

ÜBER PFAFFSCHE AGGREGATE.

VON

E. NETTO

in GIESSEN.

Am Schlusse einer Arbeit »über orthogonale Substitutionen« habe ich eine Bemerkung KRONECKER's mitgeteilt (Acta mathematica 9, S. 299) dahingehend, dass noch kein Beweis dafür erbracht sei, dass jede orthogonale Determinante durch die CAYLEY'sche Bildungsvorschrift erreichbar ist. Ändere man z. B. in einer, nach dem CAYLEY'schen Verfahren hergestellten orthogonalen Determinante B die Vorzeichen der Elemente einer graden Anzahl von Zeilen, so erhalte man eine neue orthogonale Determinante B' , die sich nicht nach der CAYLEY'schen Darstellungs-Vorschrift bilden lasse.

Die KRONECKER'sche allgemeine Bemerkung gilt noch heute; das angeführte Beispiel ist dagegen nicht stichhaltig. In der Tat werde ich im Folgenden eine Methode entwickeln, durch die auch B' nach CAYLEY's Vorschrift dargestellt werden kann. Diese Methode stützt sich auf die Eigenschaften der PFAFF'schen Aggregate, d. h. der Quadratwurzeln aus schief-symmetrischen Determinanten, die bisher nicht beachtet zu sein scheinen. Natürlich reicht es aus, die Zeichenänderungen in zwei Zeilen von B vorzunehmen, und zwar können dabei die beiden ersten Zeilen von B benutzt werden. Die folgende Untersuchung behandelt und erledigt also die Frage: aus einer schiefen Determinante A ist nach der CAYLEY'schen Methode eine orthogonale Determinante B hergeleitet worden; welche Determinante A' muss an die Stelle von A treten, damit die aus ihr nach der gleichen Methode hergestellte orthogonale Determinante B' aus B durch Änderung der Vorzeichen der Elemente der beiden ersten Zeilen von B hervorgeht?

Zwischen den n^2 Grössen a_{ik} ($i, k = 1, 2, 3, \dots, n$) sollen die Beziehungen

$$(1) \quad \begin{aligned} a_{ik} + a_{ki} &= 0 \quad (i \neq k), \\ a_{11} &= a_{22} = a_{33} = \dots = a_{nn} = \omega \end{aligned}$$

stattfinden, wobei ω eine willkürliche Grösse bedeutet. Die Determinante

$$|a_{ik}|$$

ist eine *schiefe*; für $\omega = 0$ ins besondere eine *schief-symmetrische*; also für $\omega = 0$ und ein ungrades n gleich Null, für $\omega = 0$ und ein grades n gleich einem Quadrate. Mit der zweiten Wurzel aus einem solchen Quadrate, die wir nach passender Bestimmung des Vorzeichens als *Pfaffsches Aggregat* bezeichnen, wollen wir uns eingehender beschäftigen.

Wir setzen $n = 2m$ und schreiben das *Pfaffsche Aggregat m^{ter} Ordnung*

$$(2) \quad (1, 2, 3, 4, \dots, 2m-1, 2m).$$

Für seine Bildung setzen wir folgendes fest. Das Glied

$$(3) \quad + a_{12} a_{34} \dots a_{2m-1, 2m},$$

das wir als *Hauptglied* bezeichnen, dient zur Ableitung der weiteren Glieder: Man hält im Hauptgliede die ersten $(2m-3)$ Indizes fest und verschiebt die letzten drei zweimal zyklisch. Die Resultate

$$a_{12} \dots a_{2m-3, 2m-1} a_{2m, 2m-2}; a_{12} \dots a_{2m-3, 2m} a_{2m-2, 2m-1}$$

gehören, mit dem Pluszeichen versehen, zu den Gliedern von (2). In jedem der jetzt vorhandenen drei Glieder hält man die ersten $(2m-5)$ Indizes fest und verschiebt die letzten fünf je viermal zyklisch, so erhält man 12 neue Glieder von (2). In jedem der nun vorhandenen 15 hält man die ersten $(2m-7)$ Indizes fest und verschiebt die letzten 7 je sechsmal zyklisch u. s. w. bis endlich nur der erste Index fest bleibt und die folgenden $(2m-1)$ zyklisch verschoben werden. So erhält man die $3 \cdot 5 \cdot 7 \dots (2m-1)$ Glieder von (2); alle sind unter einander verschieden. In jedem dieser Summanden tritt jeder der $2m$ Indizes einmal und nur einmal auf. Jeder dieser Summanden kann durch Umstellung der Faktoren a_{ik} in mannigfaltige Formen gebracht werden, nämlich in $m!$ Ausserdem kann jedes eintretende a_{ik} durch $(-a_{ki})$ ersetzt werden; das gibt für die m Faktoren 2^m Formen; zusammen also $m! \cdot 2^m$. Wie es sein muss ist

$$(m! \cdot 2^m) (3 \cdot 5 \cdot 7 \dots 2m-1) = (2m)!$$

Ist umgekehrt ein Produkt gegeben aus m Faktoren a_{ik}

$$a_{\alpha\beta} a_{\gamma\delta} \dots a_{\mu\nu},$$

in dem die Indizes $\alpha, \beta, \gamma, \dots, \mu, \nu$ eine Permutation von $1, 2, 3, \dots, 2m$ sind, so kommt dies mit richtigem Vorzeichen versehene Produkt in (2) vor. Das Vorzeichen wird durch

$$(-1)^{[\alpha, \beta, \gamma, \delta, \dots, \mu, \nu]}$$

bestimmt, wobei $[\alpha, \beta, \gamma, \delta, \dots, \mu, \nu]$ die Anzahl der Inversionen angibt, die in der Anordnung $\alpha, \beta, \gamma, \dots, \nu$ auftreten. Das erkennt man, wenn man bedenkt, dass eine Zirkularverschiebung einer ungraden Anzahl von Elementen die Anzahl der Inversionen um eine grade Zahl ändert; dass für Umstellungen der a das Gleiche gilt, da durch eine Transposition der a zwei Transpositionen der Indizes hervorgerufen werden; endlich, dass die Verwandlung von a_{ik} in $(-a_{ki})$ die Anzahl der Inversionen um eine ungrade Anzahl ändert.

Nimmt man unter den Elementen der Klammer (2) eine Transposition vor, dann geht der Wert in den entgegengesetzt gleichen über

$$(4) \quad (1, 2, \dots, i \dots k \dots, 2m) = -(1, 2, \dots, k \dots i \dots, 2m).$$

Dies zeigt, dass jede grade Substitution der Indizes (2) in sich selbst, jede ungrade in den entgegengesetzt gleichen Wert umwandelt. (2) ist also eine alternierende Funktion.

Für (2) ist die Reduktionsformel

$$(5) \quad (1, 2, 3, 4 \dots 2m) = a_{12}(3, 4, \dots, 2m) + a_{13}(4, 5, \dots, 2m, 2) + a_{14}(5, \dots, 2m, 2, 3) + \dots + a_{1, 2m}(2, 3, \dots, 2m - 1)$$

bekannt; wir fügen die folgenden dazu

$$(6) \quad \sum_{(\kappa)} (-1)^{[\kappa_2, \kappa_3, \dots, \kappa_{2\varrho}, \dots, \kappa_{2m}]} (1, \kappa_2, \kappa_3 \dots \kappa_{2\varrho}) (\kappa_{2\varrho+1}, \dots, \kappa_{2m}) = \binom{m-1}{\varrho-2} (1, 2, 3, \dots, 2m),$$

$$(\kappa_2 < \kappa_3 < \dots < \kappa_{2\varrho}; \kappa_{2\varrho+1} < \kappa_{2\varrho+2} < \dots < \kappa_{2m}),$$

wo die Summe auf alle Systeme der $\kappa_a = 2, 3, 4, \dots, 2m$ erstreckt wird, die den Ungleichheitsbedingungen der letzten Zeile von (6) genügen.

Das PFAFF'sche Aggregat (2) vereinfacht sich, wenn Gleichheiten unter den Elementen eintreten, die sich durch Gleichheiten unter den Indizes charakterisieren. So wird

$$\begin{aligned} (1, 2, 3, 4) &= a_{12} a_{34} + a_{13} a_{42} + a_{14} a_{23}, \\ (1, 1, 3, 4) &= a_{11} a_{34} + (a_{13} a_{41} + a_{14} a_{13}) = a_{11} a_{34} + a_{13} (a_{41} + a_{14}) = a_{11} a_{34}, \\ (1, 1, 3, 4, 5, 6) &= a_{11} (3, 4, 5, 6), \\ (1, 1, 3, \dots, 8) &= a_{11} (3, 4, 5, 6, 7, 8) \end{aligned}$$

und allgemein

$$(7) \quad \begin{aligned} (1, 1, 3, 4, \dots, 2m) &= a_{11} \cdot (3, 4, \dots, 2m), \\ (1, 1, 3, 3, 5, \dots, 2m) &= a_{11} a_{33} \cdot (5, 6, \dots, 2m), \\ &\dots \end{aligned}$$

Werden in (2) das i^{te} und das k^{te} Element einander gleich, dann ist der Wert des Aggregates

$$(-1)^{i+k-1} (1, 2, \dots, i-1, i+1, \dots, k-1, k+1, \dots, 2m) a_{ii}.$$

Für das Folgende wollen wir der Analogie halber

$$a_{ik} = (ik)$$

setzen. Dann wird die schiefe n -reihige Determinante nach Potenzen von ω entwickelt

$$(8) \quad A = |a_{ik}| = \omega^n + \omega^{n-2} \sum (ik)^2 + \omega^{n-4} \sum (iklm)^2 + \omega^{n-6} \sum (iklmno)^2 + \dots,$$

wobei die Summen sich auf alle wohlgeordneten Kombinationen zweiter, vierter, sechster, ... Klasse der Elemente $1, 2, 3, \dots, n-1, n$ beziehen. Diese Formel ist bekannt und leicht abzuleiten. Bedeutet A_{ik} die Adjunkte von a_{ik} in A , so folgt

$$(9) \quad \begin{aligned} A_{gh} &= \omega^{n-2} (gh) - \omega^{n-3} \sum (gi)(hi) + \omega^{n-4} \sum (ik)(ghik) \\ &- \omega^{n-5} \sum (gikl)(hikl) + \omega^{n-6} \sum (iklm)(ghiklm) \quad (g \neq h) \\ &\dots \end{aligned}$$

wobei die Summen sich auf i, k, l, m, \dots beziehen, die als wohlgeordnete Kombinationen erster, zweiter, dritter, vierter, ... Klasse der Wertereihe

$$1, 2, 3, \dots, g-1, g+1, \dots, h-1, h+1, \dots, n$$

entnommen sind. Der Beweis der Formel (9) ist mit Schwierigkeiten verbunden. Die Ergänzung von (9) durch die Entwicklung von A_{gg} ist einfach, da A_{gg} wie A eine schiefe Determinante ist.

Wir machen nun folgende Substitution: An die Stelle jedes a_{ik} setzen wir

$$(10) \quad -\frac{(12ik)}{\omega} = -\frac{1}{\omega} (a_{12} a_{ik} + a_{1i} a_{k2} + a_{1k} a_{2i})$$

und bezeichnen dies durch

$$(11) \quad S(ik);$$

und eben so bedeute das, einer Funktion der a vorgesetzte S , dass in dieser Funktion jedes $a_{\alpha\beta}$ durch $S(\alpha\beta)$ zu ersetzen ist. Dabei wird $i = k = 2$ ausgeschlossen; die Bedeutung von $S(22)$ soll sofort festgesetzt werden. Man hat nach (10)

$$S(ii) = -\frac{1}{\omega} (a_{12} a_{ii} + a_{1i} a_{i2} + a_{1i} a_{2i}).$$

Ist $i \neq 2$, dann zerstören sich die beiden letzten Summanden der Klammer wegen (1), und man hat wegen des zweiten Teils von (1)

$$(12) \quad S(\omega) = S(ii) = -a_{12} = - (12).$$

Wir lassen (12) auch für $i = 2$ gelten, trotzdem dabei $a_{i2} + a_{2i}$ nicht Null ist. Weiter wird

$$(13) \quad \begin{aligned} S(1i) &= -\frac{1}{\omega} (a_{12} a_{1i} + a_{11} a_{i2} + a_{1i} a_{21}) = -a_{i2} = a_{2i} \quad (i \neq 1) \\ S(2i) &= -\frac{1}{\omega} (a_{12} a_{2i} + a_{12} a_{i2} + a_{1i} a_{22}) = -a_{1i} \quad (i \neq 2). \end{aligned}$$

Wendet man S auf $(iklm)$ an, so findet man

$$(14) \quad S(iklm) = \frac{a_{12}}{\omega^2} (12iklm)$$

und daraus mit Hilfe von (7)

$$(15) \quad \begin{aligned} S(1klm) &= \frac{a_{12}}{\omega^2} (121klm) = -\frac{a_{12}}{\omega} (2klm), \\ S(2klm) &= \frac{a_{12}}{\omega^2} (122klm) = +\frac{a_{12}}{\omega} (1klm), \\ S(12lm) &= -a_{12} a_{lm}. \end{aligned}$$

In der gleichen Weise ergibt sich

$$(16) \quad \begin{aligned} S(iklmno) &= -\frac{a_{12}^2}{\omega^3} (12iklmno), \\ S(1klmno) &= +\frac{a_{12}^2}{\omega^3} (2klmno), \\ S(2klmno) &= -\frac{a_{12}^2}{\omega^2} (1klmno), \\ S(12lmno) &= +\frac{a_{12}^2}{\omega} (lmno), \\ &\dots \dots \dots \\ S(i_1 i_2 \dots i_{2m}) &= (-1)^m \frac{a_{12}^{m-1}}{\omega^m} (12 i_1 i_2 \dots i_{2m}), \\ S(1 i_2 \dots i_{2m}) &= (-1)^{m-1} \frac{a_{12}^{m-1}}{\omega^{m-1}} (2 i_2 i_3 \dots i_{2m}), \\ S(2 i_2 \dots i_{2m}) &= (-1)^m \frac{a_{12}^{m-1}}{\omega^{m-1}} (1 i_2 i_3 \dots i_{2m}), \\ S(12 i_3 \dots i_{2m}) &= (-1)^{m-1} \frac{a_{12}^{m-1}}{\omega^{m-2}} (i_3 i_4 \dots i_{2m}). \end{aligned}$$

Es verdient bemerkt zu werden, dass die Substitution S von der Ordnung 4 ist; in der Tat hat man

$$\begin{aligned} S^2 a_{ik} &= S(S a_{ik}) = -a_{ik} \\ S^4 a_{ik} &= a_{ik}. \end{aligned}$$

Diese Formeln setzen uns in den Stand, die Einwirkung der Substitution S auf die schiefe Determinante A und auf die Adjunkten A_{ik} ihrer Elemente a_{ik} zu bestimmen. Dabei reicht es aus, den Verlauf der Rechnung an einigen Beispielen zu zeigen. Es sei $n = 6$, dann wird

$$\begin{aligned} S(A) &= S[\omega^6 + \omega^4((12)^2 + (13)^2 + (14)^2 + \dots + (23)^2 + (24)^2 + \dots + (34)^2 + \dots + (56)^2) \\ &\quad + \omega^2((1234)^2 + (1345)^2 + \dots + (2345)^2 + \dots + (3456)^2) + (123456)^2] \\ &= (21)^6 + (21)^4 \left(\omega^2 + (23)^2 + (24)^2 + \dots + (13)^2 + (14)^2 + \dots + \frac{(1234)^2}{\omega^2} + \dots + \frac{(1256)^2}{\omega^2} \right) \\ &\quad + (21)^2 \left((12)^2(34)^2 + \frac{(12)^2(2345)^2}{\omega^2} + \dots + \frac{(12)^2(1345)^2}{\omega^2} + \dots + \frac{(12)^2(123456)^2}{\omega^4} \right) + \\ &\quad + \frac{(12)^4(3456)^2}{\omega^2} \\ &= \left(\frac{21}{\omega} \right)^4 \cdot A; \end{aligned}$$

und ähnlich

$$\begin{aligned} S(A_{12}) &= S[\omega^4(12) - \omega^3((13)(23) + \dots + (16)(26)) + \omega^2((34)(1234) + \dots + (56)(1256)) \\ &\quad - \omega((1345)(2345) + \dots + (1456)(2456)) + (3456)(123456)] \\ &= (21)^4 \omega - (21)^3(- (23)(13) - \dots - (26)(16)) + \\ &\quad + (21)^2 \left(\frac{(1234)}{\omega} (12)(34) + \dots + \frac{(1256)}{\omega} (12)(56) \right) \\ &\quad - (21) \left(- \frac{(12)^3}{\omega^2} (2345)(1345) - \dots - \frac{(12)^3}{\omega^2} (2456)(1456) \right) + \frac{(12)^3}{\omega^3} (123456)(3456) \\ &= - \left(\frac{21}{\omega} \right)^3 A_{12}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S(A_{34}) &= S[\omega^4(34) - \omega^3((32)(41) + (32)(42) + (35)(45) + (36)(46)) \\ &\quad + \omega^2((12)(3412) + (15)(3415) + (16)(3416) + (25)(3425) + (26)(3426) + (56)(3456)) \\ &\quad - \omega((3125)(4125) + (3126)(4126) + (3156)(4156) + (3256)(4256)) \\ &\quad + (1256)(341256)] \\ &= - (21)^4 \frac{(1234)}{\omega} - (21)^3 \left((23)(24) + (13)(14) + \frac{(1235)(1245)}{\omega^2} + \frac{(1236)(1246)}{\omega^2} \right) \\ &\quad + (21)^2 \left(- \omega(12)(34) - \frac{(12)}{\omega} (25)(2345) - \frac{(12)}{\omega} (26)(2346) - \right. \\ &\quad \left. - \frac{(12)}{\omega} (15)(1345) - \frac{(12)}{\omega} (16)(1346) - \frac{(12)}{\omega^3} (1256)(123456) \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - (2\mathbb{I}) \left((\mathbb{I}2)^2 (35) (45) + (\mathbb{I}2)^2 (36) (46) + \frac{(\mathbb{I}2)^2}{\omega} (2356) (2456) + \right. \\
& \quad \left. + \frac{(\mathbb{I}2)^2}{\omega} (1356) (1456) \right) - \frac{(\mathbb{I}2)^2}{\omega} (56) (3456) \\
& = + \left(\frac{(2\mathbb{I})}{\omega} \right)^3 A_{34}.
\end{aligned}$$

Allgemein erhält man bei einer n -reihigen schiefen Determinante A

$$\begin{aligned}
S(A) &= \left(\frac{(2\mathbb{I})}{\omega} \right)^{n-2} A, \\
S(A_{ik}) &= - \left(\frac{(2\mathbb{I})}{\omega} \right)^{n-3} A_{ik}, \quad (i = 1, 2; k = 1, 2, 3, \dots, n; i \neq k) \\
(17) \quad S(A_{ik}) &= + \left(\frac{(2\mathbb{I})}{\omega} \right)^{n-3} A_{ik}, \quad (i = 3, 4, \dots, n; k = 1, 2, \dots, n; i \neq k) \\
S(A_{ii}) &= \left(\frac{(2\mathbb{I})}{\omega} \right)^{n-3} \left[\frac{\mathbb{I}}{\omega} A - A_{ii} \right], \quad (i = 1, 2) \\
S(A_{ii}) &= \left(\frac{(2\mathbb{I})}{\omega} \right)^{n-3} A_{ii}, \quad (i = 3, 4, \dots, n).
\end{aligned}$$

Mit Hilfe von A stellt CAYLEY die orthogonale Determinante des Wertes $+1$ her

$$B = |b_{ik}| \quad (i, k = 1, 2, \dots, n),$$

wobei

$$\begin{aligned}
b_{ik} &= \frac{2\omega A_{ik}}{A} \quad (i, k = 1, 2, \dots, n; i \neq k), \\
b_{ii} &= \frac{2\omega A_{ii}}{A} - 1 \quad (i = 1, 2, \dots, n).
\end{aligned}$$

Bilden wir nun

$$S(B) = |S(b_{ik})| = |b'_{ik}|,$$

so finden wir vermittels der Formeln (17)

$$\begin{aligned}
b'_{ik} &= 2 \frac{S\omega S(A_{ik})}{S(A)} = \pm 2 a_{21} \left(\frac{\omega}{(2\mathbb{I})} \right) \frac{A_{ik}}{A} = \pm b_{ik}, \quad (+ \text{für } i = 3, 4, \dots, n; - \text{für } i = 1, 2); \\
b'_{ii} &= 2 \frac{S\omega S(A_{ii})}{S(A)} - 1 = 2 a_{21} \left[\frac{\mathbb{I}}{\omega} - \frac{A_{ii}}{A} \right] \left(\frac{\omega}{(2\mathbb{I})} \right) - 1 \quad (\text{für } i = 1, 2) \\
&= 1 - 2 \frac{\omega A_{ii}}{A} = -b_{ii}, \\
b'_{ii} &= 2 \frac{S\omega S(A_{ii})}{S(A)} - 1 = 2 a_{21} \left(\frac{\omega}{(2\mathbb{I})} \right) \frac{A_{ii}}{A} - 1 = b_{ii}, \quad (\text{für } i = 3, 4, \dots, n).
\end{aligned}$$

Man hat also

$$S(B) = \begin{vmatrix} -b_{11} & -b_{12} & \dots & -b_{1n} \\ -b_{21} & -b_{22} & \dots & -b_{2n} \\ b_{31} & b_{32} & \dots & b_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{nn} \end{vmatrix};$$

d. h. S wandelt in B nur die Vorzeichen der Elemente in den beiden ersten Zeilen in die entgegengesetzten um. Damit ist der in der Einleitung behauptete Satz bewiesen. —

Wir können unsere Bezeichnungen nach der Richtung hin erweitern, dass wir die Substitution, die jedes a_{ik} in

$$(18) \quad -\frac{a_{\alpha\beta} a_{ik} + a_{\alpha i} a_{k\beta} + a_{\alpha k} a_{\beta i}}{\omega}$$

umwandelt, mit

$$(19) \quad S_{\alpha\beta}(a_{ik})$$

bezeichnen, so dass unsere bisher benutzte Substitution (10), (11)

$$S(a_{ik}) = S_{1,2}(a_{ik})$$

zu setzen ist. Man findet dann als Kompositions-Resultat

$$\begin{aligned} S_{3,4}(S_{1,2}a_{ik}) &= -S_{3,4} \frac{a_{12} a_{ik} + a_{1i} a_{k2} + a_{1k} a_{2i}}{\omega} \\ (20) \quad &= -\frac{1}{a_{21}} \left[\frac{a_{34} a_{12} + \dots}{-\omega} \cdot \frac{a_{34} a_{ik} + \dots}{-\omega} + \frac{a_{34} a_{1i} + \dots}{-\omega} \cdot \frac{a_{34} a_{k2} + \dots}{-\omega} + \frac{a_{34} a_{1k} + \dots}{-\omega} \cdot \frac{a_{34} a_{2i} + \dots}{-\omega} \right] \\ &= -\frac{1}{a_{21}} \left[\frac{a_{12} (1234ik)}{\omega^2} \right] \\ &= \frac{(1234ik)}{\omega^2} = S_{1,2}(S_{3,4}a_{ik}). \end{aligned}$$

Setzt man zwei von den Indizes der S einander gleich, so entsteht nach (7)

$$(21) \quad S_{1,2}(S_{2,3}a_{ik}) = \frac{(1223ik)}{\omega^2} = \frac{(13ik)}{\omega}.$$

Vergleicht man (20) mit (14), so ergibt sich

$$S_{1,2}(S_{3,4}a_{ik}) = \frac{S_{1,2}(34ik)}{a_{12}}$$

und ähnliche Beziehungen folgen für die weiteren Kompositionen mehrerer $S_{\alpha\beta}$.

Giessen, Januar 1910.