SUR LES FORMULES DE GREEN GÉNÉRALISÉES QUI SE PRÉSENTENT DANS L'HYDRODYNAMIQUE ET SUR QUELQUES-UNES DE LEURS APPLICATIONS.

PAR

C. W. OSEEN

À UPSAL.

Les méthodes de Green, si fécondes dans les différentes parties de la physique mathématique, ont été employées il y a déjà longtemps dans la théorie du mouvement d'un fluide idéal. Il était à attendre qu'elles ne seraient pas moins fructueuses dans la théorie d'un fluide visqueux, et en effet, M. H. A. LORENTZ a montré dans un mémoire intéressant quel profit on peut en tirer pour l'étude du mouvement permanent d'un fluide visqueux et incompressible.

Le mémoire present est consacré à l'étude des formules de Green généralisées qui se présentent dans la théorie générale du mouvement d'un fluide visqueux. Il est divisé en deux parties. Dans la première, nous appliquerons les méthodes de Green au problème du mouvement d'un fluide visqueux et incompressible dans trois ou deux dimensions. Dans la seconde, nous étudierons le mouvement d'un fluide visqueux et compressible.

Quelques-uns de nos résultats ont été publiés précédemment dans l'Arkiv för matematik, astronomi och fysik 1906—1907.

---

[1] Abhandlungen über theoretische Physik Bd 1 p. 23.

Première partie. Sur les formules de Green généralisées dans la théorie d'un fluide visqueux et incompressible.

I.

Les formules de Green généralisées dans le problème général à trois dimensions.

1. Les équations bien connues de Navier, de Poisson et de de St.-Venant donnent, si l'on néglige en première approximation les termes quadratiques en $u, \ldots \frac{\partial u}{\partial x}, \ldots$:

$$\left.\begin{aligned} \varrho\frac{\partial u}{\partial t} &= X - \frac{\partial p}{\partial x} + \mu \varDelta u, \\ \varrho\frac{\partial v}{\partial t} &= Y - \frac{\partial p}{\partial y} + \mu \varDelta v, \\ \varrho\frac{\partial w}{\partial t} &= Z - \frac{\partial p}{\partial z} + \mu \varDelta w, \\ \frac{\partial u}{\partial x} &+ \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0. \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

Nous supposons que u, v, w, les composantes de la vitesse, soient des fonctions uniformes et continues de x, y, z, t dans l'intérieur du fluide considéré, ainsi que leurs dérivées, qui figurent dans le système 1. Quant à X, Y, Z, les composantes de la force extérieure, nous supposons qu'elles soient des fonctions uniformes et continues de x, y, z, t et qu'elles admettent des dérivées continues par rapport à x, y, z, cette dernière hypothèse cependant n'étant pas indispensable.

Le système adjoint du système 1 est:

$$\left.\begin{aligned} -\varrho\frac{\partial u'}{\partial t} &= -\frac{\partial p'}{\partial x} + \mu \varDelta u', \\ & \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \frac{\partial u'}{\partial x} &+ \frac{\partial v'}{\partial y} + \frac{\partial w'}{\partial z} = 0. \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

Ce système admet les systèmes de solutions suivants:

$$u'_x(r') = -\frac{\partial^2 P(r')}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 P(r')}{\partial z^2}, \quad v'_x(r') = \frac{\partial^2 P(r')}{\partial x \partial y},$$

$$w'_x(r') = \frac{\partial^2 P(r')}{\partial x \partial z}, \quad p'_x(r') = \frac{\partial}{\partial x}\left(\varrho\frac{\partial P(r')}{\partial t} + \mu \varDelta P(r')\right);$$

$$u'_y(r') = \frac{\partial^2 P(r')}{\partial y \partial x}, \quad v'_y(r') = -\frac{\partial^2 P(r')}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 P(r')}{\partial z^2},$$

etc., où:

$$P(r') = \frac{1}{r\sqrt{t_0 - t}} \int_{r'}^{r} e^{-\frac{\varrho \xi^2}{4\mu(t_0-t)}} d\xi,$$

$$r = \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2}.$$

$P(r')$ satisfait à l'équation:

$$\Delta\left(\varrho \frac{\partial P(r')}{\partial t} + \mu \Delta P(r')\right) = 0.$$

Ces systèmes serviront à établir les formules de Green généralisées.

Pour les calculs, les expressions suivantes pour $u'_x(r')$, $v'_x(r')$, $w'_x(r')$, $p'_x(r')$ sont utiles:

$$u'_x(r') = -\frac{\partial^2 P(r')}{\partial r^2}\left(1 - \frac{(x-x_0)^2}{r^2}\right) - \frac{\partial P(r')}{\partial r}\left(\frac{1}{r} + \frac{(x-x_0)^2}{r^3}\right) =$$

$$\frac{1}{r^2}\left(\frac{3(x-x_0)^2}{r^2} - 1\right)(P(r') - E(r,t)) + \frac{\varrho}{2\mu}\left(1 - \frac{(x-x_0)^2}{r^2}\right)\frac{E(r,t)}{t_0 - t},$$

$$v'_x(r') = \frac{\partial^2 P(r')}{\partial r^2}\frac{(x-x_0)(y-y_0)}{r^2} - \frac{\partial P(r')}{\partial r}\frac{(x-x_0)(y-y_0)}{r^3} =$$

$$\frac{3(x-x_0)(y-y_0)}{r^4}(P(r') - E(r,t)) - \frac{\varrho}{2\mu}\frac{(x-x_0)(y-y_0)}{r^2}\frac{E(r,t)}{t_0-t},$$

$$w'_x(r') = \frac{\partial^2 P(r')}{\partial r^2}\frac{(x-x_0)(z-z_0)}{r^2} - \frac{\partial P(r')}{\partial r}\frac{(x-x_0)(z-z_0)}{r^3} =$$

$$\frac{3(x-x_0)(z-z_0)}{r^4}(P(r') - E(r,t)) - \frac{\varrho}{2\mu}\frac{(x-x_0)(z-z_0)}{r^2}\frac{E(r,t)}{t_0-t},$$

$$p'_x(r') = \frac{x-x_0}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(\varrho\frac{\partial P(r')}{\partial t} + \mu\Delta P(r')\right) = \frac{\varrho r'(x-x_0)}{2r^3}\frac{E(r',t)}{t_0-t}.$$

On a posé ici:

$$E(r,t) = \frac{e^{-\frac{\varrho r^2}{4\mu(t_0-t)}}}{\sqrt{t_0-t}}.$$

De ces formules on déduit aisément les expressions correspondantes pour $u'_y(r')$ etc.

Soit maintenant pour $t \geqq 0$ dans l'intérieur du fluide une surface fermée $S(t)$, en général variable avec le temps. Nous supposons que, dans le voisinage de chaque point de cette surface, on puisse exprimer les coordonnées d'un point de la surface en fonction de deux paramètres s_1, s_2 et de t par des fonctions $x(s_1, s_2, t)$ etc., continues et douées des dérivées continues par rapport à s_1, s_2 et t. Il existe alors dans chaque point de la surface une normale intérieure déterminée et une vitesse normale correspondante, u_n, de la surface. Désignons par ω la partie du fluide qui se trouve à l'intérieur de $S(t)$ et par $\omega(r')$ la partie de ω qui se trouve à l'exterieur de la surface $r = r'$.

Des systèmes 1 et 2, on obtient l'équation suivante:

$$\varrho \frac{\partial}{\partial t}[u u'_x(r') + v v'_x(r') + w w'_x(r')] = X u'_x(r') + \cdots -$$
$$- u'_x(r') \frac{\partial p}{\partial x} - \cdots + u \frac{\partial p'_x(r')}{\partial x} + \cdots + \mu [u'_x(r') \Delta u + \cdots - u \Delta u'_x(r') - \cdots],$$

valable dans le domaine $\omega(r')$. En appliquant les méthodes de Green, on trouve dans le cas où la sphère $r = r'$ dans l'intervalle $0 \leqq t \leqq t_0$ est situé dans l'intérieur du domaine ω:

$$\varrho \left\{ \int\limits_{\omega(r')} [u u'_x(r') + v v'_x(r') + w w'_x(r')] d\omega \right\}_{t=t_0} - \varrho \left\{ \int\limits_{\omega(r')} [u u'_x(r') + v v'_x(r') + w w'_x(r')] d\omega \right\}_{t=0} +$$
$$+ \varrho \int_0^{t_0} dt \int\limits_{S(t)} [u u'_x(r') + v v'_x(r') + w w'_x(r')] u_n dS = \int_0^{t_0} dt \int\limits_{\omega(r')} [u'_x(r') X + v'_x(r') Y + w'_x(r') Z] d\omega -$$
$$- \int_0^{t_0} dt \int\limits_{S(t)} \left[u'_x(r') \left(\mu \frac{du}{dn} - p \cos nx \right) + \cdots \right] dS + \int_0^{t_0} dt \int\limits_{S(t)} \left[u \left(\mu \frac{du'_x(r')}{dn} - p'_x(r') \cos nx \right) + \cdots \right] dS -$$
$$- \int_0^{t_0} dt \int\limits_{r=r'} \left[u'_x(r') \left(\mu \frac{du}{dn} - p \cos nx \right) + \cdots \right] dS + \int_0^{t_0} dt \int\limits_{r=r'} \left[u \left(\mu \frac{du'_x(r')}{dn} - p'_x(r') \cos nx \right) + \cdots \right] dS.$$

Cette formule est valable dans tous les cas, si l'on convient à donner à $u'_x(r')$, $v'_x(r')$, $w'_x(r')$, $p'_x(r')$ la valeur zéro à l'extérieur de $S(t)$.

Remarquons que, pour $t = t_0$, $u'_x(r') = v'_x(r') = w'_x(r') = 0$ dans $\omega(r')$. Donc la première intégrale à gauche disparaît.

Supposons maintenant que le point x_0, y_0, z_0 soit pour $t = t_0$ situé à l'intérieur du domaine ω et cherchons dans ce cas la limite des deux dernières intégrales à droite, quand r' tend vers zéro. Soient t_1 une valeur de t (> 0) et $\bar{r}'$ une valeur de r', telles que la sphère $r = \bar{r}'$ dans l'intervalle $t_1 \leqq t \leqq t_0$ est située dans l'intérieur de ω et cherchons d'abord la valeur limite des intégrales prises entre les limites t_1 et t_0. On a dans cet intervalle sur la sphère $r = r'$:

$$u'_x(r') = -\frac{1}{r'^2}\left(\frac{3(x-x_0)^2}{r'^2} - 1\right) E(r', t) + \frac{\varrho}{2\mu}\left(1 - \frac{(x-x_0)^2}{r'^2}\right)\frac{E(r', t)}{t_0 - t},$$

$$v'_x(r') = -\frac{3(x-x_0)(y-y_0)}{r'^4} E(r', t) - \frac{\varrho}{2\mu}\frac{(x-x_0)(y-y_0)}{r'^2}\frac{E(r', t)}{t_0 - t},$$

$$w'_x(r') = -\frac{3(x-x_0)(z-z_0)}{r'^4} E(r', t) - \frac{\varrho}{2\mu}\frac{(x-x_0)(z-z_0)}{r'^2}\frac{E(r', t)}{t_0 - t};$$

puis:

$$\frac{du}{dn} = \frac{\partial u}{\partial x}\cos nx + \frac{\partial u}{\partial y}\cos ny + \frac{\partial u}{\partial z}\cos nz = \frac{x-x_0}{r'}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{y-y_0}{r'}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{z-z_0}{r'}\frac{\partial u}{\partial z}$$

etc., ou si l'on désigne par $\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_0$ etc. la valeur de $\frac{\partial u}{\partial x}$ etc. au point x_0, y_0, z_0 et par φ une fonction quelconque de x, y, z, t dont la valeur numérique reste pour $r \leqq \bar{r}'$, $t_1 \leqq t \leqq t_0$ inférieur à un nombre positif, arbitraire, mais fixe, a:

$$\frac{du}{dn} = \frac{x-x_0}{r'}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_0 + \frac{y-y_0}{r'}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_0 + \frac{z-z_0}{r'}\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)_0 + r'\varphi$$

etc.,

$$p = p_0 + r'\varphi.$$

Considérons maintenant l'intégrale:

$$\int\!\!\int_{r=r'}\left[u'_x(r')\left(\mu\frac{du}{dn} - p\cos nx\right) + \cdots\right] dS.$$

On voit immédiatement que tous les termes qui contiennent les facteurs $\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_0$ etc. disparaissent, et l'on obtient une somme de termes des deux types suivants:

$$r'\varphi(r')E(r', t), \quad \frac{r'^3\varphi(r')E(r', t)}{t_0 - t}$$

en désignant par $\varphi(r')$ une fonction de r' et t, dont la valeur numérique reste pour $r' \leqq \bar{r}'$, $t_1 \leqq t \leqq t_0$ inférieur à un certain nombre positif a'. On a donc:

$$\int_{t_1}^{t_0} dt \int\!\!\int_{r=r'}\left[u'_x(r')\left(\mu\frac{du}{dn} - p\cos nx\right) + \cdots\right] dS =$$

somme de termes des types suivants:

$$r'\int_{t_1}^{t_0}\varphi(r')E(r',t)\,dt,\quad r'^3\int_{t_1}^{t_0}\varphi(r')E(r',t)\frac{dt}{t_0-t}.$$

Je dis que la valeur limite de ces termes est zéro. En effet, on a pour $r'\leqq\bar{r}'$, $t_1\leqq t\leqq t_0$:

$$|\varphi(r')|<a'.$$

On a de plus:

$$\int_{t_1}^{t_0}E(r',t)\,dt<\int_{t_1}^{t_0}\frac{dt}{\sqrt{t_0-t}}=2\sqrt{t_0-t_1},$$

$$\int_{t_1}^{t_0}E(r',t)\frac{dt}{t_0-t}=\int_{t_1}^{t_0}e^{-\frac{\varrho r'^2}{4\mu(t_0-t)}}\frac{dt}{\sqrt{(t_0-t)^3}}=\frac{1}{r'}\int_0^{\frac{t_0-t_1}{r'^2}}.\,e^{-\frac{\varrho}{4\mu\xi}}\frac{d\xi}{\sqrt{\xi^3}}<\frac{1}{r'}\int_0^{\infty}e^{-\frac{\varrho}{4\mu\xi}}\frac{d\xi}{\sqrt{\xi^3}}.$$

Donc:

$$\lim_{r'=0}r'\int_{t_1}^{t_0}\varphi(r')E(r',t)\,dt=\lim_{r'=0}r'^3\int_{t_1}^{t_0}\varphi(r')E(r',t)\frac{dt}{t_0-t}=0.$$

Par conséquent:

$$\lim_{r'=0}\int_{t_1}^{t_0}dt\int_{r=r'}\left[u'_x(r')\left(\mu\frac{du}{dn}-p\cos nx\right)+\cdots\right]dS=0.$$

Pour évaluer la valeur limite de l'intégrale:

$$\int_{t_1}^{t_0}dt\int_{r=r'}\left[u\left(\mu\frac{du'_x(r')}{dn}-p'_x(r')\cos nx\right)+\cdots\right]dS$$

nous remarquons que l'on a dans l'intervalle $t_1\leqq t\leqq t_0$ sur la sphère $r=r'$:

$$\frac{du'_x(r')}{dn}=\frac{\partial u'_x(r')}{\partial r}+\frac{x-x_0}{r'}\frac{\partial u'_x(r')}{\partial x}=\frac{3}{r'^3}\left(\frac{3(x-x_0)^2}{r'^2}-1\right)E(r',t)+$$
$$+\frac{\varrho}{2\mu r'}\left(\frac{3(x-x_0)^2}{r'^2}-1\right)\frac{E(r',t)}{t_0-t}-\frac{\varrho^2 r'}{4\mu^2}\left(1-\frac{(x-x_0)^2}{r'^2}\right)\frac{E(r',t)}{(t_0-t)^2},$$

$$\frac{dv'_x(r')}{dn} = \frac{9(x-x_0)(y-y_0)}{r'^5} E(r', t) + \frac{3\varrho(x-x_0)(y-y_0)}{2\mu r'^3} \frac{E(r', t)}{t_0-t} +$$
$$+ \frac{\varrho^2(x-x_0)(y-y_0)}{4\mu^2 r'} \frac{E(r', t)}{(t_0-t)^2},$$

$$\frac{dw'_x(r')}{dn} = \frac{9(x-x_0)(z-z_0)}{r'^5} E(r', t) + \frac{3\varrho(x-x_0)(z-z_0)}{2\mu r'^3} \frac{E(r', t)}{t_0-t} +$$
$$+ \frac{\varrho^2(x-x_0)(z-z_0)}{4\mu^2 r'} \frac{E(r', t)}{(t_0-t)^2},$$

$$p'_x(r') = \frac{\varrho(x-x_0)}{2r'^2} \frac{E(r', t)}{t_0-t},$$

$$u = u_0 + (x-x_0)\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_0 + (y-y_0)\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_0 + (z-z_0)\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)_0 + r'^2\varphi$$

etc. Tous les termes de l'intégrale:

$$\int\limits_{r=r'}\left[u\left(\mu\frac{du'_x(r')}{dn} - p'_x(r')\cos nx\right) + \cdots\right] dS$$

provenant de ces expressions et contenant les facteurs v_0, w_0 ou $\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_0$ etc. disparaissent, comme on le voit sans peine en observant que

$$\int\limits_{r=r'}(x-x_0)^2 dS = \int\limits_{r=r'}(y-y_0)^2 dS = \int\limits_{r=r'}(z-z_0)^2 dS = \frac{r'^2}{3}\int dS,$$

$$\int\limits_{r=r'}(x-x_0)(y-y_0)\, dS = 0, \quad \int\limits_{r=r'}(x-x_0)^2(y-y_0)\, dS = 0 \text{ etc.}$$

Les termes qui contiennent u_0 donnent:

$$-\frac{\varrho^2 r' u_0}{4\mu}\frac{E(r', t)}{(t_0-t)^2}\int\limits_{r=r'}\left(1 - \frac{(x-x_0)^2}{r'^2}\right) dS - \frac{\varrho u_0}{2r'^3}\frac{E(r', t)}{t_0-t}\int\limits_{r=r'}(x-x_0)^2 dS =$$
$$-\frac{2\pi\varrho^2 r'^3 u_0}{3\mu}\frac{E(r', t)}{(t_0-t)^2} - \frac{2\pi\varrho r' u_0}{3}\frac{E(r', t)}{t_0-t}.$$

Nous avons donc:

$$\iint_{r=r'}\left[u\left(\mu\frac{d u'_x(r')}{dn}-p'_x(r')\cos nx\right)+\cdots\right]dS=$$

$$-\frac{2\pi\varrho^2 r'^3 u_0}{3\mu}\frac{E(r',t)}{(t_0-t)^2}-\frac{2\pi\varrho r' u_0}{3}\frac{E(r',t)}{t_0-t}+$$

somme de termes des types:

$$r'\varphi(r')E(r',t),\quad \frac{r'^3\varphi(r')E(r',t)}{t_0-t},\quad \frac{r'^5\varphi(r')E(r',t)}{(t_0-t)^2}.$$

Cherchons maintenant la valeur limite de l'intégrale:

$$\int_{t_1}^{t_0}dt\iint_{r=r'}\left[u\left(\mu\frac{d u'_x(r')}{dn}-p'_x(r')\cos nx\right)+\cdots\right]dS.$$

Les termes du type:

$$r'\varphi(r')E(r',t)\ \text{etc.}$$

de notre intégrale de surface donnent des termes, s'évanouissant avec r'. Les deux premiers termes de cette intégrale convergent dans l'intervalle $t_1 \leqq t \leqq t_0-\varepsilon$ (ε arbitrairement petit, plus grand que zéro) uniformément vers zéro. Donc:

$$\lim_{r'=0}\int_{t_1}^{t_0}dt\iint_{r=r'}\left[u\left(\mu\frac{d u'_x(r')}{dn}-p'_x(r')\cos nx\right)+\cdots\right]dS=$$

$$-\frac{2\pi\varrho}{3}\lim_{r'=0}\left[\frac{\varrho r'^3}{\mu}\int_{t_0-\varepsilon}^{t_0}\frac{u_0E(r',t)\,dt}{(t_0-t)^2}+r'\int_{t_0-\varepsilon}^{t_0}\frac{u_0E(r',t)\,dt}{t_0-t}\right]=$$

$$-\frac{2\pi\varrho}{3}u(x_0,y_0,z_0,t_0)\lim_{r'=0}\left[\frac{\varrho r'^3}{\mu}\int_{t_0-\varepsilon}^{t_0}E(r',t)\frac{dt}{(t_0-t)^2}+r'\int_{t_0-\varepsilon}^{t_0}E(r',t)\frac{dt}{t_0-t}\right]+$$

$$+\frac{2\pi\varrho}{3}\lim_{r'=0}\left[\frac{\varrho r'^3}{\mu}\int_{t_0-\varepsilon}^{t_0}(u(x_0,y_0,z_0,t_0)-u_0)E(r',t)\frac{dt}{(t_0-t)^2}+\right.$$

$$\left.+r'\int_{t_0-\varepsilon}^{t_0}(u(x_0,y_0,z_0,t_0)-u_0)E(r',t)\frac{dt}{t_0-t}\right].$$

Un calcul facile montre que:

$$\frac{2\pi\varrho}{3}\lim_{r'=0}\left[\frac{\varrho r'^3}{\mu}\int_{t_0-\varepsilon}^{t_0} E(r', t)\frac{dt}{(t_0-t)^2} + r'\int_{t_0-\varepsilon}^{t_0} E(r', t)\frac{dt}{t_0-t}\right] = 4\pi\sqrt{\mu\varrho\pi}.$$

On a donc:

$$\left|\lim_{r'=0}\int_{t_1}^{t_0} dt\int_{r=r'}\left[u\left(\mu\frac{du'_x(r')}{dn} - p'_x(r')\cos nx\right) + \cdots\right]dS + 4\pi\sqrt{\mu\varrho\pi}\,u(x_0, y_0, z_0, t_0)\right| >$$

$$4\pi\sqrt{\mu\varrho\pi}\,\delta$$

δ désignant la plus grande valeur de $|u(x_0, y_0, z_0, t_0) - u_0|$ dans l'intervalle $t_0 - \varepsilon \leq t \leq t_0$. ε et par conséquent δ étant aussi petits que l'on voudra on voit que:

$$\lim_{r'=0}\int_{t_1}^{t_0} dt\int_{r=r'}\left[u\left(\mu\frac{du'_x(r')}{dn} - p'_x(r')\cos nx\right) + \cdots\right]dS =$$

$$-4\pi\sqrt{\mu\varrho\pi}\,u(x_0, y_0, z_0, t_0).$$

Des calculs précédents, on conclut aussi que la valeur limite de nos intégrales prises entre les limites 0 et t_1 est zéro. Nous avons donc obtenu la formule suivante:

$$\left.\begin{aligned}
&4\pi\sqrt{\mu\varrho\pi}\,u(x_0, y_0, z_0, t_0) = \lim_{r'=0}\left[\varrho\left\{\int\int_{\omega(r')}[u u'_x(r') + v v'_x(r') + \right.\right. \\
&\left.+ w w'_x(r')]d\omega\right\}_{t=0} - \varrho\int_0^{t_0} dt\int_{S(t)}[u u'_x(r') + v v'_x(r') + w w'_x(r')]u_n dS + \\
&+ \int_0^{t_0} dt\int_{\omega(r')}[u'_x(r')X + v'_x(r')Y + w'_x(r')Z]d\omega - \int_0^{t_0} dt\int_{S(t)}\left[u'_x(r')\left(\mu\frac{du}{dn} - \right.\right. \\
&\left.\left.\left. - p\cos nx\right) + \cdots\right]dS + \int_0^{t_0} dt\int_{S(t)}\left[u\left(\mu\frac{du'_x(r')}{dn} - p'_x(r')\cos nx\right) + \cdots\right]dS\right].
\end{aligned}\right\}\quad (3)$$

Pour plus de simplicité, nous désignons par u'_x, v'_x etc. les valeurs limites de $u'_x(r')$ etc., quand r' tend vers zéro. Nous remarquons que la convergence vers ces limites est uniforme dans la partie de ω, définie par les inégalités:

$$t_0 - t > \delta, \quad r > \bar{r}' \quad (\delta > 0, \ \bar{r}' > 0).$$

On peut d'ailleurs déterminer deux nombres positifs a_1 et a_2 tels que l'on ait pour $r' \geqq 0$, $t_0 - t \geqq 0$, $\frac{\varrho r^2}{4\mu} + t_0 - t > 0$:

$$|u'_x(r')|, \ |v'_x(r')|, \ |w'_x(r')| < \frac{a_1}{r^2 \sqrt{t_0 - t}} + \frac{a_2 E(r, t)}{t_0 - t}.$$

Comme:

$$\frac{r^2}{t_0 - t} e^{-\frac{\varrho r^2}{4\mu(t_0 - t)}}$$

reste pour $r \geqq 0$, $t_0 - t \geqq 0$ inférieur à une certaine quantité positive, on conclut que l'on peut trouver une quantité positive a_3 telle que l'on ait pour $r' \geqq 0$, $t_0 - t \geqq 0$, $\frac{\varrho r^2}{4\mu} + t_0 - t > 0$:

$$|u'_x(r')|, \ |v'_x(r')|, \ |w'_x(r')| < \frac{a_3}{r^2 \sqrt{t_0 - t}}. \tag{4}$$

Il résulte de ces inégalités qu'on peut déterminer une quantité positive a_4 telle que l'on ait pour $r' \geqq 0$:

$$\left| \int\limits_{r' \leq r \leq \bar{r}'} u'_x(r') X \, d\omega \right| < \frac{a_4 \bar{r}'}{\sqrt{t_0 - t}} \operatorname*{Max}_{0 \leq r \leq \bar{r}'} |X|.$$

etc. Ces remarques suffisent pour montrer que l'on a:

$$\lim_{r'=0} \varrho \left\{ \int\limits_{\omega(r')} [u u'_x(r') + \cdots] d\omega \right\}_{t=0} = \varrho \left\{ \int\limits_{\omega} (u u'_x + \cdots) d\omega \right\}_{t=0}.$$

Considérons maintenant l'intégrale:

$$\int\limits_{t_0 - \varepsilon}^{t_0} dt \int\limits_{\omega(r')} [u'_x(r') X + v'_x(r') Y + w'_x(r') Z] d\omega.$$

Des inégalités précédentes, on conclut que cette intégrale a pour $r' \geqq 0$ une valeur déterminée et qu'on peut trouver une quantité positive a_5 telle que la valeur absolue de l'intégrale soit pour $r' \geqq 0$ plus petite que $a_5 \sqrt{\varepsilon}$. Cela posé, je dis que:

$$\lim_{r'=0} \int_0^{t_0} dt \int_{\omega(r')} (u'_x(r') X + v'_x(r') Y + w'_x(r') Z) d\omega = \int_0^{t_0} dt \int_{\omega} (u'_x X + v'_x Y + w'_x Z) d\omega .$$

En d'autres termes, δ étant une quantité positive, aussi petite que l'on voudra, je dis que l'on peut déterminer un nombre positif $\overline{r''}$, tel que l'inégalité $r' < \overline{r''}$ entraîne l'inégalité:

$$\left| \int_0^{t_0} dt \int_{\omega(r')} (u'_x(r') X + \cdots) d\omega - \int_0^{t_0} dt \int_{\omega} (u'_x X + \cdots) d\omega \right| < \delta .$$

Choisissons à cet effet une quantité positive $\varepsilon < t_0$ et $< \frac{\delta^2}{25 a_5^2}$. Déterminons une quantité positive $\overline{r'}$ telle que:

$$24 \pi a_3 \sqrt{t_0 - \varepsilon}\, \overline{r'} \operatorname*{Max}_{\omega} \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2} < \frac{\delta}{5} .$$

Déterminons enfin la quantité positive $\overline{r''} \leqq \overline{r'}$ telle que l'inégalité $r' < \overline{r''}$ entraîne l'inégalité suivante:

$$\left| \int_0^{t_0-\varepsilon} dt \int_{\omega(\overline{r'})} (u'_x(r') X + \cdots) d\omega - \int_0^{t_0-\varepsilon} dt \int_{\omega(\overline{r'})} (u'_x X + \cdots) d\omega \right| < \frac{\delta}{5} .$$

Comme on a pour $r' < \overline{r'}$:

$$\begin{aligned}
&\int_0^{t_0} dt \int_{\omega(r')} (u'_x(r') X + \cdots) d\omega - \int_0^{t_0} dt \int_{\omega} (u'_x X + \cdots) d\omega = \\
&\int_0^{t_0-\varepsilon} dt \int_{\omega(\overline{r'})} (u'_x(r') X + \cdots) d\omega - \int_0^{t_0-\varepsilon} dt \int_{\omega(\overline{r'})} (u'_x X + \cdots) d\omega + \\
&+ \int_0^{t_0-\varepsilon} dt \int_{r' \leqq r \leqq \overline{r'}} (u'_x(r') X + \cdots) d\omega - \int_0^{t_0-\varepsilon} dt \int_{0 \leqq r \leqq \overline{r'}} (u'_x X + \cdots) d\omega + \\
&+ \int_{t_0-\varepsilon}^{t_0} dt \int_{\omega(r')} (u'_x(r') X + \cdots) d\omega - \int_{t_0-\varepsilon}^{t_0} dt \int_{\omega} (u'_x X + \cdots) d\omega
\end{aligned}$$

et comme pour $0 \leq r' < \overline{r'}$:

$$\left|\int\limits_0^{t_0-\varepsilon} dt \int\limits_{r' \leq r \leq \overline{r'}} (u'_x(r') X + \cdots) d\omega\right| < 24\pi a_3 \sqrt{t_0 - \varepsilon}\, \overline{r'}\, \text{Max} \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2} < \frac{\delta}{5},$$

$$\left|\int\limits_{t_0-\varepsilon}^{t_0} dt \int\limits_{\omega(r')} (u'_x(r') X + \cdots) d\omega\right| < a_5 \sqrt{\varepsilon} < \frac{\delta}{5},$$

on conclut que:

$$\left|\int\limits_0^{t_0} dt \int\limits_{\omega(r')} (u'_x(r') X + \cdots) d\omega - \int\limits_0^{t_0} dt \int\limits_{\omega} (u'_x X + \cdots) d\omega\right| < \delta$$

si $r' < \overline{r''}$.

Passons aux intégrales de surface de notre formule 3.

On a, ε étant une quantité positive $< t_0$, à cause de la convergence uniforme de $u'_x(r')$ etc. vers u'_x etc. dans le domaine, défini par les inégalités: $t_0 - t > \delta$, $r > \overline{r'}$, $\delta > 0$, $\overline{r'} > 0$:

$$\lim_{r' = 0} \Bigg\{ -\varrho \int\limits_0^{t_0-\varepsilon} dt \int\limits_{S(t)} [u u'_x(r') + v v'_x(r') + w w'_x(r')] u_n dS -$$

$$- \mu \int\limits_0^{t_0-\varepsilon} dt \int\limits_{S(t)} \left[u'_x(r') \left(\mu \frac{du}{dn} - p \cos nx\right) + \cdots \right] dS + \mu \int\limits_0^{t_0-\varepsilon} dt \int\limits_{S(t)} \left(u \frac{du'_x(r')}{dn} + \cdots\right) dS \Bigg\} =$$

$$- \int\limits_0^{t_0-\varepsilon} dt \int\limits_{S(t)} \left[u'_x \left(\mu \frac{du}{dn} - p \cos nx + \varrho u u_n\right) + \cdots \right] dS + \mu \int\limits_0^{t_0-\varepsilon} dt \int\limits_{S(t)} \left(u \frac{du'_x}{dn} + \cdots\right) dS.$$

Les inégalités 4 montrent de plus que, δ étant une quantité positive, aussi petite que l'on veut, on peut toujours prendre ε assez petit pour que:

$$\Bigg| \varrho \int\limits_{t_0-\varepsilon}^{t_0} dt \int\limits_{S(t)} (u u'_x(r') + \cdots) u_n dS + \int\limits_{t_0-\varepsilon}^{t_0} dt \int\limits_{S(t)} \left[u'_x(r') \left(\mu \frac{du}{dn} - p \cos nx\right) + \cdots \right] dS -$$

$$- \mu \int\limits_{t_0-\varepsilon}^{t_0} dt \int\limits_{S(t)} \left(u \frac{du'_x(r')}{dn} + \cdots\right) dS \Bigg| < \delta$$

pour $r' \geqq 0$. Donc:

$$\lim_{r'=0}\left\{-\varrho\int_0^{t_0}dt\int_{S(t)}(u\,u'_x(r')+\cdots)\,u_n\,dS-\int_0^{t_0}dt\int_{S(t)}\left[u'_x(r')\left(\mu\frac{du}{dn}-\right.\right.\right.$$

$$\left.\left.\left.-p\cos nx\right)+\cdots\right]dS+\mu\int_0^{t_0}dt\int_{S(t)}\left(u\frac{du'_x(r')}{dn}+\cdots\right)dS\right\}=$$

$$-\int_0^{t_0}dt\int_{S(t)}\left[u'_x\left(\mu\frac{du}{dn}-p\cos nx+\varrho\,u\,u_n\right)+\cdots\right]dS+\mu\int_0^{t_0}dt\int_{S(t)}\left(u\frac{du'_x}{dn}+\cdots\right)dS.$$

Pour calculer la valeur limite de la dernière intégrale de notre formule 3, nous considérons d'abord l'intégrale suivante:

$$r'\int_0^{t_0}f(t)\,E(r',t)\frac{dt}{t_0-t},$$

où l'on suppose que $f(t)$ soit une fonction continue de t. La fonction:

$$\frac{r'\,E(r',t)}{t_0-t}=\frac{r'\,e^{-\frac{\varrho r'^2}{4\mu(t_0-t)}}}{\sqrt{(t_0-t)^3}}$$

converge pour $t_0-t>\delta$ $(\delta>0)$ uniformément vers zéro avec r'. Nous avons donc:

$$\lim_{r'=0}r'\int_0^{t_0}f(t)\,E(r',t)\frac{dt}{t_0-t}=\lim_{r'=0}r'\int_{t_0-\delta}^{t_0}f(t)\,E(r',t)\frac{dt}{t_0-t}=$$

$$\lim_{r'=0}\left\{f(t_0)\,r'\int_{t_0-\delta}^{t_0}E(r',t)\frac{dt}{t_0-t}+r'\int_{t_0-\delta}^{t_0}(f(t)-f(t_0))\,E(r',t)\frac{dt}{t_0-t}\right\}.$$

Comme on a:

$$r'\int_{t_0-\delta}^{t_0}E(r',t)\frac{dt}{t_0-t}=\int_{t_0-\delta}^{t_0}\frac{r'\,e^{-\frac{\varrho r'^2}{4\mu(t_0-t)}}}{\sqrt{(t_0-t)^3}}dt=2\sqrt{\frac{\mu}{\varrho}}\int_{r'\sqrt{\frac{\varrho}{\mu\delta}}}^{\infty}e^{-\frac{\xi^2}{4}}d\xi$$

et comme la valeur maximum de $|f(t)-f(t_0)|$ dans l'intervalle $t_0-\delta \leqq t \leqq t_0$ tend vers zéro avec δ, nous avons:

$$\left| \lim_{r'=0} r' \int_0^{t_0} f(t)\, E(r', t) \frac{dt}{t_0 - t} - 2 \sqrt{\frac{\mu}{\varrho}} f(t_0) \int_0^{\infty} e^{-\frac{\xi^2}{4}} d\xi \right| < \varepsilon(\delta),$$

$\varepsilon(\delta)$ tendant vers zéro avec δ. Donc, enfin:

$$\lim_{r'=0} r' \int_0^{t_0} f(t)\, E(r', t) \frac{dt}{t_0 - t} = 2 \sqrt{\frac{\mu}{\varrho}} f(t_0) \int_0^{\infty} e^{-\frac{\xi^2}{4}} d\xi = 2 \sqrt{\frac{\mu \pi}{\varrho}} \cdot f(t_0).$$

En appliquant cette formule à l'intégrale:

$$- \int_0^{t_0} dt \int_{S(t)} p'_x(r') (u \cos nx + \cdots) dS = - \frac{\varrho r'}{2} \int_0^{t_0} E(r', t) \frac{dt}{t_0 - t} \int_{S(t)} (u \cos nx + \cdots) \frac{x - x_0}{r^3} dS$$

nous obtenons:

$$\lim_{r'=0} - \int_0^{t_0} dt \int_{S(t)} p'_x(r') (u \cos nx + \cdots) dS =$$

$$- \sqrt{\mu \varrho \pi} \int_{S(t_0)} (u \cos nx + v \cos ny + w \cos nz) \frac{x - x_0}{r^3} dS.$$

Nous avons donc:

$$4\pi \sqrt{\mu \varrho \pi}\, u(x_0, y_0, z_0, t_0) = \varrho \left\{ \int_{\omega} (u u'_x + v v'_x + w w'_x) u_n dS \right\}_{t=0} +$$

$$+ \int_0^{t_0} dt \int_{\omega} (u'_x X + v'_x Y + w'_x Z) d\omega - \int_0^{t_0} dt \int_{S(t)} \Big[u'_x \Big(\mu \frac{du}{dn} - p \cos nx +$$

$$+ \varrho u u_n \Big) + \cdots \Big] dS + \mu \int_0^{t_0} dt \int_{S(t)} \left(u \frac{du'_x}{dn} + v \frac{dv'_x}{dn} + w \frac{dw'_x}{dn} \right) dS -$$

$$- \sqrt{\mu \varrho \pi} \int_{S(t_0)} (u \cos nx + v \cos ny + w \cos nz) \frac{x - x_0}{r^3} dS.$$

On obtient par des permutations des lettres deux formules analogues, exprimant $v(x_0, y_0, z_0, t_0)$ et $w(x_0, y_0, z_0, t_0)$ par les valeurs de u, v, w pour $t = 0$ et par les valeurs de $u, \ldots, \frac{du}{dn}, \ldots, p$ sur la frontière $S(t)$.

Pour compléter notre système de formules, il faut exprimer $p(x_0, y_0, z_0, t_0)$ par les mêmes quantités. On parvient à ce but par une application nouvelle de la formule:

$$\varrho\left\{\int\limits_{\omega(r')}(u u'_{r'} + \cdots)\,d\omega\right\}_{t=t_0} - \varrho\left\{\int\limits_{\omega(r')}(u u'_{r'} + \cdots)\,d\omega\right\}_{t=0} +$$

$$+ \varrho\int\limits_0^{t_0} dt \int\limits_{S(t)}(u u'_{r'} + \cdots)\,u_n\,dS = \int\limits_0^{t_0} dt \int\limits_{\omega(r')}(u'_{r'} X + \cdots)\,d\omega -$$

$$- \int\limits_0^{t_0} dt \int\limits_{S(t)}\left[u'_{r'}\left(\mu\frac{du}{dn} - p\cos nx\right) + \cdots\right]dS + \int\limits_0^{t_0} dt \int\limits_{S(t)}\left[u\left(\mu\frac{du'_{r'}}{dn} -\right.\right.$$

$$\left.\left. - p'_{r'}\cos nx\right) + \cdots\right]dS - \int\limits_0^{t_0} dt \int\limits_{r=r'}\left[u'_{r'}\left(\mu\frac{du}{dn} - p\cos nx\right) + \cdots\right]dS +$$

$$+ \int\limits_0^{t_0} dt \int\limits_{r=r'}\left[u\left(\mu\frac{du'_{r'}}{dn} - p'_{r'}\cos nx\right) + \cdots\right]dS,$$

valable si $u'_{r'}$, $v'_{r'}$, $w'_{r'}$, $p'_{r'}$ sont des fonctions de x, y, z, t, régulières (dans le sens indiqué p. 206) dans le domaine $\omega(r')$ et y satisfaisant au système 2.

Posons:

$$u'_{r'} = \frac{\varrho r' E(r', t)}{2(t_0 - t)}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{r}\right), \quad v'_{r'} = \frac{\varrho r' E(r', t)}{2(t_0 - t)}\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{r}\right),$$

$$w'_{r'} = \frac{\varrho r' E(r', t)}{2(t_0 - t)}\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{r}\right), \quad p'_{r'} = \frac{\varrho^2 r'}{2r}\frac{\partial}{\partial t}\frac{E(r', t)}{t_0 - t},$$

et faisons dans notre équation r' tendre vers zéro. Commençons de nouveau par l'évaluation de la valeur limite des deux dernières intégrales.

En posant comme plus haut:

$$\frac{du}{dn} = \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_0\cos nx + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_0\cos ny + \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)_0\cos nz + r'\varphi$$

etc.,

$$p = p_0 + r'\varphi$$

nous voyons d'abord que, dans la première de ces intégrales, tous les termes contenant $\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_0$, $\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)_0$, $\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)_0$, $\left(\frac{\partial v}{\partial z}\right)_0$, $\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)_0$, $\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)_0$ disparaissent. Des autres termes, nous obtenons dans le cas le plus simple, où le point x_0, y_0, z_0 est situé dans ω dans l'intervalle $0 \leqq t \leqq t_0$ tout entier:

$$\frac{2\pi\varrho\mu}{3}\int_0^{t_0}\left(\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_0+\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)_0+\left(\frac{\partial w}{\partial z}\right)_0\right)\frac{E(r',t)}{t_0-t}dt-$$
$$-2\pi\varrho r'\int_0^{t_0}p_0 E(r',t)\frac{dt}{t_0-t}+r'^2\int_0^{t_0}\varphi(r')E(r',t)\frac{dt}{t_0-t}.$$

Comme:

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_0+\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)_0+\left(\frac{\partial w}{\partial z}\right)_0=0$$

la valeur limite de cette expression est:

$$-4\pi\sqrt{\mu\varrho\pi}\,p(x_0, y_0, z_0, t_0),$$

resultat, valable évidemment aussi dans le cas général où l'on suppose seulement que le point x_0, y_0, z_0 soit situé, pour $t = t_0$, dans l'intérieur de ω. On trouve de la même manière que la dernière intégrale à droite s'évanouit avec r'. Donc:

$$4\pi\sqrt{\mu\varrho\pi}\,p(x_0, y_0, z_0, t_0)=\lim_{r'=0}\Bigg[\varrho\left\{\int_{\omega(r')}(u u'_{r'}+\cdots)d\omega\right\}_{t=0}-$$
$$-\varrho\int_0^{t_0}dt\int_{S(t)}(u u'_{r'}+\cdots)u_n dS+\int_0^{t_0}dt\int_{\omega(r')}(u'_{r'}X+\cdots)d\omega-$$
$$-\int_0^{t_0}dt\int_{S(t)}\left[u'_{r'}\left(\mu\frac{du}{dn}-p\cos nx\right)+\cdots\right]dS+\int_0^{t_0}dt\int_{S(t)}\left[u\left(\mu\frac{du'_{r'}}{dn}-p'_{r'}\cos nx\right)+\cdots\right]dS\Bigg].$$

Pour calculer le membre droit de cette équation, nous remarquons d'abord que $u'_{r'}, v'_{r'}, w'_{r'}, p'_{r'}$ dans l'intervalle $0 \leqq t \leqq t_0 - \varepsilon$ $(\varepsilon > 0)$ et pour $r > \overline{r'}$ $(\overline{r'} > 0)$ convergent uniformément vers zéro avec r' et qu'il existe un nombre positif a_6 tel que pour $r > 0$, $r' \geqq 0$, $t_0 - t \geqq 0$:

$$|u'_{r'}|,\ |v'_{r'}|,\ |w'_{r'}| < \frac{a_6}{r^2\sqrt{(t_0-t)^3}}.$$

On conclut de ces remarques que:

$$\lim_{r'=0} \varrho \left\{ \int\limits_{\omega(r')} (u u'_{r'} + \cdots) d\omega \right\}_{t=0} = 0 .$$

Pour trouver la valeur limite de:

$$-\varrho \int\limits_0^{t_0} dt \int\limits_{S(t)} (u u'_{r'} + \cdots) u_n dS + \int\limits_0^{t_0} dt \int\limits_{\omega(r')} (u'_{r'} X + \cdots) d\omega -$$

$$-\int\limits_0^{t_0} dt \int\limits_{S(t)} \left[u'_{r'} \left(\mu \frac{du}{dn} - p \cos nx \right) + \cdots \right] dS + \mu \int\limits_0^{t_0} dt \int\limits_{S(t)} \left(u \frac{du'_{r'}}{dn} + \cdots \right) dS$$

nous nous appuyons sur l'égalité:

$$\lim_{r'=0} \frac{\varrho r'}{2} \int\limits_0^{t_0} f(t) E(r', t) \frac{dt}{t_0 - t} = \sqrt{\mu \varrho \pi}\, f(t_0)$$

et nous obtenons:

$$\sqrt{\mu \varrho \pi} \left[\int\limits_{\omega} \left(X \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{r} \right) + Y \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1}{r} \right) + Z \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{r} \right) \right) d\omega - \int\limits_{S(t)} \left[\left(\mu \frac{du}{dn} - \right. \right. \right.$$

$$\left. \left. - p \cos nx + \varrho u u_n \right) \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{r} \right) + \cdots \right] dS + \mu \int\limits_{S(t)} \left(u \frac{d}{dn} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{r} \right) + \right.$$

$$\left. \left. + v \frac{d}{dn} \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1}{r} \right) + w \frac{d}{dn} \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{r} \right) \right) dS \right]_{t=t_0} .$$

Enfin, pour calculer:

$$\lim_{r'=0} - \int\limits_0^{t_0} dt \int\limits_{S(t)} (u \cos nx + v \cos ny + w \cos nz) p'_{r'} dS =$$

$$\lim_{r'=0} - \frac{\varrho^2 r'}{2} \int\limits_0^{t_0} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{E(r', t)}{t_0 - t} \right) dt \int\limits_{S(t)} (u \cos nx + \cdots) \frac{dS}{r}$$

nous faisons une intégration par parties, ce qui donne:

$$\frac{\varrho^2 r' E(r', 0)}{2 t_0} \int\limits_{S(0)} (u \cos nx + \cdots) \frac{dS}{r} + \frac{\varrho^2 r'}{2} \int\limits_0^{t_0} E(r', t) \frac{dt}{t_0 - t} \cdot \frac{\partial}{\partial t} \int\limits_{S(t)} (u \cos nx + \cdots) \frac{dS}{r} .$$

La valeur limite est donc:

$$\varrho \sqrt{\mu \varrho \pi} \left\{ \frac{\partial}{\partial t} \int\limits_{S(t)} (u \cos nx + \cdots) \frac{dS}{r} \right\}_{t=t_0}$$

Nous avons donc obtenu la formule suivante:

$$4\pi p(x_0, y_0, z_0, t_0) = \Bigg[\int\limits_{\omega} \left(X \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{r} \right) + \cdots \right) d\omega - \int\limits_{S(t)} \Bigg[\left(\mu \frac{du}{dn} - \right.$$

$$\left. - p \cos nx + \varrho u u_n \right) \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{r} \right) + \cdots \Bigg] dS + \mu \int\limits_{S(t)} \left(u \frac{d}{dn} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{r} \right) + \right.$$

$$\left. + \cdots \right) dS + \varrho \frac{\partial}{\partial t} \int\limits_{S(t)} (u \cos nx + \cdots) \frac{dS}{r} \Bigg]_{t=t_0}.$$

En changeant un peu nos notations, nous pouvons résumer nos resultats dans le théorème suivant:

Si, dans un domaine $\omega(t)$ borné par la surface $S(t)$, u, v, w, p sont des fonctions uniformes et continues de x, y, z, t ainsi que leurs dérivées qui figurent dans le système 1 et s'ils satisfont à ce système, où X, Y, Z désignent des fonctions uniformes et continues de x, y, z, t, alors on a, x, y, z étant les coordonnées d'un point situé au moment t $(t_0 < t)$ dans l'intérieur du domaine $\omega(t)$:

$$\left. \begin{aligned} & 4\pi \sqrt{\mu \varrho \pi}\, u(x, y, z, t) = \varrho \int\limits_{\omega(t_0)} (u(\xi, \eta, \zeta, t_0) u'_\xi + v(\xi, \eta, \zeta, t_0) v'_\xi + \\ & + w(\xi, \eta, \zeta, t_0) w'_\xi)_{\tau=t_0} d\omega + \int\limits_{t_0}^{t} d\tau \int\limits_{\omega(\tau)} (u'_\xi X(\xi, \eta, \zeta, \tau) + \\ & + v'_\xi Y(\xi, \eta, \zeta, \tau) + w'_\xi Z(\xi, \eta, \zeta, \tau)) d\omega - \int\limits_{t_0}^{t} d\tau \int\limits_{S(\tau)} \Big[u'_\xi \Big(\mu \frac{du}{dn} - \\ & - p \cos nx + \varrho u u_n \Big) + \cdots \Big] dS + \mu \int\limits_{t_0}^{t} d\tau \int\limits_{S(\tau)} \left(u \frac{du'_\xi}{dn} + \cdots \right) dS - \\ & - \sqrt{\mu \varrho \pi} \int\limits_{S(t)} (u \cos nx + \cdots) \frac{\xi - x}{r^3} dS, \\ & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

$$\left.\begin{aligned}4\pi p(x,y,z,t) &= \int\limits_{\omega(t)}\left(X(\xi,\eta,\zeta,t)\frac{\partial}{\partial\xi}\left(\frac{1}{r}\right)+\cdots\right)d\omega-\\ &-\int\limits_{S(t)}\left[\left(\mu\frac{du}{dn}-p\cos nx+\varrho u u_n\right)\frac{\partial}{\partial\xi}\left(\frac{1}{r}\right)+\cdots\right]dS+\\ &+\mu\int\limits_{S(t)}\left[u\frac{d}{dn}\frac{\partial}{\partial\xi}\left(\frac{1}{r}\right)+\cdots\right]dS+\varrho\frac{\partial}{\partial t}\int\limits_{S(t)}(u\cos nx+\cdots)\frac{dS}{r}.\end{aligned}\right\}\qquad(5)$$

On a dans ces formules:

$$u'_\xi = -\frac{\partial^2 P}{\partial\eta^2}-\frac{\partial^2 P}{\partial\zeta^2},\quad v'_\xi=\frac{\partial^2 P}{\partial\xi\partial\eta},\quad w'_\xi=\frac{\partial^2 P}{\partial\xi\partial\zeta},\quad u'_\eta=\frac{\partial^2 P}{\partial\xi\partial\eta}\ \text{etc.}$$

$$P=\frac{1}{r}\int\limits_0^r E(\alpha,\tau,t)\,d\alpha,$$

$$r=\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+(z-\zeta)^2},\quad E(\alpha,\tau,t)=\frac{e^{-\frac{\varrho\alpha^2}{4\mu(t-\tau)}}}{\sqrt{t-\tau}},$$

$$d\omega=d\xi\,d\eta\,d\zeta,$$

$$\frac{d}{dn}=\cos nx\frac{\partial}{\partial\xi}+\cos ny\frac{\partial}{\partial\eta}+\cos nz\frac{\partial}{\partial\zeta},$$

n étant la normale intérieure de la surface $S(t)$. Dans les intégrales de surface, u, v, w, p doivent être pris pour les arguments ξ, η, ζ, τ, ξ, η, ζ désignant les coordonnées d'un point de la surface $S(t)$, dont dS est un élement. P et par conséquent u'_ξ etc. satisfont à l'équation:

$$\varrho\frac{\partial P}{\partial\tau}+\mu\left(\frac{\partial^2 P}{\partial\xi^2}+\frac{\partial^2 P}{\partial\eta^2}+\frac{\partial^2 P}{\partial\zeta^2}\right)=0.$$

2. Nous nous proposons dans ce paragraphe de montrer que, $u(\xi,\eta,\zeta,t_0)$, $v(\xi,\eta,\zeta,t_0)$, $w(\xi,\eta,\zeta,t_0)$ étant des fonctions données et continues de ξ,η,ζ dans le domaine $\omega(t_0)$ et $u, v, w, \frac{du}{dn}, \frac{dv}{dn}, \frac{dw}{dn}, p$, étant des fonctions données et continues des points de la surface $S(\tau)$ et de τ, les fonctions u, v, w, p de x, y, z, t, définies par les formules 5, dans l'intérieur du domaine $\omega(t)$ et pour $t>t_0$ satisfont au système 1. Nous montrerons de plus que:

$$\lim_{r=0,\,t=t_0} u(x,y,z,t)=u(\xi,\eta,\zeta,t_0)$$

etc., pourvu que $u(\xi, \eta, \zeta, t_0)$ etc. admettent des dérivées continues (à l'exception, peut-être, d'un certain nombre de surfaces de discontinuité) par rapport à ξ, η, ζ, satisfaisant à l'équation:

$$\frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{\partial v}{\partial \eta} + \frac{\partial w}{\partial \zeta} = 0.$$

Nous démontrerons ces théorèmes par une étude successive des différents termes des membres droits de nos formules.

u'_ξ, u'_η, u'_ζ; v'_ξ, v'_η, v'_ζ; w'_ξ, w'_η, w'_ζ, considérés comme des fonctions de x, y, z, t satisfont au système I, si l'on y pose $X = Y = Z = 0$, $p = 0$. Les fonctions:

$$\varrho \int\limits_{\omega(t_0)} (u(\xi, \eta, \zeta, t_0) u'_\xi + \cdots) d\omega, \quad \varrho \int\limits_{\omega(t_0)} (u(\xi, \eta, \zeta, t_0) u'_\eta + \cdots) d\omega,$$

$$\varrho \int\limits_{\omega(t_0)} (u(\xi, \eta, \zeta, t_0) u'_\zeta + \cdots) d\omega$$

ont donc la même propriété, du moins dans le cas considéré jusqu'ici, où le domaine désigné par $\omega(t)$ est une partie finie de l'espace. Si les fonctions $u(\xi, \eta, \zeta, t_0)$ etc. sont douées des dérivées continues par rapport à ξ, η, ζ, on peut transformer ces expressions par des intégrations par parties. On a:

$$u'_\xi = \frac{\varrho}{\mu} \frac{\partial P}{\partial \tau} + \frac{\partial^2 P}{\partial \xi^2}, \quad v'_\xi = \frac{\partial^2 P}{\partial \xi \partial \eta}, \quad w'_\xi = \frac{\partial^2 P}{\partial \xi \partial \zeta}.$$

On obtient donc:

$$\frac{\varrho^2}{\mu} \int\limits_{\omega(t_0)} u(\xi, \eta, \zeta, t_0) \frac{\partial P}{\partial \tau} d\omega - \varrho \int\limits_{\omega(t_0)} \left(\frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{\partial v}{\partial \eta} + \frac{\partial w}{\partial \zeta}\right) \frac{\partial P}{\partial \xi} d\omega - \varrho \int\limits_{S(t_0)} (u \cos nx + \cdots) \frac{\partial P}{\partial \xi} dS$$

etc. Cela se réduit, si:

$$\frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{\partial v}{\partial \eta} + \frac{\partial w}{\partial \zeta} = 0,$$

à:

$$\frac{\varrho^2}{\mu} \int\limits_{\omega(t_0)} u(\xi, \eta, \zeta, t_0) \frac{\partial P}{\partial \tau} d\omega - \varrho \int\limits_{S(t_0)} (u \cos nx + \cdots) \frac{\partial P}{\partial \xi} dS$$

etc.

Nous calculons les valeurs limites de ces fonctions quand t tend vers t_0 et le point x, y, z en même temps vers le point ξ', η', ζ', situé dans l'intérieur du domaine $\omega(t_0)$. On a dans la première intégrale:

$$\frac{\partial P}{\partial \tau} = \frac{E(r, t_0, t)}{2(t-t_0)} = \frac{1}{2} \frac{e^{-\frac{\varrho r^2}{4\mu(t-t_0)}}}{\sqrt{(t-t_0)^3}}.$$

En s'appuyant sur les propriétés connues de cette fonction, on trouve:

$$\lim \frac{\varrho^2}{\mu} \int\limits_{\omega(t_0)} u(\xi, \eta, \zeta, t_0) \frac{\partial P}{d\tau} d\omega = 4\pi \sqrt{\mu\varrho\pi}\, u(\xi', \eta', \zeta', t_0)$$

Dans la seconde intégrale on a:

$$\frac{\partial P}{\partial \xi} = \int\limits_0^r E(\alpha, t_0, t)\, d\alpha \,.\, \frac{\partial}{\partial \xi}\left(\frac{1}{r}\right) + \frac{1}{r} \frac{E(r, t_0, t)}{t-t_0} \frac{\partial}{\partial \xi}\left(\frac{1}{r}\right).$$

t tendant vers t_0, l'intégrale:

$$\int\limits_0^r E(\alpha, t_0, t)\, d\alpha,$$

pour $r > \delta$ $(\delta > 0)$, tend uniformément vers la valeur $\sqrt{\frac{\mu\pi}{\varrho}}$. La fonction

$$\frac{E(r, t_0, t)}{r(t-t_0)}$$

tend sous les mêmes conditions uniformément vers zéro. La valeur limite de notre intégrale est donc:

$$-\sqrt{\mu\varrho\pi} \int\limits_{S(t_0)} (u \cos nx + \cdots) \frac{\partial}{\partial \xi}\left(\frac{1}{r}\right) dS_{x=\xi', \ldots}$$

et les valeurs limites de nos trois fonctions sont:

$$4\pi\sqrt{\mu\varrho\pi}\, u(\xi', \eta', \zeta', t_0) - \sqrt{\mu\varrho\pi} \int\limits_{S(t_0)} (u \cos nx + \cdots) \frac{\partial}{\partial \xi}\left(\frac{1}{r}\right) dS_{x=\xi', \ldots}$$

etc. Cherchons maintenant quelles conditions restrictives on est amené à introduire dans le cas où le domaine de l'intégration est l'espace entier au lieu d'une partie finie de l'espace. On voit, en se reportant aux expressions de u'_ξ etc. et en remarquant que l'intégrale:

$$\int_0^r E(a, \tau, t)\, da$$

reste pour $r \geqq 0$, $t - \tau \geqq 0$ inférieure à un certain nombre fini, que l'on peut trouver un nombre positif a_7, tel que l'on ait pour $r > 0$, $t - \tau \geqq 0$:

$$|u'_\xi|,\ |v'_\xi|, \ldots < \frac{a_7}{r^3} + \frac{a_7 E(r, \tau, t)}{r^2} + \frac{a_7 E(r, \tau, t)}{t - \tau}.$$

Comme les fonctions:

$$\xi e^{-\xi^2}, \quad \xi^3 e^{-\xi^2}$$

restent, elles-aussi, inférieures à un certain nombre positif, on peut trouver un nombre a_8 tel que:

$$E(r, \tau, t) < \frac{a_8}{r}, \quad \frac{E(r, \tau, t)}{t - \tau} < \frac{a_8}{r^3}.$$

On a donc:

$$|u'_\xi|,\ |v'_\xi|, \ldots < \frac{a_9}{r^3}, \tag{6}$$

a_9 étant un certain nombre positif.

On voit à l'aide de ces inégalités que les expressions:

$$\varrho \int_\omega [u(\xi, \eta, \zeta, t_0)\, u'_\xi + \cdots]\, d\omega, \quad \text{etc.}$$

ont un sens déterminé, pourvu que l'on peut trouver deux nombres positifs, α et k_1, tels que l'on ait pour des valeurs de $r = \sqrt{\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2}$ suffisamment grandes:

$$|u(\xi, \eta, \zeta, t_0)|,\ |v(\xi, \eta, \zeta, t_0)|,\ |w(\xi, \eta, \zeta, t_0)| < \frac{k_1}{r^\alpha}. \tag{7}$$

Elles définissent dans ce cas des fonctions de x, y, z, t, continues pour $t \geqq t_0$ et douées des dérivées de tous les ordres pour $t > t_0$.

Supposons maintenant que les dérivées:

$$\frac{\partial}{\partial \xi} u(\xi, \eta, \zeta, t_0), \quad \frac{\partial}{\partial \eta} v(\xi, \eta, \zeta, t_0), \quad \frac{\partial}{\partial \zeta} w(\xi, \eta, \zeta, t_0),$$

existent, qu'elles soient continues et qu'elles remplissent la condition:

$$\frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{\partial v}{\partial \eta} + \frac{\partial w}{\partial \zeta} = 0.$$

On peut dans ce cas transformer nos expressions par des intégrations par parties et l'on obtient, les intégrales de surface s'évanouisssant à cause des inégalités (7):

$$\frac{\varrho^2}{2\mu} \int u(\xi, \eta, \zeta, t_0) E(r, t_0, t) \frac{d\omega}{t - t_0}, \ldots$$

Si le point x, y, z tend vers le point ξ', η', ζ' en même temps que t vers t_0, ces fonctions tendent vers les limites:

$$4\pi \sqrt{\mu\varrho\pi}\, u(\xi', \eta', \zeta', t_0), \quad 4\pi \sqrt{\mu\varrho\pi}\, v(\xi', \eta', \zeta', t_0), \quad 4\pi \sqrt{\mu\varrho\pi}\, w(\xi', \eta', \zeta', t_0).$$

Pour l'étude des termes:

$$\int_{t_0}^{t} d\tau \int_{\omega(\tau)} [u'_\xi X(\xi, \eta, \zeta, \tau) + \cdots] d\omega, \ldots \sqrt{\mu\varrho\pi} \int_{\omega(t)} \left[X(\xi, \eta, \zeta, t) \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{1}{r}\right) + \cdots \right] d\omega$$

de $4\pi \sqrt{\mu\varrho\pi}\, u, \ldots, 4\pi \sqrt{\mu\varrho\pi}\, p$, nous avons besoin de quelques inégalités que nous dévolopperons ici. Nous avons:

$$u'_\xi = -\left(\frac{3(x-\xi)^2}{r^2} - 1\right) \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left\{ \frac{1}{r} \int_0^r E(\alpha, \tau, t)\, d\alpha \right\} + \frac{\varrho}{2\mu} \left(1 - \frac{(x-\xi)^2}{r^2}\right) \frac{E(r, \tau, t)}{t - \tau},$$

$$v'_\xi = -\frac{3(x-\xi)(y-\eta)}{r^3} \frac{\partial}{\partial r} \left\{ \frac{1}{r} \int_0^r E(\alpha, \tau, t)\, d\alpha \right\} - \frac{\varrho}{2\mu} \frac{(x-\xi)(y-\eta)}{r^2} \frac{E(r, \tau, t)}{t - \tau},$$

etc. Considérons maintenant la fonction $E(\alpha, \beta, t)$. Elle satisfait à l'équation:

$$\varrho \frac{\partial E}{\partial \beta} + \mu \frac{\partial^2 E}{\partial \alpha^2} = 0.$$

Multiplions cette équation par $d\alpha\, d\beta$ et intégrons entre les limites $\alpha = 0$, $\alpha = r$, $\beta = \bar{t}_0$, $\beta = \tau$ $(\bar{t}_0 < \tau < t)$. On obtient:

$$\varrho \int_0^r E(\alpha, \tau, t)\, d\alpha - \varrho \int_0^r E(\alpha, \bar{t}_0, t)\, d\alpha + \mu \int_{\bar{t}_0}^{\tau} \frac{\partial E(r, \beta, t)}{\partial r}\, d\beta - \mu \int_{\bar{t}_0}^{\tau} \left(\frac{\partial E(\alpha, \beta, t)}{\partial \alpha}\right)_{\alpha=0} d\beta = 0 .$$

Or:

$$\left(\frac{\partial E(\alpha, \beta, t)}{\partial \alpha}\right)_{\alpha=0} = 0 .$$

Donc:

$$\int_0^r E(\alpha, \tau, t)\, d\alpha - \int_0^r E(\alpha, \bar{t}_0, t)\, d\alpha = -\frac{\mu}{\varrho} \int_{\bar{t}_0}^{\tau} \frac{\partial E(r, \beta, t)}{\partial r}\, d\beta = \frac{r}{2} \int_{\bar{t}_0}^{\tau} E(r, \beta, t) \frac{d\beta}{t - \beta} .$$

Faisons dans cette équation $\bar{t}_0$ tendre vers $-\infty$. Nous aurons, puisque:

$$\lim_{\bar{t}_0 = -\infty} E(\alpha, \bar{t}_0, t) = 0 ,$$

la convergence étant uniforme pour toutes valeurs de α:

$$\int_0^r E(\alpha, \tau, t)\, d\alpha = \frac{r}{2} \int_{-\infty}^{\tau} E(r, \beta, t) \frac{d\beta}{t - \beta} .$$

Donc:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left\{ \frac{1}{r} \int_0^r E(\alpha, \tau, t)\, d\alpha \right\} = \frac{1}{2r} \int_{-\infty}^{\tau} \frac{\partial E(r, \beta, t)}{\partial r} \frac{d\beta}{t - \beta} = -\frac{\varrho}{4\mu} \int_{-\infty}^{\tau} E(r, \beta, t) \frac{d\beta}{(t - \beta)^2} .$$

Pour les fonctions u'_ξ etc. nous obtenons maintenant des expressions de la forme suivante:

$$\frac{\varrho}{4\mu} \left(\frac{3(x - \xi)^2}{r^2} - 1 \right) \int_{-\infty}^{\tau} E(r, \beta, t) \frac{d\beta}{(t - \beta)^2} + \frac{\varrho}{2\mu} \left(1 - \frac{(x - \xi)^2}{r^2} \right) \frac{E(r, \tau, t)}{t - \tau}$$

etc. Les dérivées $\frac{\partial u'_\xi}{\partial x}$ etc. obtiennent la forme:

$$\frac{\psi}{r} \int_{-\infty}^{\tau} E(r, \beta, t) \frac{d\beta}{(t - \beta)^2} + \psi r \int_{-\infty}^{\tau} E(r, \beta, t) \frac{d\beta}{(t - \beta)^3} + \frac{\psi}{r} \frac{E(r, \tau, t)}{t - \tau} + \psi r \frac{E(r, \tau, t)}{(t - \tau)^2} ,$$

ψ désignant une fonction quelconque de x, y, z, t; ξ, η, ζ, τ, dont la valeur absolue ne dépasse pas une certaine valeur finie pour des valeurs réelles de x, y, z; ξ, η, ζ et pour $t \geqq \tau \geqq t_0$.

Soit maintenant a_{10} un nombre positif tel que l'on ait:

$$(1 + x^2)^n e^{-x^2} < a_{10}$$

pour toutes les valeurs réelles de x et pour $n = \frac{3}{2}, \frac{5}{2}, \frac{7}{2}$. On a alors:

$$e^{-\frac{\varrho r^2}{4\mu(t-\beta)}} < \frac{a_{10}}{\left[1 + \frac{\varrho r^2}{4\mu(t-\beta)}\right]^n} \qquad (n = \tfrac{3}{2}, \tfrac{5}{2}, \tfrac{7}{2})$$

si $t \geqq \beta$. Donc, pour $t \geqq \tau$

$$\int_{-\infty}^{\tau} E(r, \beta, t) \frac{d\beta}{(t-\beta)^2} = \int_{-\infty}^{\tau} \frac{e^{-\frac{\varrho r^2}{4\mu(t-\beta)}}}{\sqrt{(t-\beta)^5}} d\beta < a_{10} \int_{-\infty}^{\tau} \frac{d\beta}{\left(t - \beta + \frac{\varrho r^2}{4\mu}\right)^{\frac{5}{2}}} = \frac{2 a_{10}}{3\left(t - \tau + \frac{\varrho r^2}{4\mu}\right)^{\frac{3}{2}}},$$

et, de la même manière:

$$\int_{-\infty}^{\tau} E(r, \beta, t) \frac{d\beta}{(t-\beta)^3} < \frac{2 a_{10}}{5\left(t - \tau + \frac{\varrho r^2}{4\mu}\right)^{\frac{5}{2}}} \leqq \frac{2\mu a_{10}}{5 \cdot \varrho r^2 \left(t - \tau + \frac{\varrho r^2}{4\mu}\right)^{\frac{3}{2}}}.$$

On a de plus:

$$\frac{E(r, \tau, t)}{t - \tau} < \frac{a_{10}}{\left(t - \tau + \frac{\varrho r^2}{4\mu}\right)^{\frac{3}{2}}}, \quad \frac{E(r, \tau, t)}{(t-\tau)^2} < \frac{a_{10}}{\left(t - \tau + \frac{\varrho r^2}{4\mu}\right)^{\frac{5}{2}}} \leqq \frac{2\mu a_{10}}{\varrho r^2 \left(t - \tau + \frac{\varrho r^2}{4\mu}\right)^{\frac{3}{2}}}.$$

On conclut de ces inégalités qu'il est possible de déterminer un nombre positif a_{11}, tel que l'on ait pour $r > 0$, $t - \tau \geqq 0$:

$$\left|\frac{\partial u'_\xi}{\partial x}\right|, \left|\frac{\partial u'_\xi}{\partial y}\right|, \ldots \left|\frac{\partial w'_\zeta}{\partial z}\right| < \frac{a_{11}}{r\left(t - \tau + \frac{\varrho r^2}{4\mu}\right)^{\frac{3}{2}}}. \tag{8}$$

Revenons maintenant aux termes:

$$\int_{t_0}^{t} d\tau \int_{\omega(\tau)} (u'_\xi X + \cdots) d\omega = U_1, \quad \int_{t_0}^{t} d\tau \int_{\omega(\tau)} (u'_\eta X + \cdots) d\omega = V_1,$$

$$\int_{t_0}^{t} d\tau \int_{\omega(\tau)} (u'_\zeta X + \cdots) d\omega = W_1$$

de $4\pi \sqrt{\mu\varrho\pi}\, u$, $4\pi \sqrt{\mu\varrho\pi}\, v$, $4\pi \sqrt{\mu\varrho\pi}\, w$. Considérons les intégrales:

$$\int_{t-\varepsilon}^{t} d\tau \int_{\omega(\tau)} \left(\frac{\partial u'_\xi}{\partial x} X + \cdots\right) d\omega \ldots,$$

où $0 < \varepsilon < t - t_0$. On voit à l'aide des inégalités 8 que l'on peut trouver une constante positive a_{12}, telle que les valeurs absolues de ces intégrales soient plus petites que:

$$a_{12} \sqrt{\varepsilon}\,.\,\mathrm{Max.} \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}\,.$$

On conclut de là que, les fonctions X, Y, Z étant finies et continues, les intégrales:

$$\int_{t_0}^{t-\varepsilon} d\tau \int_{\omega(\tau)} \left(\frac{\partial u'_\xi}{\partial x} X + \cdots\right) d\omega, \ldots \qquad (t > t_0)$$

si ε tend vers zéro, tendent uniformément vers les limites:

$$\int_{t_0}^{t} d\tau \int_{\omega(\tau)} \left(\frac{\partial u'_\xi}{\partial x} X + \cdots\right) d\omega, \ldots$$

dans l'intérieur de $S(t)$.

Dans les fonctions U_1, V_1, W_1 il est donc permis de dériver une fois sous le signe d'intégration par rapport à x, y, z. Comme on a:

$$\frac{\partial u'_\xi}{\partial x} + \frac{\partial u'_\eta}{\partial y} + \frac{\partial u'_\zeta}{\partial z} = 0$$

etc., il s'ensuit que les fonctions U_1, V_1, W_1 satisfont à la condition de continuité:

$$\frac{\partial U_1}{\partial x} + \frac{\partial V_1}{\partial y} + \frac{\partial W_1}{\partial z} = 0\,.$$

Les fonctions u'_ξ etc. ne contiennent x, y, z que dans les combinaisons $x-\xi$, $y-\eta$, $z-\zeta$. On a donc:

$$\frac{\partial U_1}{\partial x} = -\int_{t_0}^{t} d\tau \int_{\omega(\tau)} \left(\frac{\partial u'_\xi}{\partial x} X(\xi, \eta, \zeta, \tau) + \cdots\right) d\omega$$

etc. Donc:

$$\frac{\partial U_1}{\partial x} = \int_{t_0}^{t} dt \int_{S(\tau)} (u'_\xi X(\xi, \eta, \zeta, \tau) + \cdots) \cos nx\, dS + \int_{t_0}^{t} dt \int_{\omega(\tau)} \left(u'_\xi \frac{\partial X}{\partial \xi} + \cdots\right) d\omega$$

etc. Prenons maintenant dans l'intérieur de $\omega(t)$ un domaine $\omega'(t)$ dont la frontière n'a aucun point commun avec $S(t)$. Il suit des égalités précédentes que les dérivées secondes de U_1, V_1, W_1 par rapport à x, y, z existent et sont des fonctions continues de x, y, z dans le domaine $\omega'(t)$. Il suit aussi que l'on a dans ce domaine et pour $t > t_0$:

$$\frac{\partial^2 U_1}{\partial x^2} = \lim_{\varepsilon=0} \int_{t_0}^{t-\varepsilon} d\tau \int_{\omega(\tau)} \left(\frac{\partial^2 u'_\xi}{\partial x^2} X + \frac{\partial^2 v'_\xi}{\partial x^2} Y + \frac{\partial^2 w'_\xi}{\partial x^2} Z\right) d\omega$$

etc. Calculons maintenant $\frac{\partial U_1}{\partial t}$, $\frac{\partial V_1}{\partial t}$, $\frac{\partial W_1}{\partial t}$. Posons:

$$U_1(x, y, z, t, \varepsilon) = \int_{t_0}^{t-\varepsilon} d\tau \int_{\omega(\tau)} (u'_\xi X(\xi, \eta, \zeta, \tau) + \cdots) d\omega$$

etc. Nous aurons:

$$\lim_{\varepsilon=0} U_1(x, y, z, t, \varepsilon) = U_1(x, y, z, t) \quad \text{etc.}$$

Puis

$$\frac{\partial U_1(x, y, z, t, \varepsilon)}{\partial t} = \int_{\omega(t-\varepsilon)} (u'_\xi X(\xi, \eta, \zeta, \tau) + \cdots)_{\tau=t-\varepsilon} d\omega +$$

$$+ \int_{t_0}^{t-\varepsilon} d\tau \int_{\omega(\tau)} \left(\frac{\partial u'_\xi}{\partial t} X(\xi, \eta, \zeta, \tau) + \cdots\right) d\omega = \int_{\omega(t-\varepsilon)} (u'_\xi X(\xi, \eta, \zeta, \tau) + \cdots)_{\tau=t-\varepsilon} d\omega +$$

$$+ \frac{\mu}{\varrho} \int_{t_0}^{t-\varepsilon} d\tau \int_{\omega(\tau)} (\Delta u'_\xi . X(\xi, \eta, \zeta, \tau) + \cdots) d\omega.$$

Si maintenant, x, y, z étant un point du domaine $\omega'(t)$ et $t_0+\delta \leq t \leq t_0$ $(\delta > 0)$, ε tend vers zero, nos deux termes convergeront uniformément vers leurs limites et nous aurons:

$$\lim_{\varepsilon=0}\int\limits_{\omega(t-\varepsilon)}[u'_\xi X(\xi, \eta, \zeta, \tau) + \cdots]\,d\omega = \lim_{\varepsilon=0}\frac{\varrho}{\mu}\int\limits_{\omega(t-\varepsilon)}\left[\frac{\partial P}{\partial \tau} X(\xi, \eta, \zeta, \tau)\right]_{\tau=t-\varepsilon} d\omega -$$

$$-\lim_{\varepsilon=0}\int\limits_{\omega(t-\varepsilon)}\left[\left(\frac{\partial X}{\partial \xi}+\frac{\partial Y}{\partial \eta}+\frac{\partial Z}{\partial \zeta}\right)\frac{\partial P}{\partial \xi}\right]_{\tau=t-\varepsilon} d\omega - \lim_{\varepsilon=0}\int\limits_{S(t-\varepsilon)}\left[\left(X\cos nx + \cdots\right)\frac{\partial P}{\partial \xi}\right]_{\tau=t-\varepsilon} dS =$$

$$= 4\pi\sqrt{\frac{\mu\pi}{\varrho}}\,X(x, y, z, t) - \sqrt{\frac{\mu\pi}{\varrho}}\int\limits_{\omega(t)}\left(\frac{\partial X}{\partial \xi}+\frac{\partial Y}{\partial \eta}+\frac{\partial Z}{\partial \zeta}\right)\frac{\partial}{\partial \xi}\left(\frac{1}{r}\right)d\omega -$$

$$- \sqrt{\frac{\mu\pi}{\varrho}}\int\limits_{S(t)}(X\cos nx + \cdots)\frac{\partial}{\partial \xi}\left(\frac{1}{r}\right)dS,$$

$$\lim_{\varepsilon=0}\frac{\mu}{\varrho}\int\limits_{t_0}^{t-\varepsilon}d\tau\int\limits_{\omega(\tau)}(\varDelta u'_\xi X(\xi, \eta, \zeta, \tau) + \cdots)\,d\omega = \frac{\mu}{\varrho}\varDelta U_1.$$

La convergence étant uniforme, il s'ensuit (pour $t > t_0$):

$$\varrho\frac{\partial U_1}{\partial t} = \mu\varDelta U_1 + 4\pi\sqrt{\mu\varrho\pi}\,X - \sqrt{\mu\varrho\pi}\int\limits_{\omega(t)}\left(\frac{\partial X}{\partial \xi}+\frac{\partial Y}{\partial \eta}+\frac{\partial Z}{\partial \zeta}\right)\frac{\partial}{\partial \xi}\left(\frac{1}{r}\right)d\omega -$$

$$-\sqrt{\mu\varrho\pi}\int\limits_{S(t)}(X\cos nx + \cdots)\frac{\partial}{\partial \xi}\left(\frac{1}{r}\right)dS.$$

On obtient de la même manière deux formules analogues pour $\frac{\partial V_1}{\partial t}$ et $\frac{\partial W_1}{\partial t}$.

Désignons par Π_1 le terme de $4\pi\sqrt{\mu\varrho\pi}\,p$ correspondant à U_1, V_1, W_1. Nous aurons:

$$\Pi_1 = \sqrt{\mu\varrho\pi}\int\limits_{\omega(t)}\left(X(\xi, \eta, \zeta, t)\frac{\partial}{\partial \xi}\left(\frac{1}{r}\right) + \cdots\right)d\omega =$$

$$-\sqrt{\mu\varrho\pi}\int\limits_{S(t)}(X\cos nx + \cdots)\frac{dS}{r} - \sqrt{\mu\varrho\pi}\int\limits_{\omega(t)}\left(\frac{\partial X}{\partial \xi}+\frac{\partial Y}{\partial \eta}+\frac{\partial Z}{\partial \zeta}\right)\frac{d\omega}{r}.$$

Par conséquent:

$$\varrho \frac{\partial U_1}{\partial t} = -\frac{\partial \Pi_1}{\partial x} + 4\pi \sqrt{\mu \varrho \pi}\, X + \mu \Delta U_1$$

etc. Les fonctions:

$$\frac{U_1}{4\pi\sqrt{\mu\varrho\pi}}, \quad \frac{V_1}{4\pi\sqrt{\mu\varrho\pi}}, \quad \frac{W_1}{4\pi\sqrt{\mu\varrho\pi}}, \quad \frac{\Pi_1}{4\pi\sqrt{\mu\varrho\pi}}$$

satisfont donc au système I. On a de plus:

$$\lim_{t=t_0} U_1 = \lim_{t=t_0} V_1 = \lim_{t=t_0} W_1 = 0.$$

Dans notre étude de $U_1, \ldots$ nous nous sommes jusqu'ici bornés au cas où le domaine d'intégration est une partie finie le l'espace. Dans le cas contraire, il suffit de supposer qu'il soit possible de déterminer deux nombres positifs, β, l_1, tels que l'on ait pour des valeurs de $r = \sqrt{\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2}$ suffisamment grandes:

$$\sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2} < \frac{l_1}{r^\beta}.$$

Soit en effet x, y, z un point quelconque. Soit S une surface fermée qui enferme ce point, ω_i la partie de l'espace qui se trouve à l'intérieur de S et ω_e la partie extérieure. A ω_i et ω_e correspondent des intégrales U_{1i} et U_{1e}, V_{1i} et V_{1e}, W_{1i} et W_{1e}. Seulement l'intégrale Π_{1e} n'a pas un sens déterminé. L'étude des fonctions U_{1i}, V_{1i}, W_{1i} et Π_{1i} se fait comme plus haut. Reste à étudier les fonctions U_{1e}, V_{1e}, W_{1e} et à faire voir qu'elle sera l'expression correspondante pour la pression.

Nous avons en vertu des inégalités 6:

$$|u'_\xi|, \quad |v'_\xi|, \ldots |w'_\xi| < \frac{a_9}{r^3}.$$

On démontre de la même manière qu'il existe un nombre positif a_{12} tel que

$$\left.\begin{aligned} &\left|\frac{\partial u'_\xi}{\partial x}\right|, \quad \left|\frac{\partial u'_\xi}{\partial y}\right|, \ldots \left|\frac{\partial w'_\zeta}{\partial z}\right| < \frac{a_{12}}{r^4}, \\ &\left|\frac{\partial^2 u'_\xi}{\partial x^2}\right|, \quad \left|\frac{\partial^2 u'_\xi}{\partial x \partial y}\right|, \ldots \left|\frac{\partial^2 w'_\xi}{\partial z^2}\right|, \quad \left|\frac{\partial u'_\xi}{\partial t}\right| \ldots < \frac{a_{12}}{r^5} \end{aligned}\right\} \tag{10}$$

Les inégalités 9 et 10 montrent que les intégrales que l'on obtient en dérivant U_{1e}, V_{1e}, W_{1e} sous le signe d'intégration une ou deux fois par rapport à x, y, z ou une fois par rapport à t sont uniformément convergentes dans tout domaine ω' intérieur à ω_i et pour $t \geqq t_0 + \delta$ $(\delta > 0)$. On obtient donc pour $t > t_0$:

$$\varrho \frac{\partial U_{1e}}{\partial t} = \mu \varDelta U_{1e} + V\overline{\mu \varrho \pi} \int\limits_{\omega_e} \left(X(\xi, \eta, \zeta, t) \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} \left(\frac{1}{r} \right) + \cdots \right) d\omega$$

etc. Posons:

$$\Pi'_{1e} = V\overline{\mu \varrho \pi} \int\limits_{\omega_e} \left(X(\xi, \eta, \zeta, t) \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{\bar{r}} \right) + \cdots \right) d\omega -$$

$$- V\overline{\mu \varrho \pi} \int\limits_{\omega_i} \left(X(\xi, \eta, \zeta, t) \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{1}{\bar{r}} \right) + \cdots \right) d\omega.$$

Nous aurons

$$\frac{\partial \Pi'_{1e}}{\partial x} = - V\overline{\mu \varrho \pi} \int\limits_{\omega_e} \left(X(\xi, \eta, \zeta, t) \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} \left(\frac{1}{\bar{r}} \right) + \cdots \right) d\omega.$$

Donc:

$$\varrho \frac{\partial U_{1e}}{\partial t} = - \frac{\partial \Pi'_{1e}}{\partial x} + \mu \varDelta U_{1e}$$

etc. On a d'ailleurs:

$$\lim_{t=t_0} U_{1e} = \lim_{t=t_0} V_{1e} = \lim_{t=t_0} W_{1e} = 0.$$

Donc les fonctions:

$$\frac{U_1}{4\pi V\overline{\mu \varrho \pi}}, \quad \frac{V_1}{4\pi V\overline{\mu \varrho \pi}}, \quad \frac{W_1}{4\pi V\overline{\mu \varrho \pi}}, \quad \frac{\Pi_{1i} + \Pi'_{1e}}{4\pi V\overline{\mu \varrho \pi}}$$

pour $t > t_0$ satisfont au système 1. U_1, V_1 et W_1 tendent vers zéro avec $t - t_0$.

Passons aux intégrales de surface dans nos formules 5. Posons

$$U_2 = - \int\limits_{t_0}^{t} d\tau \int\limits_{S(\tau)} \left[u'_\xi \left(\mu \frac{du}{dn} - p \cos nx + \varrho u u_n \right) + \cdots \right] dS + \mu \int\limits_{t_0}^{t} d\tau \int\limits_{S(\tau)} \left(u \frac{du'_\xi}{dn} + \cdots \right) dS$$

et désignons par V_2, W_2 et Π_2 les termes correspondants de u, v, w, p. On voit immédiatement que les fonctinns U_2, V_2, W_2 dans le domaine $\omega'(t)$ et pour $t > t_0 + \delta$ $(\delta > 0)$ admettent des dérivées continues du premier ordre par rapport à t et des deux premiers ordres par rapport à x, y, z et que l'on a:

$$\varrho \frac{\partial U_2}{\partial t} - \mu \varDelta U_2 = - \int\limits_{S(t)} \left[u'_\xi \left(\mu \frac{du}{dn} - p \cos nx + \varrho u u_n \right) + \cdots \right] dS +$$

$$+ \mu \int\limits_{S(t)} \left(u \frac{du'_\xi}{dn} + \cdots \right) dS = - \int\limits_{S(t)} \left[\left(\mu \frac{du}{dn} - p \cos nx + \varrho u u_n \right) \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} \left(\frac{1}{r} \right) + \cdots \right] dS +$$

$$+ \mu \int\limits_{S(t)} \left(u \frac{d}{dn} \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} \left(\frac{1}{r} \right) + \cdots \right) dS$$

etc. Comme on a:

$$\frac{\partial}{\partial \xi}\left(\frac{1}{r}\right) = -\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{r}\right)$$

etc., il s'ènsuit:

$$\varrho \frac{\partial U_2}{\partial t} - \mu \Delta U_2 = -\frac{\partial \Pi_2}{\partial x}$$

etc. On a aussi:

$$\lim_{t=t_0} U_2 = \lim_{t=t_0} V_2 = \lim_{t=t_0} W_2 = 0.$$

Enfin, les derniers termes de u, v, w, p: U_3, V_3, W_3, Π_3 satisfont dans le domaine $\omega'(t)$ et pour $t > t_0$ aux équations:

$$\varrho \frac{\partial U_3}{\partial t} = -\frac{\partial \Pi_3}{\partial x}, \text{ etc.}$$

$$\Delta U_3 = 0, \text{ etc.}$$

Elles satisfont donc au système 1 en y posant $X = Y = Z = 0$. Leurs valeurs limites pour $t = t_0$ sont;

$$\sqrt{\mu\varrho\pi} \int (u \cos nx + \cdots) \frac{\partial}{\partial \xi}\left(\frac{1}{r}\right) dS$$

etc.

Les resultats trouvés montrent la légitimité des théorèmes que nous avons énoncés au commencement de ce paragraphe.

II.

Applications des formules de Green généralisées au problème du mouvement d'un fluide indéfini.

1. Dans ce premier paragraphe nous établirons quelques inégalités dont nous aurons à faire un usage constant dans ce chapitre.

Nous avons démontré plus haut que l'on a, a_3 étant une certaine quantité positive:

$$|u'_\xi|, \ldots < \frac{a_3}{r^2 \sqrt{t-\tau}}.$$

Nous allons maintenant démontrer que, b étant une quantité positive quelconque (qui a la dimension de la racine carrée d'un temps divisée par une longueur), on peut trouver une constante positive a_{13}, telle que l'on a pour $r > 0$, $t - \tau \geqq 0$:

$$|u'_\xi|, \ldots < \frac{a_{13}}{r^2(\sqrt{t-\tau}+br)}. \qquad (\text{II})$$

Nous avons par exemple:

$$u'_\xi = \frac{\text{I}}{r^2}\left(\frac{3(x-\xi)^2}{r^2}-\text{I}\right)\left(\frac{\text{I}}{r}\int_0^r E(\alpha, \tau, t)\,d\alpha - E(r, \tau, t)\right) + \frac{\varrho}{2\mu}\left(\text{I}-\frac{(x-\xi)^2}{r^2}\right)\frac{E(r, \tau, t)}{t-\tau}.$$

Prenons la quantité positive a_{13} assez grande pour que l'on ait pour toute valeur réelle de x:

$$5\left|\left(\text{I}+2b\sqrt{\frac{\mu}{\varrho}}x\right)^n e^{-x^2}\right| < a_{13}, \qquad (n = \text{I}, 2, 3)$$

$$\text{I}0\left|x^2\left(\text{I}+2b\sqrt{\frac{\mu}{\varrho}}x\right)e^{-x^2}\right| < a_{13}.$$

On a alors:

$$e^{-\frac{\varrho\alpha^2}{4\mu(t-\tau)}} < \frac{a_{13}}{5\left(\text{I}+\frac{b\alpha}{\sqrt{t-\tau}}\right)^2}.$$

Par conséquent:

$$\int_0^r e^{-\frac{\varrho\alpha^2}{4\mu(t-\tau)}}\,d\alpha < \frac{a_{13}}{5}\int_0^r \frac{d\alpha}{\left(\text{I}+\frac{b\alpha}{\sqrt{t-\tau}}\right)^2} = \frac{a_{13}\sqrt{t-\tau}}{5b}\left(\text{I}-\frac{\text{I}}{\text{I}+\frac{br}{\sqrt{t-\tau}}}\right) = \frac{a_{13}r}{5\left(\text{I}+\frac{br}{\sqrt{t-\tau}}\right)}.$$

Donc:

$$\frac{\text{I}}{r^3}\int_0^r E(\alpha, \tau, t)\,d\alpha < \frac{a_{13}}{5r^2(\sqrt{t-\tau}+br)}.$$

On a de même:

$$\frac{E(r, \tau, t)}{r^2} < \frac{a_{13}}{5r^2(\sqrt{t-\tau}+br)},$$

$$\frac{\varrho E(r, \tau, t)}{2\mu(t-\tau)} < \frac{a_{13}}{5r^2(\sqrt{t-\tau}+br)}.$$

Comme:

$$\left|\frac{3(x-\xi)^2}{r^2}-\text{I}\right| \leqq 2, \quad \left|\text{I}-\frac{(x-\xi)^2}{r^2}\right| \leqq \text{I},$$

la première des inégalités II est démontrée. Les autres se démontrent de la même manière.

Considérons mainténant les fonctions u, v, w de x, y, z, t, définies par les équations suivantes:

$$u = \int_{t_0}^{t} d\tau \int [u'_\xi X(\xi, \eta, \zeta, \tau) + v'_\xi Y(\xi, \eta, \zeta, \tau) + w'_\xi Z(\xi, \eta, \zeta, \tau)] d\omega,$$

$$v = \int_{t_0}^{t} d\tau \int [u'_\eta X(\xi, \eta, \zeta, \tau) + \cdots] d\omega,$$

$$w = \int_{t_0}^{t} d\tau \int [u'_\zeta X(\xi, \eta, \zeta, \tau) + \cdots] d\omega,$$

le domaine d'intégration étant l'espace entier. Supposons qu'il soit possible de déterminer deux nombres positifs δ et m_1, tels que l'on ait dans l'intervalle $t_0 \leqq \tau \leqq T$:

$$|X(\xi, \eta, \zeta, \tau)|, \ |Y(\xi, \eta, \zeta, \tau)|, \ |Z(\xi, \eta, \zeta, \tau)| < \frac{m_1 (\tau - t_0)^n}{(1 + \bar{r})^\delta},$$

$$n \geqq 0, \quad \bar{r} = \sqrt{\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2}.$$

Nous supposons d'ailleurs, ce qui est toujours permis, que δ ne soit pas plus grand que 1. Nous démontrerons que l'on peut alors trouver un nombre positif n_1, tel que pour $t_0 \leqq t \leqq T$:

$$|u(x, y, z, t)|, \ |v(x, y, z, t)|, \ |w(x, y, z, t)| < n_1 m_1 (t - t_0)^{n+\frac{1}{2}}. \tag{12}$$

Pour la démonstration, il suffit de montrer que l'on peut déterminer un nombre positif a_{14} tel que:

$$\int_{t_0}^{t} (\tau - t_0)^n d\tau \int \frac{d\omega}{r^2(\sqrt{t - \tau} + br)(1 + \bar{r})^\delta} < a_{14} (t - t_0)^{n+\frac{1}{2}}$$

dans l'intervalle $t_0 \leqq t \leqq T$. Posons:

$$\bar{r} = \sqrt{R^2 + r^2 - 2Rr\cos\varphi}, \quad R = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2},$$

$$d\omega = r^2 \sin\varphi \, dr \, d\varphi \, d\psi.$$

Notre intégrale devient alors:

$$\int_{t_0}^{t} (\tau - t_0)^n \, d\tau \int_0^{2\pi} d\psi \int_0^{\pi} \sin\varphi \, d\varphi \int_0^{\infty} \frac{dr}{(\sqrt{t-\tau} + b\, r)\,(1 + r)^{\delta}} \, .$$

La valeur de cette intégrale est inférieure à

$$4\pi \int_{t_0}^{t} (\tau - t_0)^n \, d\tau \int_0^{\infty} \frac{dr}{(\sqrt{t-\tau} + br)\,(1 + |r - R|)^{\delta}} \, .$$

Or:

$$\int_0^{\infty} \frac{dr}{(\sqrt{t-\tau} + br)\,(1 + |r - R|)^{\delta}} = \int_0^{\frac{R}{2}} \frac{dr}{(\sqrt{t-\tau} + br)\,(1 + R - r)^{\delta}} +$$

$$+ \int_{\frac{R}{2}}^{R} \frac{dr}{(\sqrt{t-\tau} + br)\,(1 + R - r)^{\delta}} + \int_R^{\infty} \frac{dr}{(\sqrt{t-\tau} + br)\,(1 + r - R)^{\delta}} = I_1 + I_2 + I_3 .$$

$$I_1 < \frac{1}{\left(1 + \frac{R}{2}\right)^{\delta}} \int_0^{\frac{R}{2}} \frac{dr}{\sqrt{t-\tau} + br} = \frac{1}{b\left(1 + \frac{R}{2}\right)^{\delta}} \log\left(1 + \frac{bR}{2\sqrt{t-\tau}}\right) .$$

Soit a_{15} un nombre positif tel que:

$$\operatorname*{Max}_{x \geqq 0} \frac{\log(1 + x)}{x^{\delta}} < a_{15} .$$

On a alors:

$$I_1 < \frac{R^{\delta} a_{15}}{b^{1-\delta} (2 + R)^{\delta} (t - \tau)^{\frac{\delta}{2}}} < \frac{a_{15}}{b^{1-\delta} (t - \tau)^{\frac{\delta}{2}}} .$$

Donc:

$$4\pi \int_{t_0}^{t} (\tau - t_0)^n I_1 \, d\tau < \frac{4\pi a_{15} (t - t_0)^n}{b^{1-\delta}} \int_{t_0}^{t} \frac{d\tau}{(t - \tau)^{\frac{\delta}{2}}} = \frac{8\pi a_{15} (t - t_0)^{n+1-\frac{\delta}{2}}}{b^{1-\delta} (2 - \delta)} <$$

$$\frac{8\pi a_{15} (T - t_0)^{\frac{1-\delta}{2}} (t - t_0)^{n+\frac{1}{2}}}{b^{1-\delta} (2 - \delta)} .$$

D'autre part:

$$I_2 < \int\limits_{\frac{R}{2}}^{R} \frac{dr}{\sqrt{t-\tau} + br} = \frac{1}{b} \log \frac{1 + \frac{bR}{\sqrt{t-\tau}}}{1 + \frac{bR}{2\sqrt{t-\tau}}} < \frac{\log 2}{b}.$$

Donc:

$$\int\limits_{t_0}^{t} (\tau - t_0)^n I_2 \, d\tau < \frac{\log 2 (t-t_0)^{n+1}}{b(n+1)} < \frac{\log 2 (T-t_0)^{\frac{1}{2}}}{b(n+1)} (t-t_0)^{n+\frac{1}{2}}.$$

Enfin:

$$I_3 = \int\limits_0^\infty \frac{dr}{(\sqrt{t-\tau} + bR + p\xi)(1+\xi)^\delta} < \int\limits_0^\infty \frac{d\xi}{(\sqrt{t-\tau} + b\xi)(1+\xi)^\delta} <$$

$$\frac{1}{\sqrt{t-\tau}} \int\limits_0^\infty \frac{d\xi}{\left(1 + \frac{p\xi}{\sqrt{T-t_0}}\right)(1+\xi)^\delta} = \frac{a_{16}}{\sqrt{t-\tau}}.$$

Donc:

$$\int\limits_{t_0}^{t} (\tau - t_0)^n I_3 \, d\tau < 2 a_{16} (t-t_0)^{n+\frac{1}{2}}.$$

Notre théorème est donc démontré.

On peut sous les mêmes conditions démontrer les inégalités:

$$\left|\frac{\partial u}{\partial x}\right|, \dots \left|\frac{\partial w}{\partial z}\right| < \frac{n_2 m_1 (t-t_0)^{n+\frac{1}{2}}}{(1+R)^\delta}, \tag{13}$$

où n_2 désigne un certain nombre positif. Pour la démonstration, nous remarquons d'abord que l'on peut trouver un nombre positif a_{17} tel que l'on ait:

$$\left|\frac{\partial u'_\xi}{\partial x}\right|, \dots \left|\frac{\partial w'_\xi}{\partial z}\right| < \frac{a_{17}}{r(\sqrt{t-\tau} + br)^3}.$$

En effet, nous avons démontré plus haut que l'on a des inégalités de la forme:

$$\left|\frac{\partial u'_\xi}{\partial x}\right|, \dots \left|\frac{\partial w'_\xi}{\partial z}\right| < \frac{a_{11}}{r\left(t - \tau + \frac{\varrho r^2}{4\mu}\right)^{\frac{3}{2}}}.$$

En modifiant légèrement la démonstration on voit que l'on peut remplacer le membre droit par:

$$\frac{a_{17}}{r(\sqrt{t-\tau}+br)^3}.$$

Cela étant, nous considérons une des dérivées $\frac{\partial u}{\partial x}$ etc., par exemple la première. Nous avons:

$$\left|\frac{\partial u}{\partial x}\right| < 3\,m_1\,a_{17}\int\limits_{t_0}^{t}(\tau-t_0)^n d\tau\int\frac{d\omega}{r(\sqrt{t-\tau}+br)^3\,(1+r)^\delta} <$$

$$12\,\pi\,m_1\,a_{17}\int\limits_{t_0}^{t}(\tau-t_0)^n d\tau\int\limits_0^\infty\frac{r\,dr}{(\sqrt{t-\tau}+br)^3\,(1+|r-R|)^\delta}$$

$$<\frac{12\,\pi\,m_1 a_{17}}{b}\left\{\int\limits_{t_0}^{t}(\tau-t_0)^n d\tau\int\limits_0^{\frac{R}{2}}\frac{dr}{(\sqrt{t-\tau}+br)^2\,(1+R-r)^\delta}+\right.$$

$$\left.\int\limits_{t_0}^{t}(\tau-t_0)^n d\tau\int\limits_{\frac{R}{2}}^{\infty}\frac{dr}{(\sqrt{t-\tau}+br)^2\,(1+|r-R|)^\delta}\right\}$$

$$<\frac{12\,\pi\,m_1\,a_{17}}{b}\left\{\int\limits_{t_0}^{t}(\tau-t_0)^n d\tau\int\limits_0^{\frac{R}{2}}\frac{dr}{(\sqrt{t-\tau}+br)^2\left(1+\frac{R}{2}\right)^\delta}+\right.$$

$$\left.+\int\limits_{t_0}^{t}(\tau-t_0)^n d\tau\int\limits_{\frac{R}{2}}^{\infty}\frac{dr}{(\sqrt{t-\tau}+br)^2}\right\}$$

$$<\frac{12\,\pi\,m_1\,a_{17}}{b}\left\{\frac{2^\delta}{b(1+R)^\delta}\int\limits_{t_0}^{t}\frac{(\tau-t_0)^n}{\sqrt{t-\tau}}d\tau+\int\limits_{t_0}^{t}\frac{(\tau-t_0)^n\,dt}{b\left(\sqrt{t-\tau}+\frac{bR}{2}\right)}\right\}$$

$$<\frac{12\,.\,2^\delta\,\pi\,m_1\,a_{17}}{b^2}\left\{\frac{1}{(1+R)^\delta}+\frac{2^{1-\delta}}{1+\frac{bR}{\sqrt{T-t_0}}}\right\}\int\limits_{t_0}^{t}\frac{(\tau-t_0)^n}{\sqrt{t-\tau}}d\tau.$$

Or, si $\frac{b}{\sqrt{T-t_0}} < 1$, on a:

$$\frac{1}{1+\frac{bR}{\sqrt{T-t_0}}} < \frac{\sqrt{T-t_0}}{b(1+R)},$$

si $\frac{b}{\sqrt{T-t_0}} > 1$:

$$\frac{1}{1+\frac{bR}{\sqrt{T-t_0}}} < \frac{1}{1+R}.$$

Donc, dans tout les cas:

$$\frac{1}{1+\frac{bR}{\sqrt{T-t_0}}} < \frac{b+\sqrt{T-t_0}}{b(1+R)} \leqq \frac{b+\sqrt{T-t_0}}{b(1+R)^\delta}.$$

Donc:

$$\left|\frac{\partial u}{\partial x}\right| < \frac{24\pi m_1 a_{17}}{b^3}\left(b(2^\delta+2)+2\sqrt{T-t_0}\right)\frac{(t-t_0)^{n+\frac{1}{2}}}{(1+R)^\delta}.$$

Les inégalités 13 sont donc vraies pourvu que;

$$n_2 \geqq \frac{24\pi a_{17}}{b^3}\left(b(2^\delta+2)+2\sqrt{T-t_0}\right).$$

Démontrons enfin un dernier système d'inégalités. Nous désignons par $\bar{u}$, $\bar{v}$, $\bar{w}$ les composantes de la rotation du vecteur u, v, w. En d'autres termes nous posons:

$$\bar{u} = \frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z}, \quad \bar{v} = \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x}, \quad \bar{w} = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}.$$

Nous supposons toujours que l'on ait:

$$|X(\xi, \eta, \zeta, \tau)|, \ldots < \frac{m_1(\tau-t_0)^n}{(1+\bar{r})^\delta}$$

et nous supposons de plus que l'on peut déterminer un nombre positif, m_2, tel que pour $t_0 \leqq \tau \leqq T$:

$$\left|\frac{\partial Z}{\partial \eta} - \frac{\partial Y}{\partial \zeta}\right|, \left|\frac{\partial X}{\partial \zeta} - \frac{\partial Z}{\partial \xi}\right|, \left|\frac{\partial Y}{\partial \xi} - \frac{\partial X}{\partial \eta}\right| < m_2(\tau-t_0)^n(1+\bar{r})^{n'},$$

où n' désigne un nombre entier positif ou nul. Nous nous proposons de déterminer dans ce cas des limites supérieures pour les valeurs absolues de $\frac{\partial \bar{u}}{\partial x}, \frac{\partial \bar{u}}{\partial y}, \ldots \frac{\partial \bar{w}}{\partial z}$.

Nous avons:

$$\bar{u} = \int_{t_0}^{t} d\tau \int \left[X(\xi, \eta, \zeta, \tau) \left(\frac{\partial u'_\zeta}{\partial y} - \frac{\partial u'_\eta}{\partial z} \right) + \cdots \right] d\omega$$

etc. Or:

$$\frac{\partial u'_\zeta}{\partial y} - \frac{\partial u'_\eta}{\partial z} = \frac{\partial u'_\eta}{\partial \zeta} - \frac{\partial u'_\zeta}{\partial \eta} = 0$$

$$\frac{\partial v'_\zeta}{\partial y} - \frac{\partial v'_\eta}{\partial z} = \frac{\partial v'_\eta}{\partial \zeta} - \frac{\partial v'_\zeta}{\partial \eta} = \frac{\varrho}{\mu} \frac{\partial^2 P}{\partial \tau \, \partial \zeta},$$

$$\frac{\partial w'_\zeta}{\partial y} - \frac{\partial w'_\eta}{\partial z} = \frac{\partial w'_\eta}{\partial \zeta} - \frac{\partial w'_\zeta}{\partial \eta} = -\frac{\varrho}{\mu} \frac{\partial^2 P}{\partial \tau \, \partial \eta}.$$

etc. donc:

$$\bar{u} = \frac{\varrho}{\mu} \int_{t_0}^{t} d\tau \int \left[Y(\xi, \eta, \zeta, \tau) \frac{\partial^2 P}{\partial \tau \, \partial \zeta} - Z(\xi, \eta, \zeta, \tau) \frac{\partial^2 P}{\partial \tau \, \partial \eta} \right] d\omega.$$

Donc, pour $t_0 \leqq t \leqq T$:

$$\bar{u} = \frac{\varrho}{\mu} \int_{t_0}^{t} d\tau \int \left(\frac{\partial Z}{\partial \eta} - \frac{\partial Y}{\partial \zeta} \right) \frac{\partial P}{\partial \tau} d\omega = \frac{\varrho}{2\mu} \int_{t_0}^{t} d\tau \int \left(\frac{\partial Z}{\partial \eta} - \frac{\partial Y}{\partial \zeta} \right) \frac{e^{-\frac{\varrho r^2}{4\mu(t-\tau)}}}{\sqrt{(t-\tau)^3}} d\omega$$

etc. Par conséquent:

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial x} = \frac{\varrho^2}{4\mu^2} \int_{t_0}^{t} d\tau \int \left(\frac{\partial Z}{\partial \eta} - \frac{\partial Y}{\partial \zeta} \right) (\xi - x) E(r, \tau, t) \frac{d\omega}{(t-\tau)^2}$$

etc. Nous avons donc:

$$\left| \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} \right|, \ldots \left| \frac{\partial \bar{w}}{\partial z} \right| < \frac{\pi \varrho^2 m_2}{\mu^2} \int_{t_0}^{t} (\tau - t_0)^n d\tau \int_0^\infty r^3 (1 + R + r)^{n'} E(r, \tau, t) \frac{dr}{(t-\tau)^2}.$$

Or on a:

$$\int_0^\infty r^3 (1 + R + r)^{n'} E(r, \tau, t) \frac{dr}{(t-\tau)^2} = \int_0^\infty r^3 (1 + R + r)^{n'} e^{-\frac{\varrho r^2}{4\mu(t-\tau)}} \frac{dr}{\sqrt{(t-\tau)^5}} =$$

$$\frac{1}{\sqrt{t-\tau}} \sum \frac{n'!}{(n'-i)!} (1 + R)^i (t-\tau)^{\frac{n'-i}{2}} \int_0^\infty \alpha^{3+n'-i} e^{-\frac{\varrho \alpha^2}{4\mu}} d\alpha.$$

Donc, puisque:

$$(t-\tau)^{\frac{n'-i}{2}} \leqq (T-t_0)^{\frac{n'-i}{2}},$$

$$(1+R)^i \leqq (1+R)^{n'} \qquad (i \leqq n')$$

$$\int_0^\infty r^3 (1+R+r)^{n'} E(r,\tau,t) \frac{dr}{(t-\tau)^2} < \frac{a_{18}(1+R)^{n'}}{\sqrt{t-\tau}},$$

a_{18} étant un certain nombre positif. On conclut de cette inégalité qu'il est possible de déterminer n_3 tel que:

$$\left|\frac{\partial \bar{u}}{\partial x}\right|, \ldots \left|\frac{\partial \bar{w}}{\partial z}\right| < n_3 m_2 (t-t_0)^{n+\frac{1}{2}} (1+R)^{n'} \tag{14}$$

dans l'intervalle $t_0 \leqq t \leqq T$.

2. Il s'agit dans ce paragraphe du problème de calculer pour un fluide visqueux et incompressible les composantes de vitesse d'un mouvement infiniment lent, superposé sur un mouvement connu. — Les équations du mouvement peuvent s'écrire, en posant:

$$p + \frac{\varrho}{2}(u^2+v^2+w^2) = q:$$

$$\varrho \frac{\partial u}{\partial t} + \varrho(w\bar{v} - v\bar{w}) = X - \frac{\partial q}{\partial x} + \mu \Delta u,$$

$$\varrho \frac{\partial v}{\partial t} + \varrho(u\bar{w} - w\bar{u}) = Y - \frac{\partial q}{\partial y} + \mu \Delta v,$$

$$\varrho \frac{\partial w}{\partial t} + \varrho(v\bar{u} - u\bar{v}) = Z - \frac{\partial q}{\partial z} + \mu \Delta w,$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0.$$

Dans ces équations, nous remplaçons u, v, w, q, X, Y, Z par u_0+u, v_0+v, w_0+w, q_0+q, X_0+X, Y_0+Y, Z_0+Z, u_0, v_0, ... se rapportant au mouvement connu et u, v, w, ... étant des quantités très petites ainsi que les dérivées $\frac{\partial u}{\partial x}, \ldots \frac{\partial w}{\partial z}$. Nous obtenons de cette manière, puisque les fonctions u_0, v_0, ... selon notre hypothèse satisfont à notre système différentiel et puisqu'il est permis de négliger les termes $w\bar{v} - v\bar{w}$, $u\bar{w} - w\bar{u}$, $v\bar{u} - u\bar{v}$, petits du second ordre:

$$\left.\begin{aligned}
\varrho\frac{\partial u}{\partial t}+\varrho(w_0\bar{v}+w\bar{v}_0-v_0\bar{w}-v\bar{w}_0)&=X-\frac{\partial q}{\partial x}+\mu\Delta u,\\
\varrho\frac{\partial v}{\partial t}+\varrho(u_0\bar{w}+u\bar{w}_0-w_0\bar{u}-w\bar{u}_0)&=Y-\frac{\partial q}{\partial y}+\mu\Delta v,\\
\varrho\frac{\partial w}{\partial t}+\varrho(v_0\bar{u}+v\bar{u}_0-u_0\bar{v}-u\bar{v}_0)&=Z-\frac{\partial q}{\partial z}+\mu\Delta w,\\
\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}&=0.
\end{aligned}\right\}\qquad(15)$$

Nous nous proposons de montrer comment on peut de ces équations calculer les fonctions u, v, w pour $t>t_0$, les valeurs de ces fonctions pour $t=t_0$ étant connues. Pour que notre méthode soit applicable, il faut cependant introduire quelques hypothèses restrictives. Nous supposons que u_0, v_0, w_0, $\bar{u}_0$, $\bar{v}_0$, $\bar{w}_0$, X, Y, Z soient des fonctions uniformes et continues de x, y, z, t dans tout l'espace et pour $t_0\leqq t\leqq T$ et qu'elles soient douées des dérivées continues par rapport à x, y, z. Nous supposons que l'on puisse trouver trois nombres positifs M, N et α ($\alpha\leqq 1$) tels que l'on ait dans l'intervalle $t_0\leqq t\leqq T$:

$$|u_0(x,y,z,t)|,\ |v_0(x,y,z,t)|,\ |w_0(x,y,z,t)|<M,$$

$$|\bar{u}_0(x,y,z,t)|,\ |\bar{v}_0(x,y,z,t)|,\ |\bar{w}_0(x,y,z,t)|<\frac{M}{(1+R)^\alpha},$$

$$|X(x,y,z,t)|,\ |Y(x,y,z,t)|,\ |Z(x,y,z,t)|<\frac{N}{(1+R)^\alpha}.$$

Nous supposons de plus que l'on puisse choisir M, N et le nombre entier positif m tels que:

$$\left|\frac{\partial u_0}{\partial x}\right|,\dots\left|\frac{\partial w_0}{\partial z}\right|,\ \left|\frac{\partial \bar{u}_0}{\partial x}\right|,\dots\left|\frac{\partial \bar{w}_0}{\partial z}\right|<M(1+R)^m,$$

$$\left|\frac{\partial Z}{\partial y}-\frac{\partial Y}{\partial z}\right|,\dots<N(1+R)^m$$

dans l'intervalle $t_0\leqq t\leqq T$. Quant aux valeurs initiales de u, v, w, nous supposons qu'elles soient des fonctions continues de x, y, z, douées des dérivées continues du premier ordre, qui remplissent l'équation:

$$\frac{\partial u_{t=t_0}}{\partial x}+\frac{\partial v_{t=t_0}}{\partial y}+\frac{\partial w_{t=t_0}}{\partial z}=0.$$

Nous supposons de plus que $\bar{u}_{t-t_0}$, $\bar{v}_{t-t_0}$, $\bar{w}_{t-t_0}$ admettent des dérivées continues par rapport à x, y, z et que l'on puisse choisir les nombres N, α et m tels que:

$$|u(x, y, z, t_0)|,\ |v(x, y, z, t_0)|,\ |w(x, y, z, t_0)| < N,$$

$$|\bar{u}(x, y, z, t_0)|,\ |\bar{v}(x, y, z, t_0)|,\ |\bar{w}(x, y, z, t_0)| < \frac{N}{(1 + R)^{\alpha}},$$

$$\left|\frac{\partial u_{t-t_0}}{\partial x}\right|, \ldots \left|\frac{\partial w_{t-t_0}}{\partial z}\right|,\ \left|\frac{\partial \bar{u}_{t-t_0}}{\partial x}\right|, \ldots \left|\frac{\partial \bar{w}_{t-t_0}}{\partial z}\right| < N(1 + R)^{m}.$$

Pour intégrer dans ce cas le système 15, nous commençons par chercher des valeurs approchées u_1, v_1, w_1 de u, v, w. A cet effet, nous omettons les termes $\varrho(w_0 \bar{v} + w\bar{v}_0 + \cdots)$ etc. dans le système 15. Le système ainsi obtenu est, aux notations près, identique au système 1 et peut donc s'intégrer par l'application des méthodes exposées dans le premier chapitre. On obtient, les valeurs initiales de u_1, v_1, w_1 étant les mêmes que celles de u, v, w:

$$4\pi\sqrt{\mu\varrho\pi}\, u_1(x, y, z, t) = \frac{\varrho^2}{2\mu}\int u(\xi, \eta, \zeta, t_0)\, E(r, t_0, t)\frac{d\omega}{t_0 - t} +$$
$$+ \int_{t_0}^{t} d\tau \int (u'_\xi X(\xi, \eta, \zeta, \tau) + v'_\xi Y(\xi, \eta, \zeta, \tau) + w'_\xi Z(\xi, \eta, \zeta, \tau))\, d\omega,$$

$$4\pi\sqrt{\mu\varrho\pi}\, v_1(x, y, z, t) = \frac{\varrho^2}{2\mu}\int v(\xi, \eta, \zeta, t_0)\, E(r, t_0, t)\frac{d\omega}{t_0 - t} +$$
$$+ \int_{t_0}^{t} d\tau \int (u'_\eta X(\xi, \eta, \zeta, \tau) + \cdots)\, d\omega,$$

$$4\pi\sqrt{\mu\varrho\pi}\, w_1(x, y, z, t) = \frac{\varrho^2}{2\mu}\int w(\xi, \eta, \zeta, t_0)\, E(r, t_0, t)\frac{d\omega}{t_0 - t} +$$
$$+ \int_{t_0}^{t} d\tau \int (u'_\zeta X(\xi, \eta, \zeta, \tau) + \cdots)\, d\omega.$$

Ces formules sont valables dans l'intervalle $t_0 \leq t \leq T$. Pour plus de simplicité nous écrirons:

$$u_1^{(1)} = \frac{\varrho^2}{2\mu}\int u(\xi, \eta, \zeta, t_0)\, E(r, t_0, t)\frac{d\omega}{t_0 - t}$$

etc.,

$$u_1^{(2)} = \int_{t_0}^{t} d\tau \int u'_\xi X(\xi, \eta, \zeta, \tau) + \cdots)\, d\omega$$

etc., et nous aurons alors:

$$u_1 = u_1^{(1)} + u_1^{(2)},\ v_1 = v_1^{(1)} + v_1^{(2)},\ w_1 = w_1^{(1)} + w_1^{(2)}.$$

Cela posé, je dis que l'on peut trouver un nombre positif c assez grand pour que:

$$\left.\begin{array}{c} |u_1(x, y, z, t)|,\ |v_1(x, y, z, t)|,\ |w_1(x, y, z, t)| < cN, \\ |\bar{u}_1(x, y, z, t)|,\ |\bar{v}_1(x, y, z, t)|,\ |\bar{w}_1(x, y, z, t)| < \frac{cN}{(1 + R)^a} \\ \left|\frac{\partial u_1(x, y, z, t)}{\partial x}\right|, \ldots \left|\frac{\partial w_1(x, y, z, t)}{\partial z}\right|,\ \left|\frac{\partial \bar{u}_1(x, y, z, t)}{\partial x}\right|, \ldots \\ \left|\frac{\partial \bar{w}_1(x, y, z, t)}{\partial z}\right| < cN(1 + R)^m \end{array}\right\} \tag{16}$$

dans l'intervalle $t_0 \leqq t \leqq T$. En effet, les inégalités 12, 13, 14 montrent immédiatement que l'on peut déterminer un nombre positif c tel que:

$$|u_1^{(2)}(x, y, z, t)|, \ldots < \frac{cN}{2},$$

$$|\bar{u}_1^{(2)}(x, y, z, t)|, \ldots < \frac{cN}{2(1 + R)^a},$$

$$\left|\frac{\partial u_1^{(2)}(x, y, z, t)}{\partial x}\right|, \ldots \left|\frac{\partial \bar{u}_1^{(2)}(x, y, z, t)}{\partial x}\right|, \ldots < \frac{cN}{2}(1 + R)^m$$

pour $t_0 \leqq t \leqq T$. Il suffit donc de démontrer que l'on peut choisir c tel que $u_1^{(1)}$ etc. satisfassent aux mêmes inégalités. C'est ce qu'on voit par un calcul analogue à ceux qui nous ont servi à démontrer les inégalités 12, 13 et 14. En effet:

$$\int E(r, t_0, t)\frac{d\omega}{(t - t_0)(1 + \bar{r})^a} < 4\pi\int_0^{\frac{R}{2}} r^2 E(r, t_0, t)\frac{dr}{(t_0 - t)(1 + R - r)^a} +$$

$$+ 4\pi \int_{\frac{R}{2}}^{\infty} r^2 E(r, t_0, t) \frac{dr}{(t-t_0)(1+|R-r|)^a} < \frac{4\cdot 2^a \cdot \pi}{(1+R)^a} \int_0^{\infty} \xi^2 e^{-\frac{\varrho \xi^2}{4\mu}} d\xi +$$

$$+ 4\pi \int_{\frac{R}{2\sqrt{T-t_0}}}^{\infty} \xi^2 e^{-\frac{\varrho \xi^2}{4\mu}} d\xi < \frac{4\pi (2^a+1) a_{19}}{(1+R)^a},$$

a_{19} étant un nombre positif, tel que:

$$\xi^2 (1 + 2\sqrt{T-t_0}\,\xi)^{a+2} e^{-\frac{\varrho \xi^2}{4\mu}} < 2 a_{19} \sqrt{T-t_0}\,(1+\alpha)$$

pour des valeurs positives de ξ.

D'autre part:

$$\int (1+\bar{r})^m E(r, t_0, t) \frac{d\omega}{t_0 - t} < 4\pi \int_0^{\infty} \frac{(1+r+R)^m r^2 e^{-\frac{\varrho r^2}{4\mu(t-t_0)}} dr}{\sqrt{(t-t_0)^3}} =$$

$$4\pi \sum_{i=0}^{i=m} \frac{m!}{(m-i)!} (1+R)^i (t-t_0)^{\frac{m-i}{2}} \int_0^{\infty} \xi^{2+m-i} e^{-\frac{\varrho \xi^2}{4\mu}} d\xi <$$

$$4\pi (1+R)^m \sum_{i=0}^{i=m} \frac{m!}{(m-i)!} (T-t_0)^{\frac{m-i}{2}} \int_0^{\infty} \xi^{2+m-i} e^{-\frac{\varrho \xi^2}{4\mu}} d\xi .$$

Notre assertion est donc prouvée.

Nous sommes maintenant en état d'intégrer rigoureusement le système 15. A cet effet, nous y introduisons un paramètre auxiliaire λ et l'écrivons comme suit:

$$\varrho \frac{\partial u}{\partial t} = X - \frac{\partial q}{\partial x} + \mu \Delta u + \lambda \varrho (w_0 \bar{v} + w \bar{v}_0 - v_0 \bar{w} - v \bar{w}_0),$$

$$\varrho \frac{\partial v}{\partial t} = Y - \frac{\partial q}{\partial y} + \mu \Delta v + \lambda \varrho (u_0 \bar{w} + u \bar{w}_0 - w_0 \bar{u} - w \bar{u}_0),$$

$$\varrho \frac{\partial w}{\partial t} = Z - \frac{\partial q}{\partial z} + \mu \Delta w + \lambda \varrho (v_0 \bar{u} + v \bar{u}_0 - u_0 \bar{v} - u \bar{v}_0),$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0.$$

Pour $\lambda = -1$ ce système devient identique au système 15. Cherchons à y satisfaire par des séries procédant suivant les puissances de λ. Posons donc:

$$u(\lambda) = u_1 + \lambda u_2 + \cdots + \lambda^{n-1} u_n + \cdots$$
$$v(\lambda) = v_1 + \lambda v_2 + \cdots + \lambda^{n-1} v_n + \cdots$$
$$w(\lambda) = w_1 + \lambda w_2 + \cdots + \lambda^{n-1} w_n + \cdots$$
$$q(\lambda) = q_1 + \lambda q_2 + \cdots + \lambda^{n-1} q_n + \cdots$$

Pour déterminer u_1, v_1 etc. on obtient les équations suivantes:

$$\varrho \frac{\partial u_1}{\partial t} = X - \frac{\partial q_1}{\partial x} + \mu \varDelta u_1,$$
$$\varrho \frac{\partial v_1}{\partial t} = Y - \frac{\partial q_1}{\partial y} + \mu \varDelta v_1,$$
$$\varrho \frac{\partial w_1}{\partial t} = Z - \frac{\partial q_1}{\partial z} + \mu \varDelta w_1,$$
$$\frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial v_1}{\partial y} + \frac{\partial w_1}{\partial z} = 0$$
$$u_{1_{t=t_0}} = u(x, y, z, t_0), \; v_{1_{t=t_0}} = v(x, y, z, t_0), \; w_{1_{t=t_0}} = w(x, y, z, t_0);$$
$$\varrho \frac{\partial u_2}{\partial t} = - \frac{\partial q_2}{\partial x} + \mu \varDelta u_2 + \varrho (w_0 \bar{v}_1 + w_1 \bar{v}_0 - v_0 \bar{w}_1 - v_1 \bar{w}_0)$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\frac{\partial u_2}{\partial x} + \frac{\partial v_2}{\partial y} + \frac{\partial w_2}{\partial z} = 0$$
$$u_{2_{t=t_0}} = v_{2_{t=t_0}} = w_{2_{t=t_0}} = 0,$$

et, en général:

$$\varrho \frac{\partial u_n}{\partial t} = - \frac{\partial q_n}{\partial x} + \mu \varDelta u_n + \varrho (w_0 \bar{v}_{n-1} + w_{n-1} \bar{v}_0 - v_0 \bar{w}_{n-1} - v_{n-1} \bar{w}_0),$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\frac{\partial u_n}{\partial x} + \frac{\partial v_n}{\partial y} + \frac{\partial w_n}{\partial z} = 0$$
$$u_{n_{t=t_0}} = v_{n_{t=t_0}} = w_{n_{t=t_0}} = 0.$$

On voit qu'il est loisible de choisir pour u_1, v_1, w_1 les fonctions que nous avons ainsi désignées plus haut et que l'on peut satisfaire aux équations différentielles pour $u_2, \ldots$ etc. par les fonctions définies par les équations suivantes:

$$4\pi \sqrt{\mu \varrho \pi}\, u_2(x, y, z, t) = \varrho \int_{t_0}^{t} d\tau \int (w_0 \bar{v}_1 + w_1 \bar{v}_0 - v_0 \bar{w}_1 - v_1 \bar{w}_0)_{\substack{x=\xi, \ldots \\ t=\tau}} u'_\xi + \cdots) \, d\omega$$

etc., et, en général:

$$4\pi \sqrt{\mu\varrho\pi}\, u_n(x, y, z, t) = \varrho \int_{t_0}^{t} d\tau \int \left((w_0 \bar{v}_{n-1} + w_{n-1}\bar{v}_0 - v_0 \bar{w}_{n-1} - v_{n-1}\bar{w}_0)_{\substack{x=\xi,\ldots \\ t=\tau}} u'_\xi + \cdots \right) d\omega \quad (17)$$

etc., pourvu que les fonctions $w_0 \bar{v}_1 + w_1 \bar{v}_0 - v_0 \bar{w}_1 - v_1 \bar{w}_0$ etc., en général: $w_0 \bar{v}_{n-1} + w_{n-1} \bar{v}_0 - v_0 \bar{w}_{n-1} - v_{n-1} \bar{w}_0$ etc. soient continues ainsi que leurs dérivées du premier ordre par rapport à x, y, z et qu'elles remplissent des inégalités de la forme:

$$|w_0 \bar{v}_{n-1} + w_{n-1}\bar{v}_0 - v_0 \bar{w}_{n-1} - v_{n-1}\bar{w}_0|, \ldots < \frac{A}{(1+R)^\varepsilon}$$

$$(\varepsilon > 0).$$

Or nous savons que $u_0, \ldots \bar{u}_0, \ldots u_1, \ldots \bar{u}_1, \ldots$ sont des fonctions de x, y, z, t, continues ainsi que leurs dérivées du premier ordre par rapport à x, y, z dans l'intervalle $t_0 \leqq t \leqq T$ et que l'on a:

$$|w_0 \bar{v}_1 + w_1 \bar{v}_0 - v_0 \bar{w}_1 - v_1 \bar{w}_0|, \ldots < \frac{4cMN}{(1+R)^a}$$

$$\left| \frac{\partial}{\partial x}(w_0 \bar{v}_1 + w_1 \bar{v}_0 - v_0 \bar{w}_1 - v_1 \bar{w}_0) \right|, \ldots < 8cMN(1+R)^m.$$

Il suit de là que les fonctions u_2, v_2, w_2, définies par les formules précédentes, sont des fonctions de x, y, z, t, continues dans l'intervalle $t_0 \leqq t \leqq T$ et douées des dérivées continues des deux premiers ordres par rapport à x, y, z dans le même intervalle. Les inégalités 12—14 montrent de plus que l'on peut déterminer un nombre positif c_1 tel que:

$$|u_2(x, y, z, t)|,\ |v_2(x, y, z, t)|,\ |w_2(x, y, z, t)| < cc_1 MN (t - t_0)^{\frac{1}{2}},$$

$$\left|\frac{\partial u_2(x, y, z, t)}{\partial x}\right|, \ldots \left|\frac{\partial w_2(x, y, z, t)}{\partial z}\right| < \frac{cc_1 MN (t-t_0)^{\frac{1}{2}}}{2(1+R)^a},$$

$$\left|\frac{\partial \bar{u}_2(x, y, z, t)}{\partial x}\right|, \ldots \left|\frac{\partial \bar{w}_2(x, y, z, t)}{\partial z}\right| < cc_1 MN (1+R)^m (t-t_0)^{\frac{1}{2}}$$

dans l'intervalle $t_0 \leqq t \leqq T$. Il résulte de là que u_3, v_3, w_3, continues ainsi que leurs dérivées des deux premiers ordres par rapport à x, y, z dans l'intervalle $t_0 \leqq t \leqq T$, satisfont aux inégalités:

$$|u_3(x,y,z,t)|,\ |v_3(x,y,z,t)|,\ |w_3(x,y,z,t)| < cc_1^2 M^2 N(t-t_0),$$

$$\left|\frac{\partial u_3(x,y,z,t)}{\partial x}\right|, \ldots \left|\frac{\partial w_3(x,y,z,t)}{\partial z}\right| < \frac{cc_1^2 M^2 N(t-t_0)}{2(1+R)^a},$$

$$\left|\frac{\partial \bar{u}_3(x,y,z,t)}{\partial x}\right|, \ldots \left|\frac{\partial \bar{w}_3(x,y,z,t)}{\partial z}\right| < cc_1^2 M^2 N(1+R)^m (t-t_0)$$

et ainsi de suite. On voit donc que u_n, v_n, w_n pour toute valeur entière et positive de n sont des fonctions de x, y, z, t, continues ainsi que leurs dérivées des deux premiers ordres par rapport à x, y, z et du premier ordre par rapport à t pour $t_0 < t \leqq T$ et que l'on a:

$$|u_n(x,y,z,t)|, \ldots < cN[c_1 M(t-t_0)^{\frac{1}{2}}]^{n-1},$$

$$\left|\frac{\partial u_n(x,y,z,t)}{\partial x}\right|, \ldots < \frac{cN[c_1 M(t-t_0)^{\frac{1}{2}}]^{n-1}}{2(1+R)^a},$$

$$\left|\frac{\partial \bar{u}_n(x,y,z,t)}{\partial x}\right|, \ldots < cN(1+R)^m[c_1 M(t-t_0)^{\frac{1}{2}}]^{n-1}$$

dans l'intervalle $t_0 \leqq t \leqq T$.

Considérons maintenant les séries:

$$\sum_1^\infty \lambda^{n-1} u_n,\ \sum_1^\infty \lambda^{n-1} v_n,\ \sum_1^\infty \lambda^{n-1} w_n,\ \sum_1^\infty \lambda^{n-1} \frac{\partial u_n}{\partial x}, \ldots$$

$$\sum_1^\infty \lambda^{n-1} \frac{\partial w_n}{\partial z},\ \sum_1^\infty \lambda^{n-1} \frac{\partial \bar{u}_n}{\partial x}, \ldots \sum_1^\infty \lambda^{n-1} \frac{\partial \bar{w}_n}{\partial z}.$$

Les inégalités précédentes montrent qu'elles sont absolument et uniformément convergentes dans tout domaine fini de l'espace pourvu que:

$$|\lambda(t-t_0)^{\frac{1}{2}}| < \frac{1}{c_1 M}.$$

Posons donc:

$$u = \sum_1^\infty (-1)^{n-1} u_n,\ v = \sum_1^\infty (-1)^{n-1} v_n,\ w = \sum_1^\infty (-1)^{n-1} w_n,$$

$$\bar{u} = \sum_1^\infty (-1)^{n-1} \bar{u}_n,\ \bar{v} = \sum_1^\infty (-1)^{n-1} \bar{v}_n,\ \bar{w} = \sum_1^\infty (-1)^{n-1} \bar{w}_n.$$

$u, v, w, \bar{u}, \bar{v}, \bar{w}$ sont alors des fonctions de x, y, z, t, continues dans l'intervalle $t_0 \leqq t \leqq t_1$ où $t_0 < t_1 < t_0 + \frac{1}{c_1^2 M^2}$. Elles admettent dans le même intervalle des dérivées continues par rapport à x, y, z, et on a:

$$\bar{u} = \frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z}, \quad \bar{v} = \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x}, \quad \bar{w} = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}.$$

Les équations 17 etc. donnent maintenant:

$$4\pi \sqrt{\mu\varrho\pi}\, u(x, y, z, t) = 4\pi \sqrt{\mu\varrho\pi}\, u_1(x, y, z, t) - \varrho \int_{t_0}^{t} d\tau \int [(w_0 \bar{v} + \\ + w\bar{v}_0 - v_0 \bar{w} - v\bar{w}_0)_{\substack{x=\xi,\dots \\ t=\tau}} u'_\xi + \cdots]\, d\omega$$

etc. De ces équations, on conclut que u, v, w admettent des dérivées du second ordre par rapport à x, y, z et du premier ordre par rapport t, continues pour $t_0 < t \leqq t_1$. Posons maintenant:

$$q = \sqrt{\mu\varrho\pi} \int \left[X - \varrho(w_0\bar{v} + w\bar{v}_0 - v_0\bar{w} - v\bar{w}_0)_{\substack{x=\xi,\dots \\ t=\tau}} \left(\frac{\partial}{\partial \xi}\left(\frac{1}{r}\right) - \frac{\partial}{\partial \xi}\left(\frac{1}{\bar{r}}\right)\right) + \cdots\right] d\omega.$$

Nous aurons pour $t_0 < t \leqq t_1$:

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \mu \Delta u = X - \varrho(w_0\bar{v} + w\bar{v}_0 - v_0\bar{w} - v\bar{w}_0) - \frac{\partial q}{\partial x},$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0.$$

Nous avons d'ailleurs:

$$\lim_{t=t_0} u = \lim_{t=t_0} u_1, \quad \lim_{t=t_0} v = \lim_{t=t_0} v_1, \quad \lim_{t=t_0} w = \lim_{t=t_0} w_1.$$

Notre problème est donc résolu dans l'intervalle $t_0 \leqq t \leqq t_1$.

Pour aller plus loin nous observons que l'on a:

$$|u(x, y, z, t_1)|,\ |v(x, y, z, t_1)|,\ |w(x, y, z, t_1)| < \frac{cN}{1 - c_1 M (t_1 - t_0)^{\frac{1}{2}}},$$

$$\left|\frac{\partial u(x, y, z, t_1)}{\partial x}\right|, \dots \left|\frac{\partial w(x, y, z, t_1)}{\partial z}\right| < \frac{cN}{2(1 - c_1 M (t_1 - t_0)^{\frac{1}{2}})(1 + R)^\alpha},$$

$$\left|\frac{\partial \bar{u}(x, y, z, t_1)}{\partial x}\right|, \dots \left|\frac{\partial \bar{w}(x, y, z, t_1)}{\partial z}\right| < \frac{cN(1 + R)^m}{1 - c_1 M (t_1 - t_0)^{\frac{1}{2}}}.$$

Cherchons maintenant à calculer u, v, w pour $t > t_1$. Les inégalités obtenues montrent que l'on peut employer le même procédé qui nous a servi à calculer les valeurs de ces fonctions pour $t_0 < t \leqq t_1$, en remplaçant seulement t_0 par t_1. On obtient de cette manière les valeurs de u, v, w pour $t_1 < t \leqq t_1 + \bar{t}$, en posant $t_1 - t_0 = \bar{t}$. En continuant ainsi, on peut, du moins théoriquement, calculer les valeurs de u, v, w pour chaque point de l'espace et pour $t_0 < t \leqq T$.

Nous avons construit un système de solutions de notre problème. Ce système, est il unique? La réponse est négative. Considérons pour le voir l'exemple suivant. Posons $X = Y = Z = 0$, $u_0 = v_0 = w_0 = 0$, $u(x, y, z, t_0) = v(x, y, z, t_0) = w(x, y, z, t_0) = 0$. Un système de solutions sera évidemment $u = v = w = 0$, $q = \text{const}$. Mais il existe une infinité d'autres systèmes. Par exemple: $u = t - t_0$, $v = w = 0$, $q = -\varrho x$.

Il faut donc, pour déterminer u, v, w sans ambiguïté, introduire des conditions supplémentaires. Convenons de nous borner aux systèmes de solutions pour lesquelles on peut trouver deux nombres positifs α' et M', tels que:

$$|u|,\ |v|,\ |w|,\ \left|\frac{\partial u}{\partial x}\right|, \ldots \left|\frac{\partial w}{\partial z}\right| < \frac{M'}{(1 + R)^{\alpha'}},$$

$$|p| < M'(1 + R)^{1-\alpha'}$$

dans tout l'espace et dans l'intervalle considéré du temps. Je dis qu'il existe tout au plus un système de solutions de cette espèce correspondant aux conditions aux limites données. Soient en effet $u^{(1)}, v^{(1)}, w^{(1)}, q^{(1)}$; $u^{(2)}, v^{(2)}, w^{(2)}, q^{(2)}$ deux systèmes différents, satisfaisant au système 15, $u^{(1)}, v^{(1)}, w^{(1)}$ et $u^{(2)}, v^{(2)}, w^{(2)}$ d'ailleurs prenant les mêmes valeurs pour $t = t_0$. Les différences $u^{(1)} - u^{(2)} = U$, $v^{(1)} - v^{(2)} = V$, $w^{(1)} - w^{(2)} = W$, $q^{(1)} - q^{(2)} = Q$ forment alors un système de solutions du système:

$$\varrho\frac{\partial U}{\partial t} + \varrho(w_0\bar{V} + W\bar{v}_0 - v_0\bar{W} - V\bar{w}_0) = -\frac{\partial Q}{\partial x} + \mu\Delta U,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} + \frac{\partial W}{\partial z} = 0,$$

et on a $U = V = W = 0$ pour $t = t_0$. Soit $S(\bar{r}')$ une sphère $\bar{r} = \bar{r}'$. Appliquons au problème précédent et à l'intérieur de cette sphère les formules 5 du chap. I. Nous aurons $(t > t_0)$:

$$4\pi\sqrt{\mu\varrho\pi}\,U(x,y,z,t) = -\varrho\int_{t_0}^{t} d\tau\int\Big[(w_0\bar{V} + W\bar{v}_0 - v_0\bar{W} -$$

$$-V\bar{w}_0)_{\substack{x=\xi,\dots\\ t=\tau}}\,u'_\xi + \cdots\Big]d\omega - \int_{t_0}^{t} d\tau\int_{S(\bar{r}')}\Big[u'_\xi\Big(\mu\frac{dU}{dn} - p\cos nx\Big)_{\substack{x=\xi,\dots\\ t=\tau}} + \cdots\Big]dS +$$

$$+\mu\int_{t_0}^{t} d\tau\int_{S(\bar{r}')}\Big(U\frac{du'_\xi}{dn} + V\frac{dv'_\xi}{dn} + W\frac{dw'_\xi}{dn}\Big)dS - \sqrt{\mu\varrho\pi}\int_{S(\bar{r}')}(U\cos nx + \cdots)_{\substack{x=\xi,\dots\\ t=\tau}}\frac{\xi - x}{r^3}dS$$

etc. Si maintenant $\bar{r}'$ tend vers l'infini, les intégrales de surface dans ces formules tendent vers zéro et nous obtenons:

$$4\pi\sqrt{\mu\varrho\pi}\,U(x,y,z,t) = -\varrho\int_{t_0}^{t} d\tau\int[(w_0\bar{V} + W\bar{v}_0 - v_0\bar{W} - V\bar{w}_0)_{\substack{x=\xi,\dots\\ t=\tau}}\,u'_\xi + \cdots]d\omega$$

etc. Les inégalités 12 et 13 montrent alors que l'on peut trouver un nombre positif c_2 tel que pour $t_0 \leqq t \leqq T$:

$$|U(x,y,z,t)|,\ |V(x,y,z,t)|,\ |W(x,y,z,t)|,\ |\bar{U}(x,y,z,t)(1+R)^{\alpha'}|,$$
$$|\bar{V}(x,y,z,t)(1+R)^{\alpha'}|,\ |\bar{W}(x,y,z,t)(1+R)^{\alpha'}| <$$
$$c_2 MM'\sqrt{t-t_0}\ \underset{t_0\leqq\tau\leqq t}{\mathrm{Max}}\left\{\sqrt{U^2+V^2+W^2+(1+R)^{2\alpha'}(\bar{U}^2+\bar{V}^2+\bar{W}^2)}\right\}_{t=\tau}$$

en désignant par $\mathrm{Max}\, f(x,y,z,\tau)$ la plus grande valeur de f aux différents point de l'espace dans l'intervalle du temps indiqué. Soit t' un nombre assujetti aux conditions:

$$t_0 < t' < t_0 + \frac{1}{16\,c_2^2 M^2 M'^2}.$$

Nous aurons dans l'intervalle $t_0 \leqq t \leqq t'$:

$$|U|,\dots|\bar{U}(1+R)^{\alpha'}|,\dots < \frac{1}{4}\underset{t_0\leqq\tau\leqq t'}{\mathrm{Max}}\left\{\sqrt{U^2+\cdots+(1+R)^{2\alpha'}(\bar{U}^2+\cdots)}\right\}_{t=\tau}.$$

Donc pour $t_0 \leqq t \leqq t'$:

$$U^2+V^2+W^2+(1+R)^{2\alpha'}(\bar{U}^2+\bar{V}^2+\bar{W}^2) < \frac{3}{8}\underset{t_0\leqq\tau\leqq t'}{\mathrm{Max}}\,(U^2+V^2+$$
$$+W^2+(1+R)^{2\alpha'}(\bar{U}^2+\bar{V}^2+\bar{W}^2)).$$

Si U, V, W ne sont pas identiquement nuls dans l'intervalle $t_0 \leqq t \leqq t'$ on parvient donc à une contradiction. Il faut donc supposer $u^{(1)} = u^{(2)}$, $v^{(1)} = v^{(2)}$, $w^{(1)} = w^{(2)}$ dans cet intervalle. En continuant de la même manière, on voit que l'on a partout $u^{(1)} = u^{(2)}$, $v^{(1)} = v^{(2)}$, $w^{(1)} = w^{(2)}$.

3. Plus difficile que la question traitée dans le dernier paragraphe est le problème de calculer les composantes de la vitesse d'un mouvement fini dans un fluide indéfini. La méthode des approximations successives de M. PICARD permet dans ce cas aussi de calculer u, v, w dans un intervalle $t_0 \leqq t \leqq t_0 + \bar{t}$, ces fonctions étant connues pour $t = t_0$. Mais la longueur de cet intervalle dépend dans ce cas des fonctions données $u(x, y, z, t_0)$ etc. de sorte que, si l'on veut poursuivre le calcul, on obtiendra un nouvel intervalle $t_0 + \bar{t} \leqq t \leqq t_0 + \bar{t} + \bar{t}_1$, où $\bar{t}_1$ en général ne sera pas identique à $\bar{t}$. Si les nombres $\bar{t}, \bar{t}_1$ etc. forment une série convergente, le calcul sera donc arrêté pour une valeur finie de t. D'après notre théorie, il paraît donc vraisemblable que des irrégularités peuvent naître dans l'intérieur d'un fluide visqueux et incompressible, même dans le cas où les forces extérieures et le mouvement initial sont complètement réguliers.

Nous supposons de nouveau que les fonctions données $u(x, y, z, t_0)$ etc. soient des fonctions continues de x, y, z, douées des dérivées continues du premier ordre et remplissant l'équation:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0.$$

Nous supposons de plus que les fonctions $\bar{u}(x, y, z, t_0)$ etc. admettent des dérivées continues par rapport à x, y, z et que l'on peut trouver deux nombres positifs α et N ($\alpha \leqq 1$) et un entier m tels que:

$$|u(x, y, z, t_0)|, \ldots < M,$$

$$|\bar{u}(x, y, z, t_0)|, \ldots < \frac{M}{(1 + R)^{\alpha}}$$

$$\left|\frac{\partial u(x, y, z, t_0)}{\partial x}\right|, \ldots \left|\frac{\partial \bar{u}(x, y, z, t_0)}{\partial x}\right|, \ldots < M(1 + R)^m$$

et que, pour $t_0 \leqq t \leqq T$:

$$|X(x, y, z, t)|, \ldots < \frac{M}{(1 + R)^{\alpha}},$$

$$\left|\frac{\partial Z}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial z}\right|, \ldots < M(1 + R)^m$$

Nous considérons alors le système:

$$\varrho \frac{\partial u}{\partial t} = X - \frac{\partial q}{\partial x} + \mu \Delta u + \lambda \varrho (w \bar{v} - v \bar{w}),$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0,$$

qui se réduit pour $\lambda = -1$ aux équations du mouvement d'un fluide visqueux et incompressible. Nous cherchons un système de solutions, correspondant aux fonctions données $u(x, y, z, t_0)$ etc. et procédant suivant les puissances de λ. Posons:

$$u(\lambda) = u_1 + u_2 \lambda + \cdots$$
$$v(\lambda) = v_1 + v_2 \lambda + \cdots$$
$$w(\lambda) = w_1 + w_2 \lambda + \cdots$$
$$q(\lambda) = q_1 + q_2 \lambda + \cdots$$

Nous aurons:

$$\varrho \frac{\partial u_1}{\partial t} = X - \frac{\partial q_1}{\partial x} + \mu \Delta u_1,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial v_1}{\partial y} + \frac{\partial w_1}{\partial z} = 0,$$

$$u_1(x, y, z, t_0) = u(x, y, z, t_0) \text{ etc.},$$

et pour $n = 2\ \ 3, \ldots$

$$\left.\begin{array}{c} \varrho \dfrac{\partial u_n}{\partial t} = -\dfrac{\partial q_n}{\partial x} + \mu \Delta u_n + \varrho \displaystyle\sum_{i=1}^{i=n-1} (w_i \bar{v}_{n-i} - v_i \bar{w}_{n-i}) \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \dfrac{\partial u_n}{\partial x} + \dfrac{\partial v_n}{\partial y} + \dfrac{\partial w_n}{\partial z} = 0, \\ u_n(x, y, z, t_0) = v_n(x, y, z, t_0) = w_n(x, y, z, t_0) = 0. \end{array}\right\} \tag{18}$$

Nous pouvons donc poser, pour $t > t_0$:

$$4\pi \sqrt{\mu \varrho \pi}\, u_1(x, y, z, t) = \frac{\varrho^2}{2\mu} \int u(\xi, \eta, \zeta, t_0) E(r, t_0, t)\, d\omega +$$
$$+ \int^{t} d\tau \int [(u'_\xi X(\xi, \eta, \zeta, \tau) + \cdots] d\omega$$

etc.,

$$4\pi\sqrt{\mu\varrho\pi}\,u_n(x,y,z,t)=\varrho\int\limits_{t_0}^{t}d\tau\int\Big[u'_\xi\sum_{i=1}^{i=n-1}(w_i\bar{v}_{n-i}-v_i\bar{w}_{n-i})_{\substack{x=\xi,\ldots\\ t=\tau}}+\cdots\Big]d\omega \qquad (19)$$

etc. pourvu que les expressions:

$$\sum_{i=1}^{i=n-1}(w_i\bar{v}_{n-i}-v_i\bar{w}_{n-i})$$

etc., remplissent les conditions nécessaires pour que les intégrales ci-dessus soient convergentes et admettent des dérivées satisfaisant au système 18.

Nous avons démontré dans le paragraphe dernier que l'on peut déterminer un nombre positif c tel que:

$$|u_1|,\ |v_1|,\ |w_1|<cM,$$
$$|\bar{u}_1(x,y,z,t)|,\ldots<\frac{cM}{(1+R)^a},$$
$$\left|\frac{\partial u_1(x,y,z,t)}{\partial x}\right|,\ldots\left|\frac{\partial w_1(x,y,z,t)}{\partial z}\right|,\ \left|\frac{\partial \bar{u}_1(x,y,z,t)}{\partial x}\right|,\ldots$$
$$\left|\frac{\partial \bar{w}_1(x,y,z,t)}{\partial z}\right|<cM(1+R)^m$$

dans l'intervalle $t_0\leqq t\leqq T$. Il résulte de ces inégalités que les formules 19 définissent des fonctions u_2, v_2, w_2, qui satisfont au système 18. Soit c' une quantité positive égale au plus grand des nombres $4n_1, 4n_2, 8n_3$, n_1, n_2, n_3 étant les nombres qui figurent dans les inégalités 12, 13, 14. Nous aurons pour $t_0\leqq t\leqq T$:

$$|u_2|,\ |v_2|,\ |w_2|<\varrho c^2c'M^2(t-t_0)^{\frac{1}{2}},$$
$$\left|\frac{\partial u_2(x,y,z,t)}{\partial x}\right|,\ldots\left|\frac{\partial w_2(x,y,z,t)}{\partial z}\right|<\frac{\varrho c^2c'M^2(t-t_0)^{\frac{1}{2}}}{(1+R)^a},$$
$$\left|\frac{\partial \bar{u}_2(x,y,z,t)}{\partial x}\right|,\ldots\left|\frac{\partial \bar{w}_2(x,y,z,t)}{\partial z}\right|<\varrho c^2c'M^2(1+R)^m(t-t_0)^{\frac{1}{2}}.$$

Il suit de là que les formules 19 définissent des fonctions u_3, v_3, w_3, qui satisfont au système 18 et ainsi de suite.

Soit maintenant $a_1, a_2, a_3,\ldots$ une suite de nombres positifs, définie par les égalités:

$$a_1=1,\ a_n=\sum_{i=1}^{i=n-1}a_ia_{n-i}.$$

Je dis que l'on a pour $t_0 \leqq t \leqq T$:

$$|u_n|,\ |v_n|,\ |w_n| < \frac{a_n}{\varrho c' (t-t_0)^{\frac{1}{2}}} (\varrho c c' M (t-t_0)^{\frac{1}{2}})^n,$$

$$\left|\frac{\partial u_n(x, y, z, t)}{\partial x}\right|, \ldots \left|\frac{\partial w_n(x, y, z, t)}{\partial z}\right| < \frac{a_n}{\varrho c' (1+R)^a (t-t_0)^{\frac{1}{2}}} (\varrho c c' M (t-t_0)^{\frac{1}{2}})^n,$$

$$\left|\frac{\partial \bar{u}_n(x, y, z, t)}{\partial x}\right|, \ldots \left|\frac{\partial \bar{w}_n(x, y, z, t)}{\partial z}\right| < \frac{a_n (1+R)^m}{\varrho c' (t-t_0)^{\frac{1}{2}}} (\varrho c c' M (t-t_0)^{\frac{1}{2}})^n$$

pour toute valeur entière et positive de n. En effet, ces inégalités sont vraies pour $n = 1$ et $n = 2$. Supposons qu'elles soient vraies pour $n = 1, 2, \ldots m - 1$. On aura alors:

$$\left|\sum_{i=1}^{i=m-1} (w_i \bar{v}_{m-i} - v_i \bar{w}_{m-i})\right| < \frac{4 (\varrho c c' M (t-t_0)^{\frac{1}{2}})^m}{\varrho^2 c'^2 (t-t_0)} \sum_{i=1}^{i=m-1} a_i a_{m-i} = \frac{4 a_m (\varrho c c' M (t-t_0)^{\frac{1}{2}})^m}{\varrho^2 c'^2 (t-t_0)}.$$

Donc:

$$|u_m|,\ |v_m|,\ |w_m| < \frac{a_m}{\varrho c' (t-t_0)^{\frac{1}{2}}} (\varrho c c' M (t-t_0)^{\frac{1}{2}})^m$$

etc. Notre assertion est donc prouvée.

Considérons maintenant la série:

$$\sum_{1}^{\infty} a_n x^{n-1}. \tag{20}$$

Si cette série pour des valeurs suffisamment petites de $|x|$ est convergente, elle définit une fonction y de x qui doit satisfaire à l'équation algébrique:

$$y^2 = \frac{y-1}{x}.$$

Or cette équation admet la solution:

$$y = \frac{1 - \sqrt{1-4x}}{2x} = 1 + x + \cdots$$

Donc la série 20 est absolument et uniformément convergente pour $|x| < \frac{1}{4} - \delta$ $(\delta > 0)$. Il suit de là que les séries:

$$\sum_{1}^{\infty} u_n \lambda^{n-1}, \ldots \sum_{1}^{\infty} \frac{\partial u_n}{\partial x} \lambda^{n-1}, \ldots \sum_{1}^{\infty} \frac{\partial \bar{u}_n}{\partial x} \lambda^{n-1}, \ldots$$

sont absolument et uniformément convergentes pour

$$\left|\lambda(t-t_0)^{\frac{1}{2}}\right| < \frac{1}{4\varrho c c' M} - \delta \qquad (\delta > 0).$$

Posons pour $t_0 \leqq t \leqq t_0 + \frac{1}{16\varrho^2 c^2 c'^2 M} - \varepsilon \qquad (\varepsilon > 0)$:

$$u = \sum_1^\infty (-1)^{n-1} u_n, \quad v = \sum_1^\infty (-1)^{n-1} v_n, \quad w = \sum_1^\infty (-1)^{n-1} w_n.$$

Ces fonctions satisferont au système:

$$\varrho \frac{\partial u}{\partial t} + \varrho(w\bar{v} - v\bar{w}) = X - \frac{\partial q}{\partial x} + \mu \Delta u,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0.$$

La démonstration est analogue à celle que nous avons donnée dans le paragraphe précédent pour un théorème analogue. Pour $t = t_0$, u, v, w prennent d'ailleurs les valeurs données. Notre problème est donc résolu.

Dans certains cas, une autre forme de la méthode des approximations successives est plus favorable que celle que nous avons employée ici. Soit u_0, v_0, w_0 un système de solutions approchés du problème. Calculons les fonctions u_n, v_n, w_n, q_n qui satisfont aux systèmes différentiels:

$$\varrho \frac{\partial u_n}{\partial t} - \mu \Delta u_n + \frac{\partial q_n}{\partial x} = X - \varrho(w_{n-1}\bar{v}_{n-1} - v_{n-1}\bar{w}_{n-1}),$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\frac{\partial u_n}{\partial x} + \frac{\partial v_n}{\partial y} + \frac{\partial w_n}{\partial z} = 0$$

et aux conditions aux limites:

$$u_{n_{t=t_0}} = u(x, y, z, t_0) \text{ etc.}$$

On peut alors démontrer que l'on a dans un certain intervalle du temps et sous certaines conditions très générales:

$$u = \lim_{n=\infty} u_n, \quad v = \lim_{n=\infty} v_n, \quad w = \lim_{n=\infty} w_n.$$

Cette méthode est applicable si, pour $t = t_0$, le mouvement du fluide est irrotationel à l'exception d'un certain nombre de tubes tourbillonaires. On prend alors pour u_0, v_0, w_0 les solutions fournies par la théorie des tourbillons dans un fluide idéal.

Montrons enfin qu'il ne peut pas exister deux systèmes de solutions différents $u^{(1)}, v^{(1)}, w^{(1)}, q^{(1)}$ et $u^{(2)}, v^{(2)}, w^{(2)}, q^{(2)}$ correspondants aux mêmes fonctions données et assujettis aux conditions:

$$|u|, \ldots \left|\frac{\partial u}{\partial x}\right|, \ldots < \frac{M'}{(1 + R)^{\alpha'}},$$

$$|p| < M'(1 + R)^{1-\alpha'},$$

$$\alpha' > 0.$$

En effet, dans ce cas les différences $u^{(1)} - u^{(2)} = U$ etc., satisferaient au système:

$$\varrho \frac{\partial U}{\partial t} + \varrho (W \bar{v}^{(1)} + \overline{V} w^{(2)} - V \bar{w}^{(1)} - \overline{W} v^{(2)}) = - \frac{\partial Q}{\partial x} + \mu \varDelta U,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} + \frac{\partial W}{\partial z} = 0,$$

que nous pouvons considérer comme un système linéaire, $\bar{u}^{(1)}, \bar{v}^{(1)}, \bar{w}^{(1)}, u^{(2)}, v^{(2)}, w^{(2)}$ étant des fonctions connues. Or nous avons vu que ce système et les conditions aux limites:

$$U_{t=t_0} = V_{t=t_0} = W_{t=t_0} = 0$$

exigent que l'on a identiquement $U = V = W = 0$.

III.

Les formules de Green généralisées dans certains problèmes particuliers.

1. Le mouvement infiniment lent et permanent d'un fluide visqueux et incompressible est régi par le système différentiel:

$$
\begin{aligned}
&\mu \varDelta u -\frac{\partial p}{\partial x} + X = 0,\\
&\mu \varDelta V -\frac{\partial p}{\partial y} + Y = 0,\\
&\mu \varDelta W -\frac{\partial p}{\partial z} + Z = 0,\\
&\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0.
\end{aligned}
\tag{21}
$$

Nous supposerons dans les recherches suivantes que les dérivées de u, v, w et p, qui figurent dans ces équations soient des fonctions continues de x, y, z dans l'intérieur du fluide considéré et que X, Y, Z dans le même domaine soient des fonctions uniformes de x, y, z, continues ainsi que leurs dérivées du premier ordre.

Soit S une surface fermée dans l'intérieur d'un fluide, ω_i la partie de l'espace qui se trouve à l'intérieur de S, x_0, y_0, z_0 un point quelconque de ω_i et $\omega_i(r')$ la partie de ω_i qui est située à l'extérieur de la sphère $r = r'$, où:

$$
r = \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2}.
$$

Posons:

$$
u'_x = \frac{\partial^2 r}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 r}{\partial z^2},\quad v'_x = -\frac{\partial^2 r}{\partial x \partial y},\quad w'_x = -\frac{\partial^2 r}{\partial x \partial z},\quad p'_x = -2\mu \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{r}\right).
$$

Ces fonctions satisfont au système:

$$
\begin{aligned}
&\mu \varDelta u'_x - \frac{\partial p'_x}{\partial x} = 0,\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&\frac{\partial u'_x}{\partial x} + \frac{\partial v'_x}{\partial y} + \frac{\partial w'_x}{\partial z} = 0.
\end{aligned}
\tag{22}
$$

Formons l'équation:

$$
\begin{aligned}
\mu \iiint\limits_{\omega_i(r')} [u'_x \varDelta u + v'_x \varDelta v + w'_x \varDelta w - u \varDelta u'_x - v \varDelta v'_x - w \varDelta w'_x]\, dx\, dy\, dz\, - \\
- \iiint\limits_{\omega_i(r')} \left[u'_x \frac{\partial p}{\partial x} + \cdots - u \frac{\partial p'_x}{\partial x} - \cdots\right] dx\, dy\, dz\, + \\
+ \iiint\limits_{\omega_i(r')} (X u'_x + Y v'_x + Z w'_x)\, dx\, dy\, dz = 0.
\end{aligned}
$$

Elle nous donne:

$$-\mu\int\limits_S\left[u'_x\frac{du}{dn}+\cdots-u\frac{du'_x}{dn}-\cdots\right]dS+\int\limits_S[(u'_x\cos nx+\cdots)p-(u\cos nx+\cdots)p'_x]dS+$$

$$+\iiint\limits_{\omega_i(r')}(Xu'_x+Yv'_x+Zw'_x)\,dx\,dy\,dz=-\mu\int\limits_{r=r'}\left(u\frac{du'_x}{dn}+\cdots-u'_x\frac{du}{dn}-\cdots\right)dS-$$

$$-\int\limits_{r=r'}[(u'_x\cos nx+\cdots)p-(u\cos nx+\cdots)p'_x]dS,$$

où n désigne la normale intérieure du domaine $\omega(r')$. Faisons r' tendre vers zero. Nous obtiendrons:

$$8\pi\mu u(x_0, y_0, z_0)=-\mu\int\limits_S\left(u'_x\frac{du}{dn}+\cdots-u\frac{du'_x}{dn}-\cdots\right)dS+$$

$$+\int\limits_S[(u'_x\cos nx+\cdots)p-(u\cos nx+\cdots)p'_x]dS+\iiint\limits_{\omega_i}(Xu'_x+\cdots)\,dx\,dy\,dz.$$

On a évidemment deux formules analogues pour $v(x_0, y_0, z_0)$ et $w(x_0, y_0, z_0)$. Pour obtenir la formule correspondante pour $p(x_0, y_0, z_0)$, nous posons:

$$u'=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{r}\right)=-\frac{x-x_0}{r^3},\quad v'=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{r}\right)=-\frac{y-y_0}{r^3},\quad w'=\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{r}\right)=-\frac{z-z_0}{r^3},\quad p'=0.$$

u', v', w' et p' satisfont au système 22. Nous avons donc:

$$-\mu\int\limits_S\left[u'\frac{du}{dn}+\cdots-u\frac{du'}{dn}-\cdots\right]dS+\int\limits_S(u'\cos nx+\cdots)p\,dS+$$

$$+\iiint\limits_{\omega_i(r')}(Xu'+Yv'+Zw')\,dx\,dy\,dz=\mu\int\limits_{r=r'}\left[u'\frac{du}{dn}+\cdots\right.$$

$$\left.-u\frac{du'}{dn}-\cdots\right]dS-\int\limits_{r=r'}(u'\cos nx+\cdots)p\,dS.$$

Le passage à la limite donne:

$$4\pi p(x_0, y_0, z_0)=-\mu\int\limits_S\left[u'\frac{du}{dn}+\cdots-u\frac{du'}{dn}-\cdots\right]dS+$$

$$+\int\limits_S(u'\cos nx+\cdots)p\,dS+\iiint\limits_{\omega_i}(Xu'+Yv'+Zw')\,dx\,dy\,dz$$

En changeant nos notations, nous pouvons écrire nos formules de la manière suivante:

$$\left.\begin{aligned}
&8\pi\mu\, u(x, y, z) = -\mu\int_S \left(u'_\xi \frac{du}{dn} + \cdots - u\frac{du'_\xi}{dn} - \cdots\right) dS + \\
&+\int_S [u'_\xi \cos nx + \cdots)\, p - (u\cos nx + \cdots)\, p'_\xi]\, dS + \\
&+\int_{\omega_i} (X(\xi, \eta, \zeta)\, u'_\xi + Y(\xi, \eta, \zeta)\, v'_\xi + Z(\xi, \eta, \zeta)\, w'_\xi)\, d\omega \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
&4\pi\, p(x, y, z) = \mu\int_S \left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{r}\right)\frac{du}{dn} + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{r}\right)\frac{dv}{dn} + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{r}\right)\frac{dw}{dn} - \right. \\
&\left. - u\frac{d}{dn}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{r}\right) - v\frac{d}{dn}\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{r}\right) - w\frac{d}{dn}\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{r}\right)\right] dS - \int_S \frac{d}{dn}\left(\frac{1}{r}\right) p\, dS + \\
&+\int_{\omega_i} \left(X(\xi, \eta, \zeta)\frac{\partial}{\partial \xi}\left(\frac{1}{r}\right) + Y(\xi, \eta, \zeta)\frac{\partial}{\partial \eta}\left(\frac{1}{r}\right) + Z(\xi, \eta, \zeta)\frac{\partial}{\partial \zeta}\left(\frac{1}{r}\right)\right) d\omega.
\end{aligned}\right\} \quad (23)$$

On a ici:

$$r = \sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + (z-\zeta)^2},$$

$$u'_\xi = \frac{\partial^2 r}{\partial \eta^2} + \frac{\partial^2 r}{\partial \zeta^2}, \quad v'_\xi = -\frac{\partial^2 r}{\partial \xi\, \partial \eta}, \quad w'_\xi = -\frac{\partial^2 r}{\partial \xi\, \partial \zeta},$$

$$u'_\eta = -\frac{\partial^2 r}{\partial \xi\, \partial \eta} \text{ etc.},$$

$$\frac{d}{dn} = \cos nx \frac{\partial}{\partial \xi} + \cos ny \frac{\partial}{\partial \eta} + \cos nz \frac{\partial}{\partial \zeta},$$

$$d\omega = d\xi\, d\eta\, d\zeta.$$

Dans les intégrales de surface, ξ, η, ζ sont les coordonnées d'un point de la surface S.

Les formules 23 sont, aux notations près, identiques à celles que l'on doit à M. Lorentz.

On voit aisément que les fonctions $u(x, y, z)$, $v(x, y, z)$, $w(x, y, z)$, $p(x, y, z)$, définies par les formules 23, si, sur la surface S, on y considère $u, v, w, \frac{du}{dn}, \frac{dv}{dn}, \frac{dw}{dn}$,

p comme des fonctions connues et continues, satisfont au système 21 dans l'intérieur du domaine ω_i, au moins dans le cas, où ω_i est une partie finie de l'espace et les fonctions X, Y, Z admettent des dérivées continues du premier ordre.

Envisageons maintenant les intégrales:

$$\int (X(\xi, \eta, \zeta)\, u'_\xi + \cdots)\, d\omega,$$

$$\int (X(\xi, \eta, \zeta)\, u'_\eta + \cdots)\, d\omega,$$

$$\int (X(\xi, \eta, \zeta)\, u'_\zeta + \cdots)\, d\omega,$$

l'intégration étant étendue à l'espace entier. Si X, Y, Z remplissent des inégalités de la forme:

$$|X(\xi, \eta, \zeta)|, \ldots < \frac{M}{(1 + \bar{r})^{2+\alpha}},$$

$$\bar{r} = \sqrt{\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2}, \qquad \alpha > 0,$$

ces intégrales ont un sens déterminé et définissent des fonctions de x, y, z, continues et douées des dérivées continues du premier ordre. Elles admettent des dérivées continues du second ordre, si X, Y, Z en admettent du premier ordre et satisfont dans ce cas au système 21, si l'on y pose:

$$p = \frac{1}{4\pi} \int \left(X(\xi, \eta, \zeta) \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{1}{r} \right) + \cdots \right) d\omega.$$

2. Soit $A(\xi, \eta, \zeta)$ une fonction de ξ, η, ζ, continue dans chaque point de l'espace et remplissant l'inégalité:

$$|A(\xi, \eta, \zeta)| < \frac{M}{(1 + \bar{r})^{1+\beta}},$$

$$0 < \beta < 2.$$

Nous cherchons dans ce cas une limite supérieure pour la valeur absolue de l'intégrale:

$$I = \int \frac{A(\xi, \eta, \zeta)\, d\omega}{r^2},$$

l'intégration étendue à l'espace entier.

Divisons l'espace en trois parties, ω_1, ω_2, ω_3, par les sphères $\bar{r} = \frac{R}{2}$ et $\bar{r} = \frac{3R}{2}$ $(R = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2})$, ω_1 étant la partie que se trouve à l'intérieur de la sphère $\bar{r} = \frac{R}{2}$ et ω_3 celle à l'extérieur de la sphère $\bar{r} = \frac{3R}{2}$. Soient I_1, I_2 et I_3 les parties correspondantes de notre intégrale. Nous aurons dans ω_1:

$$r \geqq \frac{R}{2}.$$

Donc:

$$|I_1| < M \int_{\omega_1} \frac{d\omega}{r^2 (1 + \bar{r})^{1+\beta}} < \frac{16 \pi M}{R^2} \int_0^{\frac{R}{2}} \frac{\bar{r}^2 d\bar{r}}{\bar{r}^{1+\beta}} = \frac{16 \pi M}{(2 - \beta) 2^{2-\beta} R^\beta}.$$

Dans ω_2 nous avons:

$$\bar{r} \geqq \frac{R}{2}.$$

Donc:

$$|I_2| < \frac{M}{\left(1 + \frac{R}{2}\right)^{1+\beta}} \int \frac{d\omega}{r^2} < \frac{4 \pi M}{\left(1 + \frac{R}{2}\right)^{1+\beta}} \int_0^{\frac{5R}{2}} dr < \frac{10 \pi M R}{\left(1 + \frac{R}{2}\right)^{1+\beta}} < \frac{10 \pi 2^{1+\beta} M}{R^\beta}.$$

Enfin, dans ω_3:

$$r \geqq \bar{r} - R.$$

Donc:

$$|I_3| < 4 \pi M \int_{\frac{3R}{2}}^{\infty} \frac{\bar{r}^2 d\bar{r}}{(1 + \bar{r})^{1+\beta} (\bar{r} - R)^2} < 4 \pi M \int_{\frac{3R}{2}}^{\infty} \frac{\bar{r} d\bar{r}}{\bar{r}^\beta (\bar{r} - R)^2} = \frac{4 \pi M}{R^\beta} \int_{\frac{3}{2}}^{\infty} \frac{u\, du}{u^\beta (u - 1)^2}.$$

Considérons maintenant la fonction:

$$(1 + R)^\beta \left| \frac{I}{M} \right|.$$

Elle est finie et continue pour tout système de valeurs de x, y, z. Les inégalités ci-dessus montrent qu'elle reste toujours inférieure à une certaine limite finie, qui est d'ailleurs indépendante de M.

Comme d'autre part les fonctions:

$$R^2 \left| \frac{\partial u'_\xi}{\partial x} \right|, \ldots R^2 \left| \frac{\partial w'_\zeta}{\partial z} \right|$$

pour tout système de valeurs de $x, y, z, \xi, \eta, \zeta$ restent finies, il s'ensuit que l'on peut trouver un nombre positif c_3 assez grand pour que:

$$\left|\int A(\xi, \eta, \zeta)\frac{\partial u'_\xi}{\partial x}d\omega\right|, \ldots \left|\int A(\xi, \eta, \zeta)\frac{\partial w'_\zeta}{\partial z}d\omega\right| < \frac{c_3 M}{(1+R)^\beta}. \tag{24}$$

3. Soit donné un fluide indéfini, sollicité d'une force extérieure dont les composantes soient $X(x, y, z)$, $Y(x, y, z)$, $Z(x, y, z)$. Nous allons voir dans ce paragraphe que les formules de M. Lorentz permettent dans certains cas de trouver un mouvement permanent correspondant à cette force.

Nous supposons que X, Y, Z soient des fonctions uniformes et continues, douées des dérivées continues du premier ordre et qu'elles remplissent des inégalités de la forme:

$$|X(\xi, \eta, \zeta)|, \ldots < \frac{N}{(1+R)^{2+\gamma}},$$

$$\gamma > 0.$$

D'autres conditions restrictives seront bientôt introduites.

Les équations du mouvement permanent peuvent s'écrire:

$$\mu \Delta u - \frac{\partial p}{\partial x} + X - \varrho\left(\frac{\partial(u^2)}{\partial x} + \frac{\partial(uv)}{\partial y} + \frac{\partial(uw)}{\partial z}\right) = 0,$$

. . . .

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0.$$

Négligeons d'abord les termes $\varrho\left(\frac{\partial(u^2)}{\partial x} + \frac{\partial(uv)}{\partial y} + \frac{\partial(uw)}{\partial z}\right)$ etc. Le système différentiel ainsi obtenu admet le système de solutions:

$$u_1 = \frac{1}{8\pi\mu}\int[X(\xi, \eta, \zeta)u'_\xi + \cdots]d\omega,$$

$$v_1 = \frac{1}{8\pi\mu}\int[X(\xi, \eta, \zeta)u'_\eta + \cdots]d\omega,$$

$$w_1 = \frac{1}{8\pi\mu}\int[X(\xi, \eta, \zeta)u'_\zeta + \cdots]d\omega,$$

$$p_1 = \frac{1}{4\pi}\int\left[X(\xi, \eta, \zeta)\frac{\partial}{\partial\xi}\left(\frac{1}{r}\right) + \cdots\right]d\omega,$$

les intégrations étendues à l'espace entier. Nous supposons et c'est là une nouvelle hypothèse restrictive par rapport à X, Y, Z qu'il existe une quantité positive M et un nombre δ, $0 < \delta < 1$, tels que l'on ait dans tout point de l'espace:

$$\begin{gathered}|u_1(x, y, z)|, \ldots < \frac{M}{(1+R)^{1+\delta}}, \\ \left|\frac{\partial u_1(x, y, z)}{\partial x}\right|, \ldots \left|\frac{\partial^2 u_1(x, y, z)}{\partial x^2}\right|, \ldots \\ \left|\frac{\partial^2 w_1(x, y, z)}{\partial z^2}\right| < \frac{M}{(1+R)^{1+\delta}}.\end{gathered} \tag{25}$$

Introduisons de nouveau le paramètre auxiliaire λ dans nos équations. Elles deviennent:

$$\mu \Delta u - \frac{\partial p}{\partial x} + X + \varrho\lambda\left(\frac{\partial(u^2)}{\partial x} + \frac{\partial(uv)}{\partial y} + \frac{\partial(uw)}{\partial z}\right) = 0,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0.$$

Posons:

$$\begin{aligned}u(\lambda) &= u_1 + u_2\lambda + \cdots \\ v(\lambda) &= v_1 + v_2\lambda + \cdots \\ w(\lambda) &= w_1 + w_2\lambda + \cdots \\ p(\lambda) &= p_1 + p_2\lambda + \cdots\end{aligned}$$

Pour déterminer u_2, v_2, w_2 etc. nous aurons les équations:

$$\mu \Delta u_n - \frac{\partial p_n}{\partial x} + \varrho\left(\frac{\partial}{\partial x}\sum_1^{n-1} u_i u_{n-i} + \frac{\partial}{\partial y}\sum_1^{n-1} u_i v_{n-i} + \frac{\partial}{\partial z}\sum_1^{n-1} u_i w_{n-i}\right) = 0,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\frac{\partial u_n}{\partial x} + \frac{\partial v_n}{\partial y} + \frac{\partial w_n}{\partial z} = 0.$$

Posons donc, pour $n > 1$:

$$u_n = \frac{\varrho}{8\pi\mu}\int\left[\left(\frac{\partial}{\partial x}\sum_1^{n-1} u_i u_{n-i} + \cdots\right)_{x=\xi, \ldots} u'_\xi + \cdots\right] d\omega =$$

$$-\frac{\varrho}{8\pi\mu}\int\left[\left(\sum_1^{n-1} u_i u_{n-i}\right)_{x=\xi, \ldots} \frac{\partial u'_\xi}{\partial \xi} + \left(\sum_1^{n-1} u_i v_{n-i}\right)_{x=\xi, \ldots}\left(\frac{\partial u'_\xi}{\partial \eta} + \frac{\partial v'_\xi}{\partial \xi}\right) + \cdots\right] d\omega$$

etc. Les fonctions u_2, v_2, w_2, ainsi obtenus, sont des fonctions continues ainsi que leurs dérivées des deux premiers ordres, et on a en vertu des inégalités 24:

$$|u_2(x, y, z)|, \ldots < \frac{9 \varrho c_3 M^2}{8 \pi \mu (1 + R)^{1+\delta}},$$

$$\left|\frac{\partial u_2(x, y, z)}{\partial x}\right|, \ldots \left|\frac{\partial w_2(x, y, z)}{\partial z}\right| < \frac{9 \varrho c_3 M^2}{4 \pi \mu (1 + R)^{1+\delta}},$$

$$\left|\frac{\partial^2 u_2(x, y, z)}{\partial x^2}\right|, \ldots \left|\frac{\partial^2 w_2(x, y, z)}{\partial z^2}\right| < \frac{9 \varrho c_3 M^2}{2 \pi \mu (1 + R)^{1+\delta}}.$$

Donc:

$$|u_2|, \ldots \quad \left|\frac{\partial u_2}{\partial x}\right|, \ldots \quad \left|\frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2}\right|, \ldots < \frac{c_4 M^2}{(1 + R)^{1+\delta}}$$

où:

$$c_4 = \frac{9 \varrho c_3}{2 \pi \mu}.$$

Il résulte de là que u_3, v_3, w_3 sont des fonctions continues, douées des dérivées continues des deux premiers ordres et qu'elles remplissent certaines inégalités propres à nous assurer que les fonctions u_4, v_4, w_4 jouissent des mêmes propriétés. En continuant ainsi, on voit que u_n, v_n, w_n pour toute valeur entière et positive de n sont des fonctions continues de x, y, z et qu'elles admettent des dérivées continues du premier et du second ordre.

Soit maintenant a_1, $a_2, \ldots$ la série de nombres entiers et positifs, définie par les équations:

$$a_1 = 1, \; a_n = \sum_1^{n-1} a_i a_{n-i}.$$

Je dis que l'on a:

$$|u_n(x, y, z)|, \ldots \quad \left|\frac{\partial u_n(x, y, z)}{\partial x}\right|, \ldots \quad \left|\frac{\partial^2 u_n(x, y, z)}{\partial x^2}\right|, \ldots < \frac{a_n c_4^{n-1} M^n}{(1 + R)^{1+\delta}}.$$

En effet, ces inégalités étant vraies pour $n = 1$ et $n = 2$, on voit, en concluant de n à $n + 1$, qu'elles sont vraies pour toute valeur entière et positive de n.

Faisons une dernière hypothèse. Supposons que M soit plus petit que $\frac{1}{4 c_4}$. Alors, les séries:

$$\sum_1^{\infty} (-1)^{n-1} u_n, \ldots \sum_1^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{\partial u_n}{\partial x}, \ldots \sum_1^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{\partial^2 u_n}{\partial x^2}, \ldots$$

sont absolument et uniformément convergentes pour tout système de valeurs de x, y, z. Posons:

$$u = \sum_1^\infty (-1)^{n-1} u_n, \quad v = \sum_1^\infty (-1)^{n-1} v_n, \quad w = \sum_1^\infty (-1)^{n-1} w_n.$$

u, v, w seront des fonctions de x, y, z continues et douées des dérivées continues des deux premiers ordres et nous aurons:

$$8\pi\mu u = \int [X(\xi, \eta, \zeta) u'_\xi + \cdots] d\omega - \varrho \int \left[\left(\frac{\partial (u^2)}{\partial x} + \frac{\partial (uv)}{\partial y} + \frac{\partial (uw)}{\partial z}\right)_{x=\xi, \ldots} u'_\xi + \cdots\right] d\omega$$

etc., les intégrales à droite dans ces formules ayant un sens déterminé puisqu'on a:

$$|u(x, y, z)|, \ldots \quad \left|\frac{\partial u(x, y, z)}{\partial x}\right|, \ldots \quad \left|\frac{\partial^2 u(x, y, z)}{\partial x^2}\right|, \ldots < \frac{C}{(1 + R)^{1+\delta}},$$

C étant une certaine quantité positive. Posons:

$$4\pi p(x, y, z) = \int \left[X(\xi, \eta, \zeta) \frac{\partial}{\partial \xi}\left(\frac{1}{r}\right) + \cdots\right] d\omega -$$

$$- \varrho \int \left[\left(\frac{\partial (u^2)}{\partial x} + \frac{\partial (uv)}{\partial y} + \frac{\partial (uw)}{\partial z}\right) \frac{\partial}{\partial \xi}\left(\frac{1}{r}\right) + \cdots\right] d\omega.$$

u, v, w, p satisfont alors aux équations du mouvement permanent.

4. Supposons que les composantes de la force extérieure soient de la forme $X(x, y, z) e^{-k^2 t}$, $Y(x, y, z) e^{-k^2 t}$, $Z(x, y, z) e^{-k^2 t}$. Cherchons un système de solutions de la forme $u(x, y, z) e^{-k^2 t}$ etc. des équations 1. Nous aurons pour déterminer u, v, w le système différentiel:

$$-\varrho k^2 u = X - \frac{\partial p}{\partial x} + \mu \Delta u,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0.$$

Posons:

$$u'_\xi = \frac{\partial^2 P}{\partial \eta^2} + \frac{\partial^2 P}{\partial \zeta^2}, \quad v'_\xi = -\frac{\partial^2 P}{\partial \xi \partial \eta}, \quad w'_\xi = -\frac{\partial^2 P}{\partial \xi \partial \zeta}, \quad p'_\xi = -2\mu \frac{\partial}{\partial \xi}\left(\frac{1}{r}\right) \text{ etc.,}$$

où:

$$P = \frac{2\mu\left[1 - \cos\left(k\sqrt{\frac{\varrho}{\mu}}\,r\right)\right]}{k^2\varrho r},$$

$$r = \sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + (z-\zeta)^2}.$$

u'_ξ, v'_ξ, w'_ξ, p'_ξ etc. satisfont aux systèmes différentiels:

$$-\varrho k^2 u'_\xi = -\frac{\partial p'_\xi}{\partial \xi} + \mu \Delta_{\xi,\eta,\zeta} u'_\xi,$$

. . . .

$$\frac{\partial u'_\xi}{\partial \xi} + \frac{\partial v'_\xi}{\partial \eta} + \frac{\partial w'_\xi}{\partial \zeta} = 0$$

etc. Dans le voisinage du point x, y, z ils se comportent comme les fonctions $\frac{\partial^2 r}{\partial \eta^2} + \frac{\partial^2 r}{\partial \zeta^2}$, $-\frac{\partial^2 r}{\partial \xi \partial \eta}$, $-\frac{\partial^2 r}{\partial \xi \partial \zeta}$, $-2\mu\frac{\partial}{\partial \xi}\left(\frac{1}{r}\right)$ etc. Le procédé du paragraphe 1 est donc applicable sans aucune modification et nous obtenons:

$$8\pi\mu u(x, y, z) = -\mu\int\limits_S\left[u'_\xi\frac{du}{dn} + \cdots - u\frac{du'_\xi}{dn} - \cdots\right]dS +$$

$$+\int\limits_S[(u'_\xi\cos nx + \cdots)p - (u\cos nx + \cdots)p'_\xi]dS + \int\limits_{\omega_i}[X(\xi, \eta, \zeta)u'_\xi + \cdots]d\omega$$

et deux formules analogues. Pour compléter notre système de formules nous employons les fonctions:

$$u' = \frac{\partial}{\partial \xi}\left(\frac{1}{r}\right),\ v' = \frac{\partial}{\partial \eta}\left(\frac{1}{r}\right),\ w' = \frac{\partial}{\partial \zeta}\left(\frac{1}{r}\right),\ p' = \frac{\varrho k^2}{r}.$$

Nous trouvons:

$$4\pi p(x, y, z) = \mu\int\limits_S\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{r}\right)\frac{du}{dn} + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{r}\right)\frac{dv}{dn} + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{r}\right)\frac{dw}{dn} -\right.$$

$$\left.-u\frac{d}{dn}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{r}\right) - v\frac{d}{dn}\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{r}\right) - w\frac{d}{dn}\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{r}\right)\right]dS - \int\limits_S p\frac{d}{dn}\left(\frac{1}{r}\right)dS -$$

$$-\varrho k^2\int\limits_S(u\cos nx + \cdots)\frac{dS}{r} + \int\limits_{\omega_i}\left[X(\xi, \eta, \zeta)\frac{\partial}{\partial \xi}\left(\frac{1}{r}\right) + \cdots\right]d\omega.$$

5. Analogues aux formules précédentes, mais un peu plus compliquées sont celles que l'on obtient dans le cas où les composantes de la force extérieure sont des fonctions périodiques de t. Soient par exemple:

$$\begin{aligned} X &= \text{partie réelle de } A(x, y\, z)e^{i\lambda t}, \\ Y &= \quad \text{»} \quad \text{»} \quad \text{»} \; B(x, y, z)e^{i\lambda t}, \\ Z &= \quad \text{»} \quad \text{»} \quad \text{»} \; C(x, y, z)e^{i\lambda t}, \end{aligned}$$

où $A = A_1 + iA_2$, $B = B_1 + iB_2$, $C = C_1 + iC_2$ sont des fonctions complexes de x, y, z. Posons dans ce cas:

$$u(x, y, z, t) = \text{partie réelle de } u(x, y, z)e^{i\lambda t}$$

etc., où $u(x, y, z)$, $v(x, y, z)$, $w(x, y, z)$, $p(x, y, z)$ désignent des fonctions complexes de x, y, z, qui doivent satisfaire au système suivant:

$$i\varrho\lambda u = A - \frac{\partial p}{\partial x} + \mu \Delta u,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0.$$

Les fonctions de Green géréralisées de ce système différentiel sont:

$$u'_\xi = \frac{\partial^2 P}{\partial \eta^2} + \frac{\partial^2 P}{\partial \zeta^2}, \quad v'_\xi = -\frac{\partial^2 P}{\partial \xi \partial \eta}, \quad w'_\xi = -\frac{\partial^2 P}{\partial \xi \partial \zeta}, \quad p'_\xi = -2\mu \frac{\partial}{\partial \xi}\left(\frac{1}{r}\right) \text{ etc.}$$

$$u' = \frac{\partial}{\partial \xi}\left(\frac{1}{r}\right), \quad v' = \frac{\partial}{\partial \eta}\left(\frac{1}{r}\right), \quad w' = \frac{\partial}{\partial \zeta}\left(\frac{1}{r}\right), \quad p' = -\frac{i\varrho\lambda}{r}.$$

On a dans ces équations:

$$P = \frac{2i\mu\left[1 - \cos\left(\sqrt{\frac{-i\varrho\lambda}{\mu}}\, r\right)\right]}{\varrho\lambda r}.$$

Si $\lambda > 0$, on a donc, en séparant les parties réelles et imaginaires de P:

$$P = \frac{\mu}{\varrho\lambda r}\sin\left(r\sqrt{\frac{\varrho\lambda}{2\mu}}\right)\left(e^{r\sqrt{\frac{\varrho\lambda}{2\mu}}} - e^{-r\sqrt{\frac{\varrho\lambda}{2\mu}}}\right) +$$

$$+ \frac{i\mu}{\varrho\lambda r}\left[2 - \cos\left(r\sqrt{\frac{\varrho\lambda}{2\mu}}\right)\left(e^{r\sqrt{\frac{\varrho\lambda}{2\mu}}} + e^{-r\sqrt{\frac{\varrho\lambda}{2\mu}}}\right)\right].$$

Les formules de GREEN généralisées, que l'on obtient à l'aide de ces fonctions, sont tout à fait analogues à celles du paragraphe précédent. On a donc:

$$8\pi\mu u(x, y, z) = 8\pi\mu[u_1(x, y, z) + iu_2(x, y, z)] =$$

$$-\mu\int\limits_S\left[u'_\xi\frac{du}{dn} + \cdots - u\frac{du'_\xi}{dn} - \cdots\right]dS +$$

$$+\int\limits_S[(u'_\xi\cos nx + \cdots]p - (u\cos nx + \cdots)p'_\xi]dS + \int\limits_{\omega_i}[A(\xi, \eta, \zeta)u'_\xi + \cdots]d\omega$$

etc.,

$$4\pi p(x, y, z) = 4\pi[p_1(x, y, z) + ip_2(x, y, z)] =$$

$$\mu\int\limits_S\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{r}\right)\frac{du}{dn} + \cdots - u\frac{d}{dn}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{r}\right) - \cdots\right]dS - \int\limits_S p\frac{d}{dn}\left(\frac{1}{r}\right)dS +$$

$$+ i\varrho\lambda\int\limits_S(u\cos nx + \cdots)\frac{dS}{r} + \int\limits_{\omega_i}\left[A(\xi, \eta, \zeta)\frac{\partial}{\partial\xi}\left(\frac{1}{r}\right) + \cdots\right]d\omega.$$

6. Reprenons le système 1. Supposons que $Z = w = 0$ et que u, v, p, X, Y ne dépendent que de x, y, t. Nous aurons:

$$\varrho\frac{\partial u}{\partial t} = X - \frac{\partial p}{\partial x} + \mu\Delta_{x,y}u,$$

$$\varrho\frac{\partial v}{\partial t} = Y - \frac{\partial p}{\partial y} + \mu\Delta_{x,y}v, \tag{26}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0.$$

Supposons que u, v, p et les dérivées de ces fonctions, qui figurent dans le système 26, X, Y et leurs dérivées du premier ordre par rapport à x, y soient des fonctions continues de x, y, t dans l'intérieur du fluide considéré pour des valeurs de t, situées dans un certain intervalle $0 \leqq t \leqq t_1$. Soit:

$$\varphi(x, y, t) = 0$$

l'équation d'une courbe fermée, $C(t)$, dans l'intérieur du fluide, admettant dans chaque point un tangent déterminé et une vitesse normale déterminée u_n. Soit $\omega(t)$ la partie du xy-plan, qui se trouve à l'intérieur de $C(t)$, x_0, y_0 un point quelconque, situé à l'instant t_0 dans $\omega(t)$ et $\omega_{r'}(t)$ la partie de $\omega(t)$, extérieure au cercle $r = r'$ $[r = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}]$. Posons:

$$e^{-\frac{\varrho r^2}{4\mu(t_0-t)}} = F(r, t, t_0)$$

$$P_{r'} = -\int_r^\infty F(r, t, t_0)\frac{dr}{r} - F(r', t, t_0)\log r.$$

Définissons les fonctions $u'_x(r')$, $v'_x(r')$ et $p'_x(r')$ à l'intérieur de la courbe $C(t)$ et sur cette courbe par les équations:

$$u'_x(r') = -\frac{\partial^2 P_{r'}}{\partial y^2}, \quad v'_x(r') = \frac{\partial^2 P_{r'}}{\partial x \partial y}, \quad p'_x(r') = \frac{\partial}{\partial x}\left(\varrho\frac{\partial P_{r'}}{\partial t} + \mu \varDelta_{x,y} P_{r'}\right)$$

et à l'extérieur de la courbe $C(t)$ par les équations:

$$u'_x(r') = v'_x(r') = p'_x(r') = 0.$$

Ces fonctions satisfont au système différentiel:

$$-\varrho\frac{\partial u'_x(r')}{\partial t} = -\frac{\partial p'_x(r')}{\partial x} + \mu \varDelta_{x,y} u'_x(r'),$$

$$-\varrho\frac{\partial v'_x(r')}{\partial t} = -\frac{\partial p'_x(r')}{\partial y} + \mu \varDelta_{x,y} v'_x(r'),$$

$$\frac{\partial u'_x(r')}{\partial x} + \frac{\partial v'_x(r')}{\partial y} = 0.$$

Formons l'équation:

$$\varrho\int_0^{t_0} dt \int_{\omega_{r'}(t)} \frac{\partial[u u'_x(r') + v v'_x(r')]}{\partial t} d\omega = \int_0^{t_0} dt \int_{\omega_{r'}(t)} [X u'_x(r') + Y u'_y(r')] d\omega +$$

$$+ \int_0^{t_0} dt \int_{\omega_{r'}(t)} \Big\{ \mu[u'_x(r')\varDelta_{x,y} u + v'_x(r')\varDelta_{x,y} v - u\varDelta_{x,y} u'_x(r') - v\varDelta_{x,y} v'_x(r')] -$$

$$- u'_x(r')\frac{\partial p}{\partial x} - v'_x(r')\frac{\partial p}{\partial y} + u\frac{\partial p'_x(r')}{\partial x} + v\frac{\partial p'_x(r')}{\partial y}\Big\} d\omega.$$

Elle nous donne, en intégrant par parties:

$$\varrho\int_{\omega_{r'}(t_0)} [u u'_x(r') + v v'_x(r')]_{t=t_0} d\omega = \varrho\int_{\omega_{r'}(0)} [u u'_x(r') + v v'_x(r')]_{t=0} d\omega -$$

$$-\varrho\int_0^{t_0}dt\int_{C(t)}[u u'_x(r')+v v'_x(r')]u_n dS+\int_0^{t_0}dt\int_{\omega_{r'}(t)}[X u'_x(r')+Y v'_x(r')]d\omega-$$

$$-\int_0^{t_0}dt\int_{C(t)}\Big\{\mu\Big[u'_x(r')\frac{du}{dn}+v'_x(r')\frac{dv}{dn}-u\frac{du'_x(r')}{dn}-v\frac{dv'_x(r')}{dn}\Big]-$$

$$-[u'_x(r')\cos nx+v'_x(r')\cos ny]p+(u\cos nx+v\cos ny)p'_x(r')\Big\}dS-$$

$$-\int_0^{t_0}dt\int_{r=r'}\Big\{\mu\Big[u'_x(r')\frac{du}{dn}+\cdots\Big]-[u'_x(r')\cos nx+v'_x(r')\cos ny]p+$$

$$+(u\cos nx+v\cos ny)p'_x(r')\Big\}dS.$$

n désigne la normale intérieure.

Cherchons la valeur limite de la dernière intégrale lorsque r' tend vers zéro. Nous avons dans un point du cercle $r=r'$, situé à l'intérieur de $\omega(t)$:

$$u'_x(r')=\frac{\varrho}{2\mu}\frac{(y-y_0)^2}{r'^2}\frac{F(r',t,t_0)}{t_0-t},\quad v'_x(r')=-\frac{\varrho}{2\mu}\frac{(x-x_0)(y-y_0)}{r'^2}\frac{F(r',t,t_0)}{t_0-t},$$

$$\frac{du'_x(r')}{dn}=\frac{\varrho}{2\mu}\left(\frac{1}{r'}-\frac{2(y-y_0)^2}{r'^3}\right)\frac{F(r',t,t_0)}{t_0-t}-\frac{\varrho^2}{4\mu^2}\frac{(y-y_0)^2}{r'}\frac{F(r',t,t_0)}{(t_0-t)^2},$$

$$\frac{dv'_x(r')}{dn}=\frac{\varrho}{\mu}\frac{(x-x_0)(y-y_0)}{r'^3}\frac{F(r',t,t_0)}{t_0-t}+\frac{\varrho^2}{4\mu^2}\frac{(x-x_0)(y-y_0)}{r'}\frac{F(r',t,t_0)}{(t_0-t)^2},$$

$$p'_x(r')=\frac{\varrho^2(x-x_0)}{4\mu}\frac{F(r',t,t_0)}{(t_0-t)^2}.$$

Développons u, v, $\frac{du}{dn}$, $\frac{dv}{dn}$ d'après le théorème de TAYLOR. Les principaux termes de la fonction:

$$\mu\left(u'_x(r')\frac{du}{dn}+\cdots\right)-[u'_x(r')\cos nx+v'_x(r')\cos ny]p+(u\cos nx+v\cos ny)p'_x(r')$$

seront:

$$\frac{\varrho u(x_0,y_0,t)}{2}\left(\frac{\varrho r'}{2\mu(t_0-t)}+\frac{1}{r'}-\frac{2(x-x_0)^2}{r'^3}\right)\frac{F(r',t,t_0)}{t_0-t}-$$

$$-\varrho v(x_0,y_0,t)\frac{(x-x_0)(y-y_0)}{r'^3}\frac{F(r',t,t_0)}{t_0-t}$$

et nous aurons:

$$\lim_{r'=0}\int_0^{t_0}dt\int_{r=r'}\Big[\mu\left(u'_x(r')\frac{du}{dn}+\cdots\right)-(u'_x(r')\cos nx+$$

$$+v'_x(r')\cos ny)\,p+(u\cos nx+v\cos ny)\,p'_x(r')\Big]dS=$$

$$\lim_{r'=0}\Bigg[\int_0^{t_0}\frac{\varrho F(r',t,t_0)}{2\,(t_0-t)}u(x_0,y_0,t)\,dt\int_{r=r'}\left(\frac{\varrho r'}{2\,\mu(t_0-t)}+\frac{1}{r'}-\frac{2\,(x-x_0)^2}{r'^3}\right)dS-$$

$$-\int_0^{t_0}\frac{\varrho F(r',t,t_0)}{t_0-t}v(x_0,y_0,t)\int_{r=r'}\frac{(x-x_0)(y-y_0)}{r'^3}dS\Bigg]=$$

$$\frac{\varrho^2\pi}{2\,\mu}\lim_{r'=0}\int_0^{t_0}r'^2F(r',t,t_0)\,u(x_0,y_0,t)\frac{dt}{(t_0-t)^2}=2\,\pi\varrho u(x_0,y_0,t_0).$$

Remarquons de plus que l'on a pour $t=t_0: u'_x(r')=v'_x(r')=0$. Donc:

$$2\,\pi\varrho u(x_0,y_0,t_0)=\lim_{r'=0}\Bigg[\varrho\int_{\omega_{r'}(0)}[u\,u'_x(r')+v\,v'_x(r')]_{t=0}\,d\omega-$$

$$-\varrho\int_0^{t_0}dt\int_{C(t)}[u\,u'_x(r')+v\,v'_x(r')]\,u_n\,dS+\int_0^{t}dt\int_{\omega_{r'}(t)}(X\,u'_x(r')+Y\,v'_x(r'))\,d\omega-$$

$$-\int_0^{t_0}dt\int_{C(t)}\Big[\mu\left(u'_x(r')\frac{du}{dn}+\cdots\right)-[u'_x(r')\cos nx+v'_x(r')\cos ny]\,p+$$

$$+(u\cos nx+v\cos ny)\,p'_x(r')\Big]dS\Bigg].$$

Posons:

$$P=-\int_r^{\infty}F(r,t,t_0)\frac{dr}{r}-\log r,$$

$$u'_x=-\frac{\partial^2P}{\partial y^2}=\frac{1}{r^2}\left(1-\frac{2\,(y-y_0)^2}{r^2}\right)(1-F(r,t,t_0))+\frac{\varrho(y-y_0)^2}{2\,\mu r^2}\,\frac{F(r,t,t_0)}{t_0-t},$$

$$v'_x=\frac{\partial^2P}{\partial x\,\partial y}=\frac{2\,(x-x_0)(y-y_0)}{r^4}(1-F(r,t,t_0))-\frac{\varrho(x-x_0)(y-y_0)}{2\,\mu r^2}\,\frac{F(r,t,t_0)}{t_0-t}.$$

$u'_x(r')$, $v'_x(r')$ et $p'_x(r')$ tendent pour $r\geqq\delta$, $t_0-t\geqq\varepsilon$ $(\delta>0,\ \varepsilon>0)$ uniformément vers u'_x, v'_x et o, lorsque r' tend vers zéro.

Considérons les intégrales:

$$I_1 = \int_{\omega'(t)} \varphi(x, y, t)(1 - F(r, t, t_0))\frac{d\omega}{r^2},$$

$$I_2 = \int_{\omega'(t)} \varphi(x, y, t) F(r, t, t_0)\frac{d\omega}{t_0 - t},$$

$$I_3 = \int_{t'}^{t_0} dt \int_{\omega'(t)} \varphi(x, y, t)(1 - F(r, t, t_0))\frac{d\omega}{r^2},$$

$$I_4 = \int_{t'}^{t_0} dt \int_{\omega'(t)} \varphi(x, y, t) F(r, t, t_0)\frac{d\omega}{t_0 - t},$$

où $\omega'(t)$ est une certaine aire finie du plan des x, y et $\varphi(x, y, t)$ une fonction finie et intégrable de x, y, t. Soit $l'(t)$ la plus grande distance entre deux points de la frontière du domaine $\omega'(t)$ et L' le maximum de $l'(t)$ dans l'intervalle $0 \leqq t \leqq t_0$. Nous avons alors, si $0 \leqq t \leqq t_0$:

$$I_1 < 2\pi \operatorname{Max}|\varphi| \int_0^{L'} (1 - F(r, t, t_0))\frac{dr}{r}$$

$$< 2\pi \operatorname{Max}|\varphi| \operatorname*{Max}_{u \geqq 0} \left| \frac{1 - e^{-\frac{\varrho u^2}{4\mu}}}{u} \right| \frac{L'}{\sqrt{t_0 - t}},$$

$$I_2 < 2\pi \operatorname{Max}|\varphi| \int_0^{L'} r F(r, t, t_0)\frac{dr}{t_0 - t}$$

$$< 2\pi \operatorname{Max}|\varphi| \operatorname*{Max}_{u \geqq 0} \left| u e^{-\frac{\varrho u^2}{4\mu}} \right| \frac{L'}{\sqrt{t_0 - t}},$$

et si $0 \leqq t' \leqq t_0$:

$$I_3 < 4\pi \operatorname{Max}|\varphi| \operatorname{Max} \left| \frac{1 - e^{-\frac{\varrho u^2}{4\mu}}}{u} \right| L' \sqrt{t_0 - t'},$$

$$I_4 < 4\pi \operatorname{Max}|\varphi| \operatorname{Max} \left| u e^{-\frac{\varrho u^2}{4\mu}} \right| L' \sqrt{t_0 - t'}.$$

On conclut de ces inégalités que les intégrales:

$$\int_{\omega(0)} (u u'_x + v v'_x) d\omega, \quad \int_0^{t_0} dt \int_{\omega(t)} (X u'_x + Y v'_x) d\omega$$

ont un sens déterminé et que l'on peut trouver un nombre positif b_1, tel que:

$$\int\limits_{0\leq r\leq \delta} | u u'_x + v v'_x |_{t=0} \, d\omega < \frac{b_1 \delta}{\sqrt{t_0}} \operatorname*{Max}_{t=0} \sqrt{u^2+v^2},$$

$$\int\limits_0^{t_0} dt \int\limits_{0\leq r\leq \delta} | X u'_x + Y v'_x | \, d\omega < b_1 \delta \sqrt{t_0} \operatorname*{Max}_{0\leq t\leq t_0} \sqrt{X^2+Y^2},$$

$$\int\limits_{t_0-\varepsilon}^{t_0} dt \int\limits_{\omega(t)} | X u'_x + Y v'_x | \, d\omega < b_1 L \sqrt{\varepsilon} \operatorname*{Max}_{0\leq t\leq t_0} \sqrt{u^2+v^2},$$

L étant le maximum de la distance entre deux points d'une courbe $C(t)$ $(0 \leq t \leq t_0)$. Comme on a:

$$u'_x(r') = \frac{1}{r^2}\left(1 - \frac{2(y-y_0)^2}{r^2}\right)[F(r', t, t_0) - F(r, t, t_0)] + \frac{\varrho (y-y_0)^2}{2\mu r^2} \frac{F(r, t, t_0)}{t_0 - t},$$

$$v'_x(r') = \frac{2(x-x_0)(y-y_0)}{r^4}[F(r', t, t_0) - F(r, t, t_0)] - \frac{\varrho (x-x_0)(y-y_0)}{2\mu r^2} \frac{F(r, t, t_0)}{t_0 - t}$$

et comme, pour $r \geq r'$:

$$|F(r', t, t_0) - F(r, t, t_0)| = e^{-\frac{\varrho r'^2}{4\mu(t_0-t)}} - e^{-\frac{\varrho r^2}{4\mu(t_0-t)}} \leq 1 - e^{-\frac{\varrho r^2}{4\mu(t_0-t)}}$$

on voit que l'on peut choisir b_1 tel que l'on a aussi:

$$\int\limits_{r'\leq r\leq \delta} | u u'_x(r') + v v'_x(r') |_{t=0} \, d\omega < \frac{b_1 \delta}{\sqrt{t_0}} \operatorname*{Max}_{t=0} \sqrt{u^2+v^2},$$

$$\int\limits_0^{t_0} dt \int\limits_{r'\leq r\leq \delta} | X u'_x(r') + Y v'_x(r') | \, d\omega < b_1 \delta \sqrt{t_0} \operatorname*{Max}_{0\leq t\leq t_0} \sqrt{X^2+Y^2},$$

$$\int\limits_{t_0-\varepsilon}^{t_0} dt \int\limits_{\omega_{r'}(t)} | X u'_x(r') + Y v'_x(r') | \, d\omega < b_1 L \sqrt{\varepsilon} \operatorname*{Max}_{0\leq t\leq t_0} \sqrt{X^2+Y^2}.$$

On a par conséquent:

$$\lim_{r'=0}\left[\varrho\int\limits_{\omega_{r'}(0)}[u u'_x(r') + v v'_x(r')]_{t=0}\, d\omega + \int\limits_0^{t_0} dt \int\limits_{\omega_{r'}(0)} [X u'_x(r') + Y v'_x(r')] d\omega\right] =$$

$$\varrho\int\limits_{\omega(0)}(u u'_x + v v'_x)_{t=0}\, d\omega + \int\limits_0^{t_0} dt \int\limits_{\omega(t)} (X u'_x + Y v'_x) d\omega.$$

Soit $C'(t)$ une courbe fermée dans l'intérieur du domaine $\omega(t)$. On peut alors trouver un nombre positif b_2 assez grand pour que, x, y étant un point de la courbe $C(t)$ et x_0, y_0 un point intérieur à $C'(t)$:

$$|u'_x(r')|,\ |v'_x(r')| < b_2.$$

Comme d'ailleurs $u'_x(r')$ et $v'_x(r')$ pour $t_0 - t \geqq \varepsilon$, ε positif, aussi petit que l'on veut, tendent uniformément vers u'_x et v'_x, on a dans tout point x_0, y_0, intérieur à $C(t_0)$:

$$\lim_{r'=0}\left[-\varrho\int\limits_0^{t_0} dt \int\limits_{C(t)} [u u'_x(r') + v v'_x(r')] u_n dS - \int\limits_0^{t_0} dt \int\limits_{C(t)}\left[\mu\left(u'_x(r')\frac{du}{dn} + \cdots\right) -\right.\right.$$

$$\left.\left. - [u'_x(r')\cos nx + v'_x(r')\cos ny]p\right] dS\right] = -\varrho\int\limits_0^{t_0} dt \int\limits_{C(t)} (u u'_x + v v'_x) u_n dS -$$

$$-\mu\int\limits_0^{t_0} dt \int\limits_{C(t)}\left(u'_x\frac{du}{dn} + v'_x\frac{dv}{dn} - u\frac{du'_x}{dn} - v\frac{dv'_x}{dn}\right) dS + \int\limits_0^{t_0} dt \int\limits_{C(t)} (u'_x\cos nx + v'_x\cos ny) p\, dS.$$

Enfin, nous avons:

$$p'_x(r') = \frac{\varrho^2(x - x_0) r'^2}{4\mu r^2}\,\frac{F(r', t, t_0)}{(t_0 - t)^2}.$$

Donc:

$$\lim_{r'=0} -\int\limits_0^{t_0} dt \int\limits_{C(t)} (u\cos nx + v\cos ny) p'_x(r') dS =$$

$$\lim_{r'=0} -\frac{\varrho^2}{4\mu}\int\limits_0^{t_0}\frac{r'^2 F(r', t, t_0) dt}{(t_0 - t)^2}\int\limits_{C(t)} (u\cos nx + v\cos ny)\frac{x - x_0}{r^2} dS =$$

$$\lim_{r'=0} -\frac{\varrho^2}{4\mu}\int\limits_{C(t_0)}(u\cos nx + v\cos ny)\frac{x-x_0}{r^2}dS\int\limits_{t_0-\epsilon}^{t_0} r'^2 e^{-\frac{\varrho r'^2}{4\mu(t_0-t)}}\frac{dt}{(t_0-t)^2} =$$

$$-\varrho\int\limits_{C(t_0)}(u\cos nx + v\cos ny)\frac{x-x_0}{r^2}dS.$$

On a donc:

$$2\pi\varrho u(x_0, y_0, t_0) = \varrho\int\limits_{\omega(0)}(uu'_x + vv'_x)d\omega - \varrho\int\limits_0^{t_0}dt\int\limits_{C(t)}(uu'_x + vv'_x)u_n dS +$$

$$+\int\limits_0^{t_0}dt\int\limits_{\omega(t)}(Xu'_x + Yv'_x)d\omega - \int\limits_0^{t_0}dt\int\limits_{C(t)}\Big[\mu\left(u'_x\frac{du}{dn} + v'_x\frac{dv}{dn} - u\frac{du'_x}{dn} - v\frac{dv'_x}{dn}\right) -$$

$$-(u'_x\cos nx + v'_x\cos ny)p\Big]dS - \varrho\int\limits_{C(t_0)}(u\cos nx + v\cos ny)\frac{x-x_0}{r^2}dS$$

et une formule analogue pour $2\pi\varrho v(x_0, y_0, t_0)$.

Afin de trouver la formule correspondante pour $p(x_0, y_0, t_0)$ nous considérons les fonctions:

$$u'(r') = \frac{\varrho r'^2 F(r', t, t_0)}{4\mu(t_0-t)^2}\,\frac{x-x_0}{r^2},\quad v'(r) = \frac{\varrho r'^2 F(r', t, t_0)}{4\mu(t_0-t)^2}\,\frac{y-y_0}{r^2},$$

$$p'(r') = \frac{\partial}{\partial t}\,\frac{\varrho^2 r'^2 F(r', t, t_0)}{4\mu(t_0-t)^2}\cdot\log r,$$

esquelles satisfont au système:

$$-\varrho\frac{\partial u'(r')}{\partial t} = -\frac{\partial p'(r')}{\partial x} + \mu\Delta u'(r'),$$

$$-\varrho\frac{\partial v'(r')}{\partial t} = -\frac{\partial p'(r')}{\partial y} + \mu\Delta v'(r'),$$

$$\frac{\partial u'(r')}{\partial x} + \frac{\partial v'(r')}{\partial y} = 0.$$

Nous avons donc:

$$\varrho\int\limits_{\omega_{r'}(t_0)}(uu'(r') + vv'(r'))_{t=t_0}d\omega = \varrho\int\limits_{\omega_{r'}(0)}(uu'(r') + vv'(r'))_{t=0}d\omega -$$

$$-\varrho\int_0^{t_0}dt\int_{C(t)}(uu'(r')+vv'(r'))u_n dS+\int_0^{t_0}dt\int_{\omega_{r'}(t)}(Xu'(r')+Yv'(r'))d\omega-$$

$$-\int_0^{t_0}dt\int_{C(t)}\Big[\mu\left(u'(r')\frac{du}{dn}+v'(r')\frac{dv}{dn}-u\frac{du'(r')}{dn}-v\frac{dv'(r')}{dn}\right)-$$

$$-(u'(r')\cos nx+v'(r')\cos ny)p+(u\cos nx+v\cos ny)p'(r')\Big]dS-$$

$$-\int_0^{t_0}dt\int_{r=r'}\Big[\mu\left(u'(r)\frac{du}{dn}+\cdots\right)-(u'(r')\cos nx+\cdots)p+(u\cos nx+\cdots)p'(r')\Big]dS.$$

Or on a:

$$\int_{\omega_{r'}(t_0)}(uu'(r'))+vv'(r'))_{t=t_0}d\omega=0,$$

$$\lim_{r'=0}\int_0^{t_0}dt\int_{r=r'}\Big[\mu\left(u'(r')\frac{du}{dn}+\cdots\right)-(u'(r')\cos nx+\cdots)p+(u\cos nx+\cdots)p'(r')\Big]dS=$$

$$-\frac{\pi\varrho}{2\mu}\lim_{r'=0}\int_0^{t_0}r'^2F(r',t,t_0)p(x_0,y_0,t)\frac{dt}{(t_0-t)^2}=-2\pi p(x_0,y_0,t_0),$$

$$\lim_{r'=0}\int_{\omega_{r'}(0)}(uu'(r')+vv'(r'))_{t=0}d\omega=0,$$

$$\lim_{r'=0}-\varrho\int_0^{t_0}dt\int_{C(t)}(uu'(r')+vv'(r'))u_n dS=-\varrho\int_{C(t_0)}\left(u\frac{\partial\log r}{\partial x}+v\frac{\partial\log r}{\partial y}\right)u_n dS,$$

$$\lim_{r'=0}\int_0^{t_0}dt\int_{\omega_{r'}(t)}(Xu'(r')+Yv'(r'))d\omega=\int_{\omega(t_0)}\left(X\frac{\partial\log r}{\partial x}+Y\frac{\partial\log r}{\partial y}\right)d\omega,$$

$$\lim_{r'=0}-\int_0^{t_0}dt\int_{C(t)}\Big[\mu\left(u'(r')\frac{du}{dn}+v'(r')\frac{dv}{dn}-u\frac{du'(r')}{dn}-v\frac{dv'(r')}{dn}\right)-$$

$$-(u'(r')\cos nx+v'(r')\cos ny)p\Big]dS=-\int_{C(t_0)}\Big[\mu\left(\frac{\partial\log r}{\partial x}\frac{du}{dn}+\right.$$

$$\left.+\frac{\partial\log r}{\partial y}\frac{dv}{dn}-u\frac{d}{dn}\frac{\partial\log r}{\partial x}-v\frac{d}{dn}\frac{\partial\log r}{\partial y}\right)-p\frac{d\log r}{dn}\Big]dS,$$

$$\lim_{r'=0} -\int_0^{t_0} dt \int_{C(t)} (u \cos nx + v \cos ny) p'(r') dS = \lim_{r'=0} -\frac{\varrho^2}{4\mu} \int_0^{t_0} r'^2 \frac{\partial}{\partial t} \frac{F(r', t, t_0)}{(t_0 - t)^2} dt \int_{C(t)} (u \cos nx +$$

$$+ v \cos ny) \log r dS = \lim_{r'=0} \left[\frac{\varrho^2 r'^2 F(r', 0, t_0)}{4\mu t_0} \int_{C(0)} (u \cos nx + v \cos ny) \log r dS + \right.$$

$$\left. + \frac{\varrho^2}{4\mu} \int_0^{t_0} r'^2 F(r', t, t_0) \frac{dt}{(t_0 - t)^2} \frac{\partial}{\partial t} \int_{C(t)} (u \cos nx + v \cos ny) \log r dS \right] =$$

$$\varrho \frac{\partial}{\partial t_0} \int_{C(t_0)} (u \cos nx + v \cos ny) dS.$$

Donc:

$$2\pi p(x_0, y_0, t_0) = \int_{\omega(t_0)} \left(X \frac{\partial \log r}{\partial x} + Y \frac{\partial \log r}{\partial y} \right) d\omega - \varrho \int_{C(t_0)} \left(u \frac{\partial \log r}{\partial x} + v \frac{\partial \log r}{\partial y} \right) u_n dS -$$

$$- \int_{C(t_0)} \left[\mu \left(\frac{\partial \log r}{\partial x} \frac{du}{dn} + \frac{\partial \log r}{\partial y} \frac{dv}{dn} - u \frac{d}{dn} \frac{\partial \log r}{\partial x} - v \frac{d}{dn} \frac{\partial \log r}{\partial y} \right) - p \frac{d \log r}{dn} \right] dS +$$

$$+ \varrho \frac{\partial}{\partial t_0} \int_{C(t_0)} (u \cos nx + v \cos ny) \log r dS.$$

Les formules définitives sont par conséquent:

$$u'_\xi = -\frac{\partial^2 P}{\partial \eta^2}, \quad v'_\xi = \frac{\partial^2 P}{\partial \xi \partial \eta},$$

$$u'_\eta = \frac{\partial^2 P}{\partial \xi \partial \eta}, \quad v'_\eta = -\frac{\partial^2 P}{\partial \xi^2},$$

$$P = -\int_r^\infty F(r, \tau, t) \frac{dr}{r} - \log r,$$

$$r = \sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2},$$

$$2\pi\varrho u(x, y, t) = \varrho \int_{\omega(t_0)} (u(\xi, \eta, \tau) u'_\xi + v(\xi, \eta, \tau) v'_\xi)_{\tau = t_0} d\omega -$$

$$- \varrho \int_{t_0}^{t} d\tau \int_{C(\tau)} (u(\xi, \eta, \tau) u'_\xi + v(\xi, \eta, \tau) v'_\xi) dS + \varrho \int_{t_0}^{t} d\tau \int_{\omega(\tau)} (X(\xi, \eta, \tau) u'_\xi + Y(\xi, \eta, \tau) v'_\xi) d\omega -$$

$$-\int_{t_0}^{t} d\tau \int_{C(\tau)} \left[\mu \left(u'_\xi \frac{du}{dn} + v'_\xi \frac{dv}{dn} - u \frac{du'_\xi}{dn} - v \frac{dv'_\xi}{dn} \right) - (u'_\xi \cos nx + v'_\xi \cos ny) p \right] dS -$$

$$- \varrho \int_{C(t)} (u \cos nx + v \cos ny) \frac{\xi - x}{r^2} dS,$$

. . . .

$$2\pi p(x, y, t) = \int_{\omega(t)} \left(X(\xi, \eta, t) \frac{\partial \log r}{\partial \xi} + Y(\xi, \eta, t) \frac{\partial \log r}{\partial \eta} \right) d\omega -$$

$$- \varrho \int_{C(t)} \left(u(\xi, \eta, t) \frac{\partial \log r}{\partial \xi} + v(\xi, \eta, t) \frac{\partial \log r}{\partial \eta} \right) u_n dS -$$

$$- \int_{C(t)} \left[\mu \left(\frac{\partial \log r}{\partial \xi} \frac{du}{dn} + \frac{\partial \log r}{\partial \eta} \frac{dv}{dn} - u \frac{d}{dn} \frac{\partial \log r}{\partial \xi} - v \frac{d}{dn} \frac{\partial \log r}{\partial \eta} \right) - p \frac{d \log r}{dn} \right] dS +$$

$$+ \varrho \frac{\partial}{\partial t} \int_{C(t)} (u \cos nx + v \cos ny) \log r dS.$$

On a ici:

$$\frac{d}{dn} = \cos nx \frac{\partial}{\partial \xi} + \cos ny \frac{\partial}{\partial \eta}.$$

Note.

La formule de Green dans la théorie d'un fluide idéal.

Posons dans les équations du mouvement d'un fluide idéal:

$$p + \frac{\varrho}{2}(u^2 + v^2 + w^2) = q$$

et négligeons les termes $\varrho(w\bar{v} - v\bar{w})$ etc. Nous aurons:

$$\left. \begin{array}{c} \varrho \dfrac{\partial u}{\partial t} = X - \dfrac{\partial q}{\partial x}, \quad \varrho \dfrac{\partial v}{\partial t} = Y - \dfrac{\partial q}{\partial y}, \quad \varrho \dfrac{\partial w}{\partial t} = Z - \dfrac{\partial q}{\partial z} \\ \dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{\partial v}{\partial y} + \dfrac{\partial w}{\partial z} = 0. \end{array} \right\} \qquad (27)$$

Si l'on suppose que les dérivées secondes de u, v, w, q et les dérivées premières de X, Y, Z existent et soient continues on peut déduire de ces formules:

$$\Delta q = \frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z}.$$

En appliquant à cette équation la formule de GREEN, on obtient la valeur de q dans un point quelconque, intérieur à une surface S, exprimée par les valeurs de $\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z}$ dans l'intérieur de S et par les valeurs de q et $\frac{dq}{dn}$ sur la surface S, ou, ce qui revient au même, par les valeurs de X, Y, Z dans l'intérieur de S et par q, $\frac{\partial u}{\partial t}$, $\frac{\partial v}{\partial t}$, $\frac{\partial w}{\partial t}$ sur S. Nous allons voir que l'on peut parvenir à un résultat équivalent sans aucune hypothèse sur les dérivées secondes de u, v, w, q ou sur les dérivées premières de X, Y, Z. Seulement, nous supposerons que X, Y, Z, u, v, w, q et les dérivées de ces fonctions qui figurent dans les équations 27 soient continues.

Posons:

$$G = \frac{r' e^{-\frac{r'}{t_0 - t}}}{(t_0 - t)^2},$$

$$u'(r') = G \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{r}\right), \quad v'(r') = G \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{r}\right), \quad w'(r') = G \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{r}\right), \quad q'(r') = \frac{\varrho}{r} \frac{\partial G}{\partial t},$$

$$r = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2}.$$

Ces fonctions satisfont au système:

$$-\varrho \frac{\partial u'(r')}{\partial t} = -\frac{\partial q'(r')}{\partial x}, \quad -\varrho \frac{\partial v'(r')}{\partial t} = -\frac{\partial q'(r')}{\partial y},$$

$$-\varrho \frac{\partial w'(r')}{\partial t} = -\frac{\partial q'(r)}{\partial z}, \quad \frac{\partial u'(r')}{\partial x} + \frac{\partial v'(r')}{\partial y} + \frac{\partial w'(r')}{\partial z} = 0.$$

Nous avons donc, $\omega(t)$, $\omega_{r'}(t)$, $S(t)$ ayant les mêmes significations que dans le premier chapitre:

$$\varrho \int\limits_{\omega_{r'}(t_0)} [u u'(r') + v v'(r') + w w'(r')]_{t=t_0} d\omega = \varrho \int\limits_{\omega_{r'}(0)} [u u'(r') + \cdots]_{t=0} d\omega -$$

$$- \varrho \int\limits_0^{t_0} dt \int\limits_{S(t)} [u u'(r') + \cdots] u_n dS + \int\limits_0^{t_0} dt \int\limits_{\omega_{r'}(t)} [X u'(r') + Y v'(r') + Z w'(r')] d\omega +$$

$$+ \int\limits_0^{t_0} dt \int\limits_{S(t)} [(u'(r') \cos nx + \cdots) q - (u \cos nx + \cdots) q'(r')] dS +$$

$$+ \int\limits_0^{t_0} dt \int\limits_{r=r'} [(u'(r') \cos nx + \cdots) q - (u \cos nx + \cdots) q'(r')] dS.$$

Or on a:

$$\int\limits_{\omega_{r'}(t_0)}[uu'(r') + vv'(r') + ww'(r')]_{t=t_0} d\omega = 0,$$

$$\lim_{r'=0} \varrho\int\limits_{\omega_{r'}(0)}[uu'(r') + vv'(r') + ww'(r')]_{t=0} d\omega = 0,$$

$$\lim_{r'=0} -\varrho\int\limits_0^{t_0} dt\int\limits_{S(t)}[uu'(r') + \cdots]u_n dS =$$

$$\lim_{r'=0} -\varrho\int\limits_0^{t_0} G\,dt\int\limits_{S(t)}\left[u\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{r}\right) + v\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{r}\right) + w\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{r}\right)\right]u_n dS =$$

$$-\varrho\int\limits_{S(t_0)}\left[u\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{r}\right) + v\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{r}\right) + w\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{r}\right)\right]u_n dS \lim_{r'=0}\int\limits_{t_0-\varepsilon}^{t_0} G\,dt =$$

$$-\varrho\int\limits_{S(t_0)}\left[u\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{r}\right) + v\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{r}\right) + w\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{r}\right)\right]u_n dS,$$

$$\lim_{r'=0}\int\limits_0^{t_0} dt\int\limits_{\omega_{r'}(t)}[Xu'(r') + Yv'(r') + Zw'(r')]d\omega = \int\limits_{\omega(t_0)}\left[X\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{r}\right) + Y\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{r}\right) + Z\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{r}\right)\right]d\omega,$$

$$\lim_{r'=0}\int\limits_0^{t_0} dt\int\limits_{S(t)}[u'(r')\cos nx + \cdots]q\,dS = \int\limits_{S(t_0)} q\frac{d}{dn}\left(\frac{1}{r}\right)dS,$$

$$\lim_{r'=0} -\int\limits_0^{t_0} dt\int\limits_{S(t)}(u\cos nx + \cdots)q'(r')dS =$$

$$\lim_{r'=0} -\varrho\int\limits_0^{t_0}\frac{\partial G}{\partial t}\int\limits_{S(t)}(u\cos nx + v\cos ny + w\cos nz)\frac{dS}{r}\,dt =$$

$$= \varrho\lim_{r'=0}\left[\frac{r' e^{-\frac{r'}{t_0}}}{t_0^2}\int\limits_{S(0)}(u\cos nx + \cdots)\frac{dS}{r} + \int\limits_0^{t_0} G\frac{\partial}{\partial t}\int\limits_{S(t)}(u\cos nx + \cdots)\frac{dS}{r}\right] =$$

$$\varrho\frac{\partial}{\partial t_0}\int\limits_{S(t_0)}(u\cos nx + v\cos ny + w\cos nz)\frac{dS}{r},$$

$$\lim_{r'=0} \int_0^{t_0} dt \int_{r=r'} [u'(r') \cos nx + v'(r') \cos ny + w'(r') \cos nz] q dS = -4\pi q(x_0, y_0, z_0, t_0),$$

$$\lim_{r'=0} -\int_0^{t_0} dt \int_{r=r'} (u \cos nx + \cdots) q'(r') dS = 0.$$

Nous avons donc, en changeant un peu les notations:

$$4\pi q(x, y, z, t) = \int_{\omega(t)} \left[X(\xi, \eta, \zeta, t) \frac{\partial}{\partial \xi}\left(\frac{1}{r}\right) + Y(\xi, \eta, \zeta, t) \frac{\partial}{\partial \eta}\left(\frac{1}{r}\right) + Z(\xi, \eta, \zeta, t) \frac{\partial}{\partial \zeta}\left(\frac{1}{r}\right) \right] d\omega -$$

$$- \varrho \int_{S(t)} \left[u \frac{\partial}{\partial \xi}\left(\frac{1}{r}\right) + v \frac{\partial}{\partial \eta}\left(\frac{1}{r}\right) + w \frac{\partial}{\partial \zeta}\left(\frac{1}{r}\right) \right] u_n dS + \int_{S(t)} q \frac{d}{dn}\left(\frac{1}{r}\right) dS +$$

$$+ \varrho \frac{\partial}{\partial t} \int_{S(t)} (u \cos nx + v \cos ny + w \cos nz) \frac{dS}{r}.$$

On a ici:

$$r = \sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + (z-\zeta)^2},$$

$$\frac{d}{dn} = \cos nx \frac{\partial}{\partial \xi} + \cos ny \frac{\partial}{\partial \eta} + \cos nz \frac{\partial}{\partial \zeta},$$

$$d\omega = d\xi \, d\eta \, d\zeta.$$

n désigne la normale intérieure. Dans les intégrales de surface, ξ, η, ζ sont les coordonnées d'un point de la surface $S(t)$.