

FORMULES APPARENTÉES A LA FORMULE DE GAUSS-BONNET POUR CERTAINES APPLICATIONS D'UNE VARIÉTÉ A n DIMEN- SIONS DANS UNE AUTRE

PAR

MARIE-HÉLÈNE SCHWARTZ

Introduction

Ce mémoire est consacré à l'étude des propriétés d'une « application régulière » f de V dans W (définition 2.1 § 2); une telle application est, en particulier, un homéomorphisme au voisinage de tous les points de V sauf ceux d'un sous-complexe d'une « triangulation régulière » (D) de V (définition 1.4 § 1). Nos démonstrations¹ nécessitent l'examen très détaillé d'un champ barycentrique de vecteurs tangents à V , le lecteur aura donc avantage à prendre d'abord connaissance des résultats, c'est-à-dire des formules du théorème II (§ 19).

Ces formules s'apparentent à la formule de Gauss-Bonnet pour n dimensions et à une formule de Chern, elles s'y ramènent dans le cas où f se réduit à un homéomorphisme. Ahlfors avait en 1937² introduit la formule de Gauss-Bonnet pour les surfaces dans une démonstration du deuxième théorème de Nevanlinna. Plus tard Allendoerfer et A. Weil³ ont établi la généralisation de la formule de Gauss-Bonnet aux variétés polyédrales à n dimensions avec bords et ensuite Chern⁴ a indiqué une autre méthode étroitement liée à la théorie de la transgression. Dans notre généralisation des méthodes d'Ahlfors aux applications régulières des variétés à n dimensions, la formule de Gauss-Bonnet, sous sa forme ainsi généralisée, continue à jouer un rôle fondamental.

¹ Pour faciliter la lecture de ce mémoire nous avons établi un index des notations utilisées. Par ailleurs, selon l'usage, les chiffres entre crochets renvoient à la notice bibliographique.

² AHLFORS [2].

³ C. B. ALLENDOERFER et A. WEIL [3].

⁴ CHERN [4] et [5].

En fait c'est de la méthode même de Chern que nous nous servons pour démontrer directement nos formules: elle nous permet de supprimer toute considération métrique. Nos outils principaux sont les formes différentielles Π , $\Omega = -d\Pi$ et Ω_0 de Chern (voir § 18), Ω_0 étant défini sur W , Ω et Π sur l'espace fibré \mathfrak{B} des vecteurs non nuls tangents à W . Chern a montré que la formule de Gauss-Bonnet généralisée pouvait être obtenue par application convenable de la formule de Stokes à Ω et $-\Pi$. Nous appliquons ici la formule de Stokes non pas à Ω et $-\Pi$ mais aux formes Ω^* et $-\Pi^*$ images transposées de celles-ci par l'application \tilde{f} (application f étendue aux vecteurs tangents à V); ce sont des formes définies sur $\mathfrak{B}_s = \tilde{f}^{-1}(\mathfrak{B})$.

Considérons, par exemple notre formule (19.4) du théorème II relative à une sous-variété compacte C à n dimensions, transversale pour la triangulation (D) ; elle s'écrit:

$$(1) \quad \int_C \Omega_0^* = \int_{\tilde{f}^{-1}(C)} -\Pi^* + \chi_f(C).$$

Comparons-la à la formule de Gauss-Bonnet généralisée sous la forme indiquée par Chern: 1° pour la courbure totale, Ω_0 est remplacé par $\Omega_0^* = f^*(\Omega_0)$; 2° l'intégrale qui généralise celle de la courbure géodésique est celle de $-\Pi^*$ sur une sous-variété à $n-1$ dimensions de V_s qui est le relèvement du bord \dot{C} de C par un champ de vecteurs spéciaux sortants; 3° la caractéristique χ d'Euler-Poincaré est remplacée par la caractéristique χ_f (définition 19.1 § 19) qui se réduit à χ si f est un homéomorphisme et qui en possède certaines propriétés; en particulier elle peut se définir par l'intermédiaire de la triangulation (D) en simplexes ouverts D_i^k , chacun d'eux étant affecté d'un coefficient égal non plus à $(-1)^k$ mais à $(-1)^k m(D_i^k)$, $m(D_i^k)$ étant le degré topologique de f qui est le même en tous les points de D_i^k .

Nous ne nous sommes servis, dans ce travail que d'un corollaire de notre théorème I (§ 16): mais nous nous servirons du théorème lui-même dans un prochain mémoire qui envisagera le cas où f conserve une structure presque-complexe des variétés V et W ; nous définirons alors, le long de certaines sous-variétés de V , des champs de systèmes de r vecteurs linéairement indépendants au point de vue complexe tels qu'ils ont été étudiés par Chern¹ et nous établirons, pour certaines sous-variétés de V qui ont une structure presque-complexe et la dimension réelle $2p = n - 2r + 2$, des formules analogues à celles du théorème II, les formes Ω et Π étant remplacées par les formes Ω_r et Π_r de Chern¹ et la caractéristique $\chi_f(C)$ par une caractéristique

¹ CHERN [6].

$\chi_f(V, C)$ qui, lorsque f est un homéomorphisme et C une variété compacte, est égal à l'intégrale, sur $f(C)$ de Ω_r .

Ce mémoire est formé des deux premiers chapitres de ma thèse soutenue à la Faculté des Sciences de Paris sous le titre: «Formules apparentées à celles de Gauss-Bonnet et de Nevanlinna-Ahlfors pour certaines applications d'une variété à n dimensions dans une autre.» Cette thèse comprenait un troisième chapitre qui sera publié au Bulletin de la Société Mathématique de France¹; nous y généralisons à certaines catégories d'applications régulières des propriétés asymptotiques relatives aux déficiences de certains points ou sous-variétés de l'espace image; nous nous inspirons des méthodes de topologie utilisées par Ahlfors² mais nous n'étudions pas le cas des applications analytiques complexes, nous ne donnons pas de généralisation de la théorie de Nevanlinna comme l'on fait, en particulier, H. et J. Weyl³ puis W. Stoll⁴.

Je tiens à exprimer ici ma reconnaissance à Monsieur Valiron sans les encouragements duquel je n'aurais pas entrepris ce travail et à Monsieur Lichnérowicz qui a bien voulu s'y intéresser et me faire profiter de ses conseils.

CHAPITRE I

Applications régulières

I

Définitions

§ 1. Triangulation régulière d'une variété différentiable

Soit V une variété à n dimensions ($n > 1$), de classe C_2 (c'est-à-dire deux fois continuellement différentiable), orientable et orientée. V est compacte, avec ou sans bords.⁵

Définition 1.1. Soit φ un homéomorphisme de classe C_k entre deux variétés de classe C_k ; si aucune hypothèse de différentiabilité n'est faite sur φ^{-1} , nous dirons que φ est un *homéomorphisme unidifférentiable* (de classe C_k). Si, au contraire, φ^{-1} est

¹ M.-H. SCHWARTZ [9].

² AHLFORS [1].

³ H. et J. WEYL [12].

⁴ W. STOLL [11].

⁵ Nous appellerons intérieur (resp. bord) d'une variété U de dimension p , l'ensemble des points de U tels que chacun admette, dans U , un voisinage homéomorphe à R^p (resp. au demi-espace euclidien, fermé, de dimension p).

supposé différentiable (il s'ensuit alors qu'il est de classe C_k), φ sera appelé *homéomorphisme bidifférentiable* (de classe C_k).

Définition 1.2. Dans ce travail nous appellerons *sous-variété de V* tout sous-espace B de V qui, muni de la topologie induite, est une variété topologique avec ou sans bord. Nous conviendrons d'appeler intérieur $\overset{\circ}{B}$ de B l'intérieur¹ de cette variété.

Dans les cas que nous avons à considérer l'adhérence \bar{B} de B dans V sera aussi, pour la topologie induite, une variété topologique et c'est au bord de cette variété-là que nous réserverons la notation \dot{B} ou \ddot{B} .

Une sous-variété de V sera dite *sous-variété différentiable* de classe C_k si elle vérifie la condition suivante: chaque point z de B possède un voisinage $v(z)$ dans V représentable dans R^n par un homéomorphisme bidifférentiable de classe C_k tel que, pour $z \in \overset{\circ}{B}$, l'image de $B \cap v(z)$ soit un espace euclidien $R^p \subset R^n$ et que, pour $z \in \dot{B}$, l'image de $\bar{B} \cap v(z)$ soit un demi-espace euclidien fermé.

Définition 1.3. Une *triangulation topologique* (D) de V est définie par la donnée d'un complexe simplicial euclidien $(\hat{D})^2$ et d'un homéomorphisme φ de (\hat{D}) sur V . Il s'ensuit que (\hat{D}) est nécessairement une variété topologique \hat{V} .

Nous appellerons simplexe fermé \hat{D}_i^k de (\hat{D}) un des simplexes dont l'ensemble définit (\hat{D}) , le terme de simplexe ou simplexe ouvert étant réservé à l'intérieur $\overset{\circ}{D}_i^k$ de \hat{D}_i^k (l'intérieur étant pris dans le sens précédemment défini). k est la dimension du simplexe et i est un indice de numérotation que nous supprimerons quand il n'y aura pas ambiguïté. Nous utiliserons les notations correspondantes pour le complexe (D) , on aura $D_i^k = \varphi(\hat{D}_i^k)$.

L'ensemble des \hat{D}_i^k forme une partition de \hat{V} . Nous désignerons par $\hat{D}_i^k(\hat{x}) = \hat{D}_i^k(\hat{x})$ celui qui contient un point \hat{x} de \hat{V} . De même $D_i^k(x)$ sera le simplexe topologique de (D) contenant un point x de V .

Définition 1.4. Une *triangulation* (D) de V sera dite *régulière* si elle est l'image d'un complexe simplicial euclidien (\hat{D}) par un homéomorphisme φ conservant la structure de complexe et vérifiant les conditions suivantes:

$(TR)_1$ la restriction de φ à tout simplexe fermé \hat{D}_i^k de (\hat{D}) est un homéomorphisme unidifférentiable de classe C_2 de \hat{D}_i^k sur \bar{D}_i^k . Cela signifie que cette restriction peut

¹ Voir note 5, p. 191.

² Pour la définition d'un complexe simplicial euclidien ou géométrique voir LEFSCHETZ [7] p. 96.

être prolongée dans un voisinage ouvert de \hat{D}_i^k dans la variété linéaire à k dimensions qui le contient, par un homéomorphisme unidifférentiable de classe C_2 de ce voisinage sur une sous-variété différentiable de V .

$(TR)_2$ La restriction de φ à tout simplexe ouvert \hat{D}_i^k de (\hat{D}) est un homéomorphisme bidifférentiable de classe C_2 , de \hat{D}_i^k sur la sous-variété différentiable D_i^k de V .¹

Nous appellerons *complexe régulier* dans V tout sous-complexe d'une triangulation régulière.

Remarque 1.1. Les triangulations topologiques comprennent donc comme cas particulier les triangulations régulières qui, elles-mêmes, comprennent comme cas particulier les triangulations différentiables de classe C_2 ; celles-ci sont, en effet caractérisées par le fait que φ , restreint à toute cellule fermée, est un homéomorphisme bidifférentiable (dans le sens défini à propos de la condition $(TR)_1$).

Définition 1.5. *Vecteurs spéciaux.* Un vecteur spécial pour (\hat{D}) est un vecteur non nul d'origine $\hat{x} \in \hat{V}$ et situé dans la variété linéaire à k dimensions définie par $\hat{D}_i^k(\hat{x})$.

Un vecteur spécial pour (D) est un vecteur non nul d'origine $x \in V$ et tangent à $D_i^k(x)$.

Espaces de vecteurs tangents. Soit \mathfrak{V} l'espace fibré des vecteurs non nuls tangents à V , soit $\mathfrak{V}(B)$ la restriction de \mathfrak{V} à un ensemble $B \subset V$; $\mathfrak{V}(x)$ sera donc une fibre. Nous désignerons par $\tilde{\mathfrak{V}}$ la fibre type, identique à R^n troué à l'origine; le groupe des automorphismes de $\tilde{\mathfrak{V}}$ sera le groupe linéaire. Soit \mathfrak{V}^+ l'espace de tous les vecteurs, nuls ou non, tangents à V .

Soient $\mathfrak{V}_s \subset \mathfrak{V}$ l'espace des vecteurs spéciaux pour (D) et $\mathfrak{V}_s^+ \subset \mathfrak{V}^+$ l'espace des vecteurs spéciaux pour (D) ou nuls.

Soient $\hat{\mathfrak{V}}_s$ l'espace des vecteurs spéciaux pour (\hat{D}) et $\hat{\mathfrak{V}}_s^+$ l'espace des vecteurs spéciaux pour (\hat{D}) ou nuls et ayant leur origine dans \hat{V} .

Propriété 1.1. Les sous-variétés $\hat{\mathfrak{V}}_s^+(\hat{D}_i^k)$, $\hat{\mathfrak{V}}_s(\hat{D}_i^k)$, $\mathfrak{V}_s^+(D_i^k)$ et $\mathfrak{V}_s(D_i^k)$, sont différentiables de classe C_1 , sans bords et de dimension $2k$.

Extension de $\tilde{\varphi}$ et φ aux vecteurs spéciaux ou nuls,

La restriction de φ à \hat{D}_i^k étant, d'après $(TR)_2$, un homéomorphisme bidifférentiable de classe C_2 , définit une application relative aux vecteurs tangents; cette ap-

¹ Nous aurions pu remplacer $(TR)_2$ par la condition suivante: La restriction de φ à \hat{D}_i^k est, en tout point, de rang k . En effet, $(TR)_2$ résulte de cette condition et de $(TR)_1$ par le théorème des fonctions implicites.

plication est un homéomorphisme bidifférentiable de classe C_1 de $\widehat{\mathfrak{B}}_s^+(D_i^k)$ sur $\mathfrak{B}_s^+(D_i^k)$ dans lequel les vecteurs nuls se correspondent. L'ensemble de ces applications linéaires angentes pour tous les \widehat{D}_i^k définit un homéomorphisme $\tilde{\varphi}$ de $\widehat{\mathfrak{B}}_s^+$ sur \mathfrak{B}_s^+ , on a donc :

$$(1.1) \quad \tilde{\varphi}(\widehat{\mathfrak{B}}_s) = \mathfrak{B}_s; \quad \tilde{\varphi}(\widehat{\mathfrak{B}}_s^+) = \mathfrak{B}_s^+$$

et :

Propriété 1.2. L'homéomorphisme $\tilde{\varphi}$ est unidifférentiable de classe C_1 « par simplexe fermé », c'est-à-dire dans $\widehat{\mathfrak{B}}_s^+(\widehat{D}_i^k)$, et bidifférentiable de classe C_1 « par simplexe ouvert », c'est-à-dire dans $\widehat{\mathfrak{B}}_s^+(D_i^k)$.

Définition 1.6. Application π et $\tilde{\pi}$.

π (resp. $\tilde{\pi}$) est l'application de \mathfrak{B}^+ sur V (resp. $\widehat{\mathfrak{B}}_s^+$ sur \widehat{V}) qui, à chaque vecteur élément de \mathfrak{B}^+ (resp. $\widehat{\mathfrak{B}}_s^+$), fait correspondre son origine.

§ 2. Application régulière d'une variété différentiable dans une autre.

Soit W une variété différentiable de classe C_2 à n dimensions orientable et orientée, sans bords. (W est compacte ou non compacte.)

Définition 2.1. Une application f de V dans W sera dite régulière si elle satisfait aux deux conditions suivantes:

(AR)₁ f est de classe C_2 (2 fois continuellement différentiable);

(AR)₂ il existe une triangulation régulière (D) de V telle que la restriction de f à tout simplexe ouvert D_i^k de (D) soit un homéomorphisme bidifférentiable de classe C_2 de D_i^k sur une sous-variété différentiable Δ_i^k de W .¹

Extension de f aux vecteurs spéciaux pour (D) ou nuls.

Soient \mathfrak{B}^+ l'espace de tous les vecteurs tangents à W et \mathfrak{B} l'espace de tous les vecteurs non nuls tangents à W ; la fibre type pour ce dernier espace fibré est encore \mathfrak{F} et le groupe structural est encore le groupe linéaire. Nous désignerons encore par π l'application canonique de \mathfrak{B} sur W qui à chaque vecteur fait correspondre son origine.

La restriction de f à D_i^k étant, d'après (AR)₂, un homéomorphisme bidifférentiable de classe C_2 de D_i^k sur Δ_i^k , définit une application des vecteurs tangents; celle-ci est un homéomorphisme bidifférentiable de classe C_1 de $\mathfrak{B}^+(D_i^k)$ dans la variété

¹ Nous aurions pu remplacer (AR)₂ par la condition suivante: La restriction de f à D_i^k est, en tout point de rang k . En effet, (AR)₂ résulte de cette condition et de (AR)₁ par le théorème des fonctions implicites.

des vecteurs tangents à Δ_i^k , dans lequel les vecteurs nuls se correspondent. L'ensemble de ces applications pour tous les D_i^k définit une application \tilde{f} de \mathfrak{B}_s^+ dans \mathfrak{B}^+ ; on a :

$$(2.1) \quad \tilde{f}(\mathfrak{B}_s) \subset \mathfrak{B}.$$

Propriété 2.1. L'application \tilde{f} de \mathfrak{B}_s^+ dans \mathfrak{B}^+ est différentiable de classe C_1 sa restriction à chaque $\mathfrak{B}_s^+(D_i^k)$ est un homéomorphisme bidifférentiable Classe C_1 .

Application $f \circ \varphi$ et $\tilde{f} \circ \tilde{\varphi}$. Nous emploierons les notations du § 1 pour définir la triangulation régulière (D) . L'application $f \circ \varphi$ de \hat{V} dans W possède toutes les propriétés que nous avons signalées pour f à cela près qu'elle n'est différentiable que par simplexes fermés \hat{D}_i^k . De même $\tilde{f} \circ \tilde{\varphi}$ est une application continue de l'espace \mathfrak{B}_s^+ dans \mathfrak{B}^+ telle que :

$$\tilde{f} \circ \tilde{\varphi}(\hat{\mathfrak{B}}_s) \subset \mathfrak{B}.$$

Propriété 2.2. Toute application régulière est discrète (c'est-à-dire que l'image réciproque de tout point de W est un ensemble discret).¹ Cela résulte du fait que D_i^k qui contiennent chacun au plus une image réciproque de $\zeta \in W$ sont en nombre localement fini.

Remarque 2.1. Une application régulière ne conserve nécessairement la structure triangulée ni globalement ni même localement.² Nous le montrerons par l'exemple suivant :

Exemple 2.1. Soient V, V_1, V_2 et W quatre espaces R^3 de coordonnées respectives $x, y, z; x_1, y_1, z_1; x_2, y_2, z_2$; et ξ, η, ζ . Soient f_1, f_2, f_3 les applications définies respectivement par les trois systèmes suivants d'équations :

$$\begin{aligned} &\text{pour } f_1: x_1 = x; \quad y_1 = y^2 - z^2; \quad z_1 = 2yz \\ &\text{pour } f_2: x_2 = x_1; \quad \begin{cases} y_2 = y_1 \text{ pour } x_1 \geq 0 \text{ ou } x_1 \leq -\pi \\ y_2 = y_1 + x_1^2 \sin \frac{1}{x_1} \text{ pour } -\pi \leq x_1 \leq 0 \end{cases}; \quad z_2 = z_1 \\ &\text{pour } f_3: \xi = x_2^2 - y_2^2; \quad \eta = 2x_2y_2; \quad \zeta = z_2. \end{aligned}$$

$f = f \circ f_2 \circ f_1$ est une application régulière de V dans W . L'ensemble (D) ¹ des points de V au voisinage desquels f n'est pas un homéomorphisme est la réunion des

¹ Certaines applications non partout définies ou non discrètes, en particulier des applications méromorphes, peuvent devenir régulières si l'on supprime de la variété objet certaines sous-variétés singulières; la partie restante V peut avoir des nombres de Betti élevés ou infinis. C'est pourquoi nous ne ferons pas d'hypothèses simplificatrices sur la connexion de notre variété V .

² Si V et W sont des variétés analytiques complexes et f une application régulière méromorphe, la structure triangulée est conservée localement.

trois droites

$$y=z=0; \quad x=y-z=0; \quad x=y+z=0.$$

On voit aisément que son image $(\Delta)^1$ est la réunion des deux droites $\xi=\eta=0$ et $\eta=\zeta=0$ et de la courbe définie par le paramètre t ($0 \leq t \leq \frac{1}{2}$)

$$\xi = t^2 \left(1 - t^2 \sin \frac{1}{t} \right), \quad \eta = t^2 \sin \frac{1}{t}, \quad \zeta = 0.$$

L'application f n'est donc pas simpliciale globalement; elle ne l'est pas non plus localement au voisinage du point $x=y=z=0$, car, si petit que soit un voisinage v de ce point dans V , $f((D)^1 \cap v)$ contiendra une infinité de points multiples, le point $\xi=\eta=\zeta=0$ et tous les points $\eta=\zeta=0$ et $\xi = \frac{1}{k\pi}$ pour tous les entiers $k > k_0(v)$.

II

Champ barycentrique relatif à (\hat{D})

§ 3. Définition et propriétés du champ barycentrique \hat{X}^1

Définition 3.1. *Complexe (\hat{d}) subdivision barycentrique de (\hat{D}) .*

Dans chacune des cellules \hat{D}_i^v de (\hat{D}) prenons un point arbitraire \hat{a}_i^v ; la dimension v de \hat{D}_i^v sera appelée l'indice simplicial du point \hat{a}_i^v .

Il existe une triangulation (\hat{d}) , subdivision de (\hat{D}) admettant pour sommets les points \hat{a}_i^v et aucun autre; ses cellules \hat{d}_i^k sont des simplexes. On peut l'obtenir en formant successivement ses squelettes de dimensions croissantes.

Deux sommets d'un même simplexe fermé \hat{d}_i^k n'ont jamais même indice simplicial, nous pourrions donc les ordonner par indices strictement croissants $\hat{a}^0, \dots, \hat{a}^n$, $\hat{a}^0 = \hat{a}_1, \dots, \hat{a}^k = \hat{a}_k$ et ordonner de la même manière les coordonnées barycentriques, $\hat{t}_0, \hat{t}_1, \dots, \hat{t}_k$, par rapport à ces sommets, d'un point $\hat{x} \in \hat{d}_i^k$. L'indice simplicial v_j du sommet \hat{a}_j correspondant à \hat{t}_j sera encore appelé indice simplicial de la coordonnée \hat{t}_j . On a $\sum_j \hat{t}_j = 1$, $\hat{t}_j \geq 0$.

A tout $\hat{x} \in \hat{V}$ nous pourrions associer une suite de $n+1$ coordonnées, $\hat{t}^0(\hat{x}), \hat{t}^1(\hat{x}), \dots, \hat{t}^n(\hat{x})$, d'indices simpliciaux $0, 1, 2, \dots, n$. Il peut y avoir plusieurs \hat{d}_i^k contenant \hat{x} mais s'ils ont un sommet d'indice simplicial v la coordonnée barycentrique de \hat{x} relative à ce sommet est toujours $\hat{t}^v(\hat{x})$.

¹ Nous donnons de ce champ la définition de WHITNEY [13]; il est également utilisée par STEENROD [10] pp. 202-203.

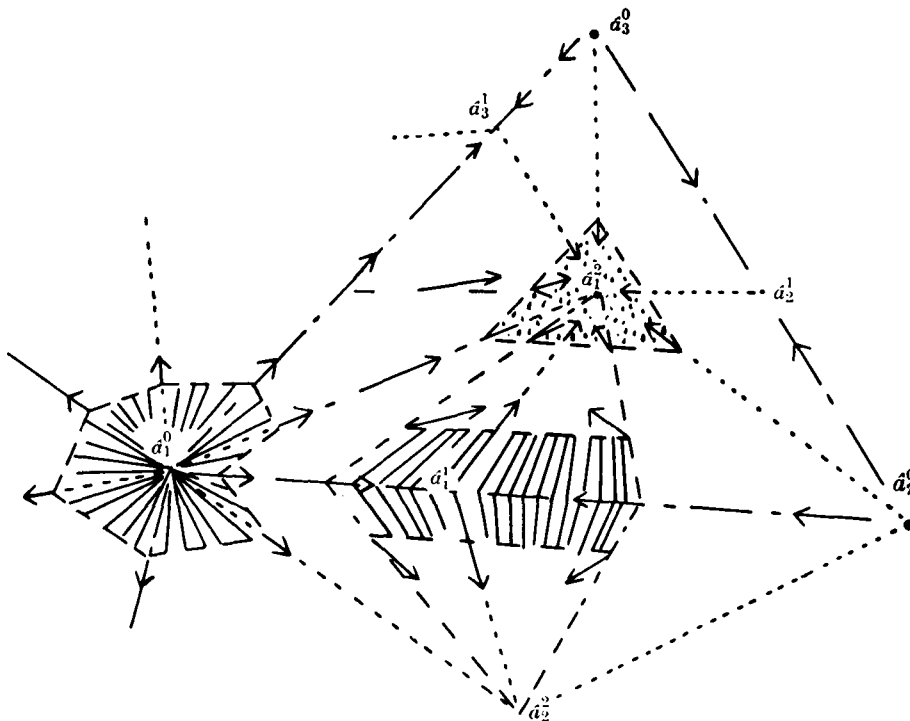


Fig. 1, § 3. Champ barycentrique. $n = 2$.

\hat{D}_i^2 triangle a_1^0, a_2^0, a_3^0
 \hat{d}_i^2 triangle a_i^0, a_j^1, a_i^2
 homoboules b_i^k :
 $\hat{b}_\varepsilon(a_1^0)$ pointillée
 $\hat{b}_\varepsilon(a_1^0)$ et $\hat{b}_\varepsilon(a_1^0) = \hat{T}_\varepsilon(a_1^0)$, hachurées suivant les rayons des sous-étoiles $\hat{T}_\varepsilon(y)$

Remarque 3.1. Si deux sommets distincts de même indice simplicial r appartiennent respectivement à deux simplexes fermés de (\hat{D}) qui contiennent \hat{x} , c'est que $\hat{l}^r(\hat{x}) = 0$, posons :

$$(3.1) \quad \tau_q(\hat{x}) = \hat{l}^{q+1}(\hat{x}) + \dots + \hat{l}^n(\hat{x}) \quad 0 \leq q \leq n$$

les points du squelette de dimension k de (\hat{D}) seront caractérisés par :

$$\tau_k(\hat{x}) = 0.$$

Définition 3.2. Le champ \hat{X} (fig. I). Le champ barycentrique \hat{X} est défini en tout point $\hat{x} \in \hat{V}$ par le vecteur

$$(3.2) \quad \hat{X}(\hat{x}) = \sum_{0 \leq \nu < \mu \leq n} \hat{l}^\nu(\hat{x}) \hat{l}^\mu(\hat{x}) \overrightarrow{\hat{a}^\nu \hat{a}^\mu}.$$

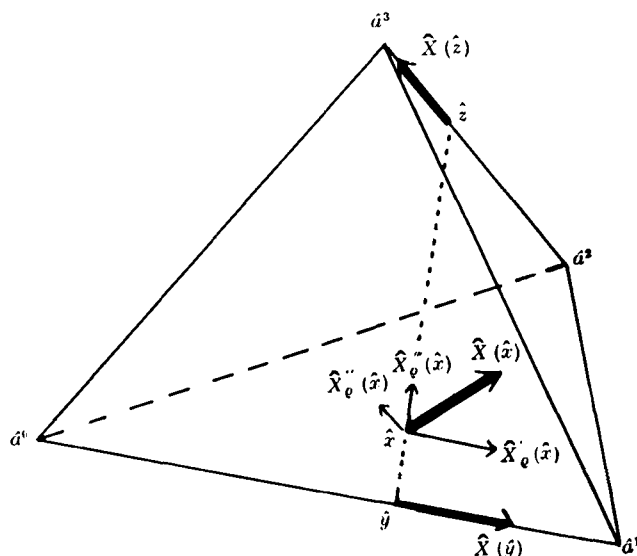


Fig. 2, § 3. Décomposition canonique du champ barycentrique. $n=3$; $k=3$; $e=1$

\hat{d}_i^k : tétraèdre a^0, a^1, a^2, a^3
 \hat{d}_{-1}^k segment a^0, a^1
 \hat{d}_2^k segment a^2, a^3

Le remarque 3.1 montre que $\hat{X}(\hat{x})$ est défini sans ambiguïté. On peut restreindre la définition à un simplexe fermé quelconque de (\hat{d}) contenant \hat{x} , en particulier à l'adhérence de $\hat{d}_i^k(\hat{x})$. Il en résulte que $\hat{X}(\hat{x})$ est dans la variété linéaire définie par $\hat{d}_i^k(\hat{x})$ donc; à fortiori dans celle qui est définie par $\hat{D}_i^k(\hat{x})$; d'où :

Propriétés 3.1.

a) \hat{X} est un champ de vecteurs spéciaux pour les triangulations (\hat{D}) et (\hat{d}) ; \hat{X} est une application bi-univoque de \hat{V} dans $\hat{\mathfrak{B}}_s^+$.

b) Les zéros de \hat{X} sont les sommets de la triangulation (\hat{d}) ; ce sont les points dont toutes les coordonnées sont nulles sauf une.

c) L'application \hat{X} de \hat{V} dans $\hat{\mathfrak{B}}_s^+$ est, « par simplexe fermé », un homéomorphisme unidifférentiable et, « par simplexe ouvert », un homéomorphisme bidifférentiable.

Décomposition du champ barycentrique relativement à la dimension ϱ (fig. 2).

Soit $0 \leq \varrho \leq n-1$; à tout point $\hat{x} \in \hat{d}_i^k, k \geq \varrho$, associons les points \hat{y} et \hat{z} de \hat{d}_i^k de la manière suivante en considérant les suites des $n+1$ coordonnées de chacun des points. Pour \hat{y} les $\varrho+1$ premières coordonnées sont proportionnelles aux coordonnées correspondantes de \hat{x} , le rapport étant $1/[1-\tau_\varrho(\hat{x})]=1/\lambda_\varrho(\hat{x})$ et les $n-\varrho$

autres étant nulles; pour \hat{z} les $\rho + 1$ premières coordonnées sont nulles et les $n - \rho$ autres proportionnelles à celles de \hat{x} dans le rapport $1/\tau_\rho(\hat{x})$.

Soit \hat{d}_1 le simplexe fermé déterminé par les sommets de \hat{d}^k d'indices simplicieux $\leq \rho$ et \hat{d}_2 le simplexe fermé déterminé par les autres sommets. On a $\hat{y} \in \hat{d}_1$ et $\hat{z} \in \hat{d}_2$.

\hat{y} , \hat{x} et \hat{z} sont alignés et l'on a :

$$\hat{x}\hat{z}/\hat{y}\hat{z} = 1 - \tau_\rho(\hat{x}) = \lambda_\rho(\hat{x}) \quad \text{et} \quad \hat{y}\hat{x}/\hat{y}\hat{z} = \tau_\rho(\hat{x}) = 1 - \lambda_\rho(\hat{x}).$$

Prenons une origine quelconque dans \hat{d}^k afin de pouvoir écrire $\overrightarrow{\hat{a}^\mu \hat{a}^\nu} = \hat{a}^\nu - \hat{a}^\mu$ et $\hat{x} = \sum_\nu \hat{t}^\nu \hat{a}^\nu$; séparons le second membre de la formule (3.2) en trois parties en posant:

$$\hat{X}'_\rho(\hat{x}) = \sum_{\mu < \nu \leq \rho} \hat{t}^\mu \hat{t}^\nu \overrightarrow{\hat{a}^\mu \hat{a}^\nu} = \lambda_\rho^2(\hat{x}) \hat{X}(\hat{y}); \quad \hat{X}''_\rho(\hat{x}) = \sum_{\rho+1 \leq \mu < \nu} \hat{t}^\mu \hat{t}^\nu \overrightarrow{\hat{a}^\mu \hat{a}^\nu} = \tau_\rho^2(\hat{x}) \hat{X}(\hat{z})$$

et

$$\begin{aligned} \hat{X}'''_\rho(\hat{x}) &= \sum_{\substack{\mu \leq \rho < \nu \\ \nu > \rho}} \hat{t}^\mu \hat{t}^\nu \overrightarrow{\hat{a}^\mu \hat{a}^\nu} = \sum_{\nu > \rho} \hat{t}^\nu \left[\sum_{\mu \leq \rho} \hat{t}^\mu \hat{a}^\nu - \sum_{\mu \leq \rho} \hat{t}^\mu \hat{a}^\mu \right] \\ &= \sum_{\nu > \rho} \hat{t}^\nu [\lambda_\rho(\hat{x}) \hat{a}^\nu - \lambda_\rho(\hat{x}) \hat{y}] = \lambda_\rho(\hat{x}) \left[\sum_{\nu > \rho} \hat{t}^\nu \hat{a}^\nu - \sum_{\nu > \rho} \hat{t}^\nu \hat{y} \right] \\ &= \lambda_\rho(\hat{x}) \tau_\rho(\hat{x}) (\hat{z} - \hat{y}) = \lambda_\rho(\hat{x}) (1 - \lambda_\rho(\hat{x})) \hat{y} \hat{z}. \end{aligned}$$

Il vient

$$(3.3) \quad \hat{X}(\hat{x}) = \hat{X}'_\rho(\hat{x}) + \hat{X}''_\rho(\hat{x}) + \hat{X}'''_\rho(\hat{x}); \quad \hat{X}'_\rho(\hat{x}) = \lambda_\rho^2(\hat{x}) \hat{X}(\hat{y})$$

$\hat{X}'_\rho(\hat{x})$ et $\hat{X}''_\rho(\hat{x})$ étant respectivement parallèles à \hat{d}_1 et \hat{d}_2 ; et \hat{X}'''_ρ étant parallèle à $\hat{y}\hat{z}$ et de même sens.

Cette décomposition est la même pour tous les \hat{d} qui contiennent \hat{x} .

Propriété 3.2. L'indice de la restriction au simplexe \hat{D}^ρ du champ \hat{X} en son zéro $\hat{a} \in \hat{D}^\rho$ est $(-1)^\rho$.¹

Notation. Nous désignerons par homothétie (A, K) l'homothétie de centre A et de rapport K .

Soit alors $0 < \varepsilon < 1$. Soit $\hat{D}_\varepsilon^\rho(\hat{a}^\rho)$ le simplexe fermé homothétique $(\hat{a}^\rho, \varepsilon)$ de \hat{D}^ρ . Soit \hat{x} un point du bord $\hat{D}_\varepsilon^\rho(\hat{a}^\rho)$ de $\hat{D}_\varepsilon^\rho(\hat{a}^\rho)$ homothétique du point \hat{y} du bord \hat{D}^ρ de \hat{D}^ρ . Soit $\hat{d}^k \subset \hat{D}^\rho$ un simplexe fermé contenant le segment $\hat{y}, \hat{x}, \hat{a}^\rho$. Décomposons canoniquement le champ \hat{X} relativement à la dimension $\rho = q - 1$; on a $\hat{d}_1 \subset \hat{D}^\rho$ et $\hat{d}_2 = \{\hat{a}^\rho\}$, donc $\hat{X}''_\rho(\hat{x}) = 0$, $\hat{z} = \hat{a}^\rho$, $\lambda(\hat{x}) = \varepsilon$. Des formules (3.3) il résulte alors que $\hat{X}(\hat{x})$ est la somme de deux vecteurs: 1° le vecteur $\hat{X}'_\rho(\hat{x}) = \varepsilon \hat{X}(\hat{y})$ parallèle à une direction du bord de \hat{D}^ρ en \hat{y} donc aussi du bord de $\hat{D}_\varepsilon^\rho(\hat{a}^\rho)$ en \hat{x} et, 2° le vecteur $\hat{X}'''_\rho(\hat{x}) =$

¹ L'unicité du zéro dans un simplexe ouvert est accessoire; ce qui est essentiel c'est la manière dont le champ est prolongé à l'extérieur de \hat{D}^k (§ 14).

$= \varepsilon(1 - \varepsilon) \hat{y} \hat{a}^q = (1 - \varepsilon) \hat{x} \hat{a}^q$, strictement rentrant¹ par rapport à $\hat{D}_\varepsilon^q(\hat{a}^q)$. $\hat{X}(\hat{x})$ est donc aussi strictement rentrant par rapport à $\hat{D}_\varepsilon^q(\hat{a}^q)$.

On sait qu'un champ continu de vecteurs défini dans un simplexe euclidien fermé de dimension q (ici $\hat{D}_\varepsilon^q(\hat{a}^q)$), strictement rentrant (donc non nul) le long de son bord et ayant à l'intérieur un seul zéro, admet en celui-ci l'indice $(-1)^q$, ce qui démontre la propriété 3.2.

§ 4. Comportement du champ \hat{X} au voisinage d'un simplexe \hat{D}^q

Définitions et propriétés des voisinages $\hat{b}(\hat{a}^q)$ des points \hat{a}^q et des voisinages $\hat{T}(\hat{C})$ des sous-complexes (\hat{C}) de (\hat{D}) .

Nous avons toujours $0 < \varepsilon < 1$.

Définition 4.1 : $\hat{T}(\hat{D}^q)$.

Désignons par $\hat{E}t(\hat{a}^q)$ l'étoile fermée,² dans (\hat{d}) , du sommet $\hat{a}^q \in \hat{D}^q$. Désignons par $\hat{T}(\hat{D}^q)$ le sous-complexe de $\hat{E}t(\hat{a}^q)$ formé des simplexes fermés \hat{d}_i^k dont la trace sur \hat{D}^q est vide ou réduite au point \hat{a}^q ; il est de dimension $n - q$; soit $\hat{T}(\hat{D}^q)$ son bord.

$$(4.1) \quad \hat{T}(\hat{D}^q) \cap \hat{D}^q = \{\hat{a}^q\}; \quad \hat{T}(\hat{D}^q) \cap \hat{D}_q = \emptyset.$$

Remarque 4.1. Tous les sommets de $\hat{T}(\hat{D}^q)$ ont des indices simpliciaux $> q$. Soit, en effet, \hat{a}_1 l'un d'eux, \hat{D}^q est adhérent à $\hat{D}_i^k(\hat{a}_1)$, donc de dimension strictement inférieure.

Définitions 4.2. Sous-étoile $T_\varepsilon(\hat{y})$ ³ d'un point \hat{y} de \hat{V} . Soit $\hat{D}^q = \hat{D}_i^q(\hat{y})$; $\hat{T}_\varepsilon(\hat{y})$ sera l'ensemble décrit par l'homothétique (\hat{y}, η) de $\hat{T}(\hat{D}^q)$ lorsque η décrit l'intervalle fermé $[0, \varepsilon]$, ensemble muni de la structure simpliciale déduit de celle de $\hat{T}(\hat{D}^q)$, cette structure de $\hat{T}_\varepsilon(\hat{y})$ est isomorphe à celle de $\hat{T}(\hat{D}^q)$. $\hat{T}_\varepsilon(\hat{y})$ contient \hat{y} (cas où $\eta = 0$) et son bord $\hat{T}(\hat{y})$ est l'homothétique (\hat{y}, ε) de $\hat{T}(\hat{D}^q)$.

On a :

$$(4.2) \quad \hat{T}_\varepsilon(\hat{y}) \cap \hat{D}_i^q(\hat{y}) = \{\hat{y}\}; \quad \hat{T}_\varepsilon(\hat{y}) \cap \hat{D}_i^q(\hat{y}) = \emptyset.$$

Remarque 4.2. $\hat{T}_\varepsilon(\hat{a}^q)$ (resp. $\hat{T}_\varepsilon(\hat{a}^q)$) est l'homothétique (\hat{a}^q, ε) de $\hat{T}(\hat{D}^q)$ (resp. $\hat{T}(\hat{D}^q)$).

¹ Expression parfaitement définie puisqu'il s'agit d'un simplexe rectiligne.

² L'étoile fermée d'un point dans une triangulation simpliciale est la réunion des simplexes fermés qui le contiennent.

³ Sous-entendu « sous-étoile d'ordre ε ».

Propriété 4.1. $\hat{T}_\varepsilon(\hat{y})$ (resp. $\hat{T}'_\varepsilon(\hat{y})$) est l'ensemble des points de l'étoile de \hat{y} dans (\hat{d}) tels que leurs coordonnées barycentriques d'indices simpliciaux $\leq q$ soient proportionnelles aux coordonnées correspondantes de \hat{y} dans un rapport compris entre 1 et ε (resp. dans le rapport ε). Cette propriété est une conséquence immédiate de la remarque 4.1.

Définitions 4.3. *Sous-variétés $\hat{T}_\varepsilon(\hat{D}^q)$ et $\hat{T}'_\varepsilon(\hat{D}^q)$.* Nous désignerons par $\hat{T}_\varepsilon(\hat{D}^q)$ et $\hat{T}'_\varepsilon(\hat{D}^q)$ les sous-variétés engendrées respectivement par $\hat{T}_\varepsilon(\hat{y})$ et $\hat{T}'_\varepsilon(\hat{y})$ quand \hat{y} décrit le simplexe ouvert \hat{D}^q .¹

Propriété 4.2. $\hat{T}_\varepsilon(\hat{D}^q)$ (resp. $\hat{T}'_\varepsilon(\hat{D}^q)$) est le sous-ensemble des points \hat{x} intérieurs à l'étoile $\hat{E}t(\hat{a}^q)$ de $\hat{a}^q \in \hat{D}^q$ dans (\hat{d}) caractérisés par $\tau_q(\hat{x}) \leq \varepsilon$ (resp. $\tau_q(\hat{x}) = \varepsilon$). En effet, $\hat{T}_\varepsilon(\hat{D}^q)$ est bien dans l'intérieur de $\hat{E}t(\hat{a}^q)$ et la propriété 4.1 exprime que la relation $\tau_q(\hat{x}) \leq \varepsilon$ est vérifiée pour tout point de $\hat{T}_\varepsilon(\hat{D}^q)$; et réciproquement si cette relation est vérifiée pour un point intérieur à $\hat{E}t(\hat{a}^q)$ il est dans $\hat{T}_\varepsilon(\hat{y})$, \hat{y} étant le point de \hat{D}^q dont les q premières coordonnées sont proportionnelles à celles de \hat{x} dans le rapport $1/(1 - \tau_q(\hat{x}))$, et les autres nulles.

Conséquence. $\hat{T}_\varepsilon(\hat{D}^q)$ est voisinage dans \hat{V} de tous ses points non situés sur $\hat{T}'_\varepsilon(\hat{D}^q)$ en particulier de tous ceux de \hat{D}^q .

Propriété 4.3. Soit $\hat{z} \in \hat{T}(\hat{D}^q)$; le simplexe homothétique $(\hat{z}, 1 - \eta)$ de \hat{D}^q est dans $\hat{T}_\varepsilon(\hat{D}^q)$ pour $0 \leq \eta \leq \varepsilon$ et dans $\hat{T}'_\varepsilon(\hat{D}^q)$ pour $\eta = \varepsilon$. Soit en effet $\hat{y} \in \hat{D}^q$, les points homothétiques $(\hat{z}, 1 - \eta)$ de \hat{y} pour $0 \leq \eta \leq \varepsilon$ forment la trace de $\hat{T}_\varepsilon(\hat{D}^q)$ sur le segment $\hat{y}\hat{z}$.

Propriété 4.4. $\hat{T}_\varepsilon(\hat{D}^q)$ (resp. $\hat{T}'_\varepsilon(\hat{D}^q)$) admettent des partitions en cellules ouvertes δ^{q+k} . δ^{q+k} est située dans une variété linéaire de dimension $q+k$ parallèle à \hat{D}^q et à un simplexe $\hat{d}^k \subset \hat{T}(\hat{D}^q)$ (resp. $\hat{d}^k \subset \hat{T}'(\hat{D}^q)$) et engendrée linéairement par un simplexe homothétique de \hat{D}^q de façon que le point homothétique de \hat{a}^q décrive \hat{d}^q . L'existence de cette partition résulte de la définition et de la propriété 4.3.

Propriété 4.5. *Le champ barycentrique \hat{X} est sortant de $\hat{T}_\varepsilon(\hat{D}^q)$ le long de $\hat{T}'_\varepsilon(\hat{D}^q)$.* Soit en effet $\hat{x} \in \hat{T}'_\varepsilon(\hat{D}^q)$; il existe alors deux points $\hat{y} \in \hat{d}_1 \subset \hat{D}^q$ et $\hat{z} \in \hat{d}_2 \subset \hat{T}(\hat{D}^q)$ tels que $\vec{\hat{y}\hat{x}}/\vec{\hat{y}\hat{z}} = \tau_q(\hat{x}) = \varepsilon$. D'après la propriété 4.4 on a: $x \in \hat{\delta}(\hat{x}) \subset \hat{T}_\varepsilon(\hat{D}^q)$, $\hat{\delta}(\hat{x})$ étant une cellule parallèle à \hat{d}_1 et \hat{d}_2 . D'autre part \hat{d}_1 et \hat{d}_2 déterminent un simplexe \hat{d}^k de (\hat{d}) ; les indices simpliciaux de leurs sommets étant respectivement $\leq q$ et $> q$, ce sont précisément les simplexes que nous avons appelés \hat{d}_1 et \hat{d}_2 lorsque,

¹ Si $\varepsilon \rightarrow 1$ $\lim \hat{T}_\varepsilon(\hat{D}^q) = \hat{T}(\hat{D}^q)$ et $\lim \hat{T}'_\varepsilon(\hat{D}^q) = \hat{T}'(\hat{D}^q)$.

au § 3, nous avons établi la décomposition canonique de \hat{X} pour une dimension qui est ici $\varrho = q$ (formule (3.3)). Dans cette décomposition les vecteurs $\hat{X}'_\varrho(\hat{x})$ et $\hat{X}''_\varrho(\hat{x})$ étant respectivement parallèles à $\hat{X}(\hat{y})$ et $\hat{X}(\hat{z})$ donc à \hat{d}_1 et \hat{d}_2 , le vecteur $\hat{X}'_\varrho(\hat{x}) + \hat{X}''_\varrho(\hat{x})$ est parallèle à $\hat{\delta}(\hat{x})$; c'est donc un vecteur du complexe des tangentes en \hat{x} à $\hat{T}'_\varepsilon(\hat{D}^q)$ qui, au voisinage de \hat{x} , est le bord de $\hat{T}_\varepsilon(\hat{D}^q)$. Quant à $\hat{X}'''_\varrho(\hat{x})$, équipollent à $\hat{y}\hat{z}$, il est strictement sortant de $\hat{T}_\varepsilon(\hat{D}^q)$ au point \hat{x} ; il en est donc de même de $\hat{X}(\hat{x})$, ce qui démontre la propriété 4.5.

§ 5. Définition et propriétés de l'homoboule orientée $\hat{b}_\varepsilon(\hat{a}^q)$

Soit $a^q \in \hat{D}^q$ un sommet de (\hat{d}) . Nous avons défini (cf. propriété 3.2.) le simplexe fermé \hat{D}_ε^q homothétique (\hat{a}^q, ε) de \hat{D}^q .

Définition. Lorsque \hat{y} décrit \hat{D}_ε^q la sous-étoile $\hat{T}_\varepsilon(\hat{y})$ décrit une sous-variété à n dimensions avec bord que nous munirons de l'orientation induite par celle de \hat{V} (que nous appellerons orientation canonique) et que nous désignerons par $\hat{b}_\varepsilon(\hat{a}^q)$. Pour voir que c'est une sous-variété et obtenir certaines de ses propriétés nous remarquerons simplement que cet ensemble est la restriction de $\hat{T}_\varepsilon(\hat{D}^q)$ lorsque \hat{y} au lieu de décrire le simplexe ouvert \hat{D}^q décrit le simplexe fermé $\hat{D}_\varepsilon^q \subset \hat{D}^q$. $\hat{b}_\varepsilon(\hat{a}^q)$ est une sous-variété fermée dont le bord, muni de l'orientation canoniquement définie par celle de $\hat{b}_\varepsilon(\hat{a}^q)$, sera désigné par $\hat{b}'_\varepsilon(\hat{a}^q)$. On a :

$$\hat{b}_\varepsilon(\hat{a}^q) = \hat{b}'_\varepsilon(\hat{a}^q) \cup \hat{b}''_\varepsilon(\hat{a}^q).$$

$\hat{b}'_\varepsilon(\hat{a}^q)$ est engendré par $\hat{T}'_\varepsilon(\hat{y})$ quand \hat{y} décrit \hat{D}_ε^q et $\hat{b}''_\varepsilon(\hat{a}^q)$ est engendré par $\hat{T}_\varepsilon(\hat{y})$ quand \hat{y} décrit le bord \hat{D}'_ε de \hat{D}_ε^q .

De la propriété 4.2 on déduit :

Propriété 5.1. Un point \hat{x} de $\hat{b}_\varepsilon(\hat{a}^q)$ est caractérisé par les relations :

$$(5.2) \quad \hat{x} \in \hat{E}t(\hat{a}^q); \quad \tau_q(\hat{x}) = t^{q+1}(\hat{x}) + \dots + t^n(\hat{x}) \leq \varepsilon; \quad t^0(\hat{x}) + \dots + t^{q-1}(\hat{x}) \leq \varepsilon(1 - \tau_q(\hat{x}))$$

qui mettent en évidence le fait que $\hat{b}_\varepsilon(\hat{a}^q)$ recouvre un voisinage de \hat{a}^q dans \hat{V} .

De la propriété 4.5 il résulte :

Propriété 5.2. Le champ barycentrique \hat{X} est sortant de $\hat{b}_\varepsilon(\hat{a}^q)$ le long de $\hat{b}'_\varepsilon(\hat{a}^q)$. Il est rentrant le long de $\hat{b}''_\varepsilon(\hat{a}^q)$; ce dernier point résulte immédiatement de démonstration de la propriété 3.2.

De la propriété 4.4. on déduit une partition en cellules. Nous mettrons ici en évidence, au lieu de \hat{D}^q les $\hat{d}^{q'} \in \hat{D}^q$. Il vient :

Propriété 5.3. $\hat{b}_\varepsilon(\hat{a}^q)$ est un complexe euclidien de dimension n . Toute cellule ouvert $\hat{\delta}^{q'+k}$ de ce complexe est associée à un couple de simplexes $\hat{d}^{q'} \in \hat{D}^q$ et $\hat{d}^k \in \hat{T}(\hat{D}^q)$. Soit $\hat{d}^{q'+k}$ le simplexe fermé défini par $\hat{d}^{q'}$ et \hat{d}^k ; on a $\hat{\delta}^{q'+k} \in \hat{d}^{q'+k}$. $\hat{\delta}^{q'+k}$ est homéomorphe au produit de $\hat{d}^{q'}$ par \hat{d}^k donc à une boule ouverte de dimension $q'+k$ donc aussi à $\hat{d}^{q'+k}$. $\hat{d}^{q'+k}$ est un simplexe quelconque du complexe $\hat{E}t(\hat{a}^q)$. Nous avons donc défini, par inclusion de toute cellule de $\hat{b}_\varepsilon(\hat{a}^q)$ dans le simplexe correspondant dans $\hat{E}t(\hat{a}^q)$, un isomorphisme simplicial entre $\hat{b}_\varepsilon(\hat{a}^q)$ et $\hat{E}t(\hat{a}^q)$. Or l'étoile d'un point dans une triangulation simpliciale d'une variété topologique est une homoboule¹, son bord étant une homosphère¹.

On en conclut :

Propriété 5.4. $\hat{b}_\varepsilon(\hat{a}^q)$ est une homoboule orientée et $\hat{b}_\varepsilon(\hat{a}^q)$ est une homosphère orientée; leurs traces \hat{D}_ε^q et \hat{D}_ε^q sur \hat{D}^q sont respectivement une sphère et une boule topologiques.

§ 6. Définition et propriétés des tubes orientés $\hat{T}_\varepsilon(\hat{C})$ (Fig. 3.)

Nous prendrons dorénavant $\varepsilon < 1/2$.

Soit \hat{C} un sous-complexe de \hat{D} .

En vertu de la définition de $\hat{T}_\varepsilon(\hat{D}_i^q)$, nous pouvons poser²:

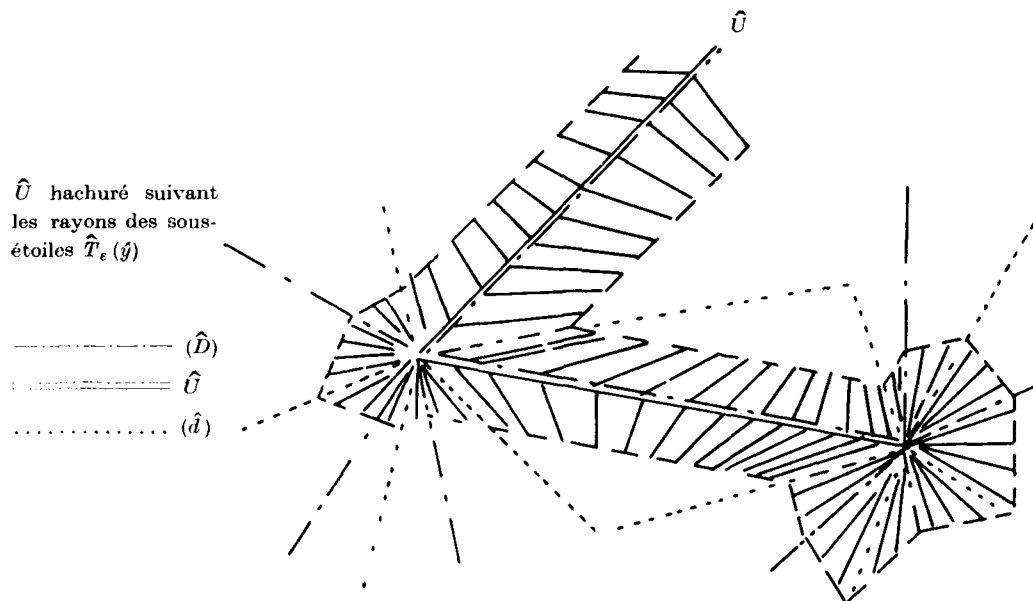
$$(6.1) \quad |\hat{T}_\varepsilon(\hat{C})| = \bigcup_{\hat{y} \in \hat{C}} \hat{T}_\varepsilon(\hat{y}) = \bigcup_{\hat{D}_i^q \subset \hat{C}} \hat{T}_\varepsilon(\hat{D}_i^q).$$

Nous avons vu (propriété 4.4) que $\hat{T}_\varepsilon(\hat{D}^q)$ admet une partition en cellules ouvertes; en faisant intervenir, au lieu de \hat{D}^q , tous les $\hat{d}^{q'} \in \hat{D}^q$, on obtient des cellules telles que deux d'entre elles sont soit disjointes, soit confondues même si elles appartiennent à deux $\hat{T}_\varepsilon(\hat{D}_i^q)$ différents. On en déduit qu'elles forment aussi une partition localement finie de $|\hat{T}_\varepsilon(\hat{C})|$. Il suffira donc, pour montrer que $|\hat{T}_\varepsilon(\hat{C})|$ est un complexe, de montrer qu'il est fermé.

En effet, $\hat{D}^s \subset \hat{D}^q$ entraîne $\hat{T}(\hat{D}^s) \subset \hat{T}(\hat{D}^q)$. Considérons alors une suite de points \hat{y}_i de \hat{D}^q tels que $\lim \hat{y}_i = \hat{y}' \in \hat{D}^s \subset \hat{D}^q$. $\lim \hat{T}_\varepsilon(\hat{y}_i)$ (resp. $\hat{T}_\varepsilon(\hat{y}')$) est engendré par les homothétiques (\hat{y}', η) de $\hat{T}(\hat{D}^q)$ (resp. $\hat{T}(\hat{D}^s)$); donc $\lim \hat{T}_\varepsilon(\hat{y}_i) \subset \hat{T}_\varepsilon(\hat{y}')$ ce qui entraîne, puisque \hat{C} est fermé, que $|\hat{T}_\varepsilon(\hat{C})|$ l'est aussi.

¹ Une homosphère (resp. homoboule) est une variété topologique qui a les mêmes groupes d'homologie et d'homotopie que la sphère (resp. boule). Pour $n \leq 2$ elle est homéomorphe à la sphère (resp. boule).

² Soit A une variété orientée, nous désignerons en général par $|A|$ la même variété non orientée; mais lorsque nous n'aurons jamais à orienter une variété B nous la désignerons par B et non par $|B|$.

Fig. 3, § 6. Tube $\hat{T}_\varepsilon(\hat{U})$. $n=2$; $p=1$.

Enfin, du fait que $\varepsilon < 1/2$ tous les $\hat{T}_\varepsilon(\hat{D}_i^q)$ sont disjoints. Lorsque $\varepsilon \rightarrow 0$, $|\hat{T}_\varepsilon(\hat{C})|$ reste homéomorphe à lui-même et tend vers le complexe (\hat{C}) ; c'est une variété que nous appellerons « tube autour de (\hat{C}) ».

Tout point intérieur pour l'un au moins des $\hat{T}_\varepsilon(\hat{D}_i^q)$ le sera pour $|\hat{T}_\varepsilon(\hat{C})|$; il en résulte, pour le bord $|\hat{T}_\varepsilon(\hat{C})|$ de $|\hat{T}_\varepsilon(\hat{C})|$:

$$(6.2) \quad |\hat{T}_\varepsilon(\hat{C})| \subset \bigcup_{\hat{D}_i^q \subset (\hat{C})} \hat{T}'_\varepsilon(\hat{D}_i^q).$$

Propriété 6.1. *Le champ barycentrique \hat{X} est sortant du tube $\hat{T}_\varepsilon(\hat{C})$ le long de son bord $|\hat{T}_\varepsilon(\hat{C})|$.*

Soit en effet, $\hat{x} \in |\hat{T}_\varepsilon(\hat{C})|$; il existe un \hat{D}^q et un seul tel que $\hat{x} \in \hat{T}'_\varepsilon(\hat{D}^q)$. On sait (propriété 4.5) que le vecteur $\hat{X}(\hat{x})$ est sortant de $\hat{T}'_\varepsilon(\hat{D}^q)$; soit \hat{x}' un point voisin de \hat{x} sur la demi-droite support de $\hat{X}(\hat{x})$ et dans $\hat{d}_\varepsilon^k(\hat{x})$; on a $\tau_q(\hat{x}') > \varepsilon$. Montrons que \hat{x} est extérieur à tous les $\hat{T}'_\varepsilon(\hat{D}^p)$ donc à $|\hat{T}_\varepsilon(\hat{C})|$. Pour $\hat{D}^p = \hat{D}^q$ nous le savons déjà. Pour $\hat{D}^p \neq \hat{D}^q$ nous savons que $\hat{x} \notin \hat{T}'_\varepsilon(\hat{D}^p)$. Nous distinguerons 3 cas:

1^{er} cas: $\hat{D}^p \cap \hat{D}^q = \emptyset$; on a $\hat{x}' \notin \hat{T}'_\varepsilon(\hat{D}^p)$.

2^{ème} cas: $\hat{D}^p \subset \hat{D}^q$; on a $p < q$; supposons $\hat{x}' \in \hat{T}'_\varepsilon(\hat{D}^p)$, cela entraînerait $\tau_p(\hat{x}') \leq \varepsilon$; et comme $q > p$ on aurait: $\tau_q(\hat{x}') < \tau_p(\hat{x}') \leq \varepsilon$, d'où une contradiction; donc: $\hat{x}' \notin \hat{T}'_\varepsilon(\hat{D}^p)$.

3^{ème} cas: $\hat{D}^p \supset \hat{D}^q$: On a $p > q$; supposons $\hat{x}' \in \hat{T}_\varepsilon(\hat{D}^p)$, donc $\tau_p(\hat{x}') < \varepsilon$; mais comme $\hat{x}' \in \hat{d}_i^k(\hat{x})$ leurs coordonnées relatives aux sommets de \hat{D}^q non situés dans \hat{D}^p sont les mêmes, on a $\tau_p(\hat{x}') - \tau_p(\hat{x}) = \tau_q(\hat{x}') - \tau_q(\hat{x}) > 0$, on aurait donc $\tau_p(\hat{x}) < \tau_p(\hat{x}') < \varepsilon$; et \hat{x} serait dans l'intérieur de $\hat{T}_\varepsilon(\hat{D}^q)$ donc aussi de $|\hat{T}_\varepsilon(\hat{C})|$ ce qui n'est pas possible puisque $\hat{x} \in |\hat{T}_\varepsilon(\hat{C})|$.

\hat{x}' n'étant dans aucun $\hat{T}_\varepsilon(\hat{D}^q)$, n'est pas dans $|\hat{T}_\varepsilon(\hat{C})|$. Le vecteur $\overrightarrow{\hat{x}\hat{x}'}$ est strictement sortant de $|\hat{T}_\varepsilon(\hat{C})|$ en \hat{x} , il en est donc de même du vecteur $\hat{X}(\hat{x})$, c. q. f. d.

Définition. Le tube $|\hat{T}_\varepsilon(\hat{C})|$ (engendré par la sous-étoile $\hat{T}_\varepsilon(\hat{y})$ lorsque \hat{y} décrit le complexe (\hat{C})) muni de l'orientation induite par celle de \hat{V} sera, par définition, le tube orienté $\hat{T}_\varepsilon(\hat{C})$.

Nous désignerons par $\hat{T}_\varepsilon(\hat{C})$ la variété orientée à $n-1$ dimensions, bord de $|\hat{T}_\varepsilon(\hat{C})|$; l'ensemble de ses points est la variété $|\hat{T}_\varepsilon(\hat{C})|$. La propriété 6.1 montre que le champ barycentrique est strictement sortant de $\hat{T}_\varepsilon(\hat{C})$ le long de son bord; tous ses zéros dans $\hat{T}_\varepsilon(\hat{C})$ sont situés sur (\hat{C}) .

III

Variétés transversales par rapport à la triangulation (D)

§ 7. Définition des variétés transversales

Définition 7.1. Rappelons que deux sous-variétés topologiques sans bord, dans une variété topologique \hat{V} de dimensions respectives p et q , se coupent canoniquement si chaque point de leur intersection admet, dans \hat{V} , un voisinage qu'un homéomorphisme convenable applique sur R^n , les traces des deux sous-variétés étant respectivement appliquées sur deux sous-espaces euclidiens R^p et R^q qui se coupent suivant un espace R^{p+q-n} .

Nous dirons qu'une sous-variété topologique sans bord coupe canoniquement un complexe topologique si elle coupe canoniquement chacune de ses cellules ouvertes.

Pour une variété avec bord nous dirons qu'elle coupe canoniquement un complexe s'il en est ainsi pour son intérieur et pour son bord; mais nous n'utiliserons cette définition que pour des variétés possédant une triangulation euclidienne ou pour leurs images par applications différentiables.

Définition 7.2. Application μ . Nous appellerons μ l'application qui, à chaque vecteur $\overrightarrow{\hat{y}\hat{x}}$ de $\hat{\mathfrak{B}}_i^+$ fait correspondre son extrémité \hat{x} dans le simplexe $\hat{D}_i^k(\hat{y})$ ou dans son prolongement linéaire.

Soit $\hat{\mathfrak{P}}(\hat{y})$ un sous-espace vectoriel ou un demi sous-espace vectoriel de $\hat{\mathfrak{B}}_s^+(\hat{y})$; nous poserons

$$\hat{P}(\hat{y}) = \mu(\hat{\mathfrak{P}}(\hat{y})).$$

$\hat{P}(\hat{y})$ est encore un espace ou demi-espace vectoriel.

Soit \hat{U} une sous-variété topologique fermée à p dimensions de \hat{V} , possédant une triangulation simpliciale euclidienne (\hat{C}) que nous prendrons toujours assez fine pour que chacun de ses simplexes \hat{C}_i^q soit dans un \hat{D}_i^k . Soient \hat{U} et \hat{U} son bord et son intérieur.

Définition 7.3. $\hat{\mathfrak{P}}^{n-p}$, \hat{Q}^1 et $\hat{\mathfrak{P}}^{n-p+1}$; \hat{P}^{n-p} , \hat{L}^1 , \hat{P}^{n-p+1} , $\hat{\mathfrak{P}}^{n-p}$. Nous appellerons $\hat{\mathfrak{P}}^{n-p}$ ou $\hat{\mathfrak{P}}^{n-p}(\hat{y})$ tout espace vectoriel à $n-p$ dimension ayant pour origine un point \hat{y} de \hat{U} et possédant les propriétés suivantes :

$$(P)_1 \quad \hat{\mathfrak{P}}^{n-p}(\hat{y}) \subset \hat{\mathfrak{B}}_s^+(\hat{y}).$$

$$(P)_2 \quad \text{a) si } \hat{y} \in \hat{U}; \hat{P}^{n-p}(\hat{y}) = \mu(\hat{\mathfrak{P}}^{n-p}(\hat{y})) \text{ coupe canoniquement } \hat{U} \text{ dans } \hat{V} \text{ en } \hat{y}.$$

$$\text{b) si } \hat{y} \in \hat{U}, \text{ au voisinage de } \hat{y}, \hat{P}^{n-p}(\hat{y}) \text{ ne coupe } \hat{U} \text{ qu'en } \hat{y}.$$

\hat{Q}^1 . — Nous appellerons \hat{Q}^1 ou $\hat{Q}^1(\hat{y})$ toute demi-droite issue d'un point \hat{y} de \hat{U} et possédant les propriétés suivantes :

$$(L)_1 \quad \hat{Q}^1(\hat{y}) \subset \hat{\mathfrak{B}}_s^+(\hat{y}).$$

$(L)_2$ au voisinage de \hat{y} , la demi droite $\hat{L}^1(\hat{y}) = \mu(\hat{Q}^1(\hat{y}))$ ne coupe \hat{U} qu'en \hat{y} , tandis que la demi-droite opposée est dans \hat{U} .

Les conditions b) imposées à $\hat{Q}^1(\hat{y})$ et à $\hat{\mathfrak{P}}^{n-p}(\hat{y})$ entraînent qu'ils déterminent un demi-espace vectoriel à $n-p+1$ dimensions $\hat{\mathfrak{P}}^{n-p+1}(\hat{y}) \subset \hat{\mathfrak{B}}_s^+(\hat{y})$ pour $\hat{y} \in \hat{U}$.

Appelons $\hat{\mathfrak{P}}^{n-p+1}$ un tel demi-espace dont on ne précise pas l'origine dans \hat{U} . On vérifie que l'espace vectoriel entier correspondant coupe canoniquement \hat{U} en \hat{y} .

Les ensembles des $\hat{\mathfrak{P}}^{n-p}$, \hat{Q}^1 et $\hat{\mathfrak{P}}^{n-p+1}$ seront munis de structures différentiables par simplexes de (\hat{C}).

Définition d'une variété \hat{U} transversale par rapport à (\hat{D}).

C'est, par définition, une sous-variété topologique à p dimensions de \hat{V} possédant une triangulation simpliciale euclidienne ($\hat{\partial}$) et telle que :

$(VT)_1$ il existe le long de \hat{U} un champ d'espaces vectoriels $\hat{\mathfrak{P}}^{n-p}$ différentiable de classe C_1 par simplexes fermés de ($\hat{\partial}$).

$(VT)_2$ il existe le long de \hat{U} un champ de demi-droites \hat{Q}^1 différentiable de classe C_1 par simplexes fermés de (\hat{V}) .

Conséquence. Il existe, le long de \hat{U} , un champ associé aux deux précédents, de demi-espaces vectoriels $\hat{\mathbb{F}}^{n-p+1}$, différentiable de classe C_1 par simplexes de (\hat{V}) .

Nous appellerons $\hat{\mathbb{F}}_1^{n-p}(\hat{y})$, $\hat{L}_1^1(\hat{y})$ et $\hat{\mathbb{F}}_1^{n-p+1}(\hat{y})$ les espaces définis au point \hat{y} par les champs correspondants.

§ 8. Variétés transversales: exemples et propriétés

Exemple 8.1. Le bord \hat{U} d'une variété \hat{U} transversale par rapport à (\hat{D}) est aussi une variété transversale par rapport à (\hat{D}) : Elle est définie comme telle par le champ des espaces vectoriels entiers définis par les demi-espaces $\hat{\mathbb{F}}^{n-p+1}(\hat{y})$.

Exemple 8.2. La variété \hat{V} elle-même est transversale par rapport à (\hat{D}) , tous les $\hat{\mathbb{F}}^{n-p} = \hat{\mathbb{F}}^0$ étant réduits à leur origine; mais aucune variété définie par un sous-complexe de (\hat{D}) ne peut être transversale par rapport à (\hat{D}) ; en effet il n'y a jamais, en un sommet \hat{D}^0 , d'espace $\hat{\mathbb{F}}^{n-p}$ ou $\hat{\mathbb{F}}^{n-p+1}$ de dimension ≥ 1 car $\hat{\mathbb{B}}_s^+(\hat{D}^0)$ se réduit à un point. Or, si la dimension p de la sous-variété est $\leq n-1$, on a $n-p \geq 1$; si $p=n$, comme la sous-variété est distincte de \hat{V} et que nous avons supposé \hat{V} connexe elle a un bord où les $\hat{\mathbb{F}}^{n-p+1}$ devraient avoir la dimension 1.

Exemple 8.3. Le bord $\hat{T}_\epsilon(\hat{C})$ du tube défini au § 6 autour du sous-complexe (\hat{C}) de (\hat{D}) est une variété à $n-1$ dimensions, sans bord, transversale par rapport à (\hat{D}) ; on peut en effet prendre pour $P^1(\hat{y})$ le support du vecteur $\hat{X}(\hat{y})$ du champ barycentrique.

Propriété 8.1. Toute variété \hat{U} transversale par rapport à la triangulation (\hat{D}) la coupe canoniquement.

Soit en effet, $\hat{y} \in \hat{U}$; au voisinage de \hat{y} , \hat{U} , par définition, coupe canoniquement $\hat{P}^{n-p}(\hat{y})$ donc, à fortiori, le simplexe $\hat{D}_i^k(\hat{y})$ lui-même. Ce raisonnement, appliqué à \hat{U} , variété transversale sans bord, montre qu'elle coupe aussi canoniquement tout simplexe de (\hat{D}) , donc (\hat{D}) .

Pour la réciproque de la propriété 8.1 nous n'essaierons pas de chercher les conditions les moins restrictives, nous montrerons seulement qu'on peut faire intervenir des conditions simples et nous limiterons la démonstration au cas des variétés sans bords de dimension $p=n-1$.

Propriété 8.2. Si \hat{U} est une variété sans bords qui possède une triangulation simpliciale euclidienne et qui coupe canoniquement (\hat{D}) , elle sera transversale par rapport à (\hat{D}) si elle satisfait à la condition suivante :

Il est possible de remplacer (\hat{D}) par une de ses subdivisions simpliciales euclidiennes que nous appellerons encore (\hat{D}) , qui soit encore coupée canoniquement par \hat{U} et telle que chaque composante connexe \hat{A} de $\hat{D}_i^k \cap \hat{U}$ (qui est de dimension $q = p + k - n$) soit contenue dans une variété linéaire \mathfrak{A}^q de même dimension q .

Nous supposons ici $p = n - 1^1$, $q = k - 1$.

Soit $\hat{y} \in \hat{A} \subset \hat{D}^k$; les sommets de \hat{D}^k situés d'un coté de \mathfrak{A}^k et ceux qui sont situés de l'autre (il n'y en a pas dessus du fait de l'intersection canonique) déterminent deux simplexes fermés $\hat{D}^{k'}$ et $\hat{D}^{k''}$ ($k' + k'' = k + 1$), nous prendrons pour $\hat{P}^{n-p}(\hat{y})$ la droite unique passant par \hat{y} et rencontrant $\hat{D}^{k'}$ et $\hat{D}^{k''}$. Sa variation est bien continue sur tout \hat{U} et différentiable (et même analytique) par simplexe fermé de (\hat{D}) . L'existence de ce champ de droites démontre pour $p = n - 1$, la propriété 8.2.

Remarque 8.1. Considérons le cas où \hat{U} a un bord \hat{U} orientable, \hat{U} et \hat{U} vérifiant la condition énoncée à la propriété 8.2. Quand $\hat{P}^1(\hat{y})$, qui est déterminé le long de \hat{U} , varie le long de \hat{U} il engendre, au voisinage de \hat{U} , une variété à $n - 1$ dimensions. Le raisonnement précédemment fait prouve l'existence d'un champ de droites \hat{P}^1 relatives à cette variété. Comme \hat{U} est orientable, les droites \hat{P}^1 issues des ses points déterminent des demi-droites L^1 . \hat{U} est donc encore une variété transversale.

§ 9. Définitions et propriétés de $\hat{H}(\hat{U})$ et $(\hat{\mathfrak{P}} \hat{U})$ (Fig. 4.)

Définition 9.1. Posons :

$$\begin{array}{ll} \text{pour } \hat{y} \in \hat{U} & \hat{\mathfrak{P}}(\hat{y}) = \hat{\mathfrak{P}}^{n-p}(\hat{y}) \quad \hat{P}(\hat{y}) = \mu(\hat{\mathfrak{P}}(\hat{y})) \\ \text{pour } \hat{y} \in \hat{U} & \hat{\mathfrak{P}}(\hat{y}) = \hat{\mathfrak{P}}^{n-p+1}(\hat{y}) \quad \hat{P}(\hat{y}) = \mu(\hat{\mathfrak{P}}(\hat{y})) \end{array}$$

¹ Cette propriété est valable pour p quelconque, le principe de la démonstration est le suivant : on construit le champ \hat{P}^{n-p} le long des squelettes de dimensions croissantes de (\hat{D}) . Le champ sur \hat{A}^q étant déterminé à partir de son bord \hat{A}^q ; l'ensemble des $\hat{P}^{n-p}(\hat{y})$ en un point \hat{y} de \hat{A}^q est analytiquement isomorphe à $R^{q(n-q)}$. Il suffit alors de montrer que le prolongement différentiable à partir du bord \hat{A} est possible pour une fonction réelle; ce dernier point résulte du fait que, au voisinage d'un point de son bord, \hat{A}^q est linéairement applicable dans le premier cadran de R^q .

Si \hat{U} a un bord \hat{U} on établira des conditions analogues à celle de la propriété 8.1 en supposant \hat{U} prolongeable au delà de son bord en une variété \hat{U}' dans laquelle \hat{U} devra être transversale par rapport à une subdivision de la trace de (D) .

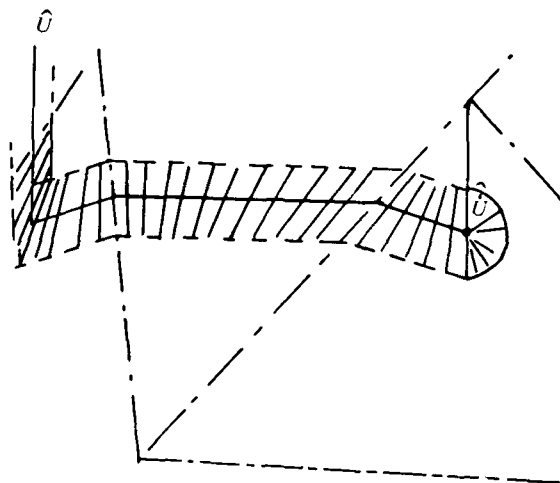


Fig. 4, § 9. Tube $\hat{H}(\hat{H})$. $n=2$; $p=1$.

Hachuré suivant les rayons des boules $\hat{H}^1(\hat{y})$ et des demi-boules $\hat{H}^2(\hat{y})$.

Nous démontrerons d'abord la propriété suivante :

Propriété 9.1. Il existe sur \hat{U} une fonction $\eta(\hat{y})$ telle que, en tout point \hat{x} de \hat{V} , il passe au plus un $\hat{P}(\hat{y})$ vérifiant : longueur $\hat{y}\hat{x} \leq \eta(\hat{y})$.

$\eta(\hat{x})$ pourra être déterminé si, et seulement si, quelque soit le point \hat{y} , il n'existe pas de suite de points \hat{y}_i , tel que l'on ait : $\hat{x}_i \in \hat{P}(\hat{y}) \cap \hat{P}(\hat{y}_i)$, la limite des longueurs $\hat{y}\hat{x}_i$ et $\hat{y}_i\hat{x}_i$ étant nulle ; cette dernière condition implique que \hat{y}_i tende vers \hat{y} . Il nous suffira donc de montrer que, lorsque $\hat{y}_i \rightarrow \hat{y}$ la longueur $\hat{y}\hat{x}_i$ ne tend pas vers 0.

Remarquons que l'existence de \hat{x} implique que $\hat{D}_i^k(\hat{y})$ et $\hat{D}_i^q(\hat{y}_i)$ se coupent donc soient identiques.

Les vecteurs $\hat{y}\hat{x}_i$ et $\hat{y}\hat{y}_i$ sont distincts d'après l'hypothèse $(P)_2$ car $\hat{y}\hat{x}_i$ est dans $\hat{P}(\hat{y})$ et $\hat{y}\hat{y}_i$ est dans \hat{U} . Considérons le demi-plan défini par le vecteur $\hat{v}(\lambda, \mu) = \lambda\hat{y}\hat{x}_i + \mu\hat{y}\hat{y}_i$ avec $\lambda \in [-\infty, +\infty]$ et $\mu \in [0, +\infty]$. Comme la position limite de ce demi-plan a pour trace, sur $\hat{P}(\hat{y})$, la position limite de la droite $\hat{y}\hat{x}_i$, si la limite d'un vecteur variable $\hat{v}(\lambda_i, \mu_i)$ existe et est dans $\hat{P}(\hat{x})$, elle est colinéaire à celle de $\hat{y}\hat{x}_i$; donc l'angle de $\hat{v}(\lambda_i, \mu_i)$ et de $\hat{y}\hat{x}_i$ tend vers 0 ou π . Prenons $-\lambda_i = \mu_i = 1$; $\hat{v}(\lambda_i, \mu_i)$ est équipollent à $\hat{x}_i\hat{y}_i \subset \hat{P}(\hat{y}_i)$: sa position limite est dans $\hat{P}(\hat{y})$ d'après les hypothèses de différentiabilité de $(VT)_1$ et $(VT)_2$. D'après ces mêmes hypothèses l'angle de $\hat{v}(\lambda_i, \mu_i)$ ou de $\hat{x}_i\hat{y}_i$ avec $\hat{x}_i\hat{y}$, qui tend vers 0, tend vers 0 avec un ordre supérieur ou égal à celui de l'infiniment petit $\hat{y}\hat{x}_i$. La considération du triangle $\hat{x}_i\hat{y}\hat{y}_i$ montre alors que la longueur $\hat{y}\hat{y}_i$ reste bornée par un nombre strictement positif.

$\eta(\hat{y})$ pourra donc être déterminé ce qui démontre la propriété 9.1 ; nous pourrions prendre pour $\eta(\hat{y})$ une fonction différentiable par simplexe fermé de $(\hat{\mathcal{V}})$.

Définition 9.2. $\hat{H}(\hat{\mathcal{V}})$. Appelons $\hat{H}(\hat{y})$ (resp. $\hat{H}^{n-p}(\hat{y})$ et $\hat{H}^{n-p+1}(\hat{y})$) la restriction de $\hat{P}(\hat{y})$ (resp. $\hat{P}^{n-p}(\hat{y})$ et $\hat{P}^{n-p+1}(\hat{y})$) aux vecteurs de longueur $\leq \eta(\hat{y})$. Appelons $\hat{H}(\hat{U})$ leur réunion.

La propriété 9.1 montre que les $\hat{H}(\hat{y})$ forment une partition de $\hat{H}(\hat{U})$.

$\hat{H}(\hat{U})$ est la réunion de l'espace engendré par les $\hat{H}^{n-p}(\hat{y})$ et de l'espace engendré par les $\hat{H}^{n-p+1}(\hat{y})$ qui sont des demi-boules. La propriété 9.1 montre que ce sont deux espaces fibrés. Leur topologie étant toujours la topologie induite par celle de $\hat{\mathcal{V}}$, ce sont donc deux sous-variétés (fermées); nous les munirons de l'orientation induite par celle de $\hat{\mathcal{V}}$. Leurs bords dans $\hat{\mathcal{V}}$ coïncident donc avec leurs bords en tant qu'espaces fibrés. La sous-variété engendrée par $\hat{H}^{n-p}(\hat{y})$ pour $\hat{y} \in \hat{U}$ disparaît dans le bord $\hat{H}(\hat{U})$ de leur réunion $\hat{H}(\hat{U})$. Il en résulte que: $\hat{H}(U) \cap U = \emptyset$; U est donc strictement dans l'intérieur de $\hat{H}(\hat{U})$, $\hat{H}(\hat{U})$ en est un voisinage. (Il est même un tube mais nous n'utiliserons pas cette propriété).

Définition 9.3. \mathbb{U}_s et $\hat{\mathbb{U}}_s$: \mathbb{U}_s est la restriction de \mathbb{U}_s aux vecteurs tangents à U . $\hat{\mathbb{U}}_s = \tilde{\varphi}^{-1}(\mathbb{U}_s)$.

On a :

$$\hat{\mathcal{P}}(\hat{y}) \cap \hat{\mathbb{U}}_s = \emptyset.$$

Définition 9.4. $\hat{\mathcal{H}}(\hat{U})$. Appelons $\hat{\mathcal{H}}(\hat{y})$ la restriction de $\hat{\mathcal{P}}_1(\hat{y})$ aux vecteurs de longueur $\leq \eta(\hat{y})$; on a $\mu(\hat{\mathcal{H}}(\hat{y})) = \hat{H}(\hat{y})$. Appelons $|\hat{\mathcal{H}}(\hat{U})|$ l'ensemble engendré par $\hat{\mathcal{H}}(\hat{y})$ quand \hat{y} décrit \hat{U} ; son image par μ est $\hat{H}(\hat{U})$ et, de la propriété 9.1, il résulte que la restriction μ_1 de μ à $|\hat{\mathcal{H}}(\hat{U})|$ est une application biunivoque. L'application inverse μ_1^{-1} de $\hat{H}(\hat{U})$ sur $|\hat{\mathcal{H}}(\hat{U})|$ est continue, il en résulte que μ et μ^{-1} sont des homéomorphismes; ils sont respectivement différentiables par cellules $\hat{\mathcal{W}}_s^+(\hat{D})$ et \hat{D}_s^* ; $|\hat{\mathcal{H}}(\hat{U})|$ est donc, comme $\hat{H}(\hat{U})$, une sous-variété à n dimensions différentiable par cellules.

Nous appellerons $\hat{\mathcal{H}}(\hat{U})$ la variété $|\hat{\mathcal{H}}(\hat{U})|$ munie de l'orientation image par μ^{-1} de l'orientation canonique de $\hat{H}(\hat{U})$. Son bord est $\hat{\mathcal{H}}(\hat{U}) \subset \hat{\mathcal{W}}_s(\hat{U}) - \hat{\mathbb{U}}_s$.

Définition 9.5. $\hat{\mathcal{P}}_1(\hat{U})$. Considérons la variété engendrée par $\hat{\mathcal{P}}_1(\hat{y})$ quand \hat{y} décrit \hat{U} , la sous-variété de ses vecteurs nuls est $\mu_1^{-1}(\hat{U})$, et $\hat{\mathcal{H}}(\hat{U})$ y est un voisinage de cette sous-variété; la variété engendrée par $\hat{\mathcal{P}}_1(\hat{y})$ peut donc être orientée de manière à induire sur $\hat{\mathcal{H}}(\hat{U})$ l'orientation qui y a déjà été définie; cette variété ainsi orientée sera notée $\hat{\mathcal{P}}_1(\hat{U})$.

Nous pouvons énoncer :

Propriété 9.2. Il existe dans $\mathfrak{F}_1(\hat{U})$ une sous-variété $\hat{\mathfrak{H}}(\hat{U})$ à n dimensions qui est, dans $\mathfrak{F}_1(\hat{U})$, un voisinage, orienté canoniquement, de la sous-variété des vecteurs nuls et sur laquelle la restriction μ_1 de μ est un homéomorphisme bidifférentiable par cellule fermée et conservant l'orientation, qui applique $\hat{\mathfrak{H}}(\hat{U})$ sur un voisinage canoniquement orienté $\hat{H}(\hat{U})$ de \hat{U} dans \hat{V} .

Chaînes différentiables par cellules. Soit \mathfrak{C} une chaîne définie par l'application g d'une variété C dans une variété Γ . Nous dirons qu'elle est « différentiable par cellules » si Γ est munie d'une triangulation différentiable telle que la restriction g à chaque cellule fermée soit une application différentiable. Des propriétés classiques des formes différentiables nous déduisons :

Propriété 9.3. Toute forme différentielle peut être intégrée sur une chaîne différentiable par cellule. (L'intégrale ne pouvant être $\neq 0$ que si le degré de la forme est égal à la dimension de la chaîne.)

Définition. Nous dirons que deux cycles sont différentiablement homologues si leur différence est le bord d'une chaîne différentiable par cellules ; si cette chaîne peut être définie par une homotopie d'un cycle sur l'autre nous dirons qu'ils sont différentiablement homotopes.

Définition 9.6. *Chaînes équivalentes.* Soient sur une variété Γ deux chaînes \mathfrak{C} et \mathfrak{C}' de même dimension p ; si les intégrales sur \mathfrak{C} et \mathfrak{C}' de toute forme différentielle définie sur Γ sont égales, nous dirons que ces deux chaînes sont équivalentes.

Exemple : Pour $p \leq n - 1$, toute chaîne de dimension n de la variété $\mathfrak{F}_1(\hat{U})$ a, pour projection canonique par π , une chaîne équivalente à 0.

Remarque 9.1. a) De cette définition il résulte que deux cycles équivalents sont homologues et que toute chaîne qui admet pour bord leur différence est équivalente à un cycle.

b) Les bords de deux chaînes équivalentes sont des cycles équivalents.

Définition 9.7. *Cycle $\hat{\mathfrak{H}}(\hat{U})$.* Considérons le cycle de $\hat{\mathfrak{H}}_s$ déterminé par l'application μ_1^{-1} de $\hat{H}(\hat{U})$ dans $\hat{\mathfrak{H}}_s$; comme μ_1^{-1} est un homéomorphisme bidifférentiable par cellule, et conservant l'orientation, le cycle ainsi défini est équivalent au cycle de $\hat{\mathfrak{H}}_s(\hat{U}) - \mathfrak{U}_s$, défini par l'immersion canonique de $\mu_1^{-1}[\hat{H}(\hat{U})]$; nous les désignerons par le même symbole.

§ 10. Variété transversale et champ barycentrique¹

Définition 10.1. \hat{U} étant une variété transversale munie d'une triangulation euclidienne ($\hat{\vartheta}$) il existe une triangulation simpliciale euclidienne (\hat{D}') de \hat{V} qui est une subdivision de (\hat{D}) et qui admet pour sous-complexe une triangulation de \hat{U} subdivision de ($\hat{\vartheta}$). Soit \hat{X}' ² un champ barycentrique relatif à la triangulation (\hat{D}'). Par la méthode du § 6 construisons un tube orienté $\hat{T}'_\varepsilon(\hat{U})$ autour de \hat{U} considéré comme sous-complexe de (\hat{D}').

Voisinages $\hat{H}(\hat{U})$ et $\hat{T}'(\hat{U})$. Il nous suffira de traiter le cas où \hat{U} est compact. Nous pourrons alors déterminer ε de manière à avoir :

$$(10.1) \quad \hat{T}'(\hat{U}) = \hat{T}'_\varepsilon(\hat{U}) \subset \hat{H}(\hat{U}).$$

Application ψ (fig. 5). Déterminons une application ψ de $\hat{H}(\hat{U})$ sur $\hat{T}'(\hat{U})$ de la manière suivante: soit $\hat{x}' \in \hat{H}(\hat{U})$; il existe sur \hat{U} un point \hat{y} et un seul et, sur $\hat{T}'(\hat{y})$, un point \hat{x} et un seul, tels que le point \hat{x} soit strictement intérieur au segment $\hat{y}\hat{x}'$. L'application qui à \hat{x}' , fait correspondre \hat{x} répond bien à la question, elle est continue sur $\hat{H}(\hat{U})$ et différentiable par simplexes fermés de la subdivision barycentrique (\hat{d}') de (\hat{D}'); c'est une application «sur» $\hat{T}'(\hat{U})$ puisque tout $\hat{x} \in \hat{T}'(\hat{U})$ est sur un rayon d'une sous-étoile $\hat{T}'(\hat{y})$ dont le prolongement rencontre $\hat{H}(\hat{U})$ en au moins un point \hat{x}' .

Cycle $\hat{\Theta}(\hat{U})$. Ce sera le cycle défini par l'application ψ de la variété orientée $\hat{H}(\hat{U})$ dans \hat{V} , son support est donc le même que celui de $\hat{T}'(\hat{U})$.

Etablissons une série de lemmes dont le premier est évident.

Lemme 10.1. Le cycle $\hat{H}(\hat{U}) - \hat{T}'(\hat{U})$ est le bord de la chaîne $\hat{E}_1 = \hat{H}(\hat{U}) - \hat{T}'(\hat{U})$ qui est différentiable par cellule \hat{d}' .

Lemme 10.2. a) Le cycle $\hat{\Theta}(\hat{U}) - \hat{H}(\hat{U})$ est le bord d'une chaîne \hat{E}_2 différentiable par cellule.

b) La chaîne \hat{E}_2 est équivalente à la chaîne $-\hat{E}_1$.

Pour démontrer ce lemme nous définirons \hat{E}_2 par l'application, dans V , de la variété $[0, 1] \times \hat{H}(\hat{U})$ canoniquement orientée comme produit, qui, au point $\theta \times \hat{x}'$ ($\theta \in [0, 1], \hat{x}' \in \hat{H}(\hat{U})$)

¹ Ce paragraphe aboutit à la définition 11.1 et aux propriétés 11.1; 11.4 et 11.6. Les cycles définis par le champ \hat{X} qui figure au théorème I sont ainsi reliés aux cycles $\hat{\mathfrak{K}}$ (cf. propriété 11.6) qui seuls devront figurer dans les formules du théorème II.

² Ce champ X' est sans rapport avec la composante X'_ϱ du champ barycentrique X relativement à la dimension ϱ .

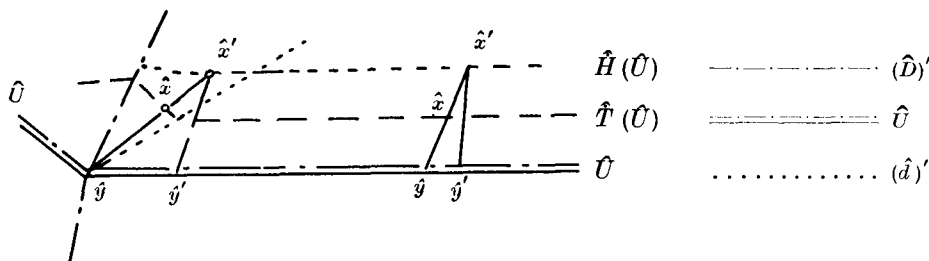


Fig. 5, § 10.

fait correspondre le point $\hat{x}(\theta)$ tel que $\overrightarrow{\hat{x}'\hat{x}(\theta)} = \theta \overrightarrow{\hat{x}'\hat{x}}$, avec $\hat{x} = \psi(\hat{x}')$. Cette application est bien différentiable dans chaque cellule $[0, 1] \times [\hat{d}' \cap \hat{H}(\hat{U})]$; son degré topologique global est égal à -1 sur la variété $\hat{E}_1 = \hat{H}(\hat{U}) - \hat{T}'(\hat{U})$ et 0 ailleurs; la chaîne \hat{E}_2 est donc équivalente à $-\hat{E}_1$. Le bord de la chaîne \hat{E}_2 , défini par l'application de $(1 \times \hat{H}(\hat{U})) - (0 \times \hat{H}(\hat{U}))$ est bien $\hat{\Theta}(\hat{U}) - \hat{H}(\hat{U})$. Le lemme 10.2 est ainsi démontré.

Des deux premiers lemmes il résulte que le cycle $\hat{\Theta}(\hat{U}) - \hat{T}'(\hat{U})$ est le bord de la chaîne $\hat{E} = \hat{E}_1 + \hat{E}_2$ différentiable par cellules et équivalente à zéro. De la remarque 9.1 b) on déduit:

Lemme 10.3. Le cycle $\hat{\Theta}(\hat{U}) - \hat{T}'(\hat{U})$ est équivalent à zéro.

Par relèvement dans $\hat{\mathfrak{Q}}_s$ à l'aide du champ barycentrique \hat{X}' , il vient:

Lemme 10.4. Le cycle $\hat{X}'(\hat{\Theta}(\hat{U}) - \hat{X}'(\hat{T}'(\hat{U})))$ est équivalent à zéro.

Introduisons maintenant $\hat{\mathfrak{H}}(\hat{U})$ et démontrons:

Lemme 10.5. a) Le cycle $\hat{\mathfrak{H}}(\hat{U}) - \hat{X}'(\hat{\Theta}(\hat{U}))$ est, dans $\hat{\mathfrak{Q}}_s$, le bord d'une chaîne \mathfrak{G}_s différentiable par cellules.

b) La chaîne $\hat{\pi}(\mathfrak{G}_s)$ est équivalente à la chaîne $-\hat{T}'(\hat{U})$.

Soit \hat{y}' le point tel que $\hat{x}' \in H(\hat{y}')$; soit $\hat{z} = \mu(\hat{X}'(\hat{x}'))$ (cf. définition 7.2).

Nous définirons \mathfrak{G}_s par l'application, dans $\hat{\mathfrak{Q}}_s$, de la variété $[0, 1] \times \hat{H}(\hat{U})$ (orientée comme produit), dans laquelle le point $\theta \times \hat{x}'$ ($\theta \in [0, 1]$, $\hat{x}' \in \hat{H}(\hat{U})$) a pour image le vecteur $\hat{x}(\theta) \hat{z}(\theta)$ ainsi défini pour chaque \hat{x}' : 1° quand θ décrit l'intervalle $[0, 1/2]$, $\hat{x}(\theta)$ coïncide avec \hat{x} et $\hat{z}(\theta)$ décrit linéairement le segment $\hat{z}\hat{x}'$ de \hat{z} à \hat{x}' ; le vecteur $\hat{x}(\theta) \hat{z}(\theta)$ ne s'annule pas car si \hat{x} était sur le segment $\hat{z}\hat{x}'$, le vecteur $\hat{x}\hat{z}$ serait, à un facteur positif ou nul près, égal à $\overrightarrow{\hat{x}\hat{y}}$ donc rentrant ou nul, ce qui est absurde; 2° quand θ décrit l'intervalle $[1/2, 1]$, $\hat{x}(\theta)$ décrit linéairement le segment $\hat{x}\hat{y}'$ de \hat{x} à \hat{y}' et $\hat{z}(\theta)$ coïncide avec \hat{x}' ; le vecteur $\hat{x}(\theta) \hat{z}(\theta)$ ne s'annule pas car \hat{x}' n'est pas sur le segment $\hat{x}\hat{y}'$ (en effet si les trois points sont alignés c'est que \hat{y}' est la trace, sur $\hat{D}_1^k(\hat{y})$, de la droite $\hat{x}\hat{x}'$, donc coïncide avec \hat{y}' ; or \hat{x}' est extérieur

au segment $\hat{y}\hat{x}$). Quelque soit θ les points $\hat{x}(\theta)$ et $\hat{z}(\theta)$ sont dans $\hat{D}_i^k(\hat{y}) = \hat{D}_i^k(\hat{x}(\theta))$; le vecteur $\hat{x}(\theta)\overrightarrow{\hat{z}(\theta)}$ est dans $\hat{\mathfrak{B}}_s$. Nous avons bien défini une application de $[0, 1] \times \hat{H}(\mathcal{O})$ dans \mathfrak{B}_s , elle est différentiable dans chaque cellule $[0, 1] \times (\hat{D}_i^k \hat{H}(\mathcal{O}))$; elle définit une chaîne $\hat{\mathfrak{C}}_5$ dont le bord, image de $1 \times \hat{H}(\mathcal{O}) - 0 \times \hat{H}(\mathcal{O})$, est bien le cycle $\hat{\mathfrak{H}}(\mathcal{O}) - \hat{X}'(\hat{\mathcal{O}}(\mathcal{O}))$. La chaîne $\hat{\pi}(\hat{\mathfrak{C}}_5)$ est définie par l'application de $[0, 1] \times \hat{H}(\mathcal{O})$ dans V qui au point $\theta \times \hat{x}'$ fait correspondre le point $\hat{x}(\theta)$; son degré topologique est -1 sur $\hat{T}'(\mathcal{O})$ et 0 ailleurs. Le lemme 10.5 est donc démontré.

Soit maintenant un tube $\hat{T}'_\eta(\mathcal{O})$ donné à l'avance; puisque ε n'est pas borné inférieurement nous pouvons lui imposer d'être $< \eta$. Posons alors $\hat{\mathcal{E}}_6 = -\hat{T}'_\eta(\mathcal{O}) + \hat{T}(\mathcal{O})$ et $\hat{\mathfrak{C}}_6 = \hat{X}'(\hat{\mathcal{E}}_6)$; on a :

Lemme 10.6. a) le cycle $\hat{X}'(\hat{T}'_\varepsilon(\mathcal{O})) - \hat{X}'(\hat{T}'_\eta(\mathcal{O}))$ est le bord de la chaîne $\hat{\mathfrak{C}}_6$ différentiable par cellules;

b) la chaîne $\hat{\pi}(\hat{\mathfrak{C}}_6)$ est équivalente à la chaîne $-\hat{T}'_\eta(\mathcal{O}) + \hat{T}'_\varepsilon(\mathcal{O}) = \hat{\mathcal{E}}_6$.

Des lemmes 10.4, 10.5 et 10.6 on déduit.

Propriété 10.1. a) Le cycle $\hat{\mathfrak{H}}(\mathcal{O}) - \hat{X}'(\hat{T}'_\eta(\mathcal{O}))$ est le bord de la chaîne $\hat{\mathfrak{C}}_1 = \hat{\mathfrak{C}}_5 + \hat{\mathfrak{C}}_6$ différentiable par cellules.

b) La chaîne $\hat{\pi}(\hat{\mathfrak{C}}_1)$ est équivalente à la chaîne $-\hat{T}'_\eta(\mathcal{O})$.

La variété $\hat{\mathfrak{R}}_1(\mathcal{O})$ et le cycle $\hat{\mathfrak{H}}(\mathcal{O})$ ne sont pas déterminés canoniquement; soient $\hat{\mathfrak{H}}_1(\mathcal{O})$ et $\hat{\mathfrak{H}}_2(\mathcal{O})$ deux cycles $\hat{\mathfrak{H}}(\mathcal{O})$. Nous démontrerons :

Propriété 10.2. a) Le cycle $\hat{\mathfrak{H}}_2(\mathcal{O}) - \hat{\mathfrak{H}}_1(\mathcal{O})$ est le bord d'une chaîne $\hat{\mathfrak{C}}_{21}$ de $\hat{\mathfrak{B}}_s(\mathcal{O}) - \hat{\mathfrak{U}}_s$ différentiable par cellules.

b) La chaîne $\hat{\pi}(\hat{\mathfrak{C}}_{21})$ est équivalente à zéro.

Nous pouvons en effet appliquer la propriété 10.1 à $\hat{\mathfrak{H}}_1(\mathcal{O})$ puis à $\hat{\mathfrak{H}}_2(\mathcal{O})$, le cycle $\hat{X}'(\hat{T}'(\mathcal{O}))$ restant le même appelons $\hat{\mathfrak{C}}_{11}$ et $\hat{\mathfrak{C}}_{12}$ les deux chaînes $\hat{\mathfrak{C}}_1$ ainsi définies, nous prendrons pour $\hat{\mathfrak{C}}_{21}$ la chaîne $\hat{\mathfrak{C}}_{12} - \hat{\mathfrak{C}}_{11}$ et la propriété 10.2 sera alors conséquence immédiate de la propriété 10.1.

§ 11. Cycles $\hat{\mathfrak{R}}(\mathcal{O})$ et $\hat{\mathfrak{R}}(U)$

Définition 11.1: cycles $\hat{\mathfrak{R}}(\mathcal{O})$.

Nous appellerons $\hat{\mathfrak{R}}(\mathcal{O})$ un cycle de $\hat{\mathfrak{B}}_s(\mathcal{O}) - \hat{\mathfrak{U}}_s$ vérifiant les conditions suivantes :

(K)₁ $\hat{\mathfrak{R}}(\mathcal{O}) - \hat{\mathfrak{H}}(\mathcal{O})$ est le bord d'une chaîne $\hat{\mathfrak{C}}_0$ différentiable par cellules.

(K)₂ La chaîne $\hat{\pi}(\hat{\mathfrak{C}}_0)$ est équivalente à zéro.

La propriété 10.2 justifie cette définition en montrant qu'elle ne dépend pas du choix particulier du cycle $\hat{\mathfrak{H}}(\mathcal{O})$. Tout cycle $\hat{\mathfrak{H}}(\mathcal{O})$ est évidemment un cycle $\hat{\mathfrak{R}}(\mathcal{O})$, ce qui démontre l'existence de ceux-ci.

Propriété 11.1. a) Le cycle $\hat{\mathfrak{K}}(\mathcal{U}) - \hat{X}'(\hat{T}'(\mathcal{U}))$ est le bord d'une chaîne $\hat{\mathfrak{E}}$ différentiable par cellules.

b) La chaîne $\hat{\pi}(\hat{\mathfrak{E}})$ est équivalente à la chaîne $-\hat{T}'(\mathcal{U})$.

Cette propriété est caractéristique de $\hat{\mathfrak{K}}(\mathcal{U})$: elle résulte de la propriété 10.1 et de la définition de $\hat{\mathfrak{K}}(\mathcal{U})$ pourvu que l'on pose $\hat{\mathfrak{E}} = \hat{\mathfrak{E}}_0 + \hat{\mathfrak{E}}_1$: réciproquement les conditions $(K)_1$ et $(K)_2$ résultent des propriétés 10.1 et 10.3 pourvu que l'on pose $\hat{\mathfrak{E}}_0 = \hat{\mathfrak{E}} - \hat{\mathfrak{E}}_1$.

Exemple de cycles $\hat{\mathfrak{K}}(\mathcal{U})$. 1° Dans une variété $\mathfrak{B}(\mathcal{U})$ prenons un voisinage $\hat{\mathfrak{K}}(\mathcal{U})$ canoniquement orienté de la variété $\mu_1^{-1}(\mathcal{U})$ des vecteurs nuls; son bord, s'il est différentiable par cellules, définit par application canonique dans \mathfrak{B}_s , un cycle $\hat{\mathfrak{K}}(\mathcal{U})$. On peut, en effet, déterminer une variété $\hat{\mathfrak{H}}(\mathcal{U}) \subset \hat{\mathfrak{K}}(\mathcal{U})$ et, en prenant $\hat{\mathfrak{E}}_0 = \hat{\mathfrak{K}}(\mathcal{U}) - \hat{\mathfrak{H}}(\mathcal{U})$, les conditions $(K)_1$ et $(K)_2$ sont vérifiées.

2° On a toujours $\hat{\mathfrak{K}}(\mathcal{U}) = \tilde{\varphi}(\hat{\mathfrak{K}}(\mathcal{U})) \subset \mathfrak{B}_s$. Considérons le cas particulier où f est l'application identique de V dans W (alors $\mathfrak{B}_s = \mathfrak{B}$) et où U est une variété différentiable et sans bord; dans ce cas l'ensemble de tous les vecteurs unitaires tangents à V le long de U et perpendiculaires à \mathcal{U} est une variété qui, orientée convenablement, définit, par son application canonique dans \mathfrak{B} , un cycle équivalent à $\hat{\mathfrak{K}}(\mathcal{U})$.

Cas où \mathcal{U} est le bord d'une sous-variété compacte \mathcal{C} à n dimensions de \mathcal{V} .

Posons $\mathcal{U} = \mathcal{C}$; $\hat{\mathfrak{K}} = \hat{\mathfrak{E}}$ et:

$$(11.1) \quad \begin{cases} \hat{T}'^+(\mathcal{C}) = \hat{T}'(\mathcal{C}) \cap (\mathcal{V} - \mathcal{C}); & \hat{T}'^-(\mathcal{C}) = \hat{T}'(\mathcal{C}) \cap (\mathcal{V} - \mathcal{C}) \\ \hat{T}'^+(\mathcal{C}) = \hat{T}'(\mathcal{C}) \cap \mathcal{C} & ; & \hat{T}'^-(\mathcal{C}) = \hat{T}'(\mathcal{C}) \cap \mathcal{C} \end{cases}$$

La chaîne $\hat{T}'(\mathcal{C})$ est équivalente à la chaîne $\hat{T}'^+(\mathcal{C}) - \hat{T}'^-(\mathcal{C})$. Le cycle $\hat{T}'(\mathcal{C})$ est égal au cycle $\hat{T}'^+(\mathcal{C}) - \hat{T}'^-(\mathcal{C})$.

Les vecteurs sortants¹ de \mathcal{C} le long de \mathcal{C} d'une part et les vecteurs rentrants de l'autre, déterminent une partition de $\mathfrak{B}_s(\mathcal{C}) - \hat{\mathfrak{E}}$ en deux variétés disjointes; ils déterminent donc aussi des partitions de $\hat{\mathfrak{K}}(\mathcal{C})$, $\hat{\mathfrak{H}}(\mathcal{C})$ et $\hat{\mathfrak{E}}_0, \hat{\mathfrak{E}}$ en des cycles ou chaînes fermés. Les signes + correspondant aux vecteurs sortants et les signes - correspondant aux vecteurs rentrants nous écrivons:

$$(11.2) \quad \begin{aligned} \hat{\mathfrak{E}}_0 &= \hat{\mathfrak{E}}_0^+ - \hat{\mathfrak{E}}_0^-; & \hat{\mathfrak{K}}(\mathcal{C}) &= \hat{\mathfrak{K}}^+(\mathcal{C}) - \hat{\mathfrak{K}}^-(\mathcal{C}); & \hat{\mathfrak{H}}(\mathcal{C}) &= \hat{\mathfrak{H}}^+(\mathcal{C}) - \hat{\mathfrak{H}}^-(\mathcal{C}) \\ \text{bord } \hat{\mathfrak{E}}_0^+ &= \hat{\mathfrak{K}}^+(\mathcal{C}) - \hat{\mathfrak{H}}^+(\mathcal{C}); & \text{bord } \hat{\mathfrak{E}}_0^- &= \hat{\mathfrak{K}}^-(\mathcal{C}) - \hat{\mathfrak{H}}^-(\mathcal{C}). \end{aligned}$$

Les deux cycles $\hat{\pi}(\hat{\mathfrak{K}}^+(\mathcal{C}))$ et $\hat{\pi}(\hat{\mathfrak{K}}^-(\mathcal{C}))$ sont équivalents au cycle \mathcal{C} .

¹ Expression parfaitement définie puisqu'il s'agit d'un polyèdre rectiligne.

Propriété 11.2. En posant $\hat{\mathcal{E}} = \hat{\mathcal{E}}^+ - \hat{\mathcal{E}}^-$, on a :

- a) le bord de $\hat{\mathcal{E}}^+$ est $\hat{\mathfrak{K}}^+(\hat{\mathcal{C}}) - \hat{X}'(\hat{T}'^+(\hat{\mathcal{C}}))$, le bord de $\hat{\mathcal{E}}^-$ est $\hat{\mathfrak{K}}(\hat{\mathcal{C}}) = \hat{X}'(\hat{T}'^-(\hat{\mathcal{C}}))$;
- b) la chaîne $\hat{\pi}(\hat{\mathcal{E}}^+)$ est équivalente à la chaîne $-\hat{T}'^+(\hat{\mathcal{C}})$, la chaîne $\hat{\pi}(\hat{\mathcal{E}}^-)$ est équivalente à la chaîne $+\hat{T}'^-(\hat{\mathcal{C}})$.

En effet il résulte de la formule (11.2), de la définition de $\hat{\mathfrak{K}}$ et du lemme 10.6, que la propriété 11.2 est équivalente à celle que l'on obtiendrait en remplaçant, dans son énoncé, $\hat{\mathfrak{K}}(\hat{\mathcal{U}})$ par $\hat{\mathfrak{H}}(\hat{\mathcal{U}})$, $\hat{\mathcal{E}}$ par $\hat{\mathcal{E}}_s$, et $\hat{T}'^+(\hat{\mathcal{U}})$ par $\hat{T}'(\hat{\mathcal{U}})$. Or la démonstration du lemme 10.5 montre, pour $p = n - 1$ et $\hat{\mathcal{U}} = \hat{\mathcal{C}}$, que $\hat{\mathcal{E}}_s$ se décompose en deux chaînes fermées, l'une ne faisant intervenir que des vecteurs sortants de $\hat{\mathcal{C}}$ le long de $\hat{\mathcal{U}} = \hat{\mathcal{C}}$ et des vecteurs d'origine extérieure à $\hat{\mathcal{C}}$, et l'autre que des vecteurs rentrants ou des vecteurs ayant leur origine dans $\hat{\mathcal{C}}$.

Propriété 11.3. Les cycles $\hat{\mathfrak{K}}^+(\hat{\mathcal{C}})$ et $\hat{\mathfrak{K}}(\hat{\mathcal{C}})$ sont les mêmes.

De la propriété caractéristique 11.1 et de la propriété 11.2 il résulte en effet que la propriété 11.3 est équivalente à la suivante: les cycles $\hat{X}'(\hat{T}'^+(\hat{\mathcal{C}}))$ et $\hat{X}'(\hat{T}'^-(\hat{\mathcal{C}}))$ sont les mêmes ou encore: les sous-variétés $\hat{T}'^+(\hat{\mathcal{C}})$ et $\hat{T}'^-(\hat{\mathcal{C}})$ sont les mêmes. Or ce dernier point résulte immédiatement de la définition des tubes $\hat{T}'(\hat{\mathcal{U}})$ (ou $\hat{T}'(\hat{\mathcal{U}})$, § 6); en effet, $\hat{\mathcal{U}} = \hat{\mathcal{C}}$ étant de dimension $p = n$, $\hat{T}'(\hat{\mathcal{C}})$ peut être engendré par le point $\hat{T}'(\hat{y}) \cap (V - C)$ pour $\hat{y} \in \hat{\mathcal{C}}$; or ce point engendre précisément $\hat{T}'^+(\hat{\mathcal{C}})$ (défini par la formule 11.1).

Propriété 11.4. Tout champ défini le long de $\hat{\mathcal{C}}$, et différentiable par simplexe fermé $\hat{D}_i^k \subset \hat{\mathcal{C}}$, de vecteurs spéciaux sortants par rapport à $\hat{\mathcal{C}}$, définit, par relèvement de $\hat{\mathcal{C}}$ dans \mathfrak{B}_s , un cycle $\hat{\mathfrak{K}}(\hat{\mathcal{C}}) = \hat{\mathfrak{K}}^+(\hat{\mathcal{C}})$.

Ce cycle répond, en effet, à la définition d'un cycle $\hat{\mathfrak{H}}(\hat{\mathcal{C}})$ qui est un $\hat{\mathfrak{K}}(\hat{\mathcal{C}})$ particulier; ce n'est peut-être pas un cycle $\hat{\mathfrak{H}}^+(\hat{\mathcal{C}})$, mais, d'après la propriété 10.5, c'est un cycle $\hat{\mathfrak{K}}^+(\hat{\mathcal{C}})$; c. q. f. d.

Définition 11.2. Vecteurs spéciaux sortants ou rentrants de C le long de $\hat{\mathcal{C}}$. Ce seront les images par $\tilde{\varphi}$ des vecteurs spéciaux respectivement sortants ou rentrants de $\hat{\mathcal{C}} = \varphi^{-1}(C)$ le long de $\hat{\mathcal{C}}$.

Variété transversale U . Une telle variété sera, par définition, l'image par φ d'une variété transversale \hat{U} de \hat{V} .

Remarque 11.1. Le cycle $\tilde{\varphi}(\hat{\mathfrak{K}}(\hat{U}))$ dans \mathfrak{B}_s est différentiable par cellule $\mathfrak{B}_s(\hat{D}_i^k)$, car c'est l'image, par $\tilde{\varphi}$, du cycle $\hat{\mathfrak{K}}(\hat{U})$ de \mathfrak{B}_s .

Pour simplifier les notations nous écrivons :

$$(11.3) \quad \tilde{\varphi}(\hat{\mathfrak{K}}(\hat{U})) = \hat{\mathfrak{K}}(U); \quad \tilde{\varphi}(\hat{\mathfrak{K}}(\hat{C})) = \hat{\mathfrak{K}}(C); \quad \tilde{\varphi}(\hat{\mathfrak{K}}^+(\hat{C})) = \hat{\mathfrak{K}}^+(C)$$

de la remarque 11.1 on déduit :

Propriété 11.5. Toute forme différentielle de degré $n-1$ définie sur \mathfrak{B}_s peut être intégrée sur les cycles $\hat{\mathfrak{K}}(U)$.

Compte tenu de la définition 11.2, la propriété 11.4 devient :

Propriété 11.6. *Tout champ, défini le long de \hat{C} , de vecteurs spéciaux sortants par rapport à C définit, dans \mathfrak{B}_s , un cycle $\hat{\mathfrak{K}}(C) = \hat{\mathfrak{K}}^+(C)$, à condition que l'image de ce champ par $\tilde{\varphi}^{-1}$ soit différentiable par simplexe $\hat{D}_i^k \subset \hat{C} = \varphi^{-1}(C)$. Si la triangulation $(D)'$ est non seulement régulière mais différentiable il suffit que le champ donné soit différentiable par simplexe \bar{D}_i^k ($\bar{D}_i^k = \varphi(\hat{D}_i^k)$).*

IV

Images du champ \hat{X} par $\tilde{\varphi}$ et $f \circ \tilde{\varphi}$

§ 12. Définitions; correspondance entre certains groupes d'homologie

Définitions 12.1.

On a $\hat{X}(\hat{x}) \in \hat{\mathfrak{B}}_s^+$ et $\tilde{\varphi}(\hat{\mathfrak{B}}_s^+) = \mathfrak{B}_s^+$, on peut donc poser :

$$(12.1) \quad Y(\hat{x}) = \tilde{\varphi} \hat{X}(\hat{x}) \quad \text{et} \quad Z(\hat{x}) = f(Y(\hat{x})) = f \circ \tilde{\varphi}(\hat{X}(\hat{x})).$$

$Y(\hat{x})$ est un vecteur nul ou spécial tangent à V et d'origine $X = \varphi(\hat{x})$, on peut poser :

$$(12.2) \quad X(x) = Y(\hat{x}) = \tilde{\varphi} \hat{X}(\varphi^{-1}(x)).$$

Le champ X est continu sur V , ses zéros sont les points $a_i^k = \varphi(\hat{a}_i^k)$. Mais comme la restriction de φ^{-1} à un simplexe fermé \bar{D}_i^k n'est pas supposée différentiable au voisinage du bord, le vecteur $X(x)$ ne varie pas différentiablement en fonction de son origine x mais seulement du paramètre $\hat{x} = \varphi^{-1}(x)$. C'est pourquoi nous utiliserons celui-ci.

$Y = \tilde{\varphi} \circ \hat{X}$ est une application de \hat{V} dans \mathfrak{B}_s^+ et, en particulier, de $\hat{V} - \bigcup_{i,k} \hat{a}_i^k$ dans \mathfrak{B}_s .

$Z = f \circ Y = f \circ \tilde{\varphi} \circ \hat{X}$ est une application de \hat{V} dans \mathfrak{B}^+ et, en particulier de $\hat{V} - \bigcup_{i,k} \hat{a}_i^k$ dans \mathfrak{B} .

Propriétés 12.1. a) Y est un homéomorphisme, Z une application continue.

b) Y et Z restreintes à un simplexe fermé \hat{D}_i^k sont différentiables de classe C_1 .

Cela résulte de la propriété correspondante de \hat{X} (propriété 3.1, c) et des hypothèses $(TR)_1$ et $(AR)_1$.

c) Y et Z restreintes à un simplexe ouvert \hat{D}_i^k sont des homéomorphismes bi-différentiables de classe C_1 sur les sous-variétés différentiables $Y(\hat{D}_i^k) \subset \mathfrak{B}_s^+$ et $Z(\hat{D}_i^k) \subset \mathfrak{B}^+$. Cela résulte de la propriété correspondante de \hat{X} (propriété 3.1, c) et des hypothèses $(TR)_2$ et $(AR)_2$.

Remarque 12.1. L'application Y est un cas particulier de l'application Z . En effet $Y=Z$ quand $W=V$ et que f est l'application identique qui est bien une application régulière.

Correspondance entre certains groupes d'homologie.

Soit β une boule topologique ouverte de W située dans le domaine de définition d'une des cartes qui définissent la variété différentiable W . Il existe donc un homéomorphisme bidifférentiable ψ de classe C_2 de β sur un ouvert $\psi(\beta)$ de R^n , il se prolonge en un homéomorphisme $\tilde{\psi}$ bidifférentiable de classe C_1 de l'espace $\mathfrak{B}(\beta)$ des vecteurs non nuls tangents à W ayant leur origine dans β sur l'espace des vecteurs non nuls de R^n ayant leur origine dans $\psi(\beta)$; celui-ci est l'espace produit $\psi(\beta) \times \mathfrak{F}$ d'où :

$$(12.3) \quad \tilde{\psi}[\mathfrak{B}(\beta)] = \psi(\beta) \times \mathfrak{F}.$$

Définition 12.2. Nous allons définir des projections, sur \mathfrak{F} et β , d'un vecteur $w \in \mathfrak{B}(\beta)$: la projection sur \mathfrak{F} sera la composante selon \mathfrak{F} de $\tilde{\psi}(w)$; la projection sur β sera la transformée par ψ^{-1} de la composante, selon $\psi(\beta)$, de $\tilde{\psi}(w)$.

Remarque 12.2. La projection de $\mathfrak{B}(\beta)$ sur \mathfrak{F} définit classiquement un isomorphisme des groupes d'homologie de $\mathfrak{B}(\beta)$ sur les groupes d'homologie de \mathfrak{F} . Cette application est indépendante de la carte choisie et l'isomorphisme est canonique. Pour les dimensions > 0 le seul groupe d'homologie non nul de \mathfrak{F} est le $(n-1)^{\text{ème}}$; il est cyclique et, la variété W étant orientée, canoniquement isomorphe au groupe additif des entiers, il en est donc de même pour $\mathfrak{B}(\beta)$; cela permet d'associer, à toute classe d'homologie de dimension $n-1$ dans $\mathfrak{B}(\beta)$ et dans \mathfrak{F} un nombre entier appelé indice.

Toujours du fait que W est orientée il existe un isomorphisme canonique entre le $(n-1)^{\text{ème}}$ groupe d'homologie de la fibre $\mathfrak{B}(\xi)$ de \mathfrak{B} au point $\xi \in W$ et le groupe correspondant de la fibre type. Si $\xi \in \beta$ l'immersion de $\mathfrak{B}(\xi)$ dans $\mathfrak{B}(\beta)$ définit une application du $(n-1)^{\text{ème}}$ groupe d'homologie de $\mathfrak{B}(\xi)$ dans celui de $\mathfrak{B}(\beta)$ qui est un isomorphisme. En résumé :

Propriété 12.2. Soit Γ un cycle à $n-1$ dimensions défini dans $\mathfrak{B}(\beta)$: sa classe d'homologie dans $\mathfrak{B}(\beta)$ et celle, dans \mathfrak{F} , de sa projection sur \mathfrak{F} ont même indice quelque soit la carte prise pour définir cette projection. Si $\Gamma \subset \mathfrak{B}(\xi)$, $\xi \in \beta$, cet indice est aussi celui de sa classe d'homologie dans $\mathfrak{B}(\xi)$.

Donnons-nous maintenant sur β un champ de vecteurs non nuls sauf peut-être en un point a de β ; il définit une application de β troué en a dans $\mathfrak{B}(\beta)$; cette application réalise un homomorphisme du $(n-1)^{\text{ème}}$ groupe d'homologie de β troué en a dans le groupe correspondant de $\mathfrak{B}(\beta)$ donc aussi dans celui de la fibre type \mathfrak{F} .

Soit σ^{n-1} un cycle de dimension $n-1$ appartenant, dans β , à la classe d'homologie d'indice $+1$. L'application de σ^{n-1} dans $\mathfrak{B}(\beta)$ définie par le champ est un cycle Γ . D'après une définition classique de l'indice d'une champ de vecteurs, l'indice du champ considéré est égal à l'indice précédemment défini, de la classe d'homologie dans \mathfrak{F} , de la projection, sur \mathfrak{F} , de $\Gamma \subset \mathfrak{B}(\beta)$; cet indice est aussi celui de Γ dans $\mathfrak{B}(\beta)$.

D'après la remarque 12.1 ces notions s'appliquent aussi à la variété V . Dans ce cas nous pouvons prendre pour β une boule B qui contient un zéro a_i^k du champ X et pour cycle σ^{n-1} , le cycle $b_i^k = \hat{b}(a_i^k)$ qui appartient, dans B troué en a_i^k , à la classe d'homologie d'indice $+1$. D'où:

Propriété 12.3. L'indice du champ X , défini sur V , en son zéro a_i^k est l'indice de la classe d'homologie du cycle $X(b_i^k) = Y(\hat{b}_i^k)$ dans la restriction de \mathfrak{B} aux vecteurs ayant leur origine dans la boule $B \subset b_i^k$.

§ 13. Degré topologique local de f

Soit $x \in B \cap V$, supposons que B soit une boule topologique ouverte ou une homoboule ouverte assez petite pour que:

1° $f(B) \subset \beta$, β étant, comme précédemment (§ 12) une boule topologique, domaine de définition d'une carte de W ;

2° en posant $\xi = f(x)$ on ait $B \cap f^{-1}(\xi) = \{x\}$.

Soit s^{n-1} un cycle de dimension $n-1$ dans la boule B trouée en x et appartenant à la classe d'homologie d'indice $+1$; $f(s^{n-1})$ est un cycle de dimension $n-1$ dans β troué en ξ .

Définition 13.1. Le degré topologique $m(x)$ de l'application f au point x est l'indice de la classe d'homologie, dans $\beta - \xi$, du cycle $f(s^{n-1})$; il ne dépend pas du choix particulier de β et de s^{n-1} . $m(x)$ est aussi égal au degré topologique de l'application $f \circ \varphi$ au point $\hat{x} = \varphi^{-1}(x)$, que nous noterons $m(\hat{x})$.

Degré topologique le long d'un simplexe de (D) . Soit $\eta(\xi)$ un voisinage ouvert de ξ dans W et $v(x)$ la composante connexe contenant x , de $f^{-1}(\eta(\xi))$. Nous pouvons en outre supposer $\eta(\xi)$ assez petit pour que $v(x)$ soit intérieure à l'étoile de x dans (D) et pour que $x' \in v(x) \cap D_i^k(x)$ entraîne $v(x) \cap f^{-1}(\xi') = \{x'\}$ avec $\xi' = f(x')$. Le degré topologique global de la restriction de f à $v(x)$ est alors constant et égal au degré topologique local $m(x')$ en x' , en particulier à $m(x)$. Le degré topologique local est donc constant sur $v(x) \cap D_i^k(x)$, qui est un voisinage de x dans $D_i^k(x)$; il est donc constant sur tout $D_i^k(x)$. D'où :

Propriété 13.1. *Le degré topologique local de f est le même en tous les points d'un simplexe D_i^k de (D) ; nous le désignerons par $m(D_i^k)$.*

Remarque 13.1. La démonstration de cette propriété ne fait pas intervenir les hypothèses de différentiabilité. Elle est donc valable pour toute application continue Φ d'une variété V dans une variété W qui possède la propriété suivante: il existe une triangulation (D) de V tel que la restriction de l'application à chaque simplexe ouvert de (D) soit un homéomorphisme.

Expression particulière de $m(D_i^k)$; a_i^k étant le zéro du champ X dans D_i^k (13.1) on a $m(a_i^k) = m(D_i^k)$.

Les homoboules $b_i^k = b_{\varepsilon_i^k}(a_i^k)$ dépendent des paramètres ε_i^k .

Hypothèses relatives aux ε_i^k .

$(\varepsilon)_1$: $0 < \varepsilon_i^k < 1/2$; cela entraîne que toutes les homoboules b_i^k sont disjointes.

$(\varepsilon)_2$: ε_i^k est assez petit pour que en posant $a_i^k = f(a_i^k)$ on ait relativement à l'homoboule $b_{2\varepsilon_i^k}(a_i^k)$:

$$(13.2) \quad b_{2\varepsilon_i^k}(a_i^k) \cap f^{-1}(a_i^k) = \{a_i^k\} \quad \text{et} \quad f[b_{2\varepsilon_i^k}(a_i^k)] \subset \beta_i^k,$$

β_i^k étant une boule topologique ouverte, domaine de définition d'une carte de la variété différentiable W .

On peut alors appliquer la définition de $m(x)$ en prenant $x = a_i^k$ et $s^{n-1} = \dot{b}_i^k$. il vient

Propriété 13.2. Le degré topologique $m(D_i^k)$ est l'indice de la classe d'homologie, dans $\beta_i^k - a_i^k$, du cycle $f(\dot{b}_i^k) = f \circ \varphi(\dot{b}_i^k)$.

§ 14. Prolongement canonique des vecteurs spéciaux ou nuls au voisinage d'un simplexe D^q

Nous avons défini au § 4 la sous-variété à n dimensions $\hat{T}_e(D^q)$, nous l'orienterons canoniquement. Considérons les espaces suivants de vecteurs spéciaux ou nuls ($\hat{\mathfrak{B}}_s^+$) ou spéciaux ($\hat{\mathfrak{B}}_s$):

$$\hat{\mathfrak{B}}_s^+(D^q), \hat{\mathfrak{B}}_s(D^q), \hat{\mathfrak{B}}_s^+(\hat{T}_e(D^q)) \text{ et } \hat{\mathfrak{B}}_s(\hat{T}_e) = \hat{\mathfrak{B}}_s(\hat{T}_e(D^q)).$$

Fixons arbitrairement une orientation fixe sur D^q .¹

Soient $\hat{y} \in D^q$, $\hat{x} \in \hat{T}_e(\hat{y})$ et un vecteur $\hat{\mathfrak{X}}(\hat{y}) \in \hat{\mathfrak{B}}_s^+(\hat{y})$.

Nous définirons le prolongement canonique de $\hat{\mathfrak{X}}(\hat{y})$ par la formule suivante:

$$(14.1) \quad \hat{\mathfrak{X}}(\hat{x}) = \lambda^2(\hat{x}) \hat{\mathfrak{X}}(\hat{y}) + \hat{X}_q''(\hat{x}) + \hat{X}_q'''(\hat{x})$$

le scalaire $\lambda(\hat{x})$ et les vecteurs $\hat{X}_q''(\hat{x})$ et $\hat{X}_q'''(\hat{x})$ ont la même définition qu'au § 3, formule (3.3) avec $\varrho = q$. Lorsque \hat{x} décrit la sous étoile $\hat{T}_e(\hat{y})$, $\hat{\mathfrak{X}}(\hat{x})$ décrit, dans $\hat{\mathfrak{B}}_s^+$, une sous variété à $n - q$ dimensions dont tous les points, sauf peut être $\hat{\mathfrak{X}}(\hat{y})$, sont dans $\hat{\mathfrak{B}}_s(\hat{T}_e)$; de plus quelque soit $\hat{\mathfrak{X}}(\hat{y})$ elle est homéomorphe à la sous-étoile de \hat{y} ou à celle du point $\hat{a}^q: \hat{T} = \hat{T}_e(\hat{a}^q)$, et ses positions relatives à deux $\hat{\mathfrak{X}}(\hat{y})$ distincts sont sans points communs.

On en déduit l'existence d'un homéomorphisme \hat{h} du produit $\hat{\mathfrak{B}}_s^+(D^q) \times \hat{T}$ dans $\hat{\mathfrak{B}}_s^+(\hat{T}_e(D^q))$. Orientons alors T de manière que \hat{h} conserve l'orientation. De la formule (14.1) on déduit aussi:

$$(14.2) \quad \hat{h}(\hat{\mathfrak{B}}_s(D^q) \times \hat{T}) \subset \hat{\mathfrak{B}}_s(\hat{T}_e)$$

$$(14.3) \quad \hat{h}(\hat{\mathfrak{B}}_s^+(D^q) \times \hat{T}) \subset \hat{\mathfrak{B}}_s(\hat{T}_e).$$

Considérons maintenant une chaîne à q dimensions $\hat{\gamma} \subset \hat{\mathfrak{B}}_s^+(D^q)$ telle que:

$$(14.4) \quad \hat{\gamma} \subset \hat{\mathfrak{B}}_s(D^q).$$

Associons-lui la chaîne à n dimensions $\hat{T} = \hat{h}(\hat{\gamma} \times \hat{T}) \subset \hat{\mathfrak{B}}_s^+$; on a:

$$(14.5) \quad \hat{T} = \hat{h}(\hat{\gamma} \times \hat{T} + (-1)^q \hat{\gamma} \times \hat{T}) \subset \hat{\mathfrak{B}}_s(\hat{T}_e).$$

L'inclusion dans $\hat{\mathfrak{B}}_s$ résulte des 4 dernières formules

¹ Les résultats seront indépendants de ce choix car, les chaînes $\hat{\gamma}, \hat{\gamma}', \dots$ peuvent être considérées comme des chaînes d'espèce paire.

Propriété 14.1. La classe d'homologie de \hat{I} dans $\hat{\mathfrak{B}}_s(\hat{T}_e)$ ne dépend que de la classe d'homologie de $\hat{\gamma}$ dans $\hat{\mathfrak{B}}_s(\hat{D}^q)$.

Au cycle différence de deux cycles $\hat{\gamma}$ correspond le cycle différence des cycles \hat{I} correspondants: la propriété 14.1 se ramène donc à la suivante: si $\hat{\gamma}$ est homologue à 0 dans $\hat{\mathfrak{B}}_s(\hat{D}^q)$, \hat{I} l'est dans $\mathfrak{B}_s(T_e)$.

Dans ce cas $\hat{\gamma}$ est aussi le bord d'une chaîne à q dimensions $\hat{\gamma}' \subset \hat{\mathfrak{B}}_s(\hat{D}^q)$ et l'on a:

$$\hat{\gamma} \times \hat{T} = \text{bord}(\hat{\gamma}' \times \hat{T}) - (-1)^q \hat{\gamma}' \times \hat{T}'$$

d'où

$$\hat{I} = \hat{h}(\text{bord}(\hat{\gamma}' \times \hat{T}) + (-1)^q (\hat{\gamma} - \hat{\gamma}') \hat{T}).$$

\hat{I} est donc la somme de deux cycles; le premier, $\hat{h}(\text{bord}(\hat{\gamma}' \times \hat{T})) = \text{bord}(\hat{h}(\hat{\gamma}' \times \hat{T}))$, est homologue à 0 dans $\hat{\mathfrak{B}}_s(\hat{T}_e)$ puisque $\hat{h}(\hat{\gamma}' \times \hat{T}) \subset \hat{\mathfrak{B}}_s(\hat{T}_e)$ d'après (14.2). Montrons qu'il en est de même pour le second: la chaîne $\hat{\gamma} - \hat{\gamma}'$ a pour bord $\hat{\gamma} - \hat{\gamma}' = 0$; c'est donc un cycle de dimension q dans l'espace $\hat{\mathfrak{B}}_s(\hat{D}^q)$, lequel est homéomorphe à $\hat{D}^q \times \mathbb{R}^q$ donc à \mathbb{R}^{2q} ; ce cycle est donc homologue à 0: $\hat{\gamma} - \hat{\gamma}' = \hat{e}$, \hat{e} étant une chaîne de dimension $q+1$ dans $\hat{\mathfrak{B}}_s(\hat{D}^q)$. On a: $(\hat{\gamma} - \hat{\gamma}') \times \hat{T} = \hat{e} \times \hat{T} = \text{bord}(\hat{e} \hat{T})$; or d'après (14.3), $\hat{h}(\hat{e} \times \hat{T}) \subset \hat{\mathfrak{B}}_s(\hat{T}_e)$, donc $\hat{h}((\hat{\gamma} - \hat{\gamma}') \hat{T}) = \text{bord} \hat{h}(\hat{e} \times \hat{T})$ est homologue à 0 dans $\hat{\mathfrak{B}}_s(\hat{T}_e)$. Il en est donc de même de \hat{I} et la propriété 14.1 est démontrée.

Reprenons le simplexe $\hat{D}_e^q = \hat{D}^q \cap \hat{b}_e(a^b)$ et l'espace $\mathfrak{B}_s^1(\hat{D}_e^q)$ des vecteurs qui y ont leur origine. Nous ne considérons dorénavant que des chaînes $\hat{\gamma} \subset \hat{\mathfrak{B}}_s^1(\hat{D}_e^q) \subset \hat{\mathfrak{B}}_s^1(\hat{D}^q)$; remarquons qu'il y en a dans chaque classe d'homologie de $\hat{\mathfrak{B}}_s^1(\hat{D}^q)$. La condition $(\varepsilon)_2$, formule (13.2) entraîne, à fortiori:

$$(14.6) \quad \hat{f} \circ \hat{\varphi}(\hat{\gamma}) \subset \mathfrak{B}(\beta).$$

Nous avons donc établi, par l'intermédiaire des cycles \hat{I} une application linéaire de l'espace des cycles $\hat{\gamma}$ sur l'espace des cycles $\hat{f} \circ \hat{\varphi}(\hat{I})$. La propriété 14.1 et la continuité de $\hat{f} \circ \hat{\varphi}$ montrent qu'à l'application linéaire des cycles correspond un homomorphisme du $(n-1)$ ème groupe d'homologie de $\hat{\mathfrak{B}}_s(\hat{D}^q)$ dans le $(n-1)$ ème groupe d'homologie de $\mathfrak{B}(\beta)$.

Ces deux groupes étant cycliques, l'homomorphisme correspond à la multiplication des indices par un entier, d'où:

Propriété 14.2. *L'indice J de la classe d'homologie de $\hat{f} \circ \hat{\varphi}(\hat{I})$ dans $\mathfrak{B}(\beta)$ est proportionnel à l'indice I de la classe d'homologie de $\hat{\gamma}$ dans $\mathfrak{B}_s(\hat{D}^q)$ (ou de $\hat{\gamma} = \tilde{\varphi}(\hat{\gamma})$ dans $\mathfrak{B}_s(D^q)$).*

§ 15. Détermination du coefficient de proportionnalité entre les indices J et I

Nous allons définir une chaîne particulière $\hat{\gamma}$ telle que $\hat{\gamma}$ appartienne à la classe d'homologie d'indice $I = +1$; nous calculerons alors l'indice J de la classe du cycle $\hat{f} \circ \hat{\varphi}(\hat{I})$ qui sera précisément égal au coefficient cherché.

$\hat{\gamma}$ sera le relèvement de \hat{D}_q^q dans \mathfrak{B}_s^+ déterminé en un point \hat{y} de \hat{D}_q^q par le vecteur:

$$(15.1) \quad \hat{X}(\hat{y}) = -\hat{X}(\hat{y}),$$

\hat{X} étant toujours le champ barycentrique.¹

Propriété 15.1. *L'indice du champ défini sur \hat{D}_q^q par $\hat{X}(\hat{y})$ en son zéro unique \hat{a}^q est $+1$. Cela résulte du fait que l'indice du champ $\hat{X} = -\hat{X}$ est $(-1)^q$ (propriété 3.2).*

De la formule (3.3) prise pour $q = q$ nous déduisons ceci: en un point \hat{x} de \hat{b} , $\hat{x} \in \hat{T}_\varepsilon(\hat{y})$, le champ \hat{X} prolongé canoniquement par la formule (14.1) est donné par:

$$(15.2) \quad \hat{X}(\hat{x}) = -\hat{X}'_q(\hat{x}) + \hat{X}''_q(\hat{x}) + \hat{X}'''_q(\hat{x}) = \hat{X}(\hat{x}) - 2\hat{X}'_q(\hat{x}).$$

Propriété 15.2. *Le champ \hat{X} est strictement sortant de \hat{b} le long de \hat{b} . Reportons nous en effet à la propriété 5.2. Le vecteur $\hat{X}(\hat{x})$ est équipollent à $\lambda_q^2(\hat{x})\hat{X}(\hat{y})$ (formule (3.3)), donc parallèle à \hat{D}^q et $\hat{T}_\varepsilon(\hat{D}^q)$.*

1°. Pour $\hat{x} \in \hat{b}' = \hat{b} \cap \hat{T}_\varepsilon(\hat{D}^q)$, $\hat{X}'_q(\hat{x})$ est, au voisinage de \hat{X} , dans $\hat{T}_\varepsilon(D^q)$; donc $\hat{X}(\hat{x})$ est, comme $\hat{X}(\hat{x})$, strictement sortant de $\hat{T}_\varepsilon(D^q)$ donc aussi de \hat{b} .

2°. Pour $\hat{x} \in \hat{b} - \hat{b}' \subset \hat{b}''$, le vecteur $\hat{X}''_q(\hat{x}) + \hat{X}'''_q(\hat{x})$ est situé dans \hat{b}'' ; donc $\hat{X}(\hat{x})$ est, comme $-\hat{X}'_q(\hat{x})$ et $-\hat{X}'_q(\hat{y})$, strictement sortant.

Remarquons que les vecteurs $\hat{X}(\hat{x})$ ont leur support dans \hat{V} ; nous pouvons, comme au § 7, les identifier à des éléments de \mathfrak{B}_s^+ ou à des vecteurs tracés sur \hat{V} .

¹ $\hat{\gamma}$ et $\hat{\gamma}$ sont ici déterminées par l'application, dans \mathfrak{B}_s , de sous-variétés canoniquement orientées de \hat{D}^q ; $\hat{\gamma}$ est donc toujours un cycle d'indice $I = +1$ auquel nous faisons correspondre un cycle $\hat{f} \circ \hat{\varphi}$ d'indice $J = m(D^q)$ quelles que soient les orientations de D^q , V et W pourvu que la correspondance établie par f entre les deux dernières ne change pas.

Comme il s'agit d'un problème local nous pouvons supposer que la boule topologique $\beta \subset W$ est dans un espace R^n : s'il n'en était pas ainsi on remplacerait f par $\psi \circ f$, ψ étant l'homéomorphisme bidifférentiable de classe C_2 qui définit une carte; l'indice de la classe d'homologie du cycle $\tilde{\psi} \circ \tilde{f} \circ \tilde{\varphi}(\hat{I})$ que l'on calculerait alors serait encore égal à J .

$\mathfrak{B}^+(\beta)$ est alors identifiable à l'espace des vecteurs de R^n issus de β et on peut écrire

$$(15.3) \quad \mathfrak{B}(\beta) = \beta \times \mathfrak{F}.$$

La restriction de $f \circ \varphi$ à chaque cellule fermée $\hat{D}_i^k \cap \hat{b}_{2,\varepsilon^q}(a^q)$ (ces cellules sont en nombre fini) est maintenant une application différentiable de classe C_2 d'un espace euclidien à k dimensions (limité à la cellule considérée) dans R^n . Soit $\xi = f \circ \varphi(\hat{x})$. Nous pourrions prendre des développements limités de ξ en particulier dans le cas suivant:

Soit $\hat{x}_0 \in \hat{b}$; pour $0 < \tau \leq \tau_0$, $\tau_0 > 0$, le point $\hat{x} = \hat{x}_0 + \tau \hat{x}(\hat{x}_0)$ est extérieur à $\hat{b} = \hat{b}_{\varepsilon^q}(a^q)$ et intérieur à $\hat{b}_{2\varepsilon^q}(a^q)$. Soit $\xi_0 = f \circ \varphi(\hat{x}_0)$. Prenons un développement limité du vecteur $\overrightarrow{\xi_0 \xi}$ en fonction de τ , il vient:

$$(15.4) \quad \left| \overrightarrow{\xi_0 \xi} - \tau \overrightarrow{f \circ \varphi \circ \hat{x}(\hat{x}_0)} \right| < K \tau^2.$$

Nous pouvons prendre la constante K assez grande pour que l'inégalité soit valable dans tout les $\hat{D}^k \cap \hat{b}_{2\varepsilon^q}(a^q)$ donc pour tout $\hat{x}_0 \in \hat{b}$. Le vecteur $\overrightarrow{f \circ \varphi \circ \hat{x}(\hat{x}_0)}$ a une longueur supérieure à un nombre positif fixe, l'inégalité (15.4) montre alors que, à tout angle θ , $0 < \theta < \pi$, on peut associer un nombre τ_1 , $0 < \tau_1 \leq \tau_0$ et un point $\xi_1 = f \circ \varphi[\hat{x}_0 + \tau_1 \hat{x}(\hat{x}_0)]$, tels que l'angle des vecteurs $\overrightarrow{f \circ \varphi \circ \hat{x}(\hat{x}_0)}$ et $\overrightarrow{\xi_0 \xi_1}$, soit $\leq \theta$. Il en résulte que, dans $\mathfrak{B}(\beta)$, le cycle $\mathfrak{Z}_0(\hat{b})$ décrit par le vecteur $\overrightarrow{\xi_0 \xi_1}$ lorsque \hat{x} décrit \hat{b} est homotope au cycle décrit par le vecteur $\overrightarrow{f \circ \varphi \circ \hat{x}(\hat{x})}$, qui n'est autre que le cycle $\overrightarrow{f \circ \varphi}(\hat{I})$.

Montrons maintenant que $\mathfrak{Z}_0(\hat{b})$, donc aussi $\overrightarrow{f \circ \varphi}(\hat{I})$, est homotope, dans $\mathfrak{B}(\beta)$, au cycle $\mathfrak{Z}_1(\hat{b})$ décrit par le vecteur $\overrightarrow{a^q \xi_0}$ quand \hat{x} décrit \hat{b} . Nous allons déterminer un cycle $\mathfrak{Z}(t)$ image de \hat{b} dans $\mathfrak{B}(\beta)$, variable différentiablement avec $t \in [0, 1]$ de façon que $\mathfrak{Z}(0) = \mathfrak{Z}_0(\hat{b})$ et $\mathfrak{Z}(1) = \mathfrak{Z}_1(\hat{b})$. L'image dans $\mathfrak{B}(\beta)$, d'un point $\hat{x}_0 \in \hat{b}$ sera définie par le vecteur $\overrightarrow{\xi_0(t) \xi_1(t)}$ ainsi déterminé: 1°. Pour $t \in [0, 1/2]$ on prendra $\xi_0(t) = f \circ \varphi(\hat{x}_t)$, $\hat{x}_t \in \hat{b}$ étant l'homothétique $(a^q, (1-2t))$ de \hat{x}_0 et $\xi_1(t) \equiv \xi_1 = f \circ \varphi(\hat{x}_0 + \tau_1 \hat{x}(\hat{x}_0))$.

Le point $\hat{x}_0 + \tau_1 \hat{X}(\hat{x}_0)$ étant extérieur à \hat{b} est distinct de tout point $\hat{x}(t)$ pour $0 \leq t < 1/2$; $\xi_1(t)$ et $\xi_0(t)$ sont leurs images respectives dans la restriction de $f \circ \varphi$ à $\hat{D}_i^k(x_0)$, qui est un homéomorphisme d'après $(TR)_1$ et $(AR)_2$: ils sont donc aussi distincts. Il en est de même pour $t = 1/2$ car $\xi_0(t) = \alpha^q$ est distinct de ξ_1 grâce à l'hypothèse $(\varepsilon)_2$ (formule 13.2); 2° . Pour $t \in [1/2, 1]$ nous prendrons $\xi_0(t) \equiv \alpha^q$ et $\xi_1(t) = f \circ \varphi(\hat{x}_0 + (2-2t)\tau_1 \hat{X}(\hat{x}_0))$; ces deux points sont encore distincts en vertu de $(\varepsilon)_2$. Le vecteur $\overrightarrow{\xi_0(t)\xi_1(t)}$ varie donc bien entre les positions $\overrightarrow{\xi_0\xi_1}$ et $\overrightarrow{\alpha^q\xi_0}$; il ne s'annule pas et varie différemment. L'homologie est donc établie, les cycles $f \circ \tilde{\varphi}(\hat{I})$, $\mathfrak{Z}_0(\hat{b})$ et $\mathfrak{Z}_1(\hat{b})$ appartiennent, dans $\mathfrak{B}(\beta)$ à la même classe d'homologie dont l'indice est J . De plus, $\mathfrak{Z}_1(\hat{b}) \subset \mathfrak{B}(\alpha^q)$ et, d'après la propriété 12.2, J est encore l'indice de la classe d'homologie du cycle $\mathfrak{Z}_1(\hat{b})$ dans $\mathfrak{B}(\alpha^q)$. Mais $\mathfrak{B}(\alpha^q)$ est canoniquement identifiable à $R^n - \alpha^q$ (R^n troué en $\alpha^q \in \beta \subset R^n$): au cycle $\mathfrak{Z}_1(\hat{b})$ correspond le cycle $f \circ \varphi(\hat{b})$ décrit par ξ_1 ; il est dans la boule topologique β . J est donc aussi l'indice de la classe d'homologie de $f \circ \varphi(\hat{b})$ dans $R^n - \alpha^q$ ou dans $\beta - \alpha^q$, or, d'après la propriété 13.2 cet indice est égal au degré topologique $m(D^q)$.

$$(15.5) \quad J = m(D^q)$$

pour le cycle $f \circ \tilde{\varphi}(\hat{I})$ étudié dans ce paragraphe le coefficient cherché est donc $m(D^q)$.

§ 16. Enoncé du théorème I

En résumé de ce qui précède nous énoncerons:

Théorème I. *Le prolongement canonique (14.1) qui généralise le prolongement défini par le champ barycentrique permet de définir un homomorphisme du $(q-1)^{ème}$ groupe d'homologie de $\mathfrak{B}_s(D^q)$ dans le $(n-1)^{ème}$ groupe d'homologie de $\mathfrak{B}(\beta)$. Entre les indices I relatifs au premier de ces groupes et les indices J relatifs au second on a la relation:*

$$(16.1) \quad J = m(D^q) I$$

$m(D^q)$ étant le degré topologique de l'application f en chaque point de D^q .

Corollaire I. *\hat{X} étant toujours le champ barycentrique, le cycle $f \circ \tilde{\varphi} \hat{X}(\hat{b}) = f \circ X(\hat{b})$ appartient, dans $\mathfrak{B}(\beta)$, à la classe d'homologie d'indice $(-1)^q m(D^q) = (-1)^q m(\alpha^q)$.*

Corollaire II. *Le champ barycentrique $X = \tilde{\varphi}(\hat{X})$ en son zéro $\alpha^q \in D^q$ a pour indice $(-1)^q$.¹*

¹ Ce résultat montre, sans recourir à la démonstration d'Alexandroff, que la somme des indices algébriques des zéros d'un champ sur V est $\sum_{i, k \leq n} \chi(D_i^k) = \chi(V)$; STEENROD ([10] p. 203), à partir

Ces corollaires se déduisent ainsi du théorème I: si $\hat{\varphi} = \hat{X}(\hat{D}^q)$ l'indice I, qui est aussi l'indice de la restriction à \hat{D}^q du champ \hat{X} en son zéro a^q est $(-1)^q$ (propriété 3.2) donc $J = (-1)^q m(D^q)$; c'est le corollaire I. Le corollaire II en est le cas particulier obtenu en prenant pour W la variété V elle-même et pour f l'application identique, alors $m(D^q) = 1$.

§ 17. Complexe (G) des singularités topologiques¹

Définition. Au voisinage de tout point x de V tel que $m(x) = 1$, f est un homéomorphisme dans W ; l'ensemble de ces points est donc ouvert; son complémentaire, ensemble des points x tels que $|m(x)| \neq 1$, est donc fermé; il admet pour triangulation un sous-complexe de (D) puisque le degré topologique est constant sur chaque D_i^k ; c'est donc aussi un complexe, nous le désignerons par (G) .

(G) ne contient aucun D_1^n car $m(D_1^n) = 1$. Tout D^{n-1} est adhérent à deux simplexes D_1^n et D_2^n , la condition nécessaire et suffisante pour que D^{n-1} soit dans (G) est que $m(D_1^n) \times m(D_2^n) = -1$; dans ce cas $m(D^{n-1}) = 0$.

(G) est contenu dans l'ensemble des points où le rang de l'application f est strictement inférieur à n mais ne coïncide pas nécessairement avec lui.

Cas où f conserve l'orientation. Dans ce cas le degré topologique $m(x)$ n'est jamais négatif ni nul; il s'ensuit que (G) ne contient aucun D^{n-1} . Nous démontrerons:

Propriété 17.1. *Si f conserve l'orientation (G) est un complexe de dimension partout égale à $n-2$ (ou encore $(G) = \bigcup_i \bar{D}_i^{n-2}$).*

Il s'agit de montrer que, si un simplexe D^s est contenu dans (G) ($m(D^s) \neq 0$), sans qu'aucun des simplexes auxquels il est adhérent le soit, on a nécessairement $s = n-2$; nous savons déjà que $s \leq n-2$.

Soit $x \in D^s$; $\xi = f(x) \in \Delta^s = f(D^s)$.

Soit β une boule topologique fermée, voisinage de ξ dans W et assez petite pour que la composante connexe B de $f^{-1}(\beta)$ qui contient x soit intérieure à la sous-étoile de x dans (D) . En conséquence:

$$(17.1) \quad B \cap f^{-1}(\Delta^s \cap \beta) = B \cap D^s$$

et

du même champ barycentrique indique le principe d'une démonstration un peu différente (et qui ne fait évidemment pas intervenir d'application f).

¹ Ce paragraphe et la propriété 13.1 n'utilisent pas les hypothèses de différentiabilité et seraient valables pour les applications Φ des remarques 13.1 et 17.1. Nous aurions pu, tout au début de ce mémoire, introduire ces applications et démontrer pour elles les propriétés 13.1 et 17.1.

$$(17.2) \quad B \cap (G) = B \cap D^s.$$

En effet l'intérieur de l'étoile de x dans (D) se compose de D^s et de simplexes D^k auxquels D^s est adhérent et qui, par hypothèse, ne sont pas dans (G) .

La restriction de f à B a un degré topologique global constant sur β ; comme $\xi \in \beta$ a une seule image réciproque x dans l'intérieur de l'étoile de x donc dans B , ce degré topologique est égal à $m(x) = m(D^s) \geq 2$.

Considérons la partition de β en l'ensemble fermé $\dot{\beta} \cup (\beta \cap \Delta^s)$ et l'ensemble complémentaire β' qui est une sous-variété à n dimensions, ouverte, de W . Cette partition détermine, par image réciproque, une partition de la composante connexe B ; on a $B \cap f^{-1}(\dot{\beta}) = \dot{B}$ puisque le bord de l'image réciproque est l'image réciproque du bord, de cette relation et de (17.1) on déduit que l'image réciproque, restreinte à B , de $\dot{\beta} \cup (\beta \cap \Delta^s)$ est l'ensemble fermé $\dot{B} \cup (B \cap D^s)$; son complémentaire est

$$(17.3) \quad B' = B \cap f^{-1}(\beta').$$

B' est une sous-variété de V , à n dimensions et ouverte, elle est connexe puisqu'on l'obtient en retirant de l'intérieur \dot{B} de la composante connexe B , la trace de la sous-variété D^s de dimensions $s \leq n-2$. Par ailleurs (17.2) entraîne: $B' \cap (G) = \emptyset$; la restriction de f à B' est donc un homéomorphisme au voisinage de chaque point, son degré topologique global est $m(D^s) \geq 2$ en tous les points de $\beta' = f(B')$; la frontière $\dot{B} \cup (B \cap D^s)$ de B' ne coupe pas $f^{-1}(\beta')$, on en déduit que chaque point $\xi \in \beta'$ possède un voisinage connexe $w(\xi) \subset \beta'$ tel que $B \cap f^{-1}(w(\xi))$ se décompose en $m(D^s)$ composantes connexes et que f applique chacune d'elles homéomorphiquement sur $w(\xi)$; B' est donc un revêtement fini de β' connexe et de degré $m(D^s) \geq 2$. L'existence d'un tel revêtement implique que β' n'est pas simplement connexe; or si on avait $s \leq n-3$, β' , qui s'obtient en retirant de la boule ouverte $\dot{\beta}$ la trace de la sous-variété Δ^s , serait simplement connexe; comme $s \neq n$ et $s \neq n-1$, il reste $s = n-2$. c. q. f. d.

Remarque 17.1. Cette démonstration de la propriété 17.1 — comme celle de la propriété 13.1 — ne fait pas intervenir les hypothèses de différentiabilité. Nous pouvons donc énoncer:

Soit Φ une application d'une variété V dans une variété W de même dimension n ; on suppose que Φ est continue, intérieure et possède la propriété suivante: il existe une triangulation (D) de V telle que la restriction de Φ à chaque simplexe ouvert de (D) est un homéomorphisme.

Propriété 17.2. L'ensemble des points où le degré topologique local de Φ est strictement supérieur à 1 est un sous-complexe de (D) dont la dimension est partout égal à $n - 2$.

CHAPITRE II

Formes différentielles images transposées des formes Ω_0 et Π par une application régulière

§ 18. Rappel d'une définition des formes Ω_0 , Ω et Π

Considérons la variété W compacte, orientée et sans bords, différentiable de classe C_2 . Soit $\chi(W)$ sa caractéristique d'Euler-Poincaré. Chern a mis en évidence les rapports entre la formule de Gauss-Bonnet généralisée¹ et la théorie de la transgression. Nous énoncerons ses résultats sous la forme suivante:

Théorème de Chern. Soit Ω_0 une forme différentielle de degré n sur W appartenant à la classe d'homologie caractérisée par la relation:

$$(18.1) \quad \int_W \Omega_0 = \chi(W).$$

Soit, dans l'espace fibré \mathfrak{B} des vecteurs non nuls tangents à W , la forme différentielle Ω de degré n image transposée de Ω_0 par l'application canonique π qui à chaque vecteur fait correspondre son origine:

$$(18.2) \quad \Omega = \pi^* \Omega_0.$$

1°. La forme Ω est une différentielle exacte dans \mathfrak{B} , nous écrivons:

$$(18.3) \quad \Omega = -d\Pi.$$

2°. Π peut être choisi² tel qu'il possède la propriété suivante: étant donné un point ξ de W , l'espace $\mathfrak{B}(\xi) \subset \mathfrak{B}$ des vecteurs non nuls tangents à W en ξ et un cycle différentiable Γ appartenant, dans le $(n-1)^{\text{ème}}$ groupe d'homologie de $\mathfrak{B}(\xi)$ à la classe d'indice I^3 , l'intégrale de Π sur Γ est égale à cet indice:

¹ Nous appelons ainsi la formule de Gauss-Bonnet pour les variétés à n dimensions pouvant avoir des bords; elle a été démontrée par ALLENDOERFER et WEIL [3] sous une première forme puis par CHERN [5] par la méthode que nous reprenons ici.

² Ce choix n'est, en réalité nécessaire qui si $\chi(W) = 0$ (ce qui est toujours le cas si n est impair); si $\chi(W) \neq 0$, (18.3) entraîne (18.4).

³ La variété W étant supposée orientée, cet indice est bien défini. Supposons d'ailleurs que V et W ne soient pas orientables mais que l'application f le soit c'est-à-dire établisse une correspondance fixe entre les deux orientations possibles de V et les deux orientations possibles de W ;

$$(18.4) \quad \int_F \Pi = I.$$

3°. A chaque métrique riemannienne sur W on peut associer canoniquement une forme Ω_0 et une forme Π qui peuvent être définies localement. La forme Ω_0 particulière est la forme différentielle de courbure pour n paire et 0 pour n impaire.

Nous n'aurons pas à nous servir de ces formes particulières mais, dans toutes nos formules, on pourrait les faire intervenir et obtenir ainsi des formules relatives à une métrique riemannienne sur W .

Formes images transposées: Ω_0^* , Ω^* et Π^* . Posons:

$$(18.5) \quad \Omega_0^* = f^*(\Omega_0); \quad \Omega^* = f^*(\Omega); \quad \Pi^* = f^*(\Pi).$$

Ω_0^* est une forme différentielle sur $V = f^{-1}(W)$; Ω^* et Π^* sont des formes différentielles sur $\mathfrak{B}_s = f^{-1}(\mathfrak{B})$. De (18.2) on déduit, en désignant encore par π l'application canonique de \mathfrak{B}_s dans V :

$$(18.6) \quad \Omega^* = \pi^* \Omega_0^*$$

de (18.3) on déduit

$$(18.7) \quad \Omega^* = -d \Pi^*$$

et de (18.4) on déduit que si C est un cycle de $\mathfrak{B}_s(x)$, avec $\xi = f(x)$ on a:

$$(18.8) \quad \int_C \Pi^* = \text{indice du cycle } f(C) \text{ dans la } (n-1)\text{ème groupe d'homologie de } \mathfrak{B}(\xi).$$

§ 19. Enoncé du théorème II

Définition 19.1. *Caractéristique $\chi_f(U)$.*

Soit C une sous-variété de V qui admette pour triangulation un sous-complexe d'une subdivision (D') de la triangulation (D) . Posons

$$(19.1) \quad \chi_f(C) = \sum_{i,k} (-1)^k m(D_i'^k) \text{ pour } D_i'^k \subset C.$$

il nous faudrait alors considérer toutes nos formes comme étant d'espèce convenablement tordues (par l'orientation de W) et toutes nos chaînes comme étant d'espèce paire (ou tordues, voir les notes des pages 221 et 223.

Mettons $\chi_f(C)$ sous une forme indépendante du choix particulier des triangulations (D) et (D') ¹:

Appelons V^μ , $\mu \neq 0$, l'ensemble des points de V où le degré topologique de f est, pour $\mu \geq 1$, au moins égal à μ et, pour $\mu \leq -1$, au plus égal à μ : c'est un sous complexe de (D) donc de (D') et la formule (19.1) devient:

$$(19.2) \quad \chi_f(C) = \sum_{\mu \geq 1} \chi(C \cap V^\mu) - \sum_{\mu \leq -1} \chi(C \cap V^\mu).$$

Définition 19.2. *Caractéristique intérieure $\chi'_f(C)$.* Nous la définirons par la relation

$$(19.3) \quad \chi'_f(C) = \chi(\dot{C}) = \sum (-1)^k m(D_i'^k) \text{ pour } D_i'^k \subset (\dot{C}).$$

Remarque 19.1. Lorsque f est un homéomorphisme la caractéristique χ_f se réduit à la caractéristique d'Euler-Poincaré χ .

Lorsque C est une variété transversale sa caractéristique χ_f possède des propriétés analogues à celles de la caractéristique d'Euler-Poincaré d'une variété, comme le montrera le théorème II.

Théorème II. *Soit f une application régulière de V dans W .*

a) *Si C est une sous-variété transversale à n dimensions de V , on a:*

$$(19.4) \quad \int_C \Omega_0^* = \int_{\hat{\alpha}^+(C)} -\Pi^* + \chi_f(C)$$

et

$$(19.5) \quad \int_C \Omega_0^* = \int_{\hat{\alpha}^-(C)} -\Pi^* + \chi'_f(C).$$

b) *Si U est une sous-variété transversale de dimension inférieure ou égale à $n-1$, on a:*

$$(19.6) \quad \int_{\hat{\alpha}(U)} \Pi^* = \chi_f(U).$$

c) *Si U est une sous-variété transversale de dimension impaire $\leq n$, on a:*

$$(19.7) \quad \chi_f(\dot{U}) = 2\chi_f(U) = -2\chi'_f(U).$$

¹ On pourrait mettre $\chi_f(C)$ sous une autre forme en utilisant les ensembles G^ν de simplexes de (D) tels que, en tout point x de G^ν on ait: $m(x) = \nu$, on aurait alors:

$$\chi_f(C) = \sum_{-\infty < \nu < +\infty} \nu \chi(C \cap G^\nu)$$

$\chi(C \cap G^\nu)$ étant défini par le $\sum (-1)^k$ relatif à ses simplexes.

Autre énoncé. Si C est de dimension n on a $\hat{\mathfrak{K}}^+(\dot{C}) = \hat{\mathfrak{K}}(\dot{C})$ (propriété 11.3); les formules (19.4) et (19.6) sont donc des cas particuliers de l'énoncé suivant:

Soit U une variété transversale de dimension quelconque, on a:

$$(19.8) \quad \int_U \Omega_0^* = \int_{\hat{\mathfrak{K}}(U)} -\Pi^* + \chi_f(U).$$

Rappelons que les variétés transversales dans V sont les images par l'homéomorphisme φ des variétés transversales \hat{U} de \hat{V} définies au § 7; en particulier les variétés transversales dans V coupent canoniquement la triangulation (D) .

Rappelons aussi que le cycle $\hat{\mathfrak{K}}(U)$ de $\mathfrak{B}_s(U)$ est l'image par l'homéomorphisme $\tilde{\varphi}$ de la sous-variété orientée $\hat{\mathfrak{K}}(\hat{U})$ de $\mathfrak{B}_s(\hat{U})$. $\hat{\mathfrak{K}}(U)$ peut être défini par la définition 11.1 ou par la propriété caractéristique 11.1. Rappelons qu'un champ de vecteurs spéciaux sortants de C le long de \dot{C} (définition 11.2) permet de définir un cycle $\hat{\mathfrak{K}}^+(\dot{C}) = \hat{\mathfrak{K}}(\dot{C})$. Rappelons enfin que, sauf dans le cas où les triangulations sont différentiables, le cycle $\hat{\mathfrak{K}}(\dot{C})$ doit être considéré comme image non pas de la variété \dot{C} mais de la variété $\hat{C} = \varphi^{-1}(\dot{C})$.

Cas particulier où f est l'application identique.

On a alors $\chi_f = \chi$, $\Omega_0^* = \Omega_0$, $\Pi^* = \Pi$. En se restreignant au cas où U est une variété différentiable sans bords la formule (19.6) se ramène à une formule démontrée par une autre méthode par Chern.¹

Lorsque U est une variété polyédrale avec bord, les formules (19.4) et (19.5) généralisent la formule de Gauss-Bonnet aux variétés à n dimensions, toutefois elles ne coïncident pas avec la formule d'Allendoerfer-Weil² qui ne fait pas intervenir la forme Π , mais avec la formule indiquée par Chern dans le cas plus particulier où C est une variété différentiable.

C'est d'ailleurs la méthode de Chern, dans laquelle la formule de Stokes est appliquée à Ω et Π (ici Ω^* et Π^*) que nous utiliserons pour démontrer le théorème II (§§ 20 à 24).

¹ CHERN [5].

² ALLENDOERFER et A. WEIL [3]. Dans nos formules, l'intégrale de $-\Pi^*$ n'est différente de 0 qu'au dessus des cellules de dimension p de U (si $p < n$) et $p-1$ de \hat{U} (pour $p \leq n$); tandis que, dans la formule d'ALLENDOERFER-WEIL les intégrales qui généralisent celle de la courbure géodésique peuvent être non nulles pour des cellules de toutes dimensions. Nous nous rapprocherions plus de cette formule en appliquant notre formule (19.5) à $C - T_\varepsilon(\dot{C})$ dont le bord est une variété transversale (exemple du § 8) puis en faisant tendre ε vers 0 (comparer dans les fig. 3 et 4 les rayons des $\hat{T}_\varepsilon(\hat{y})$ et $\hat{B}(\hat{y})$ en un point anguleux \hat{y} de \hat{U}).

§ 20. Intégrale de Ω_0^* au voisinage d'un zéro a du champ X

Soit $b = b_\varepsilon(a)$. La sous-variété $X(\hat{b}) = Y(\hat{b})$ engendrée par $X(x) = Y(\hat{x})$ (formule (12.2)) quand X décrit \hat{b} est un cycle différentiable par parties si on la considère non pas comme image de \hat{b} mais comme image de \hat{b} (il est différentiable par simplexes fermés de (\hat{d})); Π^* est donc intégrable dessus, en posant $f \circ Y(\hat{b}) = Z(\hat{b})$, il vient

$$(20.1) \quad \int_{Y(\hat{b})} \Pi^* = \int_{Z(\hat{b})} \Pi.$$

Il s'agit d'un problème local, nous supposons donc qu'un voisinage β de $a = f(a)$ est une boule ouverte de R^n : en effet, s'il n'en était pas ainsi, nous pourrions prendre pour β une boule sur laquelle est définie une application ψ bidifférentiable de classe C_2 , dans R^n ; nous remplacerions f par $\psi \circ f$ et Π par $\psi(\Pi)$ et le résultat du calcul serait le même.

La formule (15.3) $\mathfrak{B}(\beta) = \beta \times \mathfrak{F}$ est donc encore valable ici. Le vecteur $Z(\hat{x}) = f \circ \hat{\varphi} X(\hat{x})$, $\hat{x} \in \hat{b}$, a pour projection sur β son origine $f \circ \varphi(\hat{x})$ et sur \mathfrak{F} un élément que nous noterons $H(\hat{x})$; lorsque \hat{x} décrit \hat{b} , $H(\hat{x})$ engendre, dans \mathfrak{F} , le cycle $H(\hat{b})$ et $Z(\hat{x})$ engendre, dans $\mathfrak{B}(\beta)$, le cycle $Z(\hat{b})$; ces cycles sont différentiables par simplexes fermés de (\hat{d}) .

Déterminons une homotopie de $Z(\hat{b})$ dans un cycle $\mathfrak{H}(1) \subset \mathfrak{B}(a)$.¹ Le cycle $\mathfrak{H}(t)$ image de \hat{b} variable avec t , $t \in [0, 1]$, sera ainsi défini: l'image $h(\hat{x}, t)$ d'un point \hat{x} de \hat{b} aura pour projection sur \mathfrak{F} $H(\hat{x})$ et sur β le point $f \circ \varphi(\hat{x}(t))$, $\hat{x}(t)$ étant l'homothétique $(a, 1-t)$ de \hat{x} . On a bien $\mathfrak{H}(0) = Z(\hat{b})$ et $\mathfrak{H}(1) \subset \mathfrak{B}(a)$.

$\mathfrak{H}(t)$ engendre une chaîne $\mathfrak{H}(0, 1)$ image de $[0, 1] \times \hat{b}$ dont le bord est $Z(\hat{b}) - \mathfrak{H}(1)$. Toutes les applications considérées ici étant différentiables par simplexes fermés de (\hat{d}) il en est de même des chaînes considérées et l'on peut intégrer $-\Pi$ sur $Z(\hat{b}) - \mathfrak{H}(1)$ et Ω sur $\mathfrak{H}(0, 1)$.

Appliquons la formule de Stokes, il vient:

$$(20.2) \quad \int_{\mathfrak{H}(0, 1)} \Omega = \int_{Z(\hat{b})} -\Pi - \int_{\mathfrak{H}(1)} -\Pi.$$

La projection de $\mathfrak{H}(0, 1)$ sur β est engendrée par l'image par $f \circ \varphi$ de l'homothétique (a, t) de \hat{b} , c'est donc $f \circ \varphi(\hat{b}) = f(b)$ et on a:

$$(20.3) \quad \int_{\mathfrak{H}(0, 1)} \Omega = \int_{f(b)} \Omega_0 = \int_b \Omega_0^*.$$

¹ Ces cycles $\mathfrak{H}(t)$ sont sans rapport avec les chaînes $\mathfrak{H}(U)$ définies au § 9.

L'intégrale de Π sur $\mathfrak{S}(1)$ est, d'après (18.4), l'indice de la classe d'homologie de $\mathfrak{S}(1)$ dans $\mathfrak{B}(a)$ donc aussi dans $\mathfrak{B}(\beta)$ d'après la propriété 12.2; mais l'homotopie précédemment établie montre que la classe d'homologie de $\mathfrak{S}(1)$ dans $\mathfrak{B}(\beta)$ est aussi celle de $Z(\hat{b}) = \hat{f} \circ \hat{\varphi} \circ \hat{X}(\hat{b})$; son indice est donc, d'après la corollaire I du théorème I, égal à $(-1)^k m(D_i^k)$, ($D_i^k = D_i^k(a)$):

$$(20.4) \quad \int_{\mathfrak{S}(1)} \Pi = (-1)^k m(D_i^k) = (-1)^k m(a)$$

la formule (20.2) donne alors:

$$(20.5) \quad \int_{Z(\hat{b})} \Pi = \int_{Y(\hat{b})} \Pi^* = \int_{X(\hat{b})} \Pi^* = (-1)^k m(D_i^k) - \int_b \Omega_0^*.$$

Remarque 20.1. Comme Ω est une forme différentielle continue on a, en posant $b = b_\epsilon(a)$:

$$(20.6) \quad \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{X(\hat{b}(a))} \Pi^* = (-1)^k m(D_i^k) = (-1)^k m(a).$$

Remarque 20.2. Le raisonnement précédent est valable pour tout cycle $\mathfrak{X}(\hat{b}) = \hat{\varphi} \circ \hat{\mathfrak{X}}(\hat{b})$, $\hat{\mathfrak{X}}$ étant un champ obtenu par prolongement canonique (§ 14) d'un champ de vecteurs tangents à D_i^k ; supposons que ce champ ait, dans \hat{b} , un seul zéro a d'indice $I_{\mathfrak{X}}$. Au lieu d'appliquer le corollaire I du théorème I il faudra appliquer le théorème lui-même et on trouvera:

$$(20.7) \quad \int_{\mathfrak{X}(\hat{b})} \Pi^* = I_{\mathfrak{X}} m(D_i^k) - \int_b \Omega_0^*.$$

§ 21. Intégrale de Ω_0^* au voisinage d'une variété transversale

Soit $U = \varphi(\hat{U})$ cette sous-variété, p sa dimension; reprenons les notations du § 10 à cela près que nous désignerons par $\hat{T}'(\hat{U})$ et non plus $T'_\eta(\hat{U})$ un tube quelconque construit autour de \hat{U} par la méthode du § 6 relativement à la triangulation (\hat{D}'). Toutes les chaînes et variétés du § 10 ont des images par φ ou par $\hat{\varphi}$ que nous désignerons par les mêmes symboles dépourvus d'accents circonflexes. De la propriété 10.1 il résulte alors:

Propriété 21.1. Etant donnés un cycle $\hat{\mathfrak{S}}(U)$ et un tube $T'(U)$ il existe dans \mathfrak{B} , une chaîne \mathfrak{C} différentiable par cellules (cellules $\hat{\mathfrak{B}}, (\hat{d}_i^k)$) telle que:

a) le bord de \mathfrak{C} soit $\mathfrak{K}(U) - X'(T'(U))$;

b) dans V la chaîne $\pi(\mathfrak{C})$ soit équivalente à la chaîne $-T'(U)$, $T'(U)$ étant définie par l'immersion canonique de $T'(U)$ dans V .

D'après la propriété 9.3 nous pouvons intégrer les formes différentielles sur ces chaînes et appliquer la Formule de Stokes à l'intégrale, sur \mathfrak{C} , de la forme Ω^* . Il vient:

$$(21.1) \quad \int_{\mathfrak{C}} \Omega^* = \int_{\mathfrak{K}(U)} -\Pi^* - \int_{X'(T'(U))} -\Pi^*$$

mais d'après la propriété 21.1, b) la formule (21.1) devient:

$$(21.2) \quad \int_{\mathfrak{C}} \Omega^* = - \int_{T'(U)} \Omega_0^* = \int_{\mathfrak{K}(U)} -\Pi^* - \int_{X'(T'(U))} -\Pi^*.$$

Considérons maintenant le cas où $p=n-1$ et où $U=\dot{C}$ est le bord d'une sous variété compacte à n dimensions C de V . La propriété 11.2 donne, pour les éléments correspondant par φ et $\tilde{\varphi}$ à ceux qui figurent dans son énoncé:

Propriété 21.2. Etant donnés $T'^+(C)$ et un cycle $\mathfrak{K}^+(C)$, il existe dans \mathfrak{B}_s , une chaîne \mathfrak{C}^+ différentiable par cellules telle que:

a) le bord de \mathfrak{C}^+ soit $\mathfrak{K}^+(C) - X'(T'^+(C))$;

b) la chaîne $\pi(\mathfrak{C}^+)$ soit équivalente à la chaîne $-T'^+(C)$.

Nous pouvons, comme précédemment, appliquer la formule de Stokes puis faire intervenir Ω_0^* au lieu de Ω^* ; la formule 21.2 devient:

$$(21.3) \quad - \int_{T'^+(C)} \Omega_0^* = \int_{\mathfrak{K}^+(C)} -\Pi^* - \int_{X'(T'^+(C))} -\Pi^*.$$

En intégrant Ω^* sur la chaîne $\mathfrak{C}^- = \tilde{\varphi}(\hat{\mathfrak{C}}^-)$ de bord $\mathfrak{K}^-(C) - X'(T'^-(C))$ et en appliquant la partie correspondante de l'énoncé de la propriété 11.2, on obtient:

$$(21.4) \quad \int_{T'^-(C)} \Omega_0^* = \int_{\mathfrak{K}^-(C)} -\Pi^* - \int_{X'(T'^-(C))} -\Pi^*.$$

§ 22. Formule globale

Considérons toujours le compact C de V tel que $\varphi^{-1}(C) = \hat{C}$ soit une variété transversale dans \hat{V} . Appelons a_i^k les zéros du champ barycentrique X' relatif à la triangulation (D') . Nous prendrons ε assez petit pour que le tube $T'(C) = T'_\varepsilon(C)$ ne contienne que les zéros a_i^k situés sur \hat{C} . Nous prendrons ensuite les ε_i^k assez petits

pour que les homoboules $b'(a_i^k) = b_{e_i^k}(a')$ n'aient de points communs ni deux à deux ni avec $\hat{T}'(\hat{C})$.

Soit C^+ la variété à n dimensions orientée définie par:

$$(22.1) \quad C^+ = \text{adhérence de } (C \cup T'^+(\hat{C}) - \bigcup_{i,k} b'(a_i^k));$$

son bord est

$$(22.2) \quad \hat{C}^+ = \hat{T}'^+(\hat{C}) - \bigcup_{i,k} b'(a_i^k).$$

Soit $X'(C^+)$ la chaîne définie par l'application $\tilde{\varphi} \circ X'$ de $\hat{C}^+ = \varphi^{-1}(C^+)$ dans \mathfrak{B}_s , elle est différentiable par simplexes fermés de (\hat{d}) et nous pouvons intégrer dessus $\Omega^* = -d\Pi^*$. La Formule de Stokes donne:

$$(22.3) \quad \int_{X'(C^+)} \Omega^* = \int_{X'(\hat{T}'^+(\hat{C}))} \Pi^* - \sum_{a_i^k \in C} \int_{X'[b'(a_i^k)]} -\Pi^*.$$

Par ailleurs

$$(22.4) \quad \int_{X'(C^+)} \Omega^* = \int_{\hat{C}^+} \Omega_0^* = \int_{\hat{C}} \Omega_0^* + \int_{T'^+(\hat{C})} \Omega_0^* - \sum_{a_i^k \in C} \int_{b'(a_i^k)} \Omega_0^*.$$

Dans l'égalité (22.3) nous allons remplacer: la première intégrale par sa valeur donnée par (22.4); la deuxième intégrale par sa valeur donnée par (21.2) lorsqu'on y remplace U par \hat{C} ; et les intégrales suivantes par leurs valeurs données par (20.5) lorsqu'on y remplace X et b par X' et $b'(a_i^k)$. Remarquons que $D_i^k \subset D_j^q$ entraîne $m(D_i^k) = m(D_j^q)$. Les intégrales de Ω_0^* sur $T'^+(\hat{C})$ et sur les $b'(a_i^k)$ disparaissent et nous obtenons la formule fondamentale (19.4) du théorème II.

$$\int_C \Omega_0^* = \int_{\hat{\mathfrak{R}}^+(\hat{C})} -\Pi^* + \sum_{D_i^k \subset C} (-1)^k m(D_i^k) = \int_{\hat{\mathfrak{R}}^+(\hat{C})} -\Pi^* + \chi_f(C).$$

L'intégration de Φ^* sur $C^- = \text{adhérence } (C - T'^-(\hat{C}) - \bigcup_{i,k} b'(a_i^k))$ dont le bord est $\hat{T}'^-(\hat{C}) - \bigcup_{i,k} b'(a_i^k)$ conduit à la formule (19.5)

$$\int_C \Omega_0^* = \int_{\hat{\mathfrak{R}}^-(\hat{C})} -\Pi^* + \sum_{D_i^k \subset C} (-1)^k m(D_i^k) = \int_{\hat{\mathfrak{R}}^-(\hat{C})} -\Pi^* + \chi_f(C).$$

Remarque 22.1. Considérons le cas où l'on impose seulement à la variété compacte C que $\hat{C} = \varphi^{-1}(\hat{C})$ soit différentiable de classe C_2 par simplexe D_i^k , et ne passe par aucun zéro \hat{a}_i^k du champ barycentrique \hat{X} . On peut prendre les homoboules $b(a_i^k)$

assez petites pour qu'elles ne coupent pas \dot{C} puis relever le compact adhérence de $(C - \bigcup_{i,k} b(a_i^k))$ dans \mathfrak{B}_s par le champ X et appliquer comme précédemment le formule de Stokes. Soit $\theta(a_i^k)$ un nombre égal à 1 pour $a_i^k \in C$ et sinon à 0. Il vient:

$$(22.5) \quad \int_C \Omega_0^* = \int_{X(\dot{C})} -\Pi^* + \sum_{i,k} (-1)^k \theta(a_i^k) m(D_i^k)$$

mais les deux termes du second membre dépendent ici du choix particulier des points a_i^k .

§ 23. Formule globale pour une sous-variété transversale de dimension strictement inférieure à n

Soit U cette sous variété, p sa dimension et $\varphi(\hat{T}_\varepsilon(\hat{V})) = T'(U)$ le tube défini aux §§ 10 et 21. Posons $C = T'(U)$. \dot{C} est une variété transversale (§ 8, 3^{ème} exemple), nous pourrons donc appliquer à C la formule fondamentale (19.4). Nous prendrons une subdivision (D') relative à C qui admette pour sous complexe une triangulation de U . Démontrons d'abord la formule suivante:

$$(23.1) \quad \sum_{D_i^k \subset C} (-1)^k m(D_i^k) = \sum_{D_i^k \subset U} (-1)^k m(D_i^k).$$

D_j^s étant un simplexe quelconque de (D) , $D_i^k \subset D_j^s$ entraîne $m(D_i^k) = m(D_j^s)$. Pour démontrer la formule (23.1) il suffira de démontrer:

$$(23.2) \quad \sum_{D_j^s \subset D_j^s \cap C} (-1)^k = \sum_{D_i^k \subset D_j^s \cap U} (-1)^k \text{ ou } \chi(C \cap D_j^s) = \chi(U \cap D_j^s).$$

La propriété 8.1 montre que $U \cap D_j^s$ est une sous variété de dimension $q = s + p - n$; $C \cap D_j^s$ est, dans D_j^s , un tube autour de cette sous variété et l'admet pour rétract quand $\varepsilon \rightarrow 0$. Les sous variétés $C \cap D_j^s$ et $U \cap D_j^s$ ont donc les mêmes nombres de Betti donc la même caractéristique d'Euler Poincaré ce qui démontre les formules (23.2) et (23.1).

Le long de $\hat{C} = \varphi^{-1}(\dot{C})$ le champ X' est différentiable par simplexe \hat{d}' et strictement sortant par rapport à \hat{C} . Nous pouvons prendre pour cycle $\hat{\mathfrak{K}}^+(\hat{C})$ le cycle $X'(\hat{C})$ défini par l'application $\hat{\varphi} \circ X'$ de \hat{C} dans \mathfrak{B}_s . Compte tenu de (22.1), la formule (19.4) s'écrit:

$$(23.3) \quad \int_{T'(U)} \Omega_0^* - \int_{X'(T'(U))} -\Pi^* = \sum_{D_i^k \subset U} (-1)^k m(D_i^k).$$

La formule (21.2) donne alors la valeur du premier membre et nous obtenons la formule (19.6)

$$\int_{\hat{\mathfrak{S}}(U)} \Pi^* = \sum_{D_i^k \subset U} (-1)^k m(D_i^k) = \chi_f(U).$$

Remarque 23.1. Si $U = \dot{C}$ est le bord d'une variété compacte C à n dimensions on a $\hat{\mathfrak{S}}(U) = \hat{\mathfrak{S}}(C) = \hat{\mathfrak{S}}^+(C) - \hat{\mathfrak{S}}^-(C)$, la formule 19.6 devient:

$$(23.4) \quad \int_{\hat{\mathfrak{S}}^+(C)} \Pi^* - \int_{\hat{\mathfrak{S}}^-(C)} \Pi^* = \sum_{D_i^k \subset C} (-1)^k m(D_i^k) = \chi_f(C)$$

formule qui résulte aussi, par différence, de (19.4) et (19.5).

§ 24. Caractéristique χ_f des variétés transversales de dimensions impaires

Considérons d'abord une variété transversale U de dimension quelconque, un cycle $\hat{\mathfrak{S}}(U)$ défini au § 9 et le cycle $\check{\mathfrak{S}}(U) = \tilde{\varphi}(\hat{\mathfrak{S}}(U))$ correspondant. Appelons $\hat{\mathfrak{S}}'(\dot{U})$ la partie de $\hat{\mathfrak{S}}(U)$ engendrée par la sphère à $n - p - 1$ dimensions $\hat{\mathfrak{S}}^{n-p}(\dot{y})$ quand \dot{y} décrit U , munie de l'orientation induite par celle de $\hat{\mathfrak{S}}(\dot{U})$. Nous désignerons par $\check{\mathfrak{S}}'(\dot{U})$ le cycle défini par l'application $\tilde{\varphi}$ de $\hat{\mathfrak{S}}'(\dot{U})$ dans \mathfrak{B}_s .

Symétrie

Nous désignerons par un même symbole σ les automorphismes de \mathfrak{B} , \mathfrak{B}_s et \mathfrak{B}_s , qui, à un vecteur élément d'un de ces espaces font correspondre le vecteur opposé. π étant l'application qui à un vecteur fait correspondre son origine, on a

$$\pi \circ \sigma = \pi.$$

On en déduit, pour la forme $\sigma^* \Pi$ définie sur \mathfrak{B} comme image transposée de Π par σ :

$$(24.1) \quad -d \sigma^* \Pi = -\sigma^* d \Pi = \sigma^* \pi^* \Omega_0 = (\pi \sigma)^* \Omega_0 = \pi^* \Omega_0 = \Omega.$$

Par ailleurs:

$$f \circ \sigma = \sigma \circ f$$

d'où

$$(24.2) \quad \sigma^* \Pi^* = \sigma^* f^* \Pi = f^* \sigma^* \Pi.$$

\mathfrak{B} étant la sphère des vecteurs unitaires d'une fibre $\mathfrak{B}(\xi)$ orientée de manière à appartenir à la classe d'indice $+1$ dans le $(n-1)^{\text{ème}}$ groupe d'homologie de $\mathfrak{B}(\xi)$, on a:

$$\sigma(\mathfrak{B}) = (-1)^n \mathfrak{B}$$

et

$$(24.3) \quad \int_{\mathfrak{B}} \sigma^* \Pi = \int_{\sigma(\mathfrak{B})} \Pi = (-1)^n \int_{\mathfrak{B}} \Pi.$$

Détermination d'une forme Π particulière, symétrique ou antisymétrique

$$(24.4) \quad \text{Posons:} \quad \Pi' = \frac{1}{2} (\Pi + (-1)^n \sigma^* \Pi)$$

on a:

$$(24.5) \quad \sigma^* \Pi' = (-1)^n \Pi'.$$

Des relations (24.3) et (18.3) on déduit:

$$\int_{\mathfrak{B}} \Pi' = (1/2 + (-1)^{2n}/2) \int_{\mathfrak{B}} \Pi = \int_{\mathfrak{B}} \Pi = 1.$$

Comme l'intégrale de Π' sur un cycle Γ de dimension $n-1$ dans $\mathfrak{B}(\xi)$ dépend linéairement de l'indice I de la classe de Γ dans $(n-1)^{\text{ème}}$ groupe d'homologie de $\mathfrak{B}(\xi)$, on déduit de la relation précédente:

$$\int_{\Gamma} \Pi' = I.$$

De la relation (24.1) il résulte:

$$(24.6) \quad \Omega' = -d\Pi' = \frac{1}{2} (1 + (-1)^n) \Omega = \pi^* (\Omega'_0);$$

avec

$$\Omega'_0 = \frac{1}{2} (1 + (-1)^n) \Omega_0.$$

Comme $\chi(W) = 0$ pour n impair on a, quelque soit la parité de n :

$$\int_W \Omega'_0 = \chi(W) = \int_W \Omega_0;$$

Nous pouvons énoncer:

Propriété 24.1. Les formes différentielles Ω'_0 , Ω' et Π' satisfont donc aux relations (18.1), (18.2) et (18.3) du théorème de Chern. Les formes $\Omega'^*_0 = f^* \Omega'_0$, $\Omega'^* = f^* \Omega'$ et $\Pi'^* = f^* \Pi'$ sont donc des formes Ω^*_0 , Ω^* et Π^* particulières, symétriques pour n pair et antisymétriques pour n impair.

De la relation (24.5) on déduit:

$$\int_{\sigma(\hat{\psi}'(U))} \Pi'^* = \int_{\hat{\psi}'(U)} \sigma^* \Pi'^* = (-1)^n \int_{\hat{\psi}'(U)} \Pi'^*.$$

Or on a d'après les définitions du § 9:

$$\sigma(\dot{\mathfrak{S}}^{n-p}(y)) = (-1)^{n-p} \dot{\mathfrak{S}}^{n-p}(y) \text{ et } \sigma(\dot{\mathfrak{S}}'(U)) = (-1)^{n-p} \dot{\mathfrak{S}}'(U)$$

donc

$$\int_{\sigma(\dot{\mathfrak{S}}'(U))} \Pi'^* = (-1)^{n-p} \int_{\dot{\mathfrak{S}}'(U)} \Pi'^*.$$

Des deux expressions que nous venons d'obtenir pour la même intégrale nous tirons

$$(24.7) \quad \int_{\dot{\mathfrak{S}}'(U)} \Pi'^* = (-1)^p \int_{\dot{\mathfrak{S}}'(U)} \Pi'^*.$$

On en déduit:

Pour p impair:

$$(24.8) \quad \int_{\dot{\mathfrak{S}}'(U)} \Pi'^* = 0$$

Pour p quelconque: En vue d'une prochaine application nous allons supposer que la chaîne $\dot{\mathfrak{S}}'(U)$ est la somme de deux chaînes également différentiables par cellules fermées:

$$\dot{\mathfrak{S}}'(U) = \dot{\mathfrak{S}}'^+(U) - \dot{\mathfrak{S}}'^-(U)$$

et que

$$\dot{\mathfrak{S}}'^+(U) = (-1)^{n-p-1} \sigma(\dot{\mathfrak{S}}'^-(U)).$$

De ces deux relations on déduit:

$$\begin{aligned} \int_{\dot{\mathfrak{S}}'(U)} \Pi'^* &= \int_{\dot{\mathfrak{S}}'^+(U)} \Pi'^* + (-1)^{n-p} \int_{\sigma(\dot{\mathfrak{S}}'^-(U))} \Pi'^* = \int_{\dot{\mathfrak{S}}'^+(U)} \Pi'^* + (-1)^{n-p} \int_{\dot{\mathfrak{S}}'^-(U)} \sigma^* \Pi'^* \\ &= (1 + (-1)^p) \int_{\dot{\mathfrak{S}}'^+(U)} \Pi'^* \end{aligned}$$

d'où, pour p pair:

$$(24.9) \quad \int_{\dot{\mathfrak{S}}'^+(U)} \Pi'^* = (1/2) \int_{\dot{\mathfrak{S}}'_0(U)} \Pi'^*.$$

Application des formules (24.8) et (24.9) à une variété U , de dimension impaire p , et à son bord \hat{U} , de dimension paire $p-1$.

Appelons $\hat{\mathfrak{S}}^+(\hat{U})$ la partie de $\hat{\mathfrak{S}}(\hat{U})$ engendrée par la demi-sphère à $n-p$ dimensions $\hat{\mathfrak{S}}^{n-p+1}(\hat{y})$ quand \hat{y} décrit \hat{U} , et munie de l'orientation induite par celle de $\hat{\mathfrak{S}}(\hat{U})$; appelons $\dot{\mathfrak{S}}^+(U)$ la chaîne déterminée par son application $\tilde{\varphi}$ dans \mathfrak{B}_s . On a

$$(24.10) \quad \dot{\mathfrak{S}}(U) = \dot{\mathfrak{S}}'(U) + \dot{\mathfrak{S}}^+(U).$$

Posons $(\hat{\mathfrak{S}}^-)^{n-p+1}(\mathfrak{y}) = (-1)^{n-p+1} \sigma [\check{\mathfrak{S}}^{n-p+1}(\mathfrak{y})]$; c'est la chaîne déterminée par l'immersion dans $\hat{\mathfrak{B}}_s$ de la demi-sphère symétrique $\hat{\mathfrak{S}}^{n-p+1}(\mathfrak{y})$ par rapport à \mathfrak{y} dans $\hat{\mathfrak{B}}_s^+$; et leur réunion est le cycle déterminé par l'immersion de la sphère continûment orientée comme $\hat{\mathfrak{S}}^{n-p+1}(\mathfrak{y})$. \hat{U} étant sans bord, lorsque \mathfrak{y} décrit \hat{U} , cette sphère engendre le bord entier d'une variété qui a toutes les propriétés d'un voisinage orienté $\hat{\mathfrak{S}}(\hat{U})$. Nous désignerons donc ce bord orienté par $\hat{\mathfrak{S}}(\hat{U})$ et le cycle qu'il détermine par l'application $\tilde{\varphi}$ dans \mathfrak{B}_s par $\check{\mathfrak{S}}(\hat{U})$. De cette définition il résulte que:

$$(24.11) \quad \check{\mathfrak{S}}(\hat{U}) = \check{\mathfrak{S}}^+(\hat{U}) - \check{\mathfrak{S}}^-(\hat{U}) \text{ avec } \check{\mathfrak{S}}^-(\hat{U}) = (-1)^{n-p} \sigma(\check{\mathfrak{S}}^+(\hat{U})).$$

Nous pouvons donc appliquer la formule (24.9) en remplaçant U par \hat{U} , p par $p-1$, $\check{\mathfrak{S}}'$ par $\check{\mathfrak{S}}$, il vient:

$$(24.12) \quad \int_{\check{\mathfrak{S}}^+(\hat{U})} \Pi'^* = \frac{1}{2} \int_{\check{\mathfrak{S}}(\hat{U})} \Pi'^* = \frac{1}{2} \chi_f(\hat{U}).$$

La dernière égalité résulte de la formule (19.6) puisque le cycle $\check{\mathfrak{S}}(\hat{U})$ est un cycle $\mathfrak{K}(\hat{U})$ particulier. De cette même formule on déduit:

1°) si $p \leq n-1$

$$\chi_f(U) = \int_{\check{\mathfrak{S}}(U)} \Pi'^*$$

et de la formule (24.8), applicable puisque p est supposé impair, on déduit que l'intégrale de Π^* sur $\check{\mathfrak{S}}'(U)$ est nulle. La formule (24.10) donne alors:

$$\chi_f(U) = \int_{\check{\mathfrak{S}}(U)} \Pi'^* = \int_{\check{\mathfrak{S}}'(U)} \Pi'^* + \int_{\check{\mathfrak{S}}(U)} \Pi'^* = \int_{\check{\mathfrak{S}}(U)} \Pi'^* = \frac{1}{2} \chi_f(\hat{U}).$$

2°) si $p=n$ c'est que n est impair donc $\Omega'_0 = \Omega'^*_0 = 0$; la formule (19.4) donne alors aussi

$$\chi_f(U) = \int_{\check{\mathfrak{S}}^+(U)} \Pi'^* = \frac{1}{2} \chi_f(\hat{U}).$$

En introduisant la caractéristique intérieure $\chi'(U) = \chi(U) - \chi(\hat{U})$ nous obtenons la formule suivante:

pour U de dimension impaire:

$$(24.13) \quad \chi_f(U) = -\chi'_f(U) = \frac{1}{2} \chi_f(\hat{U}).$$

La formule (19.7) est démontrée; elle généralise la formule classique à laquelle elle se ramène quand f est un homéomorphisme de V sur W .

La démonstration du Théorème II est achevée.

Symboles généraux

$\dots \hat{}$ § 1	$\dots \text{ }_s$ §§ 1 et 2
$\dots \tilde{}$ (\tilde{f} et $\tilde{\varphi}$) §§ 1 et 2	$\dots \text{ }^+$ pour \mathfrak{B} et \mathfrak{B} §§ 1 et 2
$\dots \bar{}$ adhérence, définition 1.2	$\dots \text{ }^+$ vecteurs sortants § 11
$\dots \dot{}$ bord, définition 1.2	$\dots \text{ }^-$ vecteurs rentrants § 11
$\dots \circ$ intérieur, définition 1.2	Une sous-variété orientée (sans singularité § 1)
$\ \ $ note 2, p. 203	et la chaîne définie par son immersion
$\dots \ast$ § 18	canonique sont représentées par le même
$\dots \text{ }_j^k$ et $\dots \text{ }_j^q$ définition 1.3	symbole.

Index des notations

$(AR)_1$ et $(AR)_2$ définition 2.1	E t propriété 30.3, remarque 30.1
\hat{a}_i^k, \hat{a}_j^q ou \hat{a}_i^r définition 3.1	$\varepsilon, \varepsilon_i^k, (\varepsilon)_1, (\varepsilon)_2$ §§ 3, 4, 5, § 13
$\hat{b}_\varepsilon (a_i^k)$ ou \hat{b} § 5	f application étudiée § 2
B § 13	\mathfrak{F} fibre de \mathfrak{B} et \mathfrak{B} §§ 1, 2
β § 12	φ définition 1.4
Champ barycentrique \hat{X} § 3	G § 17
Coordonnées barycentriques t_j § 3	$\hat{H}(\hat{y}), \hat{H}^{n-p}(\hat{y}), \hat{H}^{n-p+1}(\hat{y})$ définition 9.2
$\hat{C}, C = \varphi(\hat{C})$ § 6	$\hat{H}(\hat{U})$ définition 9.2
C_k définition 1.1	$\hat{\mathfrak{H}}(\hat{y}), \hat{\mathfrak{H}}(\hat{U})$ définition 9.4
Chaînes différentiables par cellules, chaînes	$\hat{\mathfrak{H}}^+(\hat{C}), \hat{\mathfrak{H}}^-(\hat{C})$ formules (11.2)
équivalentes § 9	homothétie (A, K) § 3
$\hat{\gamma} \hat{I}$ § 14	homéomorphismes uni- et bidifférentiables, dé-
Décomposition canonique de \hat{X} § 3	finition 1.1
(\hat{D}) définitions 1.3; 1.4	indice simplicial: définition 3.1
\hat{D}_i^k définition 1.3	i indice de numérotation § 1
$\hat{D}_i^k(\hat{x})$ définition 1.3	I propriété 14.2
\hat{D}_ε^q § 5	j indice de numérotation
(\hat{D}') définition 10.1	J propriété 14.2
(\hat{d}) définition 3.1	k dimension d'un simplexe § 1
(\hat{d}') § 10	$\hat{\mathfrak{K}}(\hat{U}), \hat{\mathfrak{K}}(U)$ définition 11.1, propriété 11.6
$\hat{\delta}^{q+k}$ propriété 4.4	$\hat{\mathfrak{K}}^+(\hat{C}), \hat{\mathfrak{K}}^-(\hat{C})$ formules 11.2
$\hat{E}_1, \hat{E}_2, \hat{E}_6$, § 10	$(L)_1, (L)_2$ définitions 7.3
$\mathfrak{E}_1, \mathfrak{E}_5, \mathfrak{E}_6, \mathfrak{E}_{2,1}$ § 10	$\hat{L}^1(\hat{y}), \hat{L}^1(\hat{y})$ définitions 7.3
$\hat{\mathfrak{E}}_0$ définition 11.1	$\lambda_\varepsilon(\hat{x})$ § 3
$\hat{\mathfrak{E}}$ propriété 11.1	$m(x), m(\hat{x})$ définition 13.1
$\hat{E}t$ définition 4.1	$m(D_i^k), m(\hat{D}_i^k)$ propriété 13.1

- μ définition 7.2
 μ_1 propriété 9.2
 n dimension de \hat{V} , V et W , § 1
 ν indice simplicial, définition 3.1
 Ω_0 , Ω , Ω_0^* et Ω^* § 18
 p dimension de C ou U
 $(P)_1$, $(P)_2$ définitions 7.3
 $\hat{P}^{n-p}(\hat{y})$, $\hat{\mathfrak{P}}^{n-p}(\hat{y})$ définitions 7.3
 $\hat{P}^{n-p+1}(\hat{y})$, $\hat{\mathfrak{P}}^{n-p+1}(\hat{y})$ définitions 7.3
 $\hat{P}(\hat{y})$, $\hat{\mathfrak{P}}(\hat{y})$ définitions 9.1
 π , $\hat{\pi}$ définition 1.6
 π , pour \mathfrak{B} § 2
 Π , Π^* § 18
 R^k espace euclidien à k dimensions
 s^{n-1} § 12
 σ^{n-1} § 13
 Sous-étoile définition 4.2
 Triangulation régulière définition 1.4
 $(TR)_1$, $(TR)_2$ définition 1.4
 t^r coordonnée barycentrique définition 3.1
 $\hat{T}(\hat{D}_i^k)$ définition 4.1
 $\hat{T}_e(\hat{y})$, $\hat{T}'_e(\hat{y})$ définition 4.2
 $\hat{T}_e(\hat{D}_i^k)$, $\hat{T}'_e(\hat{D}_i^k)$ définitions 4.3
 $\hat{T}_e(\hat{C})$ § 6
 $\hat{T}'(\hat{U})$ définition 10.1
 $\hat{T}'^+(\hat{C})$, $\hat{T}'^-(\hat{C})$ formules 11.1
 $\hat{T}''^+(\hat{C})$, $\hat{T}''^-(\hat{C})$ formules 11.1
 \hat{U} § 7
 \mathbb{U}_s définition 9.3
 V variété objet §§ 1, 2
 \mathfrak{B}_s , $\mathfrak{B}_s(B)$ vecteurs spéciaux, définition 1.5
 $(VT)_1$, $(VT)_2$ § 7
 W variété image § 2
 \mathfrak{B} , \mathfrak{B}^+ § 2
 \hat{x} point courant sur \hat{V}
 \hat{X} champ barycentrique § 3
 \hat{X}'_e , \hat{X}''_e , \hat{X}'''_e § 3
 \hat{X}' définition 10.1
 \hat{X} formule (14.1)
 ξ point courant sur W
 χ caractéristique d'Euler-Poincaré
 χ_r définition 19.1
 \hat{y} point courant sur \hat{C} ou \hat{U}
 $Y(\hat{x})$ formule 12.1
 $Z(\hat{x})$ formule 12.1.

Bibliographie

- [1]. AHLFORS, Zur Theorie der Überlagerungsflächen, *Acta Math.* vol. 65 (1935), pp. 157–191.
 [2]. —, Über die Anwendung differentialgeometrischer Methoden zur Untersuchung von Überlagerungsflächen, *Acta Soc. Sci. Fen. Nova Ser. A*, Tom. II, n° 6 (1937).
 [3]. C. B. ALLENDOERFER et A. WEIL, The Gauss-Bonnet theorem for Riemannian polyhedra, *Trans. Amer. Math. Soc.* Vol. 53 (1943), pp. 101–129.
 [4]. CHERN, A simple intrinsic proof of the Gauss-Bonnet formula for closed Riemannian manifolds, *Annals of Math.* Vol. 45 (1944), pp. 747–752.
 [5]. —, On the curvatura integra in a Riemannian manifold, *Annals of Math.* vol. 45, N° 4 (1945).
 [6]. —, Characteristic classes of Hermitian manifolds, *Annals of Math.* vol. 47, N° 1 (1946)
 [7]. LEFSCHETZ, *Introduction to topology*. Princeton Univ. Press 1949.
 [8]. M.-H. SCHWARTZ, Applications intérieures régulières dans les variétés à n dimensions, *C. R. Ac. Sci.* t. 230 (1950), p. 1254.

- [9]. M.-H. SCHWARTZ, Formules apparentées à celles de Nevanlinna Ahlfors pour certaines applications d'une variété à n dimensions dans une autre, tome 82, 1954 *Bull. de la Soc. Math. de France*.
- [10]. STEENROD, *The topology of fibre bundles*. Princeton Univ. Press 1951.
- [11]. STOLL, Die beiden Hauptsätze der Wertverteilungstheorie bei Funktionen mehrerer komplexer Veränderlichen (I), *Acta Math.*, vol. 90 (1953). (II) à paraître.
WEIL cf. ALENDOERFER.
- [12]. H. et J. WEYL, Meromorphic functions and analytic curves, *Annals of Math. Studies*, Princeton Univ. Press. N. J. 1943.
- [13]. WHITNEY, On the topology of differentiable manifolds. *Lectures in Topology*, Univ. of Mich. Press 1941.

Table des matières

	Page
Introduction	189

CHAPITRE I

Applications régulières

I

Définitions

§ 1. Triangulation régulière d'une variété différentiable	191
§ 2. Application régulière d'une variété différentiable dans une autre	194

II

Champ barycentrique relatif à (D)

§ 3. Définition et propriétés du champ barycentrique \hat{X}	196
§ 4. Comportement du champ \hat{X} au voisinage d'un simplexe \hat{D}_i^k	200
§ 5. Définition et propriétés de l'homoboule orientée $\hat{\delta}_i(\hat{a}^q)$	202
§ 6. Définition et propriétés des tubes orientés $\hat{T}_e(\hat{C})$	203

III

Variétés transversales par rapport à la triangulation (D)

§ 7. Définition des variétés transversales	205
§ 8. Variétés transversales: exemples et propriétés	207
§ 9. Définitions et propriétés de $\hat{H}(\hat{U})$ et $\hat{\mathfrak{H}}(\hat{U})$	208
§ 10. Variété transversale et champ barycentrique	212
§ 11. Cycles $\hat{\mathfrak{H}}(\hat{U})$ et $\hat{\mathfrak{H}}(U)$	214

IV

Images du champ \tilde{X} par $\tilde{\varphi}$ et $\tilde{f} \circ \tilde{\varphi}$

	Page
§ 12. Définitions; correspondance entre certains groupes d'homologie	217
§ 13. Degré topologique local de f	219
§ 14. Prolongement canonique des vecteurs spéciaux ou nuls au voisinage d'un simplexe D^q	221
§ 15. Détermination du coefficient de proportionnalité entre les indices I et J	223
§ 16. Énoncé du théorème I	225
§ 17. Complexe (\mathcal{G}) des singularités topologiques	226

CHAPITRE II

Formes différentielles images transposées des formes Ω_0 et Π par une application régulière

§ 18. Rappel d'une définition des formes Ω_0 , Ω et Π	228
§ 19. Énoncé du théorème II	229
§ 20. Intégrale de Ω_0^* au voisinage d'un zéro a du champ X	232
§ 21. Intégrale de Ω_0^* au voisinage d'une variété transversale	233
§ 22. Formule globale	234
§ 23. Formule globale pour une sous-variété transversale de dimension strictement inférieure à n	236
§ 24. Caractéristique χ_I des variétés transversales de dimensions impaires	237
Symboles généraux et index des notations	241
Bibliographie	242
Table des matières	243