \beta)$ hervor, wenn zu entsprechenden Punkten P und $\hat{P}$ in $\mathfrak{X}(\alpha, \beta)$ und $\hat{\mathfrak{X}}(\alpha, \beta)$ zwei Kreise k_1 und k_2*

existieren, welche erstens beide durch P und $\hat{P}$ gehen; zweitens soll k_1 die beiden Kurven $\alpha = \text{const.}$ durch P und $\hat{P}$ von $\mathfrak{X}(\alpha, \beta)$ und $\hat{\mathfrak{X}}(\alpha, \beta)$, k_2 die beiden Kurven $\beta = \text{const.}$ durch P und $\hat{P}$ von $\mathfrak{X}(\alpha, \beta)$ und $\hat{\mathfrak{X}}(\alpha, \beta)$ berühren.

Übrigens folgt, wenn die Schar der Kreise k_1 mit dem in der Definition 7 geforderten Eigenschaften gegeben ist, die Existenz der Kreise k_2 von selbst; denn offenbar ist k_2 der zu k_1 orthogonale Kreise durch P und $\hat{P}$.

67. Es lässt sich ferner zeigen, indem man die Bianchische Schlussweise[1] auf den ebenen Fall überträgt, dass in der Form (164) alle ebenen Ribaucourtransformationen des Kurvensystems $\mathfrak{X}(\alpha, \beta)$ enthalten sind. Wir gehen auf den Beweis nicht ausführlich ein, da wir im folgenden von dieser Tatsache keinen Gebrauch machen. Wir bemerken nur, dass sich jetzt der Hilfssatz des § 2 auch für ebene Kurvensysteme formulieren lässt, und zwar findet man seinen Beweis ohne Schwierigkeiten durch sinngemässe Übertragung der Überlegungen des Abschnitts **36.** § 2.

Aus dem Hilfsatz folgert man jetzt anstelle von Satz 1 (vergl. die Betrachtungen des Abschnitts **40.** § 2) den

Satz 1ᵃ: *Bezeichnet in dem Ausdruck*

$$\hat{\mathfrak{X}} = \{\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}\}_c$$

$\mathfrak{X}(\alpha, \beta)$ ein festes orthogonales Kurvensystem der Ebene ε, und durchläuft $\mathfrak{Y}$ alle zu $\mathfrak{X}(\alpha, \beta)$ parallelen ebenen Kurvensysteme, so bestimmt $\hat{\mathfrak{X}}(\alpha, \beta)$ alle ebenen orthogonalen Kurvensysteme, welche aus $\mathfrak{X}(\alpha, \beta)$ durch Ribaucourtransformation hervorgehen.

Ist aber $\mathfrak{Y}(\alpha, \beta)$ ein festes, ebenes, orthogonales Kurvensystem und durchläuft $\mathfrak{X}$ alle zu $\mathfrak{Y}(\alpha, \beta)$ parallelen Kurvensysteme, so liefert der Ausdruck für $\hat{\mathfrak{X}}$ alle zu $\mathfrak{Y}^{-1}$ parallelen Kurvensysteme.

Entsprechend lassen sich auch die Sätze 2 und 3 des § 3 und Satz 4 des § 4 für unser Symbol $\{\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}\}_c$ aussprechen. Man erhält so:

Satz 2ᵃ: *Die beiden ebenen orthogonalen Kurvensysteme*

$$\hat{\mathfrak{X}}^{-1} = \{\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}\}_c^{-1} \quad \textit{und} \quad \hat{\mathfrak{Y}}^{-1} = \{\mathfrak{Y}, \mathfrak{X}\}_{*-c}^{-1}$$

sind zueinander parallel.

[1] Bianchi, S. 171—174.

Satz 3^a: *Es ist*

$$\{\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}\}_c^{-1} = \{\mathfrak{X}^{-1}, \{\mathfrak{Y}, \mathfrak{X}\}_{*-c}\}_{\frac{c}{\mathfrak{X}_0^2}}$$

$$= \mathfrak{X}^{-1} - 2\frac{\varphi}{\mathfrak{X}^2}\{\mathfrak{Y}, \mathfrak{X}\}_{*-c}^{-1},$$

wobei

$$\varphi = c + \int\limits_{\alpha_0, \beta_0}^{\alpha, \beta} \mathfrak{Y}\, d\mathfrak{X}$$

gesetzt ist.

Satz 4^a: *Sind* $\mathfrak{X}(\alpha, \beta)$, $\mathfrak{Y}(\alpha, \beta)$, $\mathfrak{Z}(\alpha, \beta)$ *drei zueinander parallele orthogonale ebene Kurvensysteme, so ist*

$$\{\{\mathfrak{X}, \mathfrak{Z}\}_{c_1}, \{\mathfrak{Y}, \mathfrak{Z}\}_{c_2}\}_{c_3} = \{\{\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}\}_{c_4}, \{\mathfrak{Z}, \mathfrak{Y}\}_{*-c_2}\}_{c_5},$$

wobei die Konstanten c_1, c_2, c_3 *beliebig sind und die durch die Formeln* (73) *und* (74) *bestimmten Konstanten* c_4 *und* c_5 *von* c_1, c_2, c_3 *abhängen.*

Während die Beweise der Sätze 3 und 4 auch für die Behauptungen der Sätze 3^a und 4^a schlüssig bleiben, verlangt der Beweis von Satz 2^a eine leichte Modifizierung.

Es gelten zwar auch hier die Formeln (65) und (66), wenn man in ihnen für die Flächen $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{y}$ die Kurvensysteme $\mathfrak{X}$ und $\mathfrak{Y}$ substituiert. Anstelle der Normalvektoren $\mathfrak{u}, \hat{\mathfrak{u}}, \hat{\hat{\mathfrak{u}}}$ hat man aber jetzt die Tangenteneinheitsvektoren $\mathfrak{U}_1$, bezw. $\hat{\mathfrak{U}}_1$ bezw. $\hat{\hat{\mathfrak{U}}}_1$ an die Kurven $\beta = \text{const.}$ des Systems $\mathfrak{X}(\alpha, \beta)$ bezw. $\{\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}\}_c$ bezw. $\{\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}\}_c^{-1}$ einzuführen; man beweist dann, ebenso wie in Abschnitt **41.**, § 3 anstelle der Formel (67) für $\hat{\hat{\mathfrak{u}}}$

$$\hat{\hat{\mathfrak{U}}}_1 = \mathfrak{U}_1 - 2\frac{((\mathfrak{U}_1\mathfrak{X})\mathfrak{Y}^2 - 2(\mathfrak{U}_1\mathfrak{Y})\varphi^*)\mathfrak{X} + ((\mathfrak{U}_1\mathfrak{Y})\mathfrak{X}^2 - 2(\mathfrak{U}_1\mathfrak{X})\varphi)\mathfrak{Y}}{\mathfrak{X}^2\mathfrak{Y}^2 - 4\varphi\varphi^*}.$$

Aus den Symmetrieeigenschaften dieses Ausdruckes in $\mathfrak{X}$ und $\mathfrak{Y}$, φ und φ^* folgt wieder

$$\hat{\hat{\mathfrak{U}}}_1 = \hat{\hat{\mathfrak{U}}}_1^*,$$

wenn $\hat{\hat{\mathfrak{U}}}_1^*$ den Tangenteneinheitsvektor an die Kurven $\beta = \text{const.}$ des Systems $\{\mathfrak{Y}, \mathfrak{X}\}_{*-c}^{-1}$ bedeutet. Damit ist auch Satz 2^a vollständig bewiesen.

68. Es sei wieder $\mathfrak{x}(\alpha, \beta)$ eine Fläche und $\mathfrak{u}(\alpha, \beta)$ das sphärische Bild der Krümmungslinien von $\mathfrak{x}$. Die Flächen $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{u}$ führe man vermittels der Ribaucourtransformationen (106) und (107) des § 5 in die ebenen Kurvensysteme $\mathfrak{X}(\alpha, \beta)$ und $\mathfrak{U}(\alpha, \beta)$, vermittels (113) und (114) des § 5 in die ebenen Kurvensysteme $\mathfrak{X}'(\alpha, \beta)$ und $\mathfrak{U}'(\alpha, \beta)$ über.

Es soll jetzt gezeigt werden, dass man $\mathfrak{X}(\alpha, \beta)$ durch ebene Ribaucourtransformation in $\mathfrak{X}'(\alpha, \beta)$ überführen kann. Bildet man nämlich

$$\hat{\mathfrak{X}} = \{\mathfrak{X}, \mathfrak{U}\}_c, \tag{165}$$

so behaupten wir: es ist

$$\hat{\mathfrak{X}} = \mathfrak{X}' - 2c_1'\,\mathfrak{U}' \tag{166}$$

mit

$$c_1' = c - \frac{\mathfrak{e}\mathfrak{x}_0}{1 - \mathfrak{e}\mathfrak{u}_0}\,. \tag{167}$$

Beweis: Setzt man in (165) für $\mathfrak{X}$ und $\mathfrak{U}$ die Werte aus (106) und (107) ein, so ergibt sich,

$$\hat{\mathfrak{X}} = \{\{\mathfrak{x}, \mathfrak{e}-\mathfrak{u}\}_{\mathfrak{e}\mathfrak{x}_0}, \{\mathfrak{u}, \mathfrak{e}-\mathfrak{u}\}_{\mathfrak{e}\mathfrak{u}_0}\}_c,$$

oder aber nach Satz 4

$$\hat{\mathfrak{X}} = \{\{\mathfrak{x}, \mathfrak{u}\}_{c_1'}, \{\mathfrak{e}-\mathfrak{u}, \mathfrak{u}\}_{c_2'}\}_{c'}, \tag{168}$$

wobei aus den Formeln (73) und (74) des § 4 sich für c_1' der Ausdruck (167) ergibt, während

$$\begin{cases} c_2' = (\mathfrak{e}-\mathfrak{u}_0)\mathfrak{u}_0 - \mathfrak{e}\mathfrak{u}_0 = -1, \\ c' = \mathfrak{e}\mathfrak{x}_0 - 2c_1'(\mathfrak{e}\mathfrak{u}_0) \end{cases} \tag{169}$$

zu setzen ist.

Nunmehr folgt aus (168) wegen (42), (45), (40) § 1 und wegen $\mathfrak{u}^{-1} = \mathfrak{u}$

$$\begin{aligned} \hat{\mathfrak{X}} &= \{\mathfrak{x} - 2c_1'\mathfrak{u},\ \mathfrak{e} - (1 + 2c_2')\mathfrak{u}\}_{c'} \\ &= \{\mathfrak{x} - 2c_1'\mathfrak{u},\ \mathfrak{e} + \mathfrak{u}\}_{\mathfrak{e}\mathfrak{x}_0 - 2c_1'(\mathfrak{e}\mathfrak{u}_0)} && \text{wegen (169)} \\ &= \{\mathfrak{x}, \mathfrak{e} + \mathfrak{u}\}_{\mathfrak{e}\mathfrak{x}_0} - 2c_1'\{\mathfrak{u}, \mathfrak{e} + \mathfrak{u}\}_{\mathfrak{e}\mathfrak{u}_0} && \text{wegen (44) § 1} \\ &= \mathfrak{X}' - 2c_1'\,\mathfrak{U}' \end{aligned}$$

nach Formel (113) und (114) des § 5. Damit ist Formel (166) bewiesen.

Aus (167) folgt:

$$c_1' = 0 \quad \text{für} \quad c = \frac{\mathfrak{e}\mathfrak{x}_0}{1 - \mathfrak{e}\mathfrak{u}_0}.$$

Somit ergibt sich aus (165) und (166)

(170) $$\mathfrak{X}' = \{\mathfrak{X}, \mathfrak{U}\}_{\frac{\mathfrak{e}\mathfrak{x}_0}{1-\mathfrak{e}\mathfrak{u}_0}},$$

d. h. aber, dass sich das Kurvensystem $\mathfrak{X}(\alpha, \beta)$ durch ebene Ribaucourtransformation in $\mathfrak{X}'(\alpha, \beta)$ überführen lässt.

69. Wir gehen zu einer anderen Anwendung des Satzes 4 über. *Es seien* $\mathfrak{x}$ *und* $\mathfrak{y}$ *zwei Parallelflächen, und es sei*

(171) $$\hat{\mathfrak{x}} = \{\mathfrak{x}, \mathfrak{y}\}_c.$$

Führt man jetzt $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$, *und* $\hat{\mathfrak{x}}$ *durch die Ribaucourtransformationen* (106) *in die ebenen orthogonalen Kurvensystem* $\mathfrak{X}(\alpha, \beta)$, $\mathfrak{Y}(\alpha, \beta)$ *und* $\hat{\mathfrak{X}}(\alpha, \beta)$ *über, so behaupten wir, es ist*

(172) $$\hat{\mathfrak{X}} = \{\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}\}_{c'}$$

mit

(173) $$c' = c + \frac{(\mathfrak{e}\mathfrak{x}_0)(\mathfrak{u}\mathfrak{y}_0)}{1 - \mathfrak{e}\mathfrak{u}_0}.$$

Beweis: Ist $\hat{\mathfrak{u}}$ der Normaleinheitsvektor von $\hat{\mathfrak{x}}$, so hat man (vgl. Formel (106) § 5)

(174) $$\hat{\mathfrak{X}} = \{\hat{\mathfrak{x}}, \mathfrak{e} - \hat{\mathfrak{u}}\}_{\mathfrak{e}\hat{\mathfrak{x}}_0},$$

wobei

$$\hat{\mathfrak{x}}_0 = \mathfrak{x}_0 - 2c\mathfrak{y}_0^{-1}$$

zu setzen ist. Aus (174) ergibt sich, wenn man für $\hat{\mathfrak{x}}$ den Ausdruck (171) und für $\hat{\mathfrak{u}}$ seinen Wert aus Formel (41), § 1 substituiert,

$$\hat{\mathfrak{X}} = \{\{\mathfrak{x}, \mathfrak{y}\}_c, \{\mathfrak{e} - \mathfrak{u}, \mathfrak{y}\}_{-\mathfrak{u}_0\mathfrak{y}_0}\}_{\mathfrak{e}\mathfrak{x}_0 - 2c\frac{\mathfrak{e}\mathfrak{y}_0}{\mathfrak{y}_0^2}}$$

und nach Satz 4:

(175) $$\hat{\mathfrak{X}} = \{\{\mathfrak{x}, \mathfrak{e} - \mathfrak{u}\}_{c'_1}, \{\mathfrak{y}, \mathfrak{e} - \mathfrak{u}\}_{c'_2}\}_{c'_3},$$

hierbei ist wegen Formel (73) und (74) § 4

$$c_1' = \mathfrak{e}\mathfrak{x}_0 - 2c\frac{\mathfrak{e}\mathfrak{y}_0}{\mathfrak{y}_0^2} + 2c\frac{\mathfrak{y}_0(\mathfrak{e}-\mathfrak{u}_0)+\mathfrak{u}_0\mathfrak{y}_0}{\mathfrak{y}_0^2} = \mathfrak{e}\mathfrak{x}_0,$$

$$c_2' = \mathfrak{y}_0(\mathfrak{e}-\mathfrak{u}_0) + \mathfrak{u}_0\mathfrak{y}_0 = \mathfrak{e}\mathfrak{y}_0,$$

$$c_3' = c + \frac{2(\mathfrak{e}\mathfrak{x}_0)(\mathfrak{u}_0\mathfrak{y}_0)}{(\mathfrak{e}-\mathfrak{u}_0)^2} = c + \frac{(\mathfrak{e}\mathfrak{x}_0)(\mathfrak{u}_0\mathfrak{y}_0)}{1-\mathfrak{e}\mathfrak{u}_0} = c' \qquad \text{wegen (173).}$$

Setzt man diese Werte für c_1', c_2', c_3' in (175) ein, so ergibt sich wegen

$$\mathfrak{X} = \{\mathfrak{x}, \mathfrak{e}-\mathfrak{u}\}_{\mathfrak{e}\mathfrak{x}_0}, \quad \mathfrak{Y} = \{\mathfrak{y}, \mathfrak{e}-\mathfrak{u}\}_{\mathfrak{e}\mathfrak{y}_0}$$

die behauptete Beziehung (172), w. z. b. w.

§ 9. Der Satz von Moutard und die ebene Ribaucourtransformation.

70. In diesem § wollen wir die ebene Ribaucourtransformation heranziehen, um eine von Moutard angegebene analytische Transformation aus der Theorie der partiellen Differentialgleichungen geometrisch zu deuten. Wir formulieren zunächst das

Moutardsche Theorem[1]: *Es sei die partielle Differentialgleichung*

$$M(u) = u_{\alpha\beta} - h(\alpha, \beta)u = 0$$

vorgelegt, und es sei $\mathring{u}(\alpha, \beta)$ *ein partikuläres Integral,* $u(\alpha, \beta)$ *das allgemeine Integral der Differentialgleichung* $M(u) = 0$. *Man setze*

$$\hat{h}(\alpha, \beta) = \mathring{u}\frac{\partial^2}{\partial\alpha\partial\beta}\left(\frac{1}{\mathring{u}}\right).$$

Dann ist, unter φ_0 *eine willkürliche Integrationskonstante verstanden,*

$$\hat{u} = \frac{1}{\mathring{u}}\left(\varphi_0 - \int_{\alpha_0,\beta_0}^{\alpha,\beta}(\mathring{u}u_\alpha - u\mathring{u}_\alpha)d\alpha - (\mathring{u}u_\beta - u\mathring{u}_\beta)\,d\beta\right) \tag{176}$$

das allgemeine Integral der Differentialgleichung

[1] M. Moutard: l. c. S. 13 Fussnote 1. Vgl. auch Darboux II, S. 158—160. Bianchi, S. 42—45.

$$\hat{M}(\hat{u}) = \hat{u}_{\alpha\beta} - \hat{h}\hat{u} = 0;$$

dabei ist der Ausdruck unter dem Integralzeichen in (176) *ein vollständiges Differential.*

Moutardsche Differentialgleichungen sind in unseren Untersuchungen in Abschnitt **61**. § 6 aufgetreten, doch nur solche, deren Koeffizient $h(\alpha, \beta)$ die spezielle Eigenschaft hat, dass er sich auf die Form

$$(177) \qquad h(\alpha, \beta) = \frac{\omega_{\alpha\beta}}{\omega}, \quad \omega = e^{-i\vartheta(\alpha,\beta)}, \qquad \vartheta(\alpha, \beta) \text{ reell}$$

bringen lässt. (Vgl. Formel (140) und (141).) Die angekündigte geometrische Deutung des Moutardschen Theorems wird sich auch nur auf solche speziellen Differentialgleichungen beziehen.

Bestimmt man jetzt wieder die Funktionen z und $\mathring{z}$ aus den Gleichungen

$$(178) \qquad u = \omega z, \quad \mathring{u} = \omega \mathring{z},$$

so sind nach Abschn. **61**. § 6 z und $\mathring{z}$ Integrale der Differentialgleichung (124) $D(z) = 0$.

71. Wir erwähnen zunächst eine schon Darboux bekannte Tatsache[1]: wenn das partikuläre Integral $\mathring{u}$ den Nebenbedingungen (143), oder, was dasselbe ist, wenn $\mathring{z}$ den Nebenbedingungen (125) genügt, so lässt sich auch der Koeffizient $\hat{h}$ der transformierten Differentialgleichung $\hat{M}(\hat{u}) = 0$ auf die Form

$$(179) \qquad \hat{h}(\alpha, \beta) = \frac{\hat{\omega}_{\alpha\beta}}{\hat{\omega}}, \quad \hat{\omega} = e^{-i\hat{\vartheta}(\alpha,\beta)}, \qquad \hat{\vartheta}(\alpha, \beta) \text{ reell}$$

bringen.

Setzt man nämlich

$$(180) \qquad \hat{\omega} = \frac{\bar{\mathring{z}}}{\mathring{u}} = \omega \frac{\bar{\mathring{u}}}{\mathring{u}},$$

wobei das Zeichen $\bar{\mathring{u}}$ wieder wie in § 6 die zu $\mathring{u}$ konjugiert-komplexe Grösse bezeichnet, so zeigt eine leichte Rechnung, bei der man die Formeln (142) heranzieht, dass

$$\frac{\hat{\omega}_{\alpha\beta}}{\hat{\omega}} = \mathring{u} \frac{\partial^2}{\partial\alpha\partial\beta}\left(\frac{1}{\mathring{u}}\right) = \hat{h}(\alpha, \beta)$$

[1] Vgl. Darboux, IV, S. 182—184.

ist. Andererseits folgt aber aus (180): $|\hat{\omega}| = 1$. Mithin existiert eine reelle Funktion $\hat{\vartheta}(\alpha, \beta)$ derart, dass

$$\hat{\omega}(\alpha, \beta) = e^{-i\hat{\vartheta}(\alpha, \beta)}$$

ist. Damit ist die behauptete Darstellung (179) für $\hat{h}$ bewiesen.

72. Wir wollen jetzt die Übereinstimmung des Moutardschen Integrals (176) mit der ebenen Ribaucourtransformation (164) § 8 aufweisen, und suchen zu diesem Zwecke in Gleichung (176) die u durch die z auszudrücken.

Setzt man

$$\hat{u} = \hat{\omega}\hat{z},$$

so ergibt sich mit Hilfe von (180)

(181)
$$\hat{u}\mathring{u} = \hat{z}\bar{\mathring{z}},$$

ferner ist, wenn z ebenso wie $\mathring{z}$ den Nebenbedingungen (125) genügt, sodass auch die Differentialgleichungen (123) für z und $\mathring{z}$ gelten,

$$\begin{aligned} \mathring{u}u_\alpha - u\mathring{u}_\alpha &= \omega^2(\mathring{z}z_\alpha - z\mathring{z}_\alpha) && \text{(wegen (178))} \\ &= \bar{\mathring{z}}\bar{z}_\alpha - \bar{z}\bar{\mathring{z}}_\alpha, && \text{(wegen (123))} \\ \mathring{u}u_\beta - u\mathring{u}_\beta &= \omega^2(\mathring{z}z_\beta - z\mathring{z}_\beta) \\ &= -(\bar{\mathring{z}}\bar{z}_\beta - \bar{z}\bar{\mathring{z}}_\beta). \end{aligned}$$

Folglich erhält man mit Rücksicht auf (181) anstelle von (176):

$$\begin{aligned} \hat{z} &= \frac{1}{\bar{\mathring{z}}}\left(\varphi_0 - \int_{\alpha_0, \beta_0}^{\alpha, \beta} (\bar{\mathring{z}}\bar{z}_\alpha - \bar{z}\bar{\mathring{z}}_\alpha)\,d\alpha + (\bar{\mathring{z}}\bar{z}_\beta - \bar{z}\bar{\mathring{z}}_\beta)\,d\beta\right) \\ &= \frac{1}{\bar{\mathring{z}}}\left(\varphi_0 - \int_{\alpha_0, \beta_0}^{\alpha, \beta} \mathring{z}\,d\bar{z} - z\,d\bar{\mathring{z}}\right) \\ &= \frac{1}{\bar{\mathring{z}}}\left(\varphi_0 + \int_{\alpha_0, \beta_0}^{\alpha, \beta} (d(z\bar{\mathring{z}}) - (\bar{\mathring{z}}\,dz + \mathring{z}\,d\bar{z}))\right) \end{aligned}$$

und endlich

(182)
$$\hat{z} = z - \frac{1}{\bar{\mathring{z}}}\left(2c + \int_{\alpha_0, \beta_0}^{\alpha, \beta} \bar{\mathring{z}}\,dz + \mathring{z}\,d\bar{z}\right),$$

wobei

$$c = \frac{1}{2}\left(z\bar{\mathring{z}}_{\substack{\alpha=\alpha_0\\ \beta=\beta_0}} - \varphi_0\right)$$

eine neue willkürliche Konstante bezeichnet.

Berücksichtigt man, dass wegen der Nebenbedingung (125) $\hat{\omega}\hat{z}_\alpha$ reell sein soll, so ergibt eine leichte Rechnung, dass dann c reell gewählt werden muss.

73. Man setze endlich

$$z = X + iY, \quad \mathring{z} = \mathring{X} + i\mathring{Y}, \quad \hat{z} = \hat{X} + i\hat{Y};$$

und es bezeichnen ausserdem $\mathfrak{X}$, $\mathring{\mathfrak{X}}$, $\hat{\mathfrak{X}}$ die der Ebene ε parallelen Vektoren, deren beide in ε gelegenen Komponenten X, Y bezw. $\mathring{X}$, $\mathring{Y}$ bezw. $\hat{X}$, $\hat{Y}$ sind. Dann ist

$$\bar{\mathring{z}}dz + \mathring{z}d\bar{z} = 2(\mathring{X}dX + \mathring{Y}dY) = 2\mathring{\mathfrak{X}}d\mathfrak{X},$$

$$\frac{1}{\bar{\mathring{z}}} = \frac{\mathring{z}}{\mathring{\mathfrak{X}}^2},$$

und es ergibt sich aus (182)

$$\hat{z} = z - 2\left(c + \int_{\alpha_0,\beta_0}^{\alpha,\beta} \mathring{\mathfrak{X}}d\mathfrak{X}\right)\frac{\mathring{z}}{\mathring{\mathfrak{X}}^2}$$

oder, vektoriell geschrieben

$$\hat{\mathfrak{X}} = \mathfrak{X} - 2\left(c + \int_{\alpha_0,\beta_0}^{\alpha,\beta} \mathring{\mathfrak{X}}d\mathfrak{X}\right)\mathring{\mathfrak{X}}^{-1} = \{\mathfrak{X}, \mathring{\mathfrak{X}}\}_c. \tag{183}$$

D. h. aber, die in Formel (176) angegebene Moutardsche Transformation ist für den Fall, dass *erstens* h von der Form (177) ist, *zweitens* u und $\mathring{u}$ den Nebenbedingungen (143) genügen, mit der in Abschnitt **65.** § 8 definierten ebenen Ribaucourtransformation identisch. Ausserdem liefern die Ausdrücke (176) bezw. (183) nach dem Moutardschen Theorem bezw. nach Satz 1[a] alle ebenen orthogonalen Kurvensysteme welche dem Kurvensystem $\mathring{\mathfrak{X}}^{-1}$ parallel sind, wenn u alle den Nebenbedingungen (143) genügenden Integrale der Differentialgleichung $M(u) = 0$, bezw. wenn $\mathfrak{X}$ alle zu $\mathring{\mathfrak{X}}$ parallelen ebenen Kurvensysteme durchläuft. Die durch die Formeln (180) und (179) definierte Funktion $\hat{\vartheta}(\alpha, \beta)$ ist gleich dem Winkel der Tangente im Punkte α, β an die Kurve $\beta = \text{const.}$ des Systems $\mathring{\mathfrak{X}}^{-1}$.

74. Aus der Tatsache, dass die ebenen Ribaucourtransformation (183) mit der Moutardschen Formel (176) identisch ist, folgt, dass dem Vertauschungssatz 4^a aus § 8 ein Vertauschungssatz über die partikulären Integrale Moutardscher Gleichungen entspricht. Diese Eigenschaft der Integrale war bereits von Bianchi bemerkt worden[1] und hatte ihn zu seinem in der Einleitung, Abschn. **13**. erwähnten Vertauschungssatz bei W-Kongruenzen geführt.[2]

§ 10. Der Satz von Moutard und die Flächen vom Laplaceschen Typus.

75. Es sei eine Fläche $\mathfrak{x}(\alpha, \beta)$ vorgelegt, deren Parameterlinien $\alpha = \text{const.}$, $\beta = \text{const.}$ nicht wie bisher mit den Krümmungslinien zusammenfallen sollen, sondern ein beliebiges konjugiertes Kurvensystem auf der Fläche bestimmen mögen. Dann folgt bekanntlich aus den Gaussschen Formeln für die partiellen Ableitungen zweiter Ordnung von $\mathfrak{x}$, dass alle drei Komponenten von $\mathfrak{x}(\alpha, \beta)$ der homogenen linearen partiellen Differentialgleichung 2. Ordnung vom hyperbolischen Typus

$$L(u) = u_{\alpha\beta} + a u_\alpha + b u_\beta = 0, \quad a = -\begin{Bmatrix} 1, 2 \\ 1 \end{Bmatrix}, \quad b = -\begin{Bmatrix} 1, 2 \\ 2 \end{Bmatrix}$$

genügen, wobei unter $\begin{Bmatrix} 1, 2 \\ 1 \end{Bmatrix}$ und $\begin{Bmatrix} 1, 2 \\ 2 \end{Bmatrix}$ wie üblich die Christoffelschen Symbole zu verstehen sind.

Wir sagen, *das konjugierte System $\mathfrak{x}(\alpha, \beta)$ und die Differentialgleichung $L(u) = 0$ sind vom »Laplaceschen Typus«, wenn sich das allgemeine Integral von $L(u) = 0$ mit Hilfe der Laplaceschen Kaskadenmethode explizit angeben lässt, d. h. wenn nach einer endlichen Anzahl von Laplaceschen Transformationen die Differentialgleichung $L(u) = 0$ in die einfache integrable Form*

$$L_n(u_n) = u_{n_{\alpha\beta}} + b_n u_{n_\beta} = 0$$

oder

$$L_m^*(u_m^*) = u_{m_{\alpha\beta}}^* + a_m^* u_{m_\alpha} = 0$$

übergeführt wird.

Darboux hat für die konjugierten Systeme vom Laplaceschen Typus eine

[1] Bianchi, S. 45—48.
[2] Bianchi, S. 58—61.

geometrische Deutung angegeben, über die wir hier kurz berichten wollen.[1] Wir betrachten die Geradenkongruenz

$$\mathfrak{x} + t\mathfrak{x}_\beta \tag{184}$$

der Tangenten an die Kurven $\alpha = \text{const.}$ der Fläche $\mathfrak{x}$. Diese Kongruenz hat eine Brennfläche, deren einer Mantel die Fläche $\mathfrak{x}$ ist, während als ihr zweiter Mantel eine neue Fläche $\mathfrak{x}_1(\alpha, \beta)$ bestimmt wird. Wofern $\mathfrak{x}_1$ nicht in eine Kurve entartet, bilden die Parameterlinien $\alpha = \text{const.}$, $\beta = \text{const.}$ wieder ein konjugiertes System; ausserdem sind die Geraden der Kongruenz (184) Tangenten an die Kurven $\beta = \text{const.}$ der Fläche $\mathfrak{x}_1$.

Nunmehr unterwerfe man die Fläche $\mathfrak{x}_1(\alpha, \beta)$ derselben geometrischen Konstruktion wie die Fläche $\mathfrak{x}(\alpha, \beta)$, indem man die Geradenkongruenz

$$\mathfrak{x}_1 + t\mathfrak{x}_{1\beta} \tag{185}$$

der Tangenten an die Kurven $\alpha = \text{const.}$ auf $\mathfrak{x}_1$ heranzieht. Sie führt zur Bestimmung einer Fläche $\mathfrak{x}_2(\alpha, \beta)$, welche zusammen mit $\mathfrak{x}_1(\alpha, \beta)$ die beiden Mäntel der Brennfläche der Kongruenz (185) bildet.

Auf diese Weise fahre man fort, indem man jetzt zur Kongruenz

$$\mathfrak{x}_2 + t\mathfrak{x}_{2\beta}$$

übergeht. Man erhält so eine Folge von Flächen

$$\mathfrak{x}, \mathfrak{x}_1, \mathfrak{x}_2, \ldots, \mathfrak{x}_k, \ldots \tag{186}$$

welche entweder unendlich ist, oder aber bei $\mathfrak{x}_n(\alpha, \beta)$ abbricht, wenn $\mathfrak{x}_n(\alpha, \beta)$ zu einer Kurve entartet.

Nach der gleichen Methode konstruiere man eine zweite Folge von Flächen,

$$\mathfrak{x}, \mathfrak{x}_{-1}, \mathfrak{x}_{-2}, \ldots, \mathfrak{x}_{-k}, \ldots \tag{187}$$

indem man entsprechend die Geradenkongruenzen

$$\mathfrak{x} + t\mathfrak{x}_\alpha, \quad \mathfrak{x}_{-k} + t\frac{\partial \mathfrak{x}_{-k}}{\partial \alpha}$$

der Tangenten an die Kurven $\beta = \text{const.}$ betrachtet. Dann werden $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{x}_{-1}$

[1] Darboux, II, S. 16—22.

die beiden Mäntel der Brennfläche der Kongruenz $\mathfrak{x} + t\mathfrak{x}_\alpha$, während $\mathfrak{x}_{-k}$ und $\mathfrak{x}_{-k-1}$ die Mäntel der Brennfläche der Kongruenz $\mathfrak{x}_{-k} + t\dfrac{\partial \mathfrak{x}_{-k}}{\partial \alpha}$ sind. Auch hier sind zwei Fälle möglich. Entweder die Folge der Flächen (187) ist unendlich oder aber die Folge (187) bricht bei $\mathfrak{x}_{-m}$ ab, weil $\mathfrak{x}_{-m}$ in eine Kurve ausartet.

Darboux hat nun gezeigt, dass das konjugierte Kurvensystem $\mathfrak{x}(\alpha, \beta)$ (oder, was dasselbe ist, die Differentialgleichung $L(u) = 0$ dann und nur dann vom Laplaceschen Typus ist, wenn entweder die Folge der Flächen (186) oder die Folge (187) oder beide Folgen abbrechen. Der Beweis beruht darauf, dass der einen Art von Laplace-Transformationen

$$u_1 = u_\beta + au, \quad u_{k+1} = \frac{\partial u_k}{\partial \beta} + au_k$$

der Übergang von $\mathfrak{x}$ zu $\mathfrak{x}_1$ bezw. von $\mathfrak{x}_k$ zu $\mathfrak{x}_{k+1}$, der anderen Art von Laplace-Transformationen

$$u_{-1} = u_\alpha + bu, \quad u_{-k-1} = \frac{\partial u_{-k}}{\partial \alpha} + b_k u_{-k}$$

der Übergang von $\mathfrak{x}$ zu $\mathfrak{x}_{-1}$ bezw. von $\mathfrak{x}_{-k}$ zu $\mathfrak{x}_{-k-1}$ entspricht.

76. Das konjugierte System der Kurven $\alpha = \text{const.}$, $\beta = \text{const.}$ von $\mathfrak{x}(\alpha, \beta)$ sei wieder, wie bisher, das ausgezeichnete System der Krümmungslinien. Dann sagen wir kurz: *die Fläche $\mathfrak{x}(\alpha, \beta)$ ist vom Laplaceschen Typus, wenn das System der Krümmungslinien auf $\mathfrak{x}$ im Sinne der Ausführungen des Abschnitts* **75.** *vom Laplaceschen Typus ist.* Übrigens folgt dann aus einem Satz von Goursat[1], dass in diesem Falle die Flächenfolgen (186) und (187) beide abbrechen.

Es sei ferner $\mathfrak{u}(\alpha, \beta)$ das sphärische Bild der Krümmungslinien von $\mathfrak{x}(\alpha, \beta)$ und $\mathfrak{U}(\alpha, \beta)$ das orthogonale Kurvensystem der Ebene ε, in welches $\mathfrak{u}(\alpha, \beta)$ durch die Ribaucourtransformation (107) § 5, d. h. durch stereographische Projektion übergeführt wird. Ist jetzt $\mathfrak{x}(\alpha, \beta)$ vom Laplaceschen Typus, so ist auch die Moutardsche Differentialgleichung

$$M(u) = u_{\alpha\beta} - \frac{\omega_{\alpha\beta}}{\omega} u = 0,$$

auf welche die Lösung des zu $\mathfrak{U}(\alpha, \beta)$ gehörigen Problems I (vgl. Abschnitt **54.**, § 5) führt, selbst vom Laplaceschen Typus. Von dieser Tatsache hat schon

[1] E. Goursat, Sur les équations linéaires et la méthode de Laplace. Amer. Jour. of Math. **18** (1896), S. 347—385, vgl. insb. S. 377—382.

Darboux Gebrauch gemacht.[1] Durch sie wird auch die Übereinstimmung der oben angegebenen Definition für Flächen vom Laplaceschen Typus mit der Definition des Abschnitts **21.** der Einleitung hergestellt.

77. Nach dem Satz von Moutard-Darboux, den wir in der Einleitung in den Abschnitten **22.** und **23.** formuliert haben, lässt sich das Kurvensystem $\mathfrak{U}(\alpha, \beta)$ durch eine endliche Anzahl ebener Ribaucourtransformationen aus einem orthogonalen Kurvensystem $\mathring{\mathfrak{U}}(\alpha, \beta)$ gewinnen, dessen eine Kurvenschar sich nur aus Geraden zusammensetzt. Es ergibt sich mithin für $\mathfrak{U}(\alpha, \beta)$ in der symbolischen Bezeichnungsweise des Abschnitts **48.** § 4 (vgl. insbesondere Formel (100)) die Darstellung

$$\mathfrak{U}(\alpha, \beta) = (\mathring{\mathfrak{U}};\, \mathfrak{Y}_1, \mathfrak{Y}_2, \ldots, \mathfrak{Y}_n). \tag{188}$$

Hierbei bezeichnen

$$\mathring{\mathfrak{U}}(\alpha, \beta),\ \mathfrak{Y}_1(\alpha, \beta),\ \mathfrak{Y}_2(\alpha, \beta),\ \ldots,\ \mathfrak{Y}_n(\alpha, \beta)$$

$n + 1$ untereinander parallele, orthogonale, ebene Kurvensysteme, deren eine Schar immer aus Geraden besteht.

Ist endlich $\mathfrak{X}(\alpha, \beta)$ das orthogonale ebene Kurvensystem, in das die Fläche $\mathfrak{x}(\alpha, \beta)$ durch die Ribaucourtransformation (106) § 5 übergeführt wird, so sind $\mathfrak{X}$ und $\mathfrak{U}$ zueinander parallel (vgl. Abschnitt **51.**, § 5) und somit erhält man auch

$$\mathfrak{X} = (\mathring{\mathfrak{X}};\, \mathfrak{Y}_1, \ldots, \mathfrak{Y}_n), \tag{189}$$

wo wieder $\mathring{\mathfrak{X}}$ zu $\mathring{\mathfrak{U}}$ parallel ist.

78. Nunmehr wollen wir aus dem Satz von Moutard-Darboux mit Hilfe unseres Vertauschungssatzes 4 aus § 4 einen weiteren Satz ableiten, der für die Flächen $\mathfrak{x}(\alpha, \beta)$ vom Laplaceschen Typus im Sinne der Definition des Abschnitts **76.** eine neue geometrische Charakterisierung enthält:

Ist $\mathfrak{x}(\alpha, \beta)$ eine Fläche vom Laplaceschen Typus und $\mathfrak{u}(\alpha, \beta)$ das sphärische Bild der Krümmungslinien von $\mathfrak{x}$, so ist

$$\mathfrak{x} = (\mathring{\mathfrak{x}};\, \mathfrak{y}_1, \ldots, \mathfrak{y}_n), \quad \mathfrak{u} = (\mathring{\mathfrak{u}}_0;\, \mathfrak{y}_1, \ldots, \mathfrak{y}_n). \tag{190}$$

Hierbei bezeichnen $\mathring{\mathfrak{x}}, \mathfrak{y}_1, \ldots, \mathfrak{y}_n$ $n + 1$ zueinander parallele Flächen, $\mathring{\mathfrak{u}}$ das gemeinsame sphärische Bild ihrer Krümmungslinien, dessen eine Schar sich aus Kreisen

[1] Darboux, IV, S. 178—179.

zusammensetzt, welche alle durch einen festen Punkt der Einheitskugel hindurchgehen.

Den Beweis dieses Satzes erbringen wir im nächsten Abschnitt. Zunächst bemerken wir, dass bei der Darbouxschen geometrischen Charakterisierung der Flächen vom Laplaceschen Typus (vgl. Abschn. 75.) die bei der Folge von Flächen (186) und (187) auftretenden Parameterlinien $\alpha = \text{const.}$, $\beta = \text{const.}$ von $\mathfrak{x}_k$ bezw. $\mathfrak{x}_{-k}$ nur konjugierte Kurvensysteme bilden, auch wenn die Parameterlinien der Ausgangsfläche $\mathfrak{x}$ Krümmungslinien sind. Hingegen ergibt unsere Darstellung (190) der Fläche $\mathfrak{x}$ eine geometrische Konstruktion, bei der man von einer Fläche $\mathring{\mathfrak{x}}$ ausgehend, durch eine endliche Anzahl von Ribaucourtransformationen zu $\mathfrak{x}$ gelangt, sodass bei jedem einzelnen Schritt das System der Krümmungslinien erhalten bleibt.

79. Beweis: Es seien wieder $\mathfrak{X}$ und $\mathfrak{U}$ die beiden ebenen orthogonalen Kurvensysteme, in welche die Fläche $\mathfrak{x}(\alpha, \beta)$ vom Laplaceschen Typus und ihr sphärisches Bild $\mathfrak{u}(\alpha, \beta)$ durch die Ribaucourtransformationen (106) und (107) übergeführt werden. Dann ist nach dem Satz von Moutard-Darboux (vgl. Abschn. 77. insbesondere Formel (188) und (189))

$$\tag{191} \begin{cases} \mathfrak{X} = (\mathring{\mathfrak{X}};\, \mathfrak{Y}_1, \ldots, \mathfrak{Y}_n), \\ \mathfrak{U} = (\mathring{\mathfrak{U}};\, \mathfrak{Y}_1, \ldots, \mathfrak{Y}_n), \end{cases}$$

wobei die Kurvensysteme $\mathring{\mathfrak{X}}$, $\mathring{\mathfrak{U}}$, $\mathfrak{Y}_1, \ldots, \mathfrak{Y}_n$ dieselben Eigenschaften wie in Abschn. 77. haben.

Wir behaupten jetzt allgemein: *Gelten für $\mathfrak{X}$ und $\mathfrak{U}$ die Darstellungen* (191), *wobei von den $n+2$ orthogonalen ebenen Kurvensystemen $\mathring{\mathfrak{X}}$, $\mathring{\mathfrak{U}}$, $\mathfrak{Y}_1, \ldots, \mathfrak{Y}_n$ nur vorausgesetzt werde, dass sie untereinander parallel sind, so hat man*

$$\tag{192} \begin{cases} \mathfrak{x} = (\mathring{\mathfrak{x}};\, \mathfrak{y}_1, \ldots, \mathfrak{y}_n), \\ \mathfrak{u} = (\mathring{\mathfrak{u}};\, \mathfrak{y}_1, \ldots, \mathfrak{y}_n) \end{cases}$$

mit

$$\tag{193} \mathring{\mathfrak{x}} = \{\mathring{\mathfrak{X}}, \mathring{\mathfrak{U}} - \mathfrak{e}\}, \quad \mathring{\mathfrak{u}} = \{\mathring{\mathfrak{U}}, \mathring{\mathfrak{U}} - \mathfrak{e}\}, \quad \mathfrak{y}_\nu = \{\mathfrak{Y}_\nu, \mathring{\mathfrak{U}} - \mathfrak{e}\}, \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n)$$

unter Vernachlässigung der Integrationskonstanten. Ferner ist hierbei $\mathring{\mathfrak{u}}$ das gemeinsame sphärische Bild der Krümmungslinien von $\mathring{\mathfrak{x}}$, $\mathfrak{y}_1, \ldots, \mathfrak{y}_n$.

Wir beweisen die Formeln (192) mit Hilfe unseres Vertauschungssatzes 4 zunächst für $n = 1$. Dann hat man nach Formel (112) § 5

$$
(194)\qquad
\begin{aligned}
\mathfrak{x} = \{\mathfrak{X}, \mathfrak{U}-\mathfrak{e}\} &= \{\{\mathring{\mathfrak{X}}, \mathfrak{Y}_1\}, \{\mathring{\mathfrak{U}}-\mathfrak{e}, \mathfrak{Y}_1\}\} && \text{wegen (191)}\\
&= \{\{\mathring{\mathfrak{X}}, \mathring{\mathfrak{U}}-\mathfrak{e}\}, \{\mathfrak{Y}_1, \mathring{\mathfrak{U}}-\mathfrak{e}\}\} && \text{nach Satz 4}\\
&= \{\mathring{\mathfrak{x}}, \mathfrak{y}_1\} && \text{wegen (193)}
\end{aligned}
$$

und entsprechend nach Formel (109) § 5

$$
(195)\qquad
\begin{aligned}
\mathfrak{u} = \{\mathfrak{U}, \mathfrak{U}-\mathfrak{e}\} &= \{\{\mathring{\mathfrak{U}}, \mathfrak{Y}_1\}, \{\mathring{\mathfrak{U}}-\mathfrak{e}, \mathfrak{Y}_1\}\} && \text{wegen (191)}\\
&= \{\{\mathring{\mathfrak{U}}, \mathring{\mathfrak{U}}-\mathfrak{e}\}, \{\mathfrak{Y}_1, \mathring{\mathfrak{U}}-\mathfrak{e}\}\} && \text{nach Satz 4}\\
&= \{\mathring{\mathfrak{u}}, \mathfrak{y}_1\} && \text{wegen (193).}
\end{aligned}
$$

Die genaue Berechnung der Integrationskonstanten mit Hilfe der Formeln (73) und (74) aus § 4 überlassen wir dem Leser. Aus ihr ergibt sich, dass, wenn $\mathfrak{u}$ ein Einheitsvektor ist, auch $\mathring{\mathfrak{u}} = \{\mathring{\mathfrak{U}}, \mathring{\mathfrak{U}}-\mathfrak{e}\}_{\frac{\mathring{\mathfrak{U}}_0^2-1}{2}}$ Einheitsvektor wird, und somit das sphärische Bild der Krümmungslinien von $\mathfrak{y}_1$ bestimmt. Gleichung (194) liefert eine Art Umkehrung der in Abschnitt **69.** § 8 bewiesenen Formel (172).

Nunmehr machen wir die Annahme, die Behauptung (192) sei bereits unter der Voraussetzung (191) für $n-1$ als richtig erkannt. Sie soll jetzt durch Schluss von $n-1$ auf n vollständig bewiesen werden.

Setzt man zur Abkürzung

$$
(196)\qquad \mathring{\mathfrak{X}}' = \{\mathring{\mathfrak{X}}, \mathfrak{Y}_1\},\ \mathring{\mathfrak{U}}' = \{\mathring{\mathfrak{U}}, \mathfrak{Y}_1\},\ \mathfrak{Y}'_\nu = \{\mathfrak{Y}_\nu, \mathfrak{Y}_1\}, \qquad (\nu = 2, 3, \ldots, n)
$$

so folgt nach Formel (101) § 4 aus der Voraussetzung (191)

$$
(197)\qquad \left\{\begin{aligned} \mathfrak{X} &= (\mathring{\mathfrak{X}}'; \mathfrak{Y}'_2, \ldots, \mathfrak{Y}'_n),\\ \mathfrak{U} &= (\mathring{\mathfrak{U}}'; \mathfrak{Y}'_2, \ldots, \mathfrak{Y}'_n). \end{aligned}\right.
$$

Da wir aber unsere Behauptung für $n-1$ als wahr angenommen haben, so erhält man aus (197)

$$
(198)\qquad \left\{\begin{aligned} \mathfrak{x} &= (\mathring{\mathfrak{x}}'; \mathfrak{y}'_2, \ldots, \mathfrak{y}'_n)\\ \mathfrak{u} &= (\mathring{\mathfrak{u}}'; \mathfrak{y}'_2, \ldots, \mathfrak{y}'_n) \end{aligned}\right.
$$

mit

$$
(199)\qquad \mathring{\mathfrak{x}}' = \{\mathring{\mathfrak{X}}', \mathring{\mathfrak{U}}'-\mathfrak{e}\},\ \mathring{\mathfrak{u}}' = \{\mathring{\mathfrak{U}}', \mathring{\mathfrak{U}}'-\mathfrak{e}\},\ \mathfrak{y}'_\nu = \{\mathfrak{Y}'_\nu, \mathring{\mathfrak{U}}'-\mathfrak{e}\}, \qquad (\nu = 2, \ldots, n)
$$

wobei $\mathring{\mathfrak{u}}' = \{\mathring{\mathfrak{U}}', \mathring{\mathfrak{U}}'-\mathfrak{e}\}_{\frac{\mathring{\mathfrak{U}}'^2_0-1}{2}}$ das gemeinsame sphärische Bild der Krümmungslinien von $\mathring{\mathfrak{x}}', \mathfrak{y}'_2, \ldots, \mathfrak{y}'_n$ ist. Setzt man andererseits die Ausdrücke (196) für $\mathring{\mathfrak{X}}', \mathring{\mathfrak{U}}', \mathfrak{Y}'_\nu$ in (199) ein, so ergibt sich wegen (194) und (195)

$$\mathring{\mathfrak{x}}' = \{\mathring{\mathfrak{x}}, \mathfrak{y}_1\}, \ \mathring{\mathfrak{u}}' = \{\mathring{\mathfrak{u}}, \mathfrak{y}_1\}, \ \mathfrak{y}_\nu' = \{\mathfrak{y}_\nu, \mathfrak{y}_1\} \tag{200}$$

mit

$$\mathring{\mathfrak{x}} = \{\mathring{\mathfrak{X}}, \mathring{\mathfrak{U}} - \mathfrak{e}\}, \ \mathring{\mathfrak{u}} = \{\mathring{\mathfrak{U}}, \mathring{\mathfrak{U}} - \mathfrak{e}\}, \ \mathfrak{y}_\nu = \{\mathfrak{Y}_\nu, \mathring{\mathfrak{U}} - \mathfrak{e}\} \text{ für } \nu = 1, 2, \ldots, n.$$

Hierbei ist wieder

$$\mathring{\mathfrak{u}} = \{\mathring{\mathfrak{U}}, \mathring{\mathfrak{U}} - \mathfrak{e}\}_{\frac{\mathring{\mathfrak{u}}_0^2 - 1}{2}}$$

das gemeinsame sphärische Bild der Krümmungslinien von $\mathring{\mathfrak{x}}, \mathfrak{y}_1, \mathfrak{y}_2, \ldots, \mathfrak{y}_n$. Substituiert man endlich die Ausdrücke (200) in (198), so erhält man nach Formel (101) § 4 die behaupteten Beziehungen (192) und (193).

Nun enthalten aber, wie bereits oben bemerkt wurde, die untereinander parallelen ebenen Kurvensysteme $\mathring{\mathfrak{X}}, \mathring{\mathfrak{U}}, \mathfrak{Y}_1, \ldots, \mathfrak{Y}_n$ alle eine Schar gerader Linien. Da man ferner nach den Ausführungen des Abschnitts **51**. § 5 (vgl. insbesondere Formel (108)) sich $\mathring{\mathfrak{u}}$ durch stereographische Projektion des Kurvensystems $\mathring{\mathfrak{U}}$ auf die Einheitskugel entstanden denken kann, so bestimmt das gemeinsame sphärische Bild $\mathring{\mathfrak{u}}(\alpha, \beta)$ von $\mathring{\mathfrak{x}}, \mathfrak{y}_1, \ldots, \mathfrak{y}_n$ auf der Einheitskugel eine Schar von Kreisen, welche sämtlich durch den Nordpol der Kugel gehen. Damit sind alle Behauptungen unseres Satzes bewiesen.

Kap. III: **Andere Anwendungen der Ribaucourtransformationen.**

§ 11. **Zyklische Systeme von Ribaucour.**

80. Es seien $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{y}$ zwei zueinander parallele Flächen, $\mathfrak{u}$ der $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{y}$ gemeinsamen Normaleinheitsvektor, c eine feste Konstante, t ein veränderlicher Parameter. Wir betrachten die einparametrige Flächenschar

$$\hat{\mathfrak{x}}(\alpha, \beta; t) = \{\mathfrak{x}, \mathfrak{y} + t\mathfrak{u}\}_c; \tag{201}$$

hierbei ist wegen $\mathfrak{u}\, d\mathfrak{x} = 0$

$$\hat{\mathfrak{x}}(\alpha, \beta; t) = \mathfrak{x} - 2\left(c + \int_{\alpha_0, \beta_0}^{\alpha, \beta} \mathfrak{y}\, d\mathfrak{x}\right)(\mathfrak{y} + t\mathfrak{u})^{-1}. \tag{202}$$

Offenbar definiert der Vektor $\hat{\mathfrak{x}}(\alpha, \beta; t)$ auch eine zweiparametrige Schar von Kreisen, deren Individuen man erhält, wenn man α, β einen festen Wert α_1, β_1

zuerteilt und t veränderlich lässt. Dabei entsteht der Kreis $\hat{\mathfrak{x}}(\alpha_1, \beta_1; t)$ aus dem Kreise $(\mathfrak{y}(\alpha_1, \beta_1) + t\mathfrak{u}(\alpha_1, \beta_1))^{-1}$ durch Ähnlichkeitstransformation und Parallelverschiebung. Die Gerade $\mathfrak{y}(\alpha_1, \beta_1) + t\mathfrak{u}(\alpha_1, \beta_1)$ ist Normale der Fläche $\mathfrak{y} + t_0\mathfrak{u}$ im Punkte α_1, β_1; dann muss auch, da bei Inversionen die Winkel erhalten bleiben, der Kreis $(\mathfrak{y}(\alpha_1, \beta_1) + t\mathfrak{u}(\alpha_1, \beta_1))^{-1}$ die Fläche $(\mathfrak{y} + t_0\mathfrak{u})^{-1}$ im Punkte α_1, β_1 rechtwinklig schneiden; nun sind aber nach (202) die Kreise

$$\hat{\mathfrak{x}}(\alpha_1, \beta_1; t) \quad \text{und} \quad (\mathfrak{y}(\alpha_1, \beta_1) + t\mathfrak{u}(\alpha_1, \beta_1))^{-1}$$

im Punkte $t = t_0$ zueinander parallel, und desgleichen nach dem Hilfssatze des § 2 auch die Flächen

$$\hat{\mathfrak{x}}(\alpha, \beta; t_0) \quad \text{und} \quad (\mathfrak{y} + t_0\mathfrak{u})^{-1}$$

im Punkte α_1, β_1. Mithin schneidet jeder Kreis $\hat{\mathfrak{x}}(\alpha_1, \beta_1; t)$ jede Fläche $\hat{\mathfrak{x}}(\alpha, \beta; t_0)$ rechtwinklig.

Eine zweiparametrige Kreisschar, zu welcher eine einparametrige, zur Kreisschar orthogonale Flächenschar existiert, nennt man nach Ribaucour[1] ein zyklisches System. Offenbar liefert uns der Ausdruck (202) ein solches zyklisches System. Es ist auch bekannt, dass man jedes zyklische System auf die Form (202) bringen kann[2], da, wie man leicht sieht, jedes zyklische System auf eine Schar von Ribaucourtransformationen führt.

81. Von zwei Flächen $\hat{\mathfrak{x}}(\alpha, \beta; t')$ und $\hat{\mathfrak{x}}(\alpha, \beta; t'')$ geht die eine aus der anderen durch Ribaucourtransformation hervor, wie man unmittelbar geometrisch einsehen kann. Man findet nämlich Mittelpunkt und Radius der Ribaucourkugel im Punkte α_1, β_1, indem man die Tangenten an den Kreis $\mathfrak{x}(\alpha_1, \beta_1; t)$ in den Punkten $t = t'$ und $t = t''$ zieht. Ihr Schnittpunkt ist dann der Kugelmittelpunkt und der Abstand des Schnittpunktes vom Berührungspunkt ist gleich dem Kugelradius.

Um aber den analytischen Ausdruck für die Ribaucourtransformation anzugeben, welche $\hat{\mathfrak{x}}(\alpha, \beta; t')$ in $\hat{\mathfrak{x}}(\alpha, \beta; t'')$ überführt, bedienen wir uns der in Abschnitt **47**. § 4 auseinandergesetzten Methode der Konstruktion der zu $\hat{\mathfrak{x}}(\alpha, \beta; t)$ konjugierten Bianchischen Schar $\hat{\hat{\mathfrak{x}}}(\alpha, \beta; s)$. Dabei wird sich die auch schon

[1] A. Ribaucour, Sur la déformation des surfaces, C. R. de l'ac. d. sc. **70** (1870), S. 330. Sur les systèmes cycliques C. R. de l'acad. **76** (1873), S. 478. Sur les faisceaux des cercles, C. R. **76** (1873), S. 830. Vergl. auch die S. 5 Fussnote 3 zitierte Abhandlung S. 227—237.

[2] Vgl. etwa Bianchi, S. 228—230.

Bianchi bekannte Tatsache[1] ergeben, dass für den Fall der zyklischen Systeme die beiden zu einander konjugierten Flächenscharen $\hat{\mathfrak{x}}(\alpha, \beta; t)$ und $\hat{\hat{\mathfrak{x}}}(\alpha, \beta; s)$ zusammenfallen.

Wir suchen die in den Abschnitten **46.** und **47.** in homogenen Parametern t_1, t_2 und s_1, s_2 geschriebenen Ausdrücke auf unseren Fall $\mathfrak{y}_1 = \mathfrak{y}$, $\mathfrak{y}_2 = \mathfrak{u}$ anzuwenden und setzen

$$\frac{t_2}{t_1} = t, \quad \frac{s_1}{s_2} = s.$$

Ausserdem wählen wir

$$\gamma_1 = c, \quad \gamma_2 = 0, \quad \gamma_3 = \mathfrak{u}_0 \mathfrak{y}_0.$$

Dann wird in Formel (98) und (95) § 4

$$c'_2 = \frac{\mathfrak{y}_0^2 + ts}{2} \tag{203}$$

$$\begin{aligned} c'_3 &= c - 2c \frac{\frac{\mathfrak{y}_0^2}{2} + t\left(\mathfrak{u}_0 \mathfrak{y}_0 - \frac{s}{2}\right)}{(\mathfrak{y}_0 + t\mathfrak{u}_0)^2} \\ &= \frac{(t^2 + ts)c}{(\mathfrak{y}_0 + t\mathfrak{u}_0)^2}, \\ c'_5 &= -s\frac{c}{\mathfrak{y}_0^2}, \end{aligned} \tag{204}$$

und es ergibt sich aus (97) bezw. (96) § 4

$$\hat{\hat{\mathfrak{x}}}(\alpha, \beta; s) = \{\{\mathfrak{x}, \mathfrak{y} + t\mathfrak{u}\}_c, \ \{\mathfrak{y}, \mathfrak{y} + t\mathfrak{u}\}_{c'_2}\}_{c'_3}, \tag{205}$$

$$\hat{\hat{\mathfrak{x}}}(\alpha, \beta; s) = \{\{\mathfrak{x}, \mathfrak{y}\}_c, \ \{\mathfrak{u}, \mathfrak{y}\}_{*-\frac{s}{2}}\}_{-s\frac{c}{\mathfrak{y}_0^2}}. \tag{206}$$

Wendet man auf den Ausdruck (206) den Satz 4 an, so erhält man wegen (73) und (74)

$$\begin{aligned} \hat{\hat{\mathfrak{x}}} &= \{\{\mathfrak{x}, \mathfrak{u}\}_0, \ \{\mathfrak{y}, \mathfrak{u}\}_{\frac{s}{2}}\}_c \\ &= \{\mathfrak{x}, \mathfrak{y} - s\mathfrak{u}\}_c \qquad \text{wegen (42) § 1.} \end{aligned} \tag{207}$$

Auf der rechten Seite von (205) lässt sich auch der Ausdruck $\{\mathfrak{y}, \mathfrak{y} + t\mathfrak{u}\}_{c'_2}$ noch etwas vereinfachen, und zwar ist

---

[1] Bianchi, S. 226.

$$\{\mathfrak{y},\, \mathfrak{y} + t\mathfrak{u}\}_{c'_2} =$$

$$= \mathfrak{y} - 2\left(c'_2 + \int_{\alpha_0,\beta_0}^{\alpha,\beta} \mathfrak{y}\, d\mathfrak{y}\right)(\mathfrak{y} + t\mathfrak{u})^{-1}$$

$$= \mathfrak{y} - \frac{(ts + \mathfrak{y}^2)(\mathfrak{y} + t\mathfrak{u})}{\mathfrak{y}^2 + 2t(\mathfrak{y}\mathfrak{u}) + t^2} \qquad \text{wegen (203)}$$

$$= \mathfrak{y} - (\mathfrak{y} + t\mathfrak{u}) - (ts - 2t(\mathfrak{y}\mathfrak{u}) - t^2)(\mathfrak{y} + t\mathfrak{u})^{-1}$$

(208) $$= -\,t(\mathfrak{u} - (2\mathfrak{y}\mathfrak{u} + t - s)(\mathfrak{y} + t\mathfrak{u})^{-1}).$$

Nun ist aber nach Formel (34) § 1, wenn $\hat{\mathfrak{u}}$ den Normaleinheitsvektor von $\{\mathfrak{x}, \mathfrak{y} + t\mathfrak{u}\}_c$ bezeichnet,

$$\hat{\mathfrak{u}} = \mathfrak{u} - 2(\mathfrak{y}\mathfrak{u} + t)(\mathfrak{y} + t\mathfrak{u})^{-1}$$

folglich nach Formel (208)

$$\{\mathfrak{y}, \mathfrak{y} + t\mathfrak{u}\}_{c'_2} = -\,t(\hat{\mathfrak{u}} + (t + s)(\mathfrak{y} + t\mathfrak{u})^{-1}).$$

Dies in (205) eingesetzt, ergibt in Verbindung mit (204) und (207)

$$\hat{\mathfrak{x}}(\alpha, \beta; s) = \{\{\mathfrak{x}, \mathfrak{y} + t\mathfrak{u}\}_c,\ \hat{\mathfrak{u}} + (t + s)(\mathfrak{y} + t\mathfrak{u})^{-1}\}_{-\frac{(t+s)c}{(\mathfrak{y}_0 + t\mathfrak{u}_0)^2}} = \{\mathfrak{x}, \mathfrak{y} - s\mathfrak{u}\}_c.$$

Diese Beziehung zeigt *erstens*, dass die Fläche $\{\mathfrak{x}, \mathfrak{y} - s\mathfrak{u}\}_c$ aus $\{\mathfrak{x}, \mathfrak{y} + t\mathfrak{u}\}_c$ durch Ribaucourtransformation hervorgeht, *zweitens* dass die Schar $\{\mathfrak{x}, \mathfrak{y} + t\mathfrak{u}\}_c$ zu sich selbst konjugiert ist.

§ 12. **Laguerre-Inversionen.**

82. Unter einer Laguerre-Inversion (Transformation par directions réciproques)[1] versteht man eine umkehrbar eindeutige Transformation aller gerichteten Ebenen τ des Raumes in gerichtete Ebenen $\hat{\tau}$, welche durch zwei Bedingungen bestimmt sind:

I. *Die Schnittgeraden der Ebenen τ und $\hat{\tau}$ mögen in einer festen Ebene ε liegen.*

[1] Laguerre, Sur la transformation par directions réciproques. Œuvres II, Paris (1905), S. 604—607. Transformations par semi-droites réciproques, ebenda S. 608—619. Vgl. ausserdem: Darboux I, S. 303—315. W. Blaschke, Vorlesungen über Differentialgeometrie. III. Differentialgeometrie der Kreise und Kugeln von G. Thomsen, Berlin (1929), S. 136—162, ins besondere S. 155—157.

II. *Es seien* $\mathfrak{e}$, $\mathfrak{u}$, $\hat{\mathfrak{u}}$ *die nach der positiven Seite der gerichteten Ebenen* ε, τ, $\hat{\tau}$ *sich erstreckenden Normaleinheitsvektoren. Dann sei*

$$\hat{\mathfrak{u}} = \frac{\mathfrak{e}}{t} + \left(\frac{1}{t^2} - 1\right)\left(\mathfrak{u} - \frac{\mathfrak{e}}{t}\right)^{-1} = \mathfrak{u} - 2(\mathfrak{u}\mathfrak{e} - t)(\mathfrak{e} - t\mathfrak{u})^{-1}, \tag{209}$$

unter t eine feste Grösse verstanden.

Durch diese beiden Bedingungen ist die zu jedem τ gehörige gerichtete Ebene $\hat{\tau}$ eindeutig bestimmt, ausser wenn τ zu ε parallel ist. Die Definition für diesen Spezialfall wird später an geeigneter Stelle (vergl. Abschnitt **86**.) nachgeholt werden.

Für $|t| \neq 1$ hat die Laguerre-Inversion involutorischen Charakter. Es folgt nämlich unmittelbar aus (209)

$$\mathfrak{u} = \frac{\mathfrak{e}}{t} + \left(\frac{1}{t^2} - 1\right)\left(\hat{\mathfrak{u}} - \frac{\mathfrak{e}}{t}\right)^{-1} = \hat{\mathfrak{u}} - 2(\mathfrak{e}\hat{\mathfrak{u}} - t)(\mathfrak{e} - t\hat{\mathfrak{u}})^{-1}.$$

Für $t = \pm 1$ ergibt sich aus (209)

$$\hat{\mathfrak{u}} = \pm \mathfrak{e}.$$

Dann werden alle Ebenen $\hat{\tau}$ in die Ebene ε übergeführt. Obgleich dieser singuläre Fall nicht mehr als Laguerre-Inversion anzusehen ist, werden wir ihn im folgenden auch berücksichtigen.

Für $|t| < 1$ liegen, wie aus Formel (209) hervorgeht, die Endpunkte der Vektoren $\mathfrak{u}$ und $\hat{\mathfrak{u}}$ spiegelbildlich zueinander bezgl. einer Kugel mit einem Radius von der Länge $\sqrt{\frac{1}{t^2} - 1}$, welche den Endpunkt des Vektors $\frac{\mathfrak{e}}{t}$ zum Mittelpunkt hat. Diese Kugel schneidet die Einheitskugel um den Nullpunkt rechtwinklig.

Für $|t| > 1$ wird der Radius der Kugel, an der gespiegelt wird, imaginär.[1] In beiden Fällen geht aber die Verbindungsgerade der Endpunkte der beiden Vektoren $\mathfrak{u}$ und $\hat{\mathfrak{u}}$ durch den Endpunkt des Vektors $\frac{\mathfrak{e}}{t}$; denn aus (209) folgt[2]

$$\mathfrak{u} - \frac{1 + t^2 - 2t(\mathfrak{u}\mathfrak{e})}{2t(\mathfrak{u}\mathfrak{e} - t)}(\hat{\mathfrak{u}} - \mathfrak{u}) = \frac{\mathfrak{e}}{t}.$$

[1] In Blaschke-Thomsen, l. c. S. 79 Fussnote 1, heisst die Laguerre-Inversion für $|t| < 1$ zeitartig, für $|t| > 1$ raumartig, s. S. 156.

[2] Vergl. Laguerre, l. c. S. 79 Fussnote 1, S. 611. Der dort in Figur 3 mit P bezeichnete Punkt entspricht dem Endpunkt unseres Vektors $\frac{\mathfrak{e}}{t}$.

Offenbar ist die Laguerre-Inversion eindeutig bestimmt, wenn die gerichtete Ebene ε und die Grösse t gegeben ist.

Da sich jede Fläche $\mathfrak{x}$ als Hüllfläche ihrer Tangentialebenen τ auffassen lässt, so geht durch eine Laguerre-Inversion $\mathfrak{x}$ in eine Fläche $\hat{\mathfrak{x}}$ über, wobei $\hat{\mathfrak{x}}$ als Hüllfläche derjenigen Ebenen $\hat{\tau}$ erscheint, in welche die Tangentialebenen τ von $\mathfrak{x}$ durch die vorgelegte Laguerre-Inversion transformiert werden.

83. Wir betrachten das zyklische System

$$\hat{\mathfrak{x}}(\alpha, \beta; t) = \{\mathfrak{x}, \mathfrak{e} - t\mathfrak{u}\}_{\mathfrak{e}\mathfrak{x}_0 + c} = \mathfrak{x} - 2(c + \mathfrak{e}\mathfrak{x})(\mathfrak{e} - t\mathfrak{u})^{-1}. \tag{210}$$

Wir behaupten: Für festes t bestimmt die Transformation (210) eine Laguerre-Inversion mit der festen Ebene ε, welche durch die Gleichung

$$\mathfrak{e}\mathfrak{y} + c = 0 \tag{211}$$

bestimmt ist.

Hierbei ist unter $\mathfrak{y}$ ein beliebiger Punkt von ε zu verstehen.

Beweis: Man bemerkt unmittelbar, dass die Tangentialebenen τ und $\hat{\tau}$ von $\mathfrak{x}$ und $\hat{\mathfrak{x}}(\alpha, \beta; t)$ die Eigenschaft II haben. Nach Formel (34) § 1 ergibt sich nämlich für den Normalvektor $\hat{\mathfrak{u}}$ von $\hat{\mathfrak{x}}$:

$$\hat{\mathfrak{u}} = \mathfrak{u} - 2(\mathfrak{u}\mathfrak{e} - t)(\mathfrak{e} - t\mathfrak{u})^{-1}, \tag{212}$$

in Übereinstimmung mit (209).

Um auch noch zu zeigen, dass sich zwei entsprechende Tangentialebenen τ und $\hat{\tau}$ auf der Ebene ε schneiden, gehen wir davon aus, dass

$$\hat{\mathfrak{x}}(\alpha, \beta; +1) = \mathfrak{x} - 2(c + \mathfrak{e}\mathfrak{x})(\mathfrak{e} - \mathfrak{u})^{-1}$$

und

$$\hat{\mathfrak{x}}(\alpha, \beta; -1) = \mathfrak{x} - 2(c + \mathfrak{e}\mathfrak{x})(\mathfrak{e} + \mathfrak{u})^{-1}$$

der Gleichung (211) für die Ebene ε genügen; für die speziellen Werte $t = +1$ und $t = -1$ geht somit die Fläche $\hat{\mathfrak{x}}$ in die Ebene ε über. Hieraus folgt aber, dass sämtliche Kreise des durch (210) bestimmten zyklischen Systems die Ebene ε rechtwinklig schneiden. Mithin liegt jede Gerade, welche im Mittelpunkt C eines Kreises des Systems auf der Ebene dieses Kreises senkrecht steht, in ε. Durch diese Geraden gehen aber alle Ebenen hindurch, welche die Kreise des zyklischen Systems rechtwinklig schneiden. Das sind aber die Tangentialebenen an die Flächen $\mathfrak{x}$ und $\hat{\mathfrak{x}}$, welche ja, wie im vorigen Paragraphen gezeigt wurde, sämtlich zu den Kreisen des Systems normal sind. Damit ist bewiesen, dass durch den Ausdruck (210) eine Laguerre-Inversion bestimmt ist. Die Darstellung der Laguerre-Inversion durch zyklische Systeme findet sich schon bei Darboux.[1]

84. Wir behaupten weiter, dass in der Form (210) alle Flächen enthalten sind, in welche man $\mathfrak{x}$ durch Laguerre-Inversion überführen kann. Und in der Tat, da die Laguerre-Inversion durch t und ε eindeutig bestimmt ist, andererseits die Gleichung jeder gerichteten Ebene ε auf die Form (211) gebracht werden kann, so gehört zu jeder Laguerre-Inversion eine und nur eine Ribaucourtransformation (210). Übrigens ist das zyklische System (210) bereits durch die Bedingung, dass jeder Kreis des Systems gleichzeitig auf $\mathfrak{x}$ und auf ε senkrecht steht, offenbar eindeutig bestimmt.

85. Nunmehr verifiziert man leicht die bekannte Tatsache, *dass eine Kugel durch Laguerre-Inversion wieder in eine Kugel übergeht.* Setzt man nämlich, unter $\mathfrak{a}$ und r feste, von α und β unabhängige Grössen verstanden,

$$\mathfrak{x} = \mathfrak{a} - r\mathfrak{u} \tag{213}$$

in den Ausdruck (210) für $\hat{\mathfrak{x}}$ ein, so ergibt sich nach einfacher Rechnung:

$$\hat{\mathfrak{x}} = \hat{\mathfrak{a}} - \hat{r}\hat{\mathfrak{u}} \tag{214}$$

mit

$$\left\{\begin{aligned} \hat{\mathfrak{a}} &= \mathfrak{a} + 2\frac{tr - (\mathfrak{a}\mathfrak{e} + c)}{1 - t^2}\mathfrak{e}, \\ \hat{r} &= \frac{r(1 + t^2) - 2t(\mathfrak{a}\mathfrak{e} + c)}{1 - t^2}; \end{aligned}\right. \tag{215}$$

während $\hat{\mathfrak{u}}$ den Vektor aus Formel (212) bezeichnet. Die in (213) definierte Fläche $\mathfrak{x}$ ist nun aber eine Kugel mit dem Radius r und dem Mittelpunkt $\mathfrak{a}$. Sie wird durch die Laguerre-Inversion (210) wegen (214) in eine Kugel mit dem Radius $\hat{r}$ und dem Mittelpunkt $\hat{\mathfrak{a}}$ übergeführt, da nach (215) $\hat{\mathfrak{a}}$ und $\hat{r}$ feste, von α und β unabhängige Grössen sind.

Damit die beiden Kugeln (213) und (214) übereinstimmen, muss

$$\hat{\mathfrak{a}} = \mathfrak{a}, \quad \hat{r} = r$$

[1] Darboux, I, S. 313.

sein. Wegen (215) ist hierfür notwendig und hinreichend, dass

$$tr - (\mathfrak{a}\mathfrak{e} + c) = 0 \tag{216}$$

ist. Offenbar ist $\mathfrak{a}\mathfrak{e} + c$ gleich dem Abstande d des Kugelmittelpunktes von der durch Gleichung (211) bestimmten festen Ebene ε. Mithin lässt sich das in Formel (216) enthaltene Ergebnis so formulieren: *Die Kugeln, bei denen der Quotient ihres Radius r durch den Abstand d ihres Mittelpunktes von der festen Ebene ε der Gleichung*

$$\frac{r}{d} = \frac{1}{t} \tag{217}$$

genügt, werden durch die Laguerre-Inversion mit der festen Ebene ε und dem Parameter t (vgl. Formel (210)) *in sich übergeführt.* Im Falle $t = \pm 1$ sind dies die Kugeln, welche ε berühren, während für $t = 0$ die invarianten Kugeln ε rechtwinklig schneiden.

86. Hieraus ergibt sich für $t \neq 1$ eine einfache Konstruktion der Ebene $\hat{\tau}$, in die eine beliebige Ebene τ durch die Laguerre-Inversion transformiert wird. Man nehme auf τ einen beliebigen Punkt P an und konstruiere eine Kugel $\varkappa$, welche τ in P berührt und der Gleichung (217) genügt. Die Kugel $\varkappa$ ist eindeutig bestimmt, ausser für $t = \mathfrak{u}\mathfrak{e}$, wo der Mittelpunkt von $\varkappa$ ins Unendliche rückt, $\varkappa$ somit mit τ zusammenfällt. In diesem Falle folgt aber aus (209)

$$\hat{\mathfrak{u}} = \mathfrak{u} \quad \text{d. h. aber} \quad \hat{\tau} = \tau.$$

Ist $t \neq \mathfrak{u}\mathfrak{e}$, so sei g die Gerade, in der τ die Ebene ε schneidet. Dann lege man durch g an die Kugel $\varkappa$ die zweite von τ verschiedene Tangentialebene, die $\varkappa$ in $\hat{P}$ berührt. Dies ist dann die gesuchte, zu τ gehörige transformierte Ebene $\hat{\tau}$. Diese Konstruktion liefert die Ebene $\hat{\tau}$ auch für den Fall, dass τ zu ε parallel ist, dass somit g mit der unendlich fernen Geraden von ε zusammenfällt. Damit ist auch die Lücke der in Abschnitt **82.** formulierten Definition für die Laguerre-Inversion ausgefüllt.

Ist E der Pol der Ebene ε bezüglich der Kugel $\varkappa$, so geht bekanntlich die Gerade $P\hat{P}$ durch den Punkt E. Damit zeigt sich, dass diese Konstruktion der Ebenen $\hat{\tau}$ mit einer von Laguerre angegebenen Konstruktion übereinstimmt.[1]

---

[1] Vgl. Laguerre, l. c. S. 79 Fussnote 1, S. 611.

87. Es sei jetzt $\mathfrak{x}$ eine beliebige Fläche und $\hat{\mathfrak{x}}$ die Fläche, die aus $\mathfrak{x}$ durch Laguerre-Inversion (210) hervorgeht. Bezeichnet R den Radius der Ribaucourkugel, die gleichzeitig $\mathfrak{x}$ und $\hat{\mathfrak{x}}$ in entsprechenden Punkten berührt, so ist nach Formel (33) § 1 wegen (210)

$$R = -\frac{\mathfrak{e}\mathfrak{x} + c}{\mathfrak{u}\mathfrak{e} - t}. \tag{218}$$

Andererseits ist aber

$$\mathfrak{x} + R\mathfrak{u} = \hat{\mathfrak{x}} + R\hat{\mathfrak{u}}$$

der Mittelpunkt der Ribaucourkugel und seine Entfernung von der Ebene ε wird wegen (211) und (218)

$$d = \mathfrak{e}\mathfrak{x} + R(\mathfrak{e}\mathfrak{u}) + c = (\mathfrak{e}\mathfrak{x} + c)\left(1 - \frac{\mathfrak{e}\mathfrak{u}}{\mathfrak{e}\mathfrak{u} - t}\right)$$

$$= -t\frac{\mathfrak{e}\mathfrak{x} + c}{\mathfrak{e}\mathfrak{u} - t} = tR,$$

d. h. aber, die Ribaucourkugel genügt der Bedingung (217), bleibt somit bei der Laguerre-Inversion invariant.

Die Gleichung

$$\frac{d}{R} = t$$

ist für die bei einer Laguerre-Inversion auftretenden Ribaucourkugeln charakteristisch[1], denn durch (217) ist die Ribaucourkugel, welche die Fläche $\mathfrak{x}$ in einem vorgegebenen Punkte berührt, eindeutig bestimmt.

Ist $|t| < 1$, so setze man

$$\frac{d}{R} = t = \cos\theta. \tag{219}$$

Dann besagt Gleichung (219), dass die Ribaucourkugeln sämtlich die Ebene ε unter einem festen Winkel θ schneiden. Ist $|t| > 1$, so wird der Winkel θ imaginär.

88. Legen wir den Nullpunkt des Koordinatensystems auf die Ebene ε, so wird $c = 0$. Dann wird nach Formel (210) in Verbindung mit (106) und (113) aus § 5

[1] Vergl. u. a. Darboux I, S. 307—308.

$$(220) \qquad \begin{cases} \hat{\mathfrak{x}}(\alpha, \beta; \quad 1) = \{\mathfrak{x}, \mathfrak{e} - \mathfrak{u}\}_{\mathfrak{e}\mathfrak{x}_0} = \mathfrak{X}, \\ \hat{\mathfrak{x}}(\alpha, \beta; -1) = \{\mathfrak{x}, \mathfrak{e} + \mathfrak{u}\}_{\mathfrak{e}\mathfrak{x}_0} = \mathfrak{X}'. \end{cases}$$

Andrerseits ist nach Formel (170) § 8

$$(221) \qquad \mathfrak{X}' = \{\mathfrak{X}, \mathfrak{U}\}_c$$

mit

$$c = \frac{\mathfrak{e}\mathfrak{x}_0}{1 - \mathfrak{u}_0 \mathfrak{e}}.$$

Nach den Betrachtungen des Abschnitts **81** geht nun aber von zwei Flächen eines zyklischen Systems die eine aus der anderen immer durch eine Ribaucourtransformation hervor. Formel (221) zeigt somit, was aus dieser Transformation wird, wenn beide Flächen des Systems mit der gleichen Ebene zusammenfallen. *Ausserdem liefern die Formeln* (220) *eine neue geometrische Deutung des Zusammenhanges der beiden in* § 5 *Formel* (106) *und* (113) *konstruierten ebenen orthogonalen Kurvensysteme* $\mathfrak{X}$ *und* $\mathfrak{X}'$, *indem hier* $\mathfrak{X}$ *und* $\mathfrak{X}'$ *als die beiden Schnitte des zyklischen Systems* (210) *mit der Ebene* ε *erscheinen.*

Man bemerkt weiter leicht, dass die Flächen

$$\hat{\mathfrak{x}}(\alpha, \beta; t) \quad \text{und} \quad \hat{\mathfrak{x}}\left(\alpha, \beta; \frac{1}{t}\right)$$

spiegelbildlich zur Ebene ε liegen. Insbesondere ist $\hat{\mathfrak{x}}(\alpha, \beta; 0)$ das Spiegelbild von $\hat{\mathfrak{x}}(\alpha, \beta; \infty) = \mathfrak{x}$, wie man leicht aus einer Bemerkung des Abschnitts **34**. § 1 schliesst (vergl. insbesondere Formel (43)). Hieraus folgt aber, dass die Fläche $\mathfrak{x}$ und alle Flächen $\hat{\mathfrak{x}}$ für $|t| > 1$ auf derselben Seite von ε gelegen sind, während $\mathfrak{x}$ und alle Flächen $\hat{\mathfrak{x}}$ für $|t| < 1$ auf verschiedenen Seiten von ε liegen.

89. Wir erwähnen zum Schluss noch einen merkwürdigen Satz von Darboux[1], der sich auf die durch Formel (210) definierten zyklischen Systeme bezieht. Es sei M der Mittelpunkt der Ribaucourkugel $\varkappa$, welche die Flächen $\mathfrak{x}(\alpha, \beta)$ und $\hat{\mathfrak{x}}(\alpha, \beta; t)$ in den Punkten P und $\hat{P}$ berührt. Es sei ferner k der Kreis des zyklischen Systems, der die Flächen $\mathfrak{x}$ und $\hat{\mathfrak{x}}$ in P und $\hat{P}$ und die Ebenen ε in P_1 und P_2 senkrecht schneidet. Endlich sei MQ das Lot von M auf ε, das im Falle $|t| > 1$ den Kreis k in P' und P'' schneiden möge. Im Falle $|t| < 1$ haben das Lot MQ und der Kreis k keine reellen Schnittpunkte.

[1] Darboux, I, S. 314.

Dann ist der geometrische Ort der Punkte P' bezw. P'' eine Fläche $\hat{\mathfrak{x}}(\alpha, \beta; t')$ bezw. $\hat{\mathfrak{x}}(\alpha, \beta; t'')$ des zyklischen Systems (210), wobei

$$t' = t + \sqrt{t^2 - 1},$$

$$t'' = t - \sqrt{t^2 - 1} = \frac{1}{t'}$$

gesetzt ist. Ausserdem ist das Streckenverhältnis

$$\frac{\overline{P'Q}}{\overline{MQ}} = \sqrt{1 - \frac{1}{t^2}}.$$

Die Werte von t' und t'' erhält man leicht, wenn man berücksichtigt, dass der Vektor $\overrightarrow{PP'} - \overrightarrow{PM} = \overrightarrow{MP'}$ dem Vektor $\mathfrak{c}$ parallel sein soll. Die Durchführung der Rechnung überlassen wir dem Leser.

§ 13. Lie-Inversionen.

90. Ist $\hat{\mathfrak{x}}$ aus $\mathfrak{x}$ durch eine Laguerre-Inversion hervorgegangen, so wird man nach Satz 3. auch $\mathfrak{x}^{-1}$ durch eine Ribaucourtransformation in $\hat{\mathfrak{x}}^{-1}$ überführen können. Nach den Betrachtungen des Abschnitts 87. werden aber alle Kugeln des Systems, als deren Hüllfläche die beiden Mäntel $\mathfrak{x}$ und $\hat{\mathfrak{x}}$ erscheinen, die Ebene ε unter einem festen von α und β unabhängigen Winkel θ schneiden, wobei θ reell oder imaginär sein kann. Durch Inversion geht aber für $c \neq 0$ die durch Gleichung (211) bestimmte Ebene ε in eine Kugel $\varkappa$ über. Daraus folgt aber, dass die Kugeln der Ribaucourkongruenz, welche $\mathfrak{x}^{-1}$ und $\hat{\mathfrak{x}}^{-1}$ zu Hüllflächen haben, die Kugel $\varkappa$ auch unter dem festen Winkel θ schneiden.

Wir nennen eine Ribaucourtransformation eine Lie-Inversion, wenn alle Kugeln des die Transformation erzeugenden Systems, eine feste, gerichtete Kugel unter einem festen (reellen oder imaginären) Winkel θ schneiden.[1]

Durch θ und $\varkappa$ ist somit jede Lie-Inversion eindeutig bestimmt. Da hierbei

[1] Allgemein wird eine Lie-Inversion als eine Transformation aller gerichteten Kugeln des Raumes mit gewissen Eigenschaften definiert. Diese Definition entspricht der in Abschn. 82. angegebenen Definition der Laguerre-Inversion. Man zeigt, dass durch eine Lie-Inversion jede Fläche $\mathfrak{x}$ in eine Fläche $\hat{\mathfrak{x}}$ übergeführt wird, deren Krümmungslinien denen von $\mathfrak{x}$ entsprechen, und dass ausserdem $\mathfrak{x}$ und $\hat{\mathfrak{x}}$ als die beiden Mäntel der Hüllfläche einer zweiparametrigen Kugelschar mit den im Text angegebenen Eigenschaften entsprechen. Vgl. z. B. Blaschke-Thomsen, l. c. S. 79 Fussnote 1, S. 197—198 und S. 230—232.

übrigens die Ebene als Kugel mit unendlich grossem Radius angesehen wird, so ist die Laguerre-Inversion ein Spezialfall der Lie-Inversion. Offenbar wird auch umgekehrt jede Lie-Inversion durch diejenige gewöhnliche Inversion, welche $\varkappa$ in eine Ebene ε überführt, in eine Laguerre-Inversion verwandelt.

91. Es sei $\mathfrak{x}(\alpha, \beta)$ eine Fläche, $\varkappa$ eine feste Kugel und θ ein fester (reeller oder imaginärer) Winkel; $\hat{\mathfrak{x}}$ sei eine zweite Fläche, welche aus $\mathfrak{x}$ durch eine zu $\varkappa$ und θ gehörige Lie-Inversion hervorgeht. Der Koordinatenanfangspunkt sei auf der Oberfläche von $\varkappa$ angenommen. Dann geht durch eine Spiegelung an der Einheitskugel die gerichtete Kugel $\varkappa$ in eine gerichtete Ebene ε, die betrachtete Lie-Inversion in eine Laguerre-Inversion über. Es ist somit nach Formel (210), wenn wieder

$$\mathfrak{e}\mathfrak{y} + c = 0 \tag{222}$$

die Gleichung der Ebene ε ist,

$$\hat{\mathfrak{x}}^{-1}(\alpha, \beta; t) = \{\mathfrak{x}^{-1}, \mathfrak{e} - t\mathfrak{u}'\}_{\frac{\mathfrak{e}\mathfrak{x}_0}{\mathfrak{x}_0^2} + c}. \tag{223}$$

Hierbei ist nach Formel (219) $t = \cos\theta$, während $\mathfrak{u}'$ den Normaleinheitsvektor von $\mathfrak{x}^{-1}$ bedeutet.

Nun ist aber nach Satz 3.

$$\hat{\mathfrak{x}} = \{\mathfrak{x}, \{\mathfrak{e} - t\mathfrak{u}', \mathfrak{x}^{-1}\}_{c'}\}_{\mathfrak{e}\mathfrak{x}_0 + c\mathfrak{x}_0^2}, \tag{224}$$

wobei sich

$$c' = -t\frac{\mathfrak{u}_0'\mathfrak{x}_0}{\mathfrak{x}_0^2} - c$$

ergibt.

Andererseits ist

$$\begin{aligned} \{\mathfrak{e} - t\mathfrak{u}', \mathfrak{x}^{-1}\}_{c'} &= \mathfrak{e} - t\{\mathfrak{u}', \mathfrak{x}^{-1}\}_{\frac{\mathfrak{u}_0'\mathfrak{x}_0}{\mathfrak{x}_0^2} + \frac{c}{t}} \\ &= \mathfrak{e} - t\mathfrak{u} + 2c\mathfrak{x} \end{aligned} \tag{225}$$

nach Formel (41) und (36) § 1, unter $\mathfrak{u}$ wieder den Normaleinheitsvektor von $\mathfrak{x}$ verstanden. Setzt man noch für $c > 0$

$$-\frac{\mathfrak{e}}{2c} = \mathfrak{a}, \quad \frac{1}{2c} = r, \quad \mathfrak{a}^2 = r^2 \tag{226}$$

so sind offenbar $\mathfrak{a}$ und r Mittelpunkt und Radius der Kugel $\varkappa$, welche ja durch Inversion der durch die Gleichung (222) bestimmten Ebene ε hervorgeht.

Man erhält ferner, wenn man (226) in (224) substituiert, wegen Formel (225) und (46) § 1 als Ausdruck für die durch Lie-Inversion aus $\mathfrak{x}$ entstandene Fläche $\hat{\mathfrak{x}}$

$$\hat{\mathfrak{x}}(\alpha, \beta; t) = \{\mathfrak{x}, \mathfrak{x} - \mathfrak{a} - tr\mathfrak{u}\}_{\frac{-2\mathfrak{a}\mathfrak{x}_0 + \mathfrak{x}_0^2}{2}}. \tag{227}$$

92. Da $\hat{\mathfrak{x}}^{-1}(\alpha, \beta; \pm 1)$ wegen (223), wie in Abschnitt **83.** gezeigt wurde, mit der Ebene ε zusammenfällt, so muss $\hat{\mathfrak{x}}(\alpha, \beta; \pm 1)$ in die Kugel $\varkappa$ übergehen. Ferner liegen $\hat{\mathfrak{x}}(\alpha, \beta; t)$ und $\hat{\mathfrak{x}}\left(\alpha, \beta; \frac{1}{t}\right)$ spiegelbildlich zu $\varkappa$, da nach den Betrachtungen in Abschn. **88.** $\hat{\mathfrak{x}}^{-1}(\alpha, \beta; t)$ und $\hat{\mathfrak{x}}^{-1}\left(\alpha, \beta; \frac{1}{t}\right)$ spiegelbildlich zu ε gelegen sind. Insbesondere ist wegen $\hat{\mathfrak{x}}(\alpha, \beta; \infty) = \mathfrak{x}$ die Fläche $\hat{\mathfrak{x}}(\alpha, \beta; 0)$ das Spiegelbild von $\mathfrak{x}$ bezgl. $\varkappa$.

Für $|t| > 1$, d. h. θ imaginär, liegen alle Flächen $\hat{\mathfrak{x}}(\alpha, \beta; t)$ auf derselben Seite von $\varkappa$ wie $\mathfrak{x}$, während für $|t| < 1$ d. h. θ reell, $\mathfrak{x}$ und $\hat{\mathfrak{x}}$ auf verschiedenen Seiten von $\varkappa$ liegen.

Fasst man in (227) t als veränderlichen Parameter auf, so bestimmt der Ausdruck (227) wieder ein zyklisches System, und zwar sind, wie man sich leicht überlegt, die Kreise dieses Systems dadurch eindeutig bestimmt, dass sie gleichzeitig die Fläche $\mathfrak{x}$ und die Kugel $\varkappa$ senkrecht schneiden.

93. Verlegt man den Koordinatenanfangspunkt von der Kugelfläche $\varkappa$ in den Mittelpunkt $\mathfrak{a}$ von $\varkappa$ so muss man in (227) $\mathfrak{x}$ durch $\mathfrak{x} + \mathfrak{a}$ ersetzen, und erhält so schliesslich wegen $\mathfrak{a}^2 = r^2$ (vergl. Formel (226))

$$\hat{\mathfrak{x}}(\alpha, \beta; t) + \mathfrak{a} = \{\mathfrak{x} + \mathfrak{a}, \mathfrak{x} - tr\mathfrak{u}\}_{\frac{\mathfrak{x}_0^2 - r^2}{2}},$$

oder wegen (45) § 1

$$\hat{\mathfrak{x}}(\alpha, \beta; t) = \{\mathfrak{x}, \mathfrak{x} - tr\mathfrak{u}\}_{\frac{\mathfrak{x}_0^2 - r^2}{2}}. \tag{228}$$

94. Es seien $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{y}$ zwei zueinander parallele Flächen und es sei

$$\begin{cases} \hat{\mathfrak{x}} = \{\mathfrak{x}, \mathfrak{y}\}_c, \\ \hat{\mathfrak{u}} = \{\mathfrak{u}, \mathfrak{y}\}_*, \end{cases} \tag{229}$$

unter $\hat{\mathfrak{u}}$ den Normaleinheitsvektor von $\hat{\mathfrak{x}}$ (vgl. Formel (41) § 1) verstanden. Unterwirft man $\mathfrak{x}$ und $\hat{\mathfrak{x}}$ der gleichen Lie-Inversion (228)

$$\mathfrak{x}' = \{\mathfrak{x}, \mathfrak{x} - tr\mathfrak{u}\}_{\frac{\mathfrak{x}_0{}^2 - r^2}{2}}, \tag{230}$$

$$\hat{\mathfrak{x}}' = \{\hat{\mathfrak{x}}, \hat{\mathfrak{x}} - tr\hat{\mathfrak{u}}\}_{\frac{\hat{\mathfrak{x}}_0{}^2 - r^2}{2}}, \tag{231}$$

so muss auch $\hat{\mathfrak{x}}'$ aus $\mathfrak{x}'$ durch Ribaucourtransformation hervorgehen. Denn, da durch Lie-Inversion Kugeln in Kugeln, Krümmungslinien in Krümmungslinien übergehen, so erscheinen auch $\mathfrak{x}'$ und $\hat{\mathfrak{x}}'$ als die beiden Mäntel der Hüllfläche einer Kugelschar, bei der sich die Krümmungslinien gegenseitig entsprechen. Um den analytischen Ausdruck für diese Ribaucourtransformation zu berechnen, ziehen wir den Satz 4 heran.

Es ist nach Formel (231) wegen (229)

$$\begin{aligned}
\hat{\mathfrak{x}}' &= \{\{\mathfrak{x}, \mathfrak{y}\}_c, \{\mathfrak{x}, \mathfrak{y}\}_c - tr\{\mathfrak{u}, \mathfrak{y}\}_*\}_{\frac{\hat{\mathfrak{x}}_0{}^2 - r^2}{2}} \\
&= \{\{\mathfrak{x}, \mathfrak{y}\}_c, \{\mathfrak{x} - tr\mathfrak{u}, \mathfrak{y}\}_{c_2}\}_{c_3}, \\
c_2 &= c - tr\mathfrak{u}_0\mathfrak{y}_0, \\
c_3 &= \frac{1}{2}((\mathfrak{x}_0 - 2c\mathfrak{y}_0^{-1})^2 - r^2) = \frac{\mathfrak{x}_0^2 - r^2}{2} - 2\frac{c(\mathfrak{x}_0\mathfrak{y}_0 - c)}{\mathfrak{y}_0^2}.
\end{aligned}$$

Andererseits ist nach Satz 4, Formel (72), (73) und (74)

$$\left\{\begin{aligned}
\hat{\mathfrak{x}}' &= \{\{\mathfrak{x}, \mathfrak{x} - tr\mathfrak{u}\}_{c_4}, \{\mathfrak{y}, \mathfrak{x} - tr\mathfrak{u}\}_{*-c_2}\}_{c_5}, \\
c_4 &= c_3 + 2c\frac{\mathfrak{x}_0\mathfrak{y}_0 - tr\mathfrak{u}_0\mathfrak{y}_0 - c_2}{\mathfrak{y}_0^2} = \frac{\mathfrak{x}_0^2 - r^2}{2} \\
*- c_2 &= \mathfrak{y}_0\mathfrak{x}_0 - c, \\
c_5 &= c - \frac{(\mathfrak{x}_0^2 - r^2)(c - tr\mathfrak{u}_0\mathfrak{y}_0)}{(\mathfrak{x}_0 - tr\mathfrak{u}_0)^2}
\end{aligned}\right. \tag{232}$$

Folglich ergibt sich aus (232) in Verbindung mit (230)

$$\hat{\mathfrak{x}}' = \{\mathfrak{x}', \{\mathfrak{y}, \mathfrak{x} - tr\mathfrak{u}\}_{\mathfrak{y}_0\mathfrak{x}_0 - c}\}_{c_5},$$

und dieser Ausdruck für $\hat{\mathfrak{x}}'$ zeigt unmittelbar, durch welche Ribaucourtransformation $\mathfrak{x}'$ in $\hat{\mathfrak{x}}'$ übergeführt wird.

95. Unterwirft man die Flächen $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$ und $\hat{\mathfrak{x}}$ der gleichen Laguerre-Inversion, indem man setzt:

$$\mathfrak{x}' = \{\mathfrak{x},\, \mathfrak{e} - t\mathfrak{u}\}_{\mathfrak{e}\mathfrak{x}_0},$$
$$\mathfrak{y}' = \{\mathfrak{y},\, \mathfrak{e} - t\mathfrak{u}\}_{\mathfrak{e}\mathfrak{y}_0},$$
$$\hat{\mathfrak{x}}' = \{\hat{\mathfrak{x}},\, \mathfrak{e} - t\hat{\mathfrak{u}}\}_{\mathfrak{e}\hat{\mathfrak{x}}_0},$$

so ergibt eine entsprechende Rechnung auf Grund von Satz 4:

$$\hat{\mathfrak{x}}' = \{\mathfrak{x}',\, \mathfrak{y}'\}_{c'} \tag{233}$$

mit

$$c' = c + 2t\,\frac{(\mathfrak{e}\mathfrak{x}_0)(\mathfrak{u}_0\mathfrak{y}_0)}{1 + t^2 - 2t(\mathfrak{e}\mathfrak{u}_0)}\,.$$

Der Ausdruck (233) gibt wieder die Ribaucourtransformation an, durch welche nach der Laguerre-Inversion $\mathfrak{x}'$ in $\hat{\mathfrak{x}}'$ übergeführt wird. Für $t = 1$ erhält man die Beziehung (172) aus § 8.

Berlin d. 20. 4. 33.