SUR LE PRINCIPE DE DIRICHLET.

PAR

S. ZAREMBA

à CRACOVIE.

I. Introduction.

N° 1. Je me propose de développer dans ce mémoire les idées esquissées dans la communication que j'ai faite au IV[e] Congrès des mathématiciens, tenu à Rome du 6—11 Avril, 1908.

La méthode que je vais exposer s'applique aussi aisément à l'espace qu'au plan, de sorte que c'est seulement pour fixer les idées que je me bornerai au cas du plan.[1]

N° 2. Considérons dans le plan un système de coordonnées rectangulaires (x, y) ainsi qu'un domaine (D), d'un seul tenant, ne s'étendant pas à l'infini et que je supposerai être quarrable. Envisageons en outre, d'une part une fonction continue σ, définie sur la frontière (S) du domaine (D), et d'autre part l'ensemble (E) de toutes les fonctions f jouissant des propriétés suivantes:

1° Chacune des fonctions f est continue à l'intérieur du domaine (D) ainsi que sur la frontière (S) de ce domaine.

2° Les valeurs périphériques de chacune des fonctions f coïncident avec les valeurs de la fonction σ.

3° A l'*intérieur* du domaine (D), les dérivées $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ sont continues sans avoir nécessairement des valeurs périphériques déterminées. Il peut arriver que, pour aucune des fonctions f, l'intégrale

$$A(f) = \iint\limits_{(D)} \left\{ \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 \right\} dx\,dy \tag{1}$$

[1] Voir la note à la fin du mémoire.

ne prenne une valeur finie. C'est ce que M. HADAMARD[1] a montré sur un exemple très simple.

Nous admettrons que la fonction σ vérifie les conditions voulues pour que la circonstance précédente ne se présente pas. Les valeurs de l'intégrale $A(f)$ admettront alors une borne inférieure I, parfaitement déterminée.

Cela posé voici le Principe de Dirichlet tel que le comprenait RIEMANN: il existera dans l'ensemble (E) une fonction u vérifiant l'équation

$$A(u) = I. \tag{2}$$

C'est, on le sait, de là que RIEMANN concluait la possibilité du Problème de Dirichlet.

A la suite de la critique bien connue de WEIERSTRASS, les recherches relatives à l'existence de la solution du Problème de Dirichlet restèrent pendant longtemps indépendantes du fait de l'existence du nombre I. Ce n'est qu'en 1897 que M. CESARE ARZELÀ[2] a prévu avec une remarquable netteté le parti qu'il est possible de tirer de ce fait[3] et c'est seulement quelques années plus tard que M. HILBERT[4] a réussi, dans certains ces particuliers à triompher de toutes les difficultés de la question.

Ou a obtenu depuis, dans la même voie, des résultats d'une remarquable généralité.[5] En reprenant à mon tour la question, je me propose d'indiquer une méthode nouvelle qui permettra de retrouver ces résultats d'une façon très simple, sans rien faire perdre d'essentiel à leur généralité.

---

[1] HADAMARD. Sur le Problème de Dirichlet (Bulletin de la Société mathématique de France, 1906 p. 135).

[2] C. ARZELÀ. Sul Principio di Dirichlet. (Nota letta alla R. Accademia delle Sienze dell'Instituto di Bologna nell'Adunza del 24 Gennaio 1897).

[3] A la vérité M. H. WEBER a tenté, dès 1869, (Note zu Riemanns Beweis des Dirichletschen Princips, Journal de Borchardt, t. 71) de compléter le raisonnement de Riemann, mais les considérations développées dans ce travail, écrit avant la publication de la critique de Weierstrass, sont sujettes à de sérieuses objections.

[4] A) Ueber das Dirichletsche Princip (Jahresberichte der Deutschen Mathematiker-Vereinigung 1900).

B) Ueber das Dirichletsche Princip (Festschrift zur Feier des 150-jährigen Bestehens der Kgl. Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, 1901).

[5] Voir en particulier, dans les Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, les travaux suivants:

A) BEPPO LEVI, Sul Principio di Dirichlet (1906).

B) FUBINI, Il Principio di minimo i teoremi di esistenza per i problemi al contorno relativi alle equazioni alle derivate parziale di ordini pari (1907).

C) LEBESGUE, Sur le principe de Dirichlet (1907).

II. Le Problème de Dirichlet transformé.

N° 3. Posons d'une facon générale:

$$B(P, Q) = \iint\limits_{(D)} \left\{\frac{\partial P}{\partial x}\frac{\partial Q}{\partial x} + \frac{\partial P}{\partial y}\frac{\partial Q}{\partial y}\right\} dx\, dy \tag{1}$$

et désignons par φ une fonction donnée, quelconque à cela près que l'intégrale $A(\varphi) = B(\varphi, \varphi)$ ait une valeur finie et bien déterminée: la fonction φ pourra donc ne pas avoir de dérivées du premier ordre en certains points intérieurs au domaine (D), elle pourra même admettre elle-même des lignes de discontinuité. Cela posé, proposons-nous de déterminer une fonction v, harmonique à l'intérieur du domaine (D), telle que l'intégrale $A(v)$ soit finie et telle en outre que, pour toute fonction h, harmonique à l'intérieur du domaine (D), l'on ait

$$B(\varphi, h) = B(v, h), \tag{2}$$

pourvu que l'intégrale $A(h)$ ne soit pas dépourvue de signification.

J'appellerai ce problème, Problème de Dirichlet transformé, ou même simplement, Problème transformé.

On verra, à la fin de ce chapitre, que le problème précédent, tel que nous l'avons posé, est toujours possible, mais, dès maintenant, il est aisé de montrer que la solution, quand elle existe, est déterminée à une constante additive près. En effet, lorsqu'une fonction harmonique v_0 est une solution du Problème, la fonction:

$$v_0 + \text{Const.}$$

en est évidemment une autre. D'autre part si chacune des fonctions v' et v'' est une solution du problème considéré, on aura:

$$B(v', h) = B(\varphi, h),$$
$$B(v'', h) = B(\varphi, h),$$

d'où:

$$B(v' - v'', h) = 0,$$

pourvu que l'intégrale $A(h)$ ne soit pas infinie.

Posons, comme il est permis,

$$h = v' - v'',$$

il viendra:

$$B(v' - v'', v' - v'') = A(v' - v'') = 0,$$

d'où:

$$v' - v'' = \text{Const.}$$

Le théorème est donc établi.

N° 4. Envisageons le cas particulier où la frontière du domaine (D) se réduit à un cercle (C) de centre O et de rayon r. Le point O étant pris pour pôle d'un système de coordonnées polaires (ϱ, Θ), posons:

$$\left\{\begin{aligned} X_k &= \frac{1}{\sqrt{k\pi}}\left(\frac{\varrho}{r}\right)^k \cos k\Theta \\ Y_k &= \frac{1}{\sqrt{k\pi}}\left(\frac{\varrho}{r}\right)^k \sin k\Theta, \end{aligned}\right. \tag{3}$$

ainsi que:

$$\left\{\begin{aligned} a_k &= B(\varphi, X_k) \\ b_k &= B(\varphi, Y_k). \end{aligned}\right. \quad (k = 1, 2, 3, \ldots) \tag{4}$$

Je dis que la solution générale du Problème transformé sera donnée par la formule suivante:

$$v = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k X_k + b_k Y_k), \tag{5}$$

où a_0 représente une constante arbitraire.

Pour le démontrer, posons:

$$v_n = a_0 + \sum_{k=1}^{n} (a_k X_k + b_k Y_k).$$

En se reportant aux formules (3) et (4) on s'assurera aisément que l'on a:

$$A(\varphi - v_n) = A(\varphi) - \sum_{k=1}^{n} (a_k^2 + b_k^2).$$

Donc la série

$$\sum_{k=1}^{\infty} (a_k^2 + b_k^2)$$

est convergente. Cela prouve, on le vérifiera avec quelque attention, que la formule (5) définit une fonction harmonique à l'intérieur du domaine limité par le cercle (C) et que l'on a:

$$A(v) = \sum_{k=1}^{\infty} (a_k^2 + b_k^2). \tag{6}$$

L'intégrale $A(v)$ a donc une valeur finie.

Observons maintenant ceci: pour toute fonction h, harmonique à l'intérieur du cercle (C), nous avons le développement en série suivant:

$$h = \alpha_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (\alpha_k X_k + \beta_k Y_k), \tag{7}$$

en désignant par les α et β des coefficients constants. Supposons que l'intégrale $A(h)$ ait un sens. Nous aurons:

$$A(h) = \sum_{k=1}^{\infty} (\alpha_k^2 + \beta_k^2), \tag{8}$$

la série du second membre étant covergente. Les formules (7) et (4) donnent aisément:

$$B(\varphi, h) = \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \alpha_k + b_k \beta_k),$$

en tenant compte de la convergence de la série (8).

D'autre part il résulte des formules (5) et (7) ainsi que de la convergence des séries (6) et (8) que l'on a:

$$B(v, h) = \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \alpha_k + b_k \beta_k).$$

On a donc:

$$B(\varphi, h) = B(v, h)$$

pourvu que l'intégrale $A(h)$ ait un sens. Il est donc prouvé que la formule (5) fait connaître une solution du Problème transformé pour le cercle et, en se reportant au numéro précédent, on s'assure de suite que la solution trouvée est bien la solution générale du Problème.

N° 5. Passons au cas où le domaine (D) pourrait être défini comme l'ensemble des points dont chacun appartient à l'un au moins de deux domaines (D_1) et (D_2) ayant des points intérieurs communs et tels que, pour chacun d'eux, on sache résoudre le Problème transformé.

Dans ce cas, un procédé alterné permettra de résoudre le Problème pour le domaine (D) lui-même.

Pour établir ce point, désignons, comme précédemment, par φ la fonction donnée et formons une suite infinie dont le premier terme φ_0 représente la fonction définie par l'équation

$$\varphi_0 = \varphi,$$

le terme général φ_{2k+a}, où a désigne l'un des nombres 1 ou 2, étant une fonction se déduisant de la fonction φ_{2k+a-1} de la façon suivante: à l'intérieur du domaine (D_a), la fonction φ_{2k+a} est égale à une solution du Problème transformé pour ce domaine et par rapport à la fonction φ_{2k+a-1}; dans le reste du domaine (D) on a

$$\varphi_{2k+a} = \varphi_{2k+a-1}.$$

D'après cela, la fonction φ_{2k+a} ne sera définie, dans la partie (D_a) du domaine (D) qu'à une constante additive près, mais il n'y a pas lieu de lever cette indétermination, parce que les dérivées

$$\frac{\partial \varphi_{2k+a}}{\partial x} \text{ et } \frac{\partial \varphi_{2k+a}}{\partial y}$$

interviendront seules dans les considérations qui vont suivre.

A l'intérieur du domaine (D_a), la lettre a représentant toujours l'un des nombres 1 ou 2, la fonction φ_{2t+a} est une fonction harmonique et l'intégrale

$$\iint\limits_{(D_a)} \left\{ \left(\frac{\partial \varphi_{2t+a}}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi_{2t+a}}{\partial y}\right)^2 \right\} dx\,dy$$

a une valeur finie, pour toute valeur entière et non négative de t. Cela étant, il suffira de se reporter à la définition de la fonction φ_{2k+a} pour reconnaître que l'on a:

$$(9)\quad \left\{ \begin{aligned} &\iint\limits_{(D_a)} \left\{ \frac{\partial \varphi_{2k+a}}{\partial x}\frac{\partial \varphi_{2t+a}}{\partial x} + \frac{\partial \varphi_{2k+a}}{\partial y}\frac{\partial \varphi_{2t+a}}{\partial y} \right\} dx\,dy = \\ &\qquad = \iint\limits_{(D_a)} \left\{ \frac{\partial \varphi_{2k+a-1}}{\partial x}\frac{\partial \varphi_{2t+a}}{\partial x} + \frac{\partial \varphi_{2k+a-1}}{\partial y}\frac{\partial \varphi_{2t+a}}{\partial y} \right\} dx\,dy. \end{aligned} \right.$$

Or, à l'intérieur du domaine $(D - D_a)$, on a

$$\varphi_{2k+a} = \varphi_{2k+a-1}.$$

Donc l'égalité (9) ne cesserait pas d'être vérifiée si les intégrations, au lieu d'être bornées au domaine (D_a), étaient étendues à tout le domaine (D). Par conséquent nous arrivons au résultat suivant: on a

$$(10)\qquad B(\varphi_n, \varphi_m) = B(\varphi_n, \varphi_{m-1}),$$

pourvu que les entiers positifs n et m vérifient la congruence

$$m \equiv n \quad (\text{mod. } 2),$$

ou, ce qui revient au même, pourvu que la somme $m + n$ soit paire.

Lorsque le nombre m est supérieur à l'unité, rien n'empêche de changer, dans la relation (10), n en $m-1$ et m en $n+1$. En tenant compte de la relation ainsi obtenue, on trouve

$$B(\varphi_n, \varphi_m) = B(\varphi_{n+1}, \varphi_{m-1}).$$

Il est aisé d'en conclure ceci: lorsque chacun des entiers p et q est supérieur à zéro et lorsque leur somme est paire, l'intégrale

$$B(\varphi_p, \varphi_q) \tag{11}$$

ne dépend que de la somme $p+q$.

En se reportant de nouveau à la relation (10), on conclura aisément de là que l'intégrale (11) jouit de la même propriété encore dans le cas où le somme $p+q$ est impaire et cela, sans que la valeur zéro pour l'un des entiers p et q soit alors à exclure. Il résulte de ces propriétés de l'intégrale (11) que l'on peut poser:

$$I_{p+q} = B(\varphi_p, \varphi_q).$$

La relation (10) pourra alors s'écrire ainsi:

$$I_{2k} = I_{2k-1} \quad (k = 1, 2, 3, \ldots). \tag{12}$$

Cette relation nous apprend que tous les I_n sont positifs et, moyennant l'inégalité de M. Schwarz, elle donne:

$$I_{2k}^2 \leqq I_{2k} I_{2k-2},$$

d'où:

$$I_{2k} \leqq I_{2k-2}. \quad (k = 1, 2, 3, \ldots)$$

En se reportant de nouveau à l'équation (12), on déduit immédiatement de la relation précédente la conséquence suivante: la relation

$$0 \leqq I_n \leqq I_{n-1} \tag{13}$$

subsiste pour toute valeur entière et positive de n.

On a donc:

$$\lim_{n=\infty} I_n = I, \tag{14}$$

en désignant par I un nombre non négatif parfaitement déterminé.

N° 6. Nous avons:

$$A(\varphi_p - \varphi_q) = I_{2p} - 2 I_{p+q} + I_{2q}.$$

Par conséquent:

$$\lim_{\substack{p=\infty \\ q=\infty}} A(\varphi_p - \varphi_q) = 0, \tag{15}$$

en vertu de l'équation (14).

L'équation (15) entraîne évidemment les suivantes:

$$\left\{\begin{aligned} &\lim_{\substack{p=\infty \\ q=\infty}} \iint\limits_{(D_1)} \left\{\frac{\partial \varphi_p}{\partial x} - \frac{\partial \varphi_q}{\partial x}\right\}^2 dx\,dy = 0 \\ &\lim_{\substack{p=\infty \\ q=\infty}} \iint\limits_{(D_2)} \left\{\frac{\partial \varphi_p}{\partial x} - \frac{\partial \varphi_q}{\partial x}\right\}^2 dx\,dy = 0. \end{aligned}\right. \tag{16}$$

Or suivant que l'entier positif n sera impair ou pair, la fonction φ_n et par conséquent aussi la fonction $\frac{\partial \varphi_n}{\partial x}$, seront des fonctions régulièrement harmoniques à l'intérieur du domaine (D_1) ou du domaine (D_2). Donc, en s'appuyant sur les théorèmes que j'ai établis aux § 5 et 6 de mon mémoire *Sur l'intégration de l'équation biharmonique,*[1] on peut énoncer les propositions suivantes:

1° L'équation:

$$v'_1 = \lim_{k=\infty} \frac{\partial \varphi_{2k+1}}{\partial x}, \tag{17}$$

équivalente à l'équation:

$$v'_1 = \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} + \sum_{k=0}^{\infty}\left\{\frac{\partial \varphi_{2k+3}}{\partial x} - \frac{\partial \varphi_{2k+1}}{\partial x}\right\},$$

définit une fonction v'_1, régulièrement harmonique à l'intérieur du domaine (D_1) et l'on a:

$$\lim_{k=\infty} \iint\limits_{(D_1)} \left(v'_1 - \frac{\partial \varphi_{2k+1}}{\partial x}\right)^2 dx\,dy = 0. \tag{18}$$

2° L'équation:

$$v''_1 = \lim_{k=\infty} \frac{\partial \varphi_{2k}}{\partial x} \tag{19}$$

définit une fonction v''_1 régulièrement harmonique à l'intérieur du domaine (D_2) et l'on a:

$$\lim_{k=\infty} \iint\limits_{(D_2)} \left\{v''_1 - \frac{\partial \varphi_{2k}}{\partial x}\right\}^2 dx\,dy = 0. \tag{20}$$

Les équations (16) permettent de déduire des équations (18) et (20) les équations plus générales que voici:

[1] Bulletin de l'Academie des Sciences de Cracovie. Janvier 1908.

$$(21)\qquad \begin{cases} \lim\limits_{p=\infty} \iint\limits_{(D_1)} \left(v'_1 - \dfrac{\partial \varphi_p}{\partial x}\right)^2 dx\, dy = 0 \\ \lim\limits_{p=\infty} \iint\limits_{(D_2)} \left(v''_1 - \dfrac{\partial \varphi_p}{\partial x}\right)^2 dx\, dy = 0. \end{cases}$$

Désignons par (D_0) le domaine commune aux domaines (D_1) et (D_2) et considérons l'identité suivante:

$$\iint\limits_{(D_0)} (v'_1 - v''_1)^2\, dx\, dy = \iint\limits_{(D_0)} \left\{\left(v'_1 - \frac{\partial \varphi_p}{dx}\right) - \left(v''_1 - \frac{\partial \varphi_p}{\partial x}\right)\right\}^2 dx\, dy\,.$$

Les équations (21) nous apprennent que le second membre de cette identité tend vers zéro lorsque l'entier p croît indéfiniment. D'ailleurs le premier membre de l'identité considérée ne dépend pas de p. On a donc:

$$\iint\limits_{(D_0)} (v'_1 - v''_1)^2\, dx\, dy = 0.$$

Cela prouve que l'on a:

$$v'_1 = v''_1$$

à l'intérieur du domaine (D_0), commun aux domaines (D_1) et (D_2). On définira donc une fonction v_1 riguliërement harmonique à l'intérieur de tout le domaine (D) en spécifiant qu'elle est égale à v'_1 à l'intérieur du domaine (D_1) et à v''_1 à l'intérieur du domaine (D_2). Il est aisé de conclure de ce qui précède que la fonction harmonique v_1 est carartérisée par la propriété suivante: on a

$$(22)\qquad \lim\limits_{p=\infty} \iint\limits_{(D)} \left\{v_1 - \frac{\partial \varphi_p}{\partial x}\right\}^2 dx\, dy = 0.$$

On établirait d'une façon analogue qu'il existe une fonction v_2, et une seule, harmonique à l'intérieur du domanie (D) et telle que l'on ait:

$$(23)\qquad \lim\limits_{p=\infty} \iint\limits_{(D)} \left\{v_2 - \frac{\partial \varphi_p}{\partial y}\right\}^2 dx\, dy = 0.$$

N° 7. Assurons-nous maintenant que les équations

$$(24)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial v}{\partial x} = v_1 \\ \dfrac{\partial v}{\partial y} = v_2 \end{cases}$$

sont compatibles et définissent, évidemment à une constante additive près, une fonction v harmonique à l'intérieur de tout le domaine (D).

On reconnaîtra aisément, en s'appuyant sur les faits établis plus haut ainsi que sur les théorèmes rappelés au numéro précédent que les fonctions v_1 et v_2 pourront être représentées, à l'intérieur du domaine (D_0), commun aux domaines (D_1) et (D_2), par les séries suivantes

$$v_1 = \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} + \sum_{p=1}^{\infty} \left(\frac{\partial \varphi_{p+1}}{\partial x} - \frac{\partial \varphi_p}{\partial x} \right),$$

$$v_2 = \frac{\partial \varphi_1}{\partial y} + \sum_{p=1}^{\infty} \left(\frac{\partial \varphi_{p+1}}{\partial y} - \frac{\partial \varphi_p}{\partial y} \right)$$

et que, à l'intérieur de tout domaine *intérieur* au domaine (D_0) ces séries seront uniformément convergentes. Il résulte alors des théorèmes classiques relatifs aux séries de fonctions harmoniques que, à l'intérieur du domaine (D_0), on aura

$$\frac{\partial v_1}{\partial y} = \frac{\partial v_2}{\partial x} = \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial x \partial y} + \sum_{p=1}^{\infty} \left\{ \frac{\partial^2 \varphi_{p+1}}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 \varphi_p}{\partial x \partial y} \right\}.$$

Cela prouve que la fonction

$$\frac{\partial v_1}{\partial y} - \frac{\partial v_2}{\partial x},$$

régulièrement harmonique dans le domaine (D), est nulle dans la portion (D_0) de ce domaine. Elle est donc nulle dans tout le domaine (D).

Par conséquent les équations (24) sont compatibles.

Cela posé, on recconnaît immédiatement que la solution commune v de ces équations est régulièrement analytique dans le voisinage de tout point intérieur au domaine (D) et que, à l'intérieur de ce domaine, elle satisfait à l'équation

$$\triangle v = c \tag{25}$$

en désignant par $\triangle$ l'opérateur de Laplace et par c une constante.

Reste à faire voir que la constante c est nulle. J'observe à cet effet que les équations (22), (23) et (24) donnent:

$$\lim_{p=\infty} . A(v - \varphi_p) = 0. \tag{26}$$

Désignons par (T) le domaine limité par un cercle (C) situé en entier à l'intérieur du domaine (D_0). On aura:

$$(27) \qquad \lim_{p=\infty} \iint_{(T)} \left\{ \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial \varphi_p}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial \varphi_p}{\partial y} \right)^2 \right\} dx\, dy = 0,$$

en vertu de l'équation (26). D'ailleurs les fonctions φ_p $(p \geqq 1)$ sont régulièrement harmoniques à l'intérieur du domaine (D_0); on aura donc, dans tout ce domaine,

$$\triangle (v - \varphi_p) = c$$

en vertu de l'équation (25), et si, en plaçant l'origine des coordonnées au centre du cercle (c) et en désignant par r le rayon de ce cercle, on pose:

$$v - \varphi_p = h_p + \tfrac{1}{4} c (x^2 + y^2 - r^2)$$

on aura:

$$\triangle h_p = 0$$

dans tout le domaine (D_0). Cela étant on trouve aisément:

$$\iint_{(T)} \left\{ \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial \varphi_p}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial \varphi_p}{\partial y} \right)^2 \right\} dx\, dy = \iint_{(T)} \left\{ \left(\frac{\partial h_p}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial h_p}{\partial y} \right)^2 \right\} dx\, dy + \frac{\pi c^2 r^4}{8},$$

d'où:

$$c = 0,$$

à cause de l'équation (27).

En résumé il existe une fonction v, définie à une constante additive près, régulièrement harmonique à l'intérieur du domaine (D), vérifiant l'équation (26).

N° 8. Je vais établir que la fonction v représente la solution du Problème transformé.

Désignons par h une fonction harmonique à l'intérieur du domaine (D), quelconque à cela près que l'intégrale $A(h)$ ait un sens. Il résulte immédiatement de la définition des fonctions φ_p que l'on aura:

$$B(\varphi, h) = B(\varphi_p, h)$$

pour toute valeur entière et positive de p. L'égalité précédente peut s'écrire ainsi:

$$B(\varphi, h) = B(\varphi_p - v, h) + B(v, h).$$

Or

$$\lim_{p=\infty} B(\varphi_p - v, h) = 0,$$

à cause de l'équation (26). Nous avons donc:

$$B(\varphi, h) = B(v, h).$$

Cela prouve que la fonction v est bien une solution du Problème transformé; elle en est d'ailleurs la solution générale, on le reconnait immédiatement en se reportant au théorème du N° 3.

J'ajoute ceci: il résulte des équations (14) et (26) que l'on a:

$$A(v) = I. \tag{28}$$

N° 9. Considérons enfin le cas le plus général, où le domaine (D), ne satisferait qu'aux conditions d'être borné et quarrable.

Envisageons, comme dans la méthode de balayage, une suite infinie de cercles,

$$(C_1),\ (C_2),\ (C_3), \ldots \tag{29}$$

tous intérieurs au domaine (D) et tels que tout point intérieur au domaine (D) soit intérieur à l'un au moins des cercles précédents.

Désignons par (D_n) le domaine formé par l'ensemble des points tels que chacun d'eux soit intérieur à l'un au moins des cercles:

$$(C_1),\ (C_2), \ldots\ (C_n).$$

Le domaine (D_n) pourra se composer d'un certain nombre de régions, soit $(R_{n,1})$, $(R_{n,2}), \ldots\ (R_{n,\alpha_n})$, telles que deux d'entre elles n'aient jamais de points intérieurs communs et que chacune de ces régions constitue un domaine d'un seul tenant.

Cela posé, continuons à désigner par φ la fonction donnée dans le Problème transformé et formons une suite infinie de fonctions dont la première ψ_0 soit la fonction définie par l'équation

$$\psi_0 = \varphi, \tag{30}$$

la fonction ψ_n, formant le terme de rang $n + 1$ de la suite considérée, dérivant de ψ_{n-1} de la façon suivante: à l'intérieur de la région $(R_{n,i})$, pour $i = 1, 2, 3, \ldots \alpha_n$, la fonction ψ_n est égale à une solution du Problème transformé pour cette région et par rapport à la fonction ψ_{n-1}, dans tout le reste du domaine (D), on a:

$$\psi_n = \psi_{n-1}. \tag{31}$$

Il est évident que les résultats déjà établis dans les numéros précédents, assurent l'existence de tous les termes de la suite:

$$\psi_0,\ \psi_1,\ \psi_2, \ldots \tag{32}$$

Considérons une fonction w assujettie uniquement à vérifier les conditions suivantes:

1° L'intégrale $A(w)$ a un sens.

2° La fonction w est régulièrement harmonique dans le voisinage de tout point intérieur au domaine (D_n).

Il résulte immédiatement de la définition de la suite (32) que l'inégalité

$$k \leqq n \tag{33}$$

entraîne l'égalité suivante:

$$B(\psi_{k-1}, w) = B(\psi_k, w).$$

Donc l'inégalité (33) entraîne aussi l'égalité suivante:

$$B(\psi_k, w) = B(\psi_n, w). \tag{34}$$

Or la fonction ψ_n elle-même vérifie les conditions imposées à la fonction w. Par conséquent l'inégalité (33) entraîne la relation suivante:

$$B(\psi_k, \psi_n) = T_n, \tag{35}$$

en posant:

$$T_n = B(\psi_n, \psi_n) = A(\psi_n). \tag{36}$$

Si, après avoir posé $k = n - 1$ dans l'équation (35), on fait usage de l'inégalité de M. Schwarz, on trouve:

$$T_n \leqq T_{n-1}.$$

On a donc:

$$\lim_{n=\infty} T_n = I, \tag{37}$$

en désignant par I un nombre parfaitement déterminé, positif ou nul.

L'inégalité (33) étant vérifiée, on a

$$A(\psi_n - \psi_k) = T_n - 2T_n + T_k = T_k - T_n$$

en vertu des relations (35) et (36). On en conclut, en tenant compte de (37), que l'on a:

$$\lim_{\substack{n=\infty \\ k=\infty}} A(\psi_n - \psi_k) = 0. \tag{38}$$

N° 10. Désignons par $(D^{(\delta)})$ le domaine formé par l'ensemble des points intérieurs au domaine (D) et tels que la plus courte distance de chacun d'eux à la frontière de ce domaine soit supérieure ou égale à une longueur non nulle δ. Il serait aisé de démontrer qu'il est possible de faire correspondre à la longueur δ, si petite qu'elle soit, un nombre entier et positif p, tel que, sous la condition

$$n \geqq p \tag{39}$$

tout point du domaine $(D^{(\delta)})$ ou de sa frontière soit intérieur au domaine (D_n). Mais nous admettrons ce point sans développer la démonstration, parce qu'il est manifestement possible de former la suite (29) de telle façon que l'existence du nombre p soit assurée à l'avance.

Cela posé, je fais les remarques suivantes:

1° L'équation (38) entraîne chacune des deux suivantes:

$$\lim_{\substack{n=\infty\\ k=\infty}} \iint_{(D_p)} \left\{\frac{\partial \psi_n}{\partial x} - \frac{\partial \psi_k}{\partial x}\right\}^2 dx\,dy = 0$$

et

$$\lim_{\substack{n=\infty\\ k=\infty}} \iint_{(D_p)} \left\{\frac{\partial \psi_n}{d y} - \frac{\partial \psi_k}{\partial y}\right\}^2 dx\,dy = 0$$

2° Pour toute valeur de n vérifiant l'inégalité (39), la fonction ψ_n et, par conséquent, les fonctions $\frac{\partial \psi_n}{\partial x}$ et $\frac{\partial \psi_n}{\partial y}$ sont des fonctions régulièrement harmoniques à l'intérieur du domaine (D_p).

On conclura de ces remarques, au moyen des théorèmes rappelés au N° 6, que les séries:

$$(40)\qquad \left\{\begin{aligned} &\frac{\partial \psi_p}{\partial x} + \sum_{k=p}^{\infty} \left\{\frac{\partial \psi_{k+1}}{\partial x} - \frac{\partial \psi_k}{\partial x}\right\},\\ &\frac{\partial \psi_p}{\partial y} + \sum_{k=p}^{\infty} \left\{\frac{\partial \psi_{k+1}}{\partial y} - \frac{\partial \psi_k}{\partial y}\right\}, \end{aligned}\right.$$

sont uniformément convergentes dans tout domaine intérieur au domaine (D_p), qu'elles jouissent, par conséquent, de cette propriété dans les limites du domaine $(D^{(\delta)})$ et que les sommes de ces séries sont des fonctions régulièrement harmoniques à l'intérieur du domaine (D_p). Il est aisé de voir que cela nous permet d'énoncer la proposition suivante: les équations

$$v_1 = \lim_{n=\infty} \frac{\partial \psi_n}{\partial x}$$

et

$$v_2 = \lim_{n=\infty} \frac{\partial \psi_n}{\partial y}$$

définissent des fonctions v_1 et v_2 régulièrement harmoniques à l'intérieur du domaine (D) et, en tout point intérieur à ce domaine, on a

$$(41)\qquad \frac{\partial v_1}{\partial y} = \frac{\partial v_2}{\partial x}.$$

En se reportant au § 6 de mon mémoire cité au N° 6, on reconnaîtra, avec un peu d'attention, que l'on a encore:

$$\lim_{n=\infty} \iint\limits_{(D)} \left\{ \left(v_1 - \frac{\partial \psi_n}{\partial x}\right)^2 + \left(v_2 - \frac{\partial \psi_n}{\partial y}\right)^2 \right\} dx\, dy = 0. \tag{42}$$

Il résulte de l'équation (41) qu'il existe une fonction v, définie à l'intérieur du domanie (D) à une constante additive près, vérifiant les equations

$$\frac{\partial v}{\partial x} = v_1 \text{ et } \frac{\partial v}{\partial y} = v_2.$$

En vertu de l'équation (42), ou aura:

$$\lim_{n=\infty} A(v - \psi_n) = 0. \tag{43}$$

Cela posé, un raisonnement analogue à celui que nous avons développé à la fin du N° 7 permettra de démontrer que la fonction v satisfait à l'équation de Laplace à l'intérieur du domaine (D).

Je dis que la fonction v représente la solution du Problème transformé pour le domaine (D) par rapport à la fontion φ. En effet, nous avons vu que la relation (33) entraîne la relation (34) pourvu que la fonction w soit harmonique à l'intérieur du domaine (D_n) et que l'intégrale $A(w)$ ait un sens. Donc si l'on désigne par h une fonction harmonique à l'intérieur du domaine (D), quelconque à cela près que l'intégrale $A(h)$ ait un sens, on aura

$$B(\psi_k, h) = B(\psi_n, h)$$

pour toutes les valeurs entières et non négatives des nombres k et n. Or, par définition

$$\psi_0 = \varphi.$$

Nous avons donc

$$B(\varphi, h) = B(\psi_n, h)$$

pour toutes les valeurs entières et positives de n. Cela étant il n'y a plus, pour achever la démonstration, qu'à reprendre le raisonnement du N° 8. J'ajoute ceci: il est aisé de conclure de la relation (43) que l'on a:

$$A(v) = I \tag{44}$$

où I est le nombre défini par l'équation (37).

En résumé nous avons fait comaître un procédé théorique pour résoudre le Problème transformé et, par cela même nous avons établi la possibilité de ce Problème, en nous bornant à admettre les hypothèses suivantes:

1° Le domaine (D) est un domaine borné et quarrable.

2° La fonction φ vérifie les conditions voulues pour que l'intégrale $A(\varphi)$ ait un sens.

D'après cela le Problème transformé, tel qu'il a été posé au N° 3, est, comme nous l'avions annoncé, toujours possible.

III. Application au Problème et au Principe de Dirichlet.

N° 11. Dans tout ce chapitre nous allons admettre que, dans le Problème transformé, la fonction donnée φ, tout en vérifiant, bien entendu, les hypothèses du N° 3, jouisse encore des propriétés suivantes:

1° Elle est continue dans tout le domaine (D) ainsi qu'en chaque point de la frontière.

2° Les points *intérieurs* à tout domaine intérieur au domaine (D) et tels que, en chacun d'eux, l'une au moins des dérivées cesse d'exister ou d'être continue, sont disposés sur un nombre fini de lignes algébriques.

N° 12. Commençons par l'étude du cas du cercle et examinons d'abord le cas très particulier où la fonction φ s'annulerait sur la circonférence. Eu égard aux hypothèses adoptées au sujet de la fonction φ, on aura le droit de transformer les formules (4) du chapitre précédent au moyen de l'intégration par partie.

On trouvera de la sorte:

$$a_k = b_k = 0 \ (k = 1, 2, 3, \dots)$$

et la formule (5) nous donnera alors

$$v = a_0.$$

Donc, lorsque la fonction φ s'annule sur la circonférence, la fonction v, solution du Problème transformé se réduit à une constante arbitraire.

Laissons maintenant à la fonction φ sa généralité et désignons par u la fonction, harmonique à l'intérieur du cercle, dont les valeurs périphériques coïncident avec celles de la fonction φ.

Si, dans le Problème transformé, on substitue à la fonction φ la fonction $\varphi - u$, la solution, d'après ce que nous venons de voir, se réduira à une constante. On aura donc:

$$B(\varphi - u, h) = 0$$

pour toute fonction h, harmonique à l'intérieur du cercle considéré et telle que l'intégrale $A(h)$ ait un sens. Or l'équation précédente équivaut à la suivante:

$$B(\varphi, h) = B(u, h).$$

Cela prouve que la fonction u est une solution du Problème transformé pour le cercle considéré et par rapport à la fonction φ.

Nous concluons de là, en nous appuyant sur le théorème du N° 3, le théorème suivant:

Dans les conditions où nous nous sommes placés, la solution générale v du Problème transformé est donnée par la formule suivante:

$$v = u + \text{Const.}$$

N° 13. Passons au cas général où l'on se borne à admettre que le domaine (D) vérifie les hypothèses du N° 2. Le théorème qui vient d'être établi nous apprend que la suite (32) du chapitre précédent pourra être formée de façon que chacune des fonctions ψ_n soit continue dans tout le domaine (D) et sur la frontière.

Cela posé, admettons que chacune des fonctions ψ_n jouisse de la propriété précédente et envisageons d'abord le cas où les valeurs périphériques de la fonction φ se réduiraient à zéro. Je dis que la suite

$$(1) \qquad \psi_0, \psi_1, \psi_2, \ldots$$

sera alors convergente et aura zéro pour limite.

En effet, désignons par ε un nombre positif, non nul, arbitrairement petit. Il correspondra au nombre ε une longueur, δ, non nulle, telle que, en désignant par d la plus courte distance d'un point P du domaine (D) à la frontière et par $\varphi(P)$ la valeur de la fonction φ en P, l'inégalité

$$(2) \qquad d \leqq \delta$$

entraîne l'inégalité

$$(3) \qquad |\varphi(P)| < \varepsilon.$$

D'autre part (N° 10) il correspondra à la longueur δ un nombre entier et positif p, tel que, sous la condition

$$(4) \qquad n \geqq p$$

l'inégalité (2) soit vérifiée pour tout point du domaine $(D - D_n)$. Or, à l'intérieur de ce domaine et sur la frontière, on a

$$\psi_n = \varphi,$$

tandis que dans le reste du domaine (D) la fonction ψ_n vérifie l'équation de Laplace. Par conséquent, à cause de la continuité de la fonction ψ_n, l'inégalité (4) entraînera l'inégalité:

$$|\psi_n| < \varepsilon$$

pour tout le domaine (D). Donc, lorsque les valeurs périphériques de la fonction φ se réduisent à zéro, la suite (1) aura bien zéro pour limite.

Il résulte immédiatement de ce qui précède que, dans les conditions considérées, les dérivées $\frac{\partial \psi_n}{\partial x}$ et $\frac{\partial \psi_n}{\partial y}$ tendent vers zéro avec $\frac{1}{n}$, en tout point intérieur au domaine (D). Par conséquent nous avons le théorème suivant:

Lorsque les valeurs périphériques de la fonction φ se réduisent à zéro, la solution du Problème transformé se réduit à une constante.

Envisageons maintenant le cas où les valeurs périphériques de la fonction φ sont quelconques mais supposons qu'il existe une fonction u, régulièrement harmonique à l'intérieur du domaine (D) et telle que ses valeurs périphériques coïncident avec celles de la fonction φ.

Il suffirait alors de raisonner, comme à la fin du numéro précédent, pour établir le théorème suivant:

Lorsque l'hypothèse considérée est vérifiée, la solution générale v du Problème transformé est donnée par la formule suivante:

$$v = u + \text{Const.} \tag{5}$$

N° 14. Il nous faut examiner maintenant la question suivante: la fonction u, entrant dans la formule (5), existe-t-elle?

Il est aisé de voir que, pour pouvoir l'affirmer, il est nécessaire de restreindre dans une certaine mesure la généralité du domaine (D). En effet, définissons, par exemple, ce domaine au moyen des relations suivantes:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 \neq 0 \\ x^2 + y^2 \leqq 1 \end{cases} \tag{6}$$

et posons

$$\varphi = x^2 + y^2.$$

Dans ces conditions le domaine (D) sera borné et quarrable et la fonction φ satisfera aux hypothèses du N° 11, mais la fonction u n'existera pas et voici pourquoi: on vérifie aisément que, dans l'exemple considéré, la fonction v se réduit à une constante, donc, en vertu du théorème qui termine le numéro précédent, la fonction u, si elle existait, devrait aussi se réduire à une constante; or cela est impossible puisque cette fonction devrait être égale à zéro au centre du cercle considéré et à l'unité sur la circonférence.

Je vais démontrer que la fonction u existe sûrement lorsque le domaine (D) vérifie, en dehors des hypothèses adoptées jusqu'ici, une condition additionnelle que j'appellerai pour abréger, la *condition* (C).

Pour énoncer cette condition, considérons un point quelconque O situé sur la frontière (s) du domaine (D) et, de ce point comme centre, décrivons un cercle (Σ) de rayon r. L'ensemble des points, intérieurs à la fois au cercle (Σ) et au domaine (D), pourra se composer d'un nombre quelconque de régions distinctes (d) dont chacune serait d'un seul tenant. Désignons par (d') l'une de ces régions et considérons un point variable M assujetti à rester à *l'intérieur* de cette région. Soit θ l'angle formé par le rayon OM avec un axe fixe. Imposons à l'angle θ la condition de varier d'une façon continue avec la position du point M. Dans ce cas la condition (C) pourra être exprimée de la façon suivante: Lorsque le rayon r du cercle (Σ) vérifie l'inégalité

$$r \leqq R, \tag{7}$$

où R représente une longueur indépendante de la position du point O sur la frontière (s) du domaine (D) et du choix de la région (d') parmi les régions (d), les valeurs de l'angle θ devront, de quelque façon que se déplace le point M à l'intérieur de la région (d'), ne pas sortir d'un intervalle (θ_1, θ_2), tel que l'on ait

$$|\theta_2 - \theta_1| < 2\alpha, \tag{8}$$

en désignant par α un nombre positif fini qui ne devra dépendre, comme la longueur R, ni de la position du point O sur (s) ni du choix de la région (d') parmi les régions (d).

Reprenons la suite (1) et supposons, ce qui, d'après la remarque faite au début du N° 13, est permis, que chaune des fonctions de cette suite soit continue dans le domaine (D) et sur la frontière. Supposons en outre que le domaine (D) vérifie la condition (C). Cela posé, désignons par μ un nombre positif, différent de zéro mais arbitrairement petit, choisi à l'avance et considérons la longueur R, second membre de l'inégalité (7). On pourra faire correspondre au nombre μ une longueur non nulle δ_1, vérifiant l'inégalité

$$\delta_1 \leqq R, \tag{9}$$

telle que l'inégalité

$$\overline{AB} \leqq \delta_1 \tag{10}$$

entraîne la suivante

$$|\varphi(A) - \varphi(B)| < \mu, \tag{11}$$

en convenant d'une façon générale de désigner par $F(P)$ la valeur d'une fonction F des coordonnées en un point P du plan.

Considérons maintenant le second membre de l'inégalité (8), posons:

$$\beta = \frac{\pi}{3\alpha} \tag{12}$$

et désignons par δ_2 une longueur non nulle vérifiant à la fois les deux inégalités:

$$\delta_2 < \delta_1, \tag{13}$$

$$\frac{\delta_2{}^\beta}{\delta_1{}^\beta} < \mu. \tag{14}$$

Désignons encore par $(D^{(\delta_2)})$ l'ensemble des points intérieurs au domaine (D) et tels, que la plus courte distance de chacun d'eux à la frontière du domaine (D) soit égale ou supérieure à δ_2 et observons que, en vertu de la remarque faite au début du N° 10, il existera un nombre entier et positif N, tel que l'inégalité

$$p \geqq N \tag{15}$$

ait pour conséquence que tout point du domaine $(D^{(\delta_2)})$ ou de sa frontière soit situé à *l'intérieur* du domaine (D_p).

Proposons-nous maintenant d'étudier l'expression suivante:

$$|\psi_n(A) - \psi_m(A)| \tag{16}$$

et plaçons-nous d'abord dans l'hypothèse où la plus courte distance a du point A à la frontière (s) du domaine (D) satisferait à l'inégalité suivante

$$a \leqq \delta_2. \tag{17}$$

Désignons par O un point situé sur la frontière (s) du domaine (D) à une distance égale à a du point A et cherchons une limite supérieure de l'expression

$$|\psi_n(A) - \varphi(O)|. \tag{18}$$

Il résulte de la définition de la fonction ψ_n que, dans la portion $(D - D_n)$ du domaine (D), la fonction ψ_n se confond avec la fonction φ. Donc, lorsque le point A n'est pas extérieur au domaine $(D - D_n)$, on a

$$|\psi_n(A) - \varphi(O)| < \mu; \tag{19}$$

cela résulte des inégalités (17) et (13) ainsi que de ce que l'inégalité (10) entraîne l'inégalité (11).

Voyons ce qui arrive lorsque le point A est extérieur au domaine $(D - D_n)$. Dans ce cas le point A sera intérieur à un domaine (T), d'un seul tenant, jouissant des propriétés suivantes:

1° Tout point intérieur à ce domaine sera extérieur au domaine $(D - D_n)$, mais intérieur au domaine (D) ainsi qu'au cercle (Σ) de centre O et de rayon δ_1.

2° Tout point-frontière du domaine considéré cera situé sur la frontière du domaine (D_n) ou sur la circonférence du cercle (Σ).

Il pourrait se faire que tout point de la frontière du domaine (T) appartint à celle du domaine (D_n). Dans ce cas, en tout point P situé sur la frontière du domaine (T), on aurait

$$\psi_n(P) = \varphi(P).$$

D'ailleurs

$$\overline{OP} \leqq \delta_1,$$

en vertu de la définition du domaine (T). On aurait donc

$$(20) \qquad |\psi_n(P) - \varphi(O)| < \mu$$

pour toute position du point P sur la frontière du domaine (T); pour le reconnaître il n'y a qu'à se rappeler que l'inégalité (10) entraîne l'inégalité (11). Or, à l'intérieur du domaine (T), la fonction ψ_n vérifie l'équation de Laplace. Par conséquent, dans le cas considéré, l'inégalité (19) serait encore vérifiée.

Il nous reste à examiner le cas où une partie (s_1) de la frontière du domaine (T) serait formée par des points situés sur la circonférence du cercle (Σ). L'inégalité (20) pourrait cesser d'être vérifiée sur (s_1), mais elle subsistera évidemment sur le reste (s_2) de la frontière du domaine (T).

Pour estimer la quantité

$$|\psi_n(P) - \varphi(O)|,$$

dans le cas où le point P se trouve sur (s_1), j'observe que, pour toutes les valeurs de l'indice n et dans tout le domaine (D), on a:

$$|\psi_n| \leqq \Phi,$$

en désignant par Φ une limite supérieure de $|\varphi|$. On aura donc

$$(21) \qquad |\psi_n(P) - \varphi(O)| \leqq 2\Phi$$

pour toute position du point P sur la partie (s_1) de la frontière du domaine (T).

Reportons-nous à l'énoncé de la condition (C) à laquelle le domaine (D) satisfait par hypothèse et plaçons en O le pôle d'un système de coordonnées polaires (ϱ, θ). Il sera toujours possible de choisir l'axe défini par l'équation

$$\theta = 0$$

de telle sorte que, pour toute position du point (ϱ, θ) dans le domaine (T), la condition

$$(22) \qquad |\theta| < \alpha$$

soit compatible avec celle de la continuité de l'angle θ regardé comme fonction des coordonnées rectangulaires du point auquel cet angle se rapporte.

L'inégalité (22) définit évidemment sans ambiguité une certaine détermination de l'angle θ; ce sera celle que nous considérerons à l'exclusion de toute autre.

Désignons par M le point (ϱ, θ) et considérons les deux fonctions suivantes

$$4\Phi \cdot \frac{\varrho^\beta \cos \beta\theta}{\delta_1^\beta} + \mu$$

et

$$\psi_n(M) - \varphi(O).$$

A l'intérieur du domaine (T), elles sont régulièrement harmoniques et, sur la frontière, la première est constamment supérieure à la valeur absolue de la seconde. On aura donc

$$|\psi_n(M) - \varphi(O)| < 4\Phi \frac{\varrho^\beta \cos \beta\theta}{\delta_1^\beta} + \mu,$$

pour toute position du point M dans le domaine (T). Faisons coïncider le point, M avec le point A et reportons-nous aux inégalités (14), (17) et (22). Nous trouverons

$$(23) \qquad |\psi_n(A) - \varphi(O)| < (4\Phi + 1)\mu.$$

En résumé il est établi que l'inégalité (17) entraîne l'une au moins des inégalités (19) et (23); elle entraîne donc évidemment l'inégalité (23) dans tous les cas et cela, pour toutes les valeurs de l'indice n. Cela nous permet d'écrire:

$$(24) \qquad |\psi_m(A) - \varphi(O)| < (4\Phi + 1)\mu$$

pourvu que l'inégalité (17) soit vérifiée.

Les inégalités (23) et (24) donnent:

$$(25) \qquad |\psi_n(A) - \psi_m(A)| < 2(4\Phi + 1)\mu.$$

Par conséquent nous arrivons à la conclusion suivante: l'inégalité (17) entraîne l'inégalité (25) pour toutes les valeurs des indices n et m.

Supposons que l'on ait

$$(26) \qquad \begin{cases} n \geqq N \\ m \geqq N \end{cases}$$

où la lettre N a la même signification qu'au second membre de l'inégalité (15). Dans ce cas les fonctions ψ_n et ψ_m seront des fonctions régulièrement harmoniques dans toute l'étendue du domaine $(D^{(\delta_2)})$ et, par conséquent il en sera de même de la différence

$$\psi_n(A) - \psi_m(A).$$

Or cette différence vérifie, comme nous venons de l'établir, l'inégalité (25) dans la portion $(D - D^{(\delta_2)})$ du domaine (D). Elle vérifiera donc cette inégalité dans tout le domaine (D).

Par conséquent nous avons la proposition suivante: si petit que soit un nombre donné μ, différent de zéro et positif, il est possible de lui faire correspondre un entier positif N, tel que les inégalités (26) entraînent l'inégalité (25) pour toutes les positions du point A dans le domaine (D).

Cela prouve que la suite (1) est uniformément convergente dans tout le domaine (D) et que, dès-lors, la limite de cette suite est une fonction U, régulièrement harmonique à l'intérieur du domaine considéré, admettant les mêmes valeurs périphériques que la fonction donnée φ. Donc, comme nous l'avions annoncé, la question placée en tête de ce numéro comporte une réponse affirmative dans le cas où le domaine (D) satisfait à la condition (C).

Remarque. La démonstration précédente de la convergence de la suite (1) repose, en ce qui concerne la nature des termes de cette suite, uniquement sur les hypothèses suivantes.

1° Pour toute valeur de n la fonction ψ_n est continue dans le domaine (D) et sur la frontière.

2° Dans la portion $(D - D_n)$ du domaine (D) on a

$$\psi_n = \psi_{n-1} \quad (n = 1, 2, 3, \ldots)$$

et, à l'intérieur du domaine (D_n), la fonction ψ_n satisfait à l'équation de Laplace.

Or, étant donné une fonction continue σ définie sur la frontière du domaine D, il est possible de former, et cela d'une infinité de manière une fonction ψ_0, continue dans le domaine (D) et telle que ses valeurs périphériques définissent une fonction identique à la fonction donnée σ. D'autre part le procédé alterné de M. Schwarz permettra de déduire, du premier terme ψ_0 de la suite (1), chacun des termes suivants.

Donc, les considérations exposées dans ce numéro constituent une démonstration générale, évidemment très simple, de la possibilité du Problème de Dirichlet pour tout domaine vérifiant la condition (C).

N° 15. Pour achever d'élucider les relations qui existent entre le Problème transformé, le Problème de Dirichlet et le Principe du même nom, il suffira de démontrer le théorème suivant: lorsque dans l'ensemble (E) défini au N° 2 il existe une fonction harmonique U, cette fonction vérifie l'équation (2) de l'Introduction.

Pour établir ce théorème considérons dans l'ensemble (E) une fonction f quelconque à cela près que l'intégrale $A(f)$ ait un sens. D'après le théorème qui termine le N° 13, la fonction U sera une solution du Problème transformé pour le domaine (D) et par rapport à la fonction f. Nous aurons donc

$$B(f, h) = B(u, h)$$

pour toute fonction h, régulièrement harmonique dans (D) et telle que l'intégrale $A(h)$ soit finie. Donc, en particulier, on aura:

$$B(f, u) = B(u, u) = A(u).$$

Il résulte de là que l'on a:

$$A(f - u) = A(f) - A(u).$$

Par conséquent

$$A(f) > A(u),$$

à moins que la fonction f ne se confonde avec la fonction u. Le théorème est donc établi.

Les principaux résultats de ce travail peuvent être résumés ainsi: pour tout domaine borné, quarrable et vérifiant la condition (C) du numéro précédent, le Problème de Dirichlet est toujours possible et le Principe de Dirichlet est exact.

Il est à peine utile d'ajouter que la méthode des rayons-vecteurs réciproques permet de conclure, de ce qui précède, la possibilité du Problème de Dirichlet pour tout domaine non borné, pouvant être regardé comme l'inverse d'un domaine remplissant les conditions énoncées tout à l'heure.

Cracovie le 5 Juin 1908.

Note. Depuis la rédaction de ce mémoire, j'ai considérablement complété mes idées sur la question; je les ai exposées, pour trois dimensions, dans le mémoire *Sur le principe du minimum* (Bulletin de l'Académie de Cracovie, Juillet 1909).

Cracovie le 29 Avril 1910.