ÜBER LINEARE DIFFERENZENGLEICHUNGEN.

VON

OSKAR PERRON

in MÜNCHEN.

§ 1. Eine lineare Differenzengleichung r^{ter} Ordnung hat die Form

$$D_{\nu+r} + a_1^{(\nu)} D_{\nu+r-1} + a_2^{(\nu)} D_{\nu+r-2} + \cdots + a_r^{(\nu)} D_\nu = 0. \tag{1}$$

Man kann dabei die Variable ν als stetig veränderlich denken; doch wollen wir sie in dieser Arbeit auf die ganzzahligen Werte $\nu = 0, 1, 2, \ldots$ beschränken. Es brauchen also auch die Funktionen $a_1^{(\nu)}, \ldots a_r^{(\nu)}$ bloss für diese Argumentwerte von ν definiert zu sein, wobei jedoch die Funktionswerte selbst ganz beliebig, auch komplex, sein dürfen. Nur wollen wir ein für alle Mal gleich hier festsetzen, *dass die letzte dieser Funktionen, also* $a_r^{(\nu)}$, *für alle* ν *von Null verschieden sein soll.*

Eine für $\nu = 0, 1, 2, \ldots$ definierte Funktion D_ν, die der Differenzengleichung genügt, heisst ein Integral derselben. Jedes Integral ist durch seine r Anfangswerte $D_0, D_1, \ldots D_{r-1}$, die selbst keiner Beschränkung unterliegen, offenbar eindeutig bestimmt; aber auch irgend welche späteren r aufeinander folgenden Integralwerte $D_N, D_{N+1}, \ldots D_{N+r-1}$ sind ganz willkürlich und bestimmen eindeutig ein Integral. Die Willkür wäre beschränkt, wenn nicht alle $a_r^{(\nu)} \neq 0$ wären, weshalb wir diese Annahme ausdrücklich gemacht haben. Insbesondere ist ein Integral, das für r aufeinander folgende Werte von ν verschwindet, identisch Null, was aber ebenfalls nicht mehr richtig wäre, wenn wir zuliessen, dass $a_r^{(\nu)}$ für einzelne Werte von ν verschwindet.

Es gibt r linear unabhängige Integrale $D_\nu^{(1)}, D_\nu^{(2)}, \ldots D_\nu^{(r)}$, und das allgemeine Integral hat dann die Form

$$D_\nu = c_1 D_\nu^{(1)} + c_2 D_\nu^{(2)} + \cdots + c_r D_\nu^{(r)},$$

wo $c_1, \ldots c_r$ willkürliche Konstanten, d. h. von ν unabhängig sind.

Das Problem der Integration der Differenzengleichung (1) kann in gewissem Sinn von vorn herein schon als gelöst angesehen werden. Denn wenn die Anfangswerte $D_0, D_1, \ldots D_{r-1}$ irgend wie gegeben sind, so kann man mittels der Differenzengleichung ja die Funktion D_ν rekursorisch für jeden einzelnen Wert von ν berechnen, sodass D_ν für jedes endliche ν als bekannt gelten darf. Man kann sogar sehr leicht D_ν auch in independenter Form darstellen, etwa als Determinante.

Während also für jeden *endlichen* Argumentwert ν die Funktion D_ν bekannt ist, sodass hier eigentlich kein Problem mehr vorliegt, wissen wir dagegen gar nichts darüber, wie sich die Integrale bei unbegrenzt wachsendem ν verhalten. Bleiben sie endlich oder wachsen sie unbegrenzt, und wie stark? Gibt es Partikulärintegrale, die langsamer wachsen als das allgemeine? Nähern sie sich einem Grenzwert? Oder gibt es vielleicht Partikulärintegrale, deren Verhältnis einem Grenzwert zustrebt? Diese und ähnliche Fragen sind hier zu beantworten, und die Antwort wird natürlich von dem Verhalten der Koeffizienten $a_i^{(\nu)}$ abhängen. Man kann daher die allgemeinste in dieser Richtung liegende Aufgabe etwa so formulieren: *Es soll aus dem als bekannt angenommenen Verhalten der Koeffizienten $a_i^{(\nu)}$ für $\lim \nu = \infty$ das Verhalten der Integrale für $\lim \nu = \infty$ ermittelt werden.*

Diese Problemstellung umfasst in ihrer Allgemeinheit die ganze Theorie von der Konvergenz der Kettenbrüche, und auch deren Verallgemeinerung, der Jacobiketten.[1] Andere wichtige Sätze aus diesem Gebiet verdankt man namentlich den Herren Poincaré und Pincherle. Ich habe kürzlich in der genannten Arbeit in den Mathematischen Annalen ebenfalls einige Theoreme dieser Art bewiesen, welche im folgenden auf einfachere Weise gewonnen und zugleich erheblich erweitert werden sollen. Dabei sei bemerkt, dass es sich um solche Sätze handelt, die eine direkte Anwendung auf die Theorie der linearen Differentialgleichungen zulassen, wie in einer anschliessenden Arbeit dargetan werden soll.

Ein erster, sehr einfacher Satz, der im folgenden noch vielfach angewandt wird, lautet:

Satz 1. *Wenn die Koeffizienten $a_1^{(\nu)}, \ldots a_r^{(\nu)}$ unter einer von ν unabhängigen endlichen Schranke bleiben, so gibt es eine Zahl M der Art, dass für jedes Integral*

---

[1] Über diesen Begriff, der übrigens im folgenden nicht weiter benutzt wird, vergleiche man die Arbeit des Verfassers: *Über die Konvergenz der Jacobi-Kettenalgorithmen mit komplexen Elementen,* Sitzungsberichte der math. phys. Klasse der kgl. bayer. Akademie der Wissenschaften, Bd. 37 (1907). Ferner auch: *Über lineare Differenzen- und Differentialgleichungen,* Mathemat. Annalen Bd. 66 (1909).

die Ungleichung $|D_\nu| < CM^\nu$ *gilt, wo* C *nur von den Anfangswerten* $D_0, D_1, \ldots D_{r-1}$ *abhängt.*[1]

Beweis. Durch die Substitution

$$D_\nu = M^\nu \varDelta_\nu$$

geht Gleichung (1) über in

$$\varDelta_{\nu+r} + \frac{a_1^{(\nu)}}{M}\varDelta_{\nu+r-1} + \frac{a_2^{(\nu)}}{M^2}\varDelta_{\nu+r-2} + \cdots + \frac{a_r^{(\nu)}}{M^r}\varDelta_\nu = 0.$$

Nun kann man, da die $a_i^{(\nu)}$ unter einer endlichen Schranke bleiben, die positive Zahl M so gross wählen, dass für alle ν

$$\frac{|a_1^{(\nu)}|}{M} + \frac{|a_2^{(\nu)}|}{M^2} + \cdots + \frac{|a_r^{(\nu)}|}{M^r} < 1$$

wird. Dann ergibt sich aber aus der vorigen Gleichung, dass $|\varDelta_{\nu+r}|$ kleiner wird als die grösste der Zahlen $|\varDelta_\nu|, |\varDelta_{\nu+1}|, \ldots |\varDelta_{\nu+r-1}|$; folglich bleiben auch die $|\varDelta_\nu|$ unter einer von ν unabhängigen (aber von den Anfangswerten $\varDelta_0, \varDelta_1, \ldots \varDelta_{r-1}$ natürlich abhängigen) Schranke C, und folglich $|D_\nu| < M^\nu C$. W. z. b. w.

§ 2. Um die von jetzt ab zu machende Annahme über die Koeffizienten $a_i^{(\nu)}$ bequemer formulieren zu können, führe ich folgendes Symbol ein. Es bedeute $\{\nu^k\}$ jede für $\nu = 0, 1, 2, \ldots$ definierte (nicht notwendig reelle) Funktion, für welche

$$\lim_{\nu=\infty} \frac{|\{\nu^k\}|}{\nu^k} = 1$$

ist. Dabei kann k irgend eine reelle Zahl sein, die mit der Funktion natürlich eindeutig gegeben ist. Entsprechend wird man unter $\{\nu^\infty\}$ eine Funktion verstehen, deren Absolutwert rascher wächst als jede noch so hohe Potenz von ν; unter $\{\nu^{-\infty}\}$ eine Funktion, deren Absolutwert rascher gegen Null konvergiert als jede Potenz von $\frac{1}{\nu}$. Insbesondere wird also jede Funktion, die von einem gewissen ν-Wert ab dauernd gleich Null ist, mit $\{\nu^{-\infty}\}$ zu bezeichnen sein.

Die Koeffizienten unserer Differenzengleichung (1) nehmen wir dann in der Form an:

---

[1] Wie sofort zu sehen, könnte man den Faktor C auch unterdrücken, indem man für M nötigenfalls eine etwas grössere Zahl wählt. Doch würde die Ungleichung dann nicht mehr für alle ν, sondern nur für $\nu > N$ gelten, wobei nun natürlich die Zahl N von $D_0, D_1, \ldots D_{r-1}$ abhängt.

(2) $$a_i^{(\nu)} = a_i \{ \nu^{k_i} \} \quad (i = 1, 2, \dots r),$$

wobei $a_i \neq 0$ angenommen werden darf. Denn sollten für einen bestimmten Index i zufällig alle $a_i^{(\nu)}$ verschwinden, so kann diesem Umstand durch die Wahl $k_i = -\infty$ Rechnung getragen werden.

Der Koeffizient von $D_{\nu+r}$, den wir in Gleichung (1) gleich 1 gesetzt haben, mag der Gleichförmigkeit halber gelegentlich auch mit $a_0^{(\nu)}$ bezeichnet werden; es ist dann $a_0^{(\nu)} = 1 = \{ \nu^0 \}$, sodass wir neben den Exponenten $k_1, k_2, \dots k_r$ noch den weiteren

(3) $$k_0 = 0$$

einführen wollen.

Es bedeute nun e denjenigen Index, für den k_e der grösste der Exponenten $k_0, k_1, \dots k_r$ ist. Sollten mehrere von diesen den Maximalwert haben, so sei e der kleinste Index, für den dies eintritt, sodass also e eindeutig durch die Forderungen bestimmt ist:

(4) $$k_e \begin{cases} > k_i \text{ für } i < e \\ \geqq k_i \text{ für } i > e. \end{cases}$$

Wir versuchen dann der Differenzengleichung (1) die Form zu geben:

(5) $$\begin{aligned} & D_{\nu+r} + \varrho_1^{(\nu+r-e)} D_{\nu+r-1} + \cdots + \varrho_e^{(\nu+r-e)} D_{\nu+r-e} \\ & + b_1^{(\nu)} (D_{\nu+r-1} + \varrho_1^{(\nu+r-e-1)} D_{\nu+r-2} + \cdots + \varrho_e^{(\nu+r-e-1)} D_{\nu+r-e-1}) \\ & + \cdots + b_{r-e}^{(\nu)} (D_{\nu+e} + \varrho_1^{(\nu)} D_{\nu+e-1} + \cdots + \varrho_e^{(\nu)} D_\nu) = 0, \end{aligned}$$

sodass also, wenn man zur Abkürzung

(6) $$D_{\nu+e} + \varrho_1^{(\nu)} D_{\nu+e-1} + \varrho_2^{(\nu)} D_{\nu+e-2} + \cdots + \varrho_e^{(\nu)} D_\nu = E_\nu$$

setzt, für E_ν die Differenzengleichung $(r-e)^{\text{ter}}$ Ordnung

(7) $$E_{\nu+r-e} + b_1^{(\nu)} E_{\nu+r-e-1} + b_2^{(\nu)} E_{\nu+r-e-2} + \cdots + b_{r-e}^{(\nu)} E_\nu = 0$$

ensteht. Diese Transformation lässt sich symbolisch als Zerlegung in Faktoren schreiben, wie sie analog auch bei Differentialgleichungen längst wohlbekannt ist. Führt man nämlich für die linken Seiten der Gleichungen (1), (6), (7) bez. die Symbole $P(D)$, $Q(D)$, $R(E)$ ein, so lässt sich die Übereinstimmung von (1) mit (5) in der einfachen Gestalt ausdrücken:

$$P = RQ.$$

Ist etwa $e = 0$, so ist die Transformation müssig; es ist eben dann der Faktor $Q = 1$, und $P = R$. Das heisst, es ist $b_i^{(\nu)} = a_i^{(\nu)}$, während $\varrho_i^{(\nu)}$ überhaupt keine vorkommen. Übrigens sind in diesem Fall die Voraussetzungen von Satz 1 erfüllt, sodass für jedes Integral $|D_\nu| < CM^\nu$ wird.

Ist $e = r$, so ist die Transformation ebenfalls müssig, weil jetzt der Faktor $R = 1$ und $P = Q$ ist. Das heisst, es ist diesmal $\varrho_i^{(\nu)} = a_i^{(\nu)}$, während $b_i^{(\nu)}$ keine vorkommen, sodass die nachfolgenden Betrachtungen, die sich auf die Berechnung und Abschätzung der $\varrho_i^{(\nu)}$, $b_i^{(\nu)}$ beziehen, wegfallen.

Um nun auch, wenn $0 < e < r$ ist, die Gleichung (1) mit (5) zur Deckung zu bringen, hat man das Gleichungssystem zu erfüllen:

$$(8) \qquad \begin{aligned}
a_1^{(\nu)} &= \varrho_1^{(\nu+r-e)} + b_1^{(\nu)} \\
a_2^{(\nu)} &= \varrho_2^{(\nu+r-e)} + b_1^{(\nu)} \varrho_1^{(\nu+r-e-1)} + b_2^{(\nu)} \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
a_e^{(\nu)} &= \varrho_e^{(\nu+r-e)} + b_1^{(\nu)} \varrho_{e-1}^{(\nu+r-e-1)} + \cdots + b_{r-e}^{(\nu)} \varrho_{2e-r}^{(\nu)} \;{}^{1} \\
a_{e+1}^{(\nu)} &= b_1^{(\nu)} \varrho_e^{(\nu+r-e-1)} + b_2^{(\nu)} \varrho_{e-1}^{(\nu+r-e-2)} + \cdots + b_{r-e}^{(\nu)} \varrho_{2e-r+1}^{(\nu)} \;{}^{1} \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
a_{r-1}^{(\nu)} &= b_{r-e-1}^{(\nu)} \varrho_e^{(\nu+1)} + b_{r-e}^{(\nu)} \varrho_{e-1}^{(\nu)} \\
a_r^{(\nu)} &= b_{r-e}^{(\nu)} \varrho_e^{(\nu)}.
\end{aligned}$$

Sehen wir zu, ob und wie das möglich ist. Versteht man unter ν irgend eine *bestimmte* Zahl, und denkt sich diejenigen $\varrho_i^{(\lambda)}$, deren oberer Index kleiner als $\nu + r - e$ ist, bereits bekannt, und zwar $\varrho_e^{(\lambda)} \neq 0$, so findet man aus den $r - e$ letzten der Gleichungen (8), bei der letzten beginnend, der Reihe nach die Zahlen $b_{r-e}^{(\nu)}, b_{r-e-1}^{(\nu)}, \ldots b_1^{(\nu)}$; sodann aus den e ersten Gleichungen auch $\varrho_1^{(\nu+r-e)}, \varrho_2^{(\nu+r-e)}, \ldots \varrho_e^{(\nu+r-e)}$. Damit sind dann alle Gleichungen (8) für diesen Index ν befriedigt; und wenn dabei $\varrho_e^{(\nu+r-e)} \neq 0$ ausfällt, kann man die Gleichungen jetzt für den nächst höheren Index anwenden, u. s. w. Daraus ergibt sich, dass die Zahlen $\varrho_i^{(0)}, \varrho_i^{(1)}, \ldots \varrho_i^{(r-e-1)}$ ganz willkürlich bleiben, dass dann aber die $b_i^{(\nu)}$ sowie die $\varrho_i^{(\nu+r-e)}$ für $\nu = 0, 1, 2, \ldots$ durch das System (8) vollständig eindeutig festgelegt sind, sofern nur bei der rekursorischen Berechnung kein $\varrho_e^{(\nu)}$ den Wert Null erhält. Dabei sind ausserdem die Zahlen $b_{r-e}^{(\nu)}$ wegen der letzten der Gleichungen (8) alle von Null verschieden.

---

[1] Hierbei ist natürlich $\varrho_0^{(\nu)} = 1$ zu setzen, während diejenigen Terme, bei denen der untere Index von ϱ etwa negativ werden sollte, einfach wegfallen.

Für unsere Zwecke genügt es übrigens, wenn wir die Umsetzung der Gleichung (1) in die Gestalt (5) nicht für $\nu = 0, 1, 2, \ldots$, sondern nur für $\nu \geqq N$ bewerkstelligen, wo N eine irgendwie gewählte Zahl bedeutet; dann bleiben offenbar die Zahlen $\varrho_i^{(N)}, \varrho_i^{(N+1)}, \ldots \varrho_i^{(N+r-e-1)}$ willkürlich, während die $b_i^{(\nu)}$ und $\varrho_i^{(\nu+r-e)}$ für $\nu \geqq N$ eindeutig bestimmt sind.

Machen wir vorläufig die Annahme, dass k_e, und also wegen (4) a fortiori auch die übrigen k_i nicht ∞ sind,[1] so lässt sich zeigen, dass bei geeigneter Wahl der Zahl N und der willkürlichen Elemente für alle $\nu (\geqq N)$ die Ungleichungen gelten:

$$|\varrho_e^{(\nu)}| > \frac{1}{4} |a_e| \nu^{k_e}$$

$$|\varrho_j^{(\nu)}| < K_j \, \nu^{\mathrm{Max}\,(k_0, k_1, \ldots k_j)} \qquad (j = 1, 2, \ldots e-1)$$

wo die K_j gewisse positive Konstanten sind.[2]

Während diese Ungleichungen an Brauchbarkeit nichts verlieren, wenn wir alle Zahlen K_j durch eine einzige, etwa die grösste unter ihnen ersetzen, wird es für den Beweis wesentlich sein, sie in folgender Weise zu fixieren: Wir setzen

$$8 \mathop{\mathrm{Max}}_{i=e+1}^{r} \left| \frac{a_i}{a_e} \right| = G, \tag{9}$$

$$2^{r-e-1} G = H, \tag{10}$$

und definieren dann $K_1, K_2, \ldots K_{e-1}$ rekursorisch durch die Gleichungen

$$\begin{aligned} 2|a_1| + H &= K_1 \\ 2|a_2| + H + HK_1 &= K_2 \\ &\cdots\cdots\cdots \\ 2|a_{e-1}| + H + HK_1 + HK_2 + \cdots + HK_{e-2} &= K_{e-1}. \end{aligned} \tag{11}$$

Um nun zunächst die Zahl N in geeigneter Weise festzulegen, beachte man, dass wegen (2) für genügend grosse ν

$$|a_e^{(\nu)}| > \frac{1}{2} |a_e| (\nu + r - e)^{k_e} \tag{12}$$

---

[1] Die Modifikationen, welche die folgenden Erörterungen im Fall $k_e = \infty$ erleiden, werden am Schluss von § 4 kurz auseinandergesetzt werden.

[2] Mit dem Symbol $\mathrm{Max}\,(k_0, k_1, \ldots k_j)$ oder auch $\mathop{\mathrm{Max}}_{i=0}^{j} k_i$ wird die grösste der Zahlen $k_0, k_1, \ldots k_j$ bezeichnet. Analog mit $\mathrm{Min}\,(k_0, k_1, \ldots, k_j)$ oder auch $\mathop{\mathrm{Min}}_{i=0}^{j} k_i$ die kleinste.

$$|a_i^{(\nu)}| < 2\,|a_i|\,\nu^{\mathrm{Max}\,(k_i,\,k_0)} \qquad (i = 1, 2, \ldots r) \tag{13}$$

wird;[1] in der zweiten Ungleichung darf der Exponent von ν deshalb nicht einfach gleich k_i gewählt werden, weil ja $k_i = -\infty$ sein kann. Da des weiteren nach der Definition des Index e gewiss

$$k_e > \mathrm{Max}\,(k_0, k_1, \ldots k_{e-1})$$

ist, so wird ausserdem für grosse ν

$$\frac{\nu^{\mathrm{Max}\,(k_0,\,k_1,\ldots\,k_{e-1})}}{\nu^{k_e}} < \frac{\frac{1}{4}|a_e|}{\mathrm{Max}\,(1, K_1, K_2, \ldots K_{e-1})} \tag{14}$$

$$\begin{gathered} H(1 + K_1 + K_2 + \cdots + K_{e-1})(\nu + r - e - 1)^{\mathrm{Max}\,(k_0,\,k_1,\ldots\,k_{e-1})} \\ < \frac{1}{4}|a_e|(\nu + r - e)^{k_e}. \end{gathered} \tag{15}$$

Wir wählen jetzt die Zahl N so gross, dass die Ungleichungen (12) bis (15) für $\nu \geqq N$ sämtlich erfüllt sind. Die willkürlichen Zahlen $\varrho_i^{(N)}, \varrho_i^{(N+1)}, \ldots \varrho_i^{(N+r-e-1)}$ dagegen wählen wir derart, dass sie den zu beweisenden Ungleichungen für $\nu = N$, $N + 1, \ldots N + r - e - 1$ von selbst genügen. Dass diese Ungleichungen dann auch für $\nu \geqq N + r - e$ gelten, lässt sich durch vollständige Induktion beweisen. Nehmen wir also an, dass für einen festen Index $\nu (\geqq N)$ die Ungleichungen

$$\begin{aligned} &|\varrho_e^{(\nu+i)}| > \frac{1}{4}|a_e|(\nu + i)^{k_e} && (i = 0, 1, \ldots r - e - 1) \\ &|\varrho_j^{(\nu+i)}| < K_j(\nu + i)^{\mathrm{Max}\,(k_0,\,k_1,\ldots\,k_j)} && \begin{pmatrix} i = 0, 1, \ldots r - e - 1 \\ j = 1, 2, \ldots e - 1 \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{16}$$

bestehen, was ja für $\nu = N$ wegen unserer Wahl der willkürlichen Grössen bereits feststeht. Dann ist bloss noch zu zeigen, dass hieraus auch

$$|\varrho_e^{(\nu+r-e)}| > \frac{1}{4}|a_e|(\nu + r - e)^{k_e}$$

$$|\varrho_j^{(\nu+r-e)}| < K_j(\nu + r - e)^{\mathrm{Max}\,(k_0,\,k_1,\ldots\,k_j)} \qquad (j = 1, 2, \ldots e - 1)$$

gefolgert werden kann.

Nun ergibt sich zunächst aus der letzten der Gleichungen (8):

---

[1] Hierzu bemerke ich, worauf mit Rücksicht auf Späteres zu achten ist, dass Ungleichung (13) für $i = e$ nicht beansprucht wird.

$$b_{r-e}^{(\nu)} = \frac{a_r^{(\nu)}}{\varrho_e^{(\nu)}},$$

und also, wenn man Zähler und Nenner der rechten Seite nach den Formeln (13), (16) abschätzt:

$$\left|b_{r-e}^{(\nu)}\right| < \frac{2\,|a_r|\,\nu^{\mathrm{Max}\,(k_r,\,k_0)}}{\frac{1}{4}|a_e|\,\nu^{k_e}} \leqq 8\left|\frac{a_r}{a_e}\right| \leqq G,$$

wo G wieder die in Gleichung (9) festgesetzte Bedeutung haben soll. Allgemeiner erhält man, wenn man die $(e+i)^{\text{te}}$ der Gleichungen (8) nach $b_i^{(\nu)}$ auflöst:

$$b_i^{(\nu)} = \frac{a_{e+i}^{(\nu)}}{\varrho_e^{(\nu+r-e-i)}} - \sum_{j=1}^{r-e-i} b_{i+j}^{(\nu)} \frac{\varrho_{e-j}^{(\nu+r-e-i-j)}}{\varrho_e^{(\nu+r-e-i)}},$$

wobei indes die Fussnote pag. 113 zu beachten ist. Schätzt man nun die a und ϱ wieder nach den Formeln (113), (16) ab, so kommt:

$$\left|b_i^{(\nu)}\right| < \frac{2\,|a_{e+i}|\,\nu^{\mathrm{Max}\,(k_{e+i},\,k_0)}}{\frac{1}{4}|a_e|(\nu+r-e-i)^{k_e}} + \sum_{j=1}^{r-e-i} \left|b_{i+j}^{(\nu)}\right| \frac{K_{e-j}(\nu+r-e-i-j)^{\mathrm{Max}\,k_0,\,k_1,\ldots\,k_{e-j})}}{\frac{1}{4}|a_e|(\nu+r-e-i)^{k_e}},$$

wobei $K_0 = 1$ zu setzen, und im übrigen die Summe nur soweit auszudehnen ist, als die Indices der K nicht negativ werden. Das Glied vor dem Summenzeichen ist nun wieder $\leqq G$, während die Quotienten unter dem Summenzeichen nach (14) alle keiner als 1 sind. Man erhält daher

$$\left|b_i^{(\nu)}\right| < G + \left|b_{i+1}^{(\nu)}\right| + \left|b_{i+2}^{(\nu)}\right| + \cdots + \left|b_{r-e}^{(\nu)}\right|.$$

Hieraus folgt aber für $i = r-e-1,\ r-e-2, \ldots 2, 1$ sukzessive, da ja bereits $\left|b_{r-e}^{(\nu)}\right| < G$ gezeigt ist:

$$\left|b_{r-e-1}^{(\nu)}\right| < 2\,G,\ \left|b_{r-e-2}^{(\nu)}\right| < 4\,G, \ldots \left|b_1^{(\nu)}\right| < 2^{r-e-1}G.$$

Daher ist a fortiori allgemein (siehe Definitionsgleichung (10)):

(17) $$\left|b_i^{(\nu)}\right| < 2^{r-e-1}G = H \qquad (i = 1, 2, \ldots r-e).$$

Weiter schliesst man nun aus der e^{ten} unter den Gleichungen (8):

$$\left|a_e^{(\nu)}\right| \leqq \left|\varrho_e^{(\nu+r-e)}\right| + \sum_{j=1}^{r-e} \left|b_j^{(\nu)} \varrho_{e-j}^{(\nu+r-e-j)}\right|,$$

also erst recht nach (12), (16), (17):

$$\frac{1}{2}|a_e|(\nu + r - e)^{k_e}$$

$$< |\varrho_e^{(\nu+r-e)}| + H\sum_{j=1}^{r-e} K_{e-j}(\nu + r - e - j)^{\mathrm{Max}\,(k_0, k_1, \dots k_{e-j})}$$

$$\leqq |\varrho_e^{(\nu+r-e)}| + H(K_{e-1} + K_{e-2} + \cdots + K_1 + 1)(\nu + r - e - 1)^{\mathrm{Max}\,(k_0, k_1, \dots k_{e-1})}$$

$$< |\varrho_e^{(\nu+r-e)}| + \frac{1}{4}|a_e|(\nu + r - e)^{k_e} \quad \text{(nach Ungleichung (15))}.$$

Das besagt aber:

(18) $$|\varrho_e^{(\nu+r-e)}| > \frac{1}{4}|a_e|(\nu + r - e)^{k_e}.$$

Endlich folgt noch aus der j^{ten} der Gleichungen (8):

$$|a_j^{(\nu)}| \geqq |\varrho_j^{(\nu+r-e)}| - \sum_{i=1}^{r-e}|b_i^{(\nu)}\varrho_{j-i}^{(\nu+r-e-i)}| \qquad (j = 1, 2, \dots e-1).$$

Daher a fortiori nach (13), (16), (17):

$$|\varrho_j^{(\nu+r-e)}| < 2|a_j|\,\nu^{\mathrm{Max}\,(k_j, k_0)} + H\sum_{i=1}^{r-e} K_{j-i}(\nu + r - e - i)^{\mathrm{Max}\,(k_0, k_1, \dots k_{j-i})}.$$

Der grösste der hier auftretenden Exponenten ist offenbar gleich

$$\mathrm{Max}\,(k_0, k_1, \dots k_j) \geqq 0,$$

sodass erst recht die Ungleichung besteht:

$$|\varrho_j^{(\nu+r-e)}| < [2|a_j| + H(1 + K_1 + K_2 + \cdots + K_{j-1})](\nu + r - e)^{\mathrm{Max}\,(k_0, k_1, \dots k_j)}.$$

Nach der Definition der Zahlen K_j durch die Gleichungen (11) besagt dies aber nichts anderes als

(19) $$|\varrho_j^{(\nu+r-e)}| < K_j(\nu + r - e)^{\mathrm{Max}\,(k_0, k_1, \dots k_j)}.$$

Die Ungleichungen (18) und (19) sind nun aber gerade diejenigen, welche bewiesen werden sollten. Dadurch ist die Allgemeingiltigkeit der Ungleichungen

$$(20)\qquad \begin{aligned} &|\varrho_e^{(\nu)}| > \frac{1}{4}|a_e|\,\nu^{k_e} \\ &|\varrho_j^{(\nu)}| < K_j\,\nu^{\mathrm{Max}\,(k_0, k_1, \ldots k_j} \qquad (j = 1, 2, \ldots e-1) \end{aligned}$$

für $\nu \geqq N$ dargetan, und zugleich hat sich in (17) das weitere wichtige Resultat ergeben, *dass die $b_i^{(\nu)}$ absolut alle unter einer von ν unabhängigen Schranke H bleiben.*

Diese Endresultate gelten nun auch wieder für $e = 0$ und $e = r$, in welchen Fällen ja $b_i^{(\nu)} = a_i^{(\nu)}$ bez. $\varrho_i^{(\nu)} = a_i^{(\nu)}$ ist, sodass für diese Fälle unsere Resultate bereits in den Formeln (2) stecken.

§ 3. Beim Studium gewisser Partikulärintegrale wird uns ein *Reziprozitätsprinzip* von Nutzen sein, das wir zunächst herleiten wollen. Seien $x_0, x_1, x_2, \ldots$ $y_0, y_1, y_2, \ldots$ zwei Serien von unendlich vielen Variabeln, welche durch ein Gleichungssystem der Form

$$y_\nu = c_0^{(\nu)} x_\nu + c_1^{(\nu)} x_{\nu+1} + c_2^{(\nu)} x_{\nu+2} + \cdots \qquad (\nu = 0, 1, 2, \ldots)$$

mit einander verbunden sind. Die Umkehrung dieses Systems suchen wir durch den Ansatz

$$x_\nu = d_0^{(\nu)} y_\nu + d_1^{(\nu)} y_{\nu+1} + d_2^{(\nu)} y_{\nu+2} + \cdots \qquad (\nu = 0, 1, 2, \ldots)$$

zu bewerkstelligen. Um die Koeffizienten $d_i^{(\nu)}$ ohne Rücksicht auf Konvergenz rein formal zu berechnen, kann man auf doppelte Weise verfahren. Einmal setzen wir

$$\begin{aligned} y_\nu &= c_0^{(\nu)} x_\nu + c_1^{(\nu)} x_{\nu+1} + c_2^{(\nu)} x_{\nu+2} + \cdots \\ y_{\nu+1} &= c_0^{(\nu+1)} x_{\nu+1} + c_1^{(\nu+1)} x_{\nu+2} + c_2^{(\nu+1)} x_{\nu+3} + \cdots \\ y_{\nu+2} &= c_0^{(\nu+2)} x_{\nu+2} + c_1^{(\nu+2)} x_{\nu+3} + c_2^{(\nu+2)} x_{\nu+4} + \cdots \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \end{aligned}$$

multiplizieren diese Gleichungen der Reihe nach mit $d_0^{(\nu)}, d_1^{(\nu)}, d_2^{(\nu)}, \ldots$ und addieren sie. Wir bekommen dann, damit sich die rechte Seite identisch auf x_ν reduziert, das Gleichungssystem

$$(\mathrm{A})\qquad \begin{aligned} &c_0^{(\nu)} d_0^{(\nu)} = 1 \\ &c_1^{(\nu)} d_0^{(\nu)} + c_0^{(\nu+1)} d_1^{(\nu)} = 0 \\ &c_2^{(\nu)} d_0^{(\nu)} + c_1^{(\nu+1)} d_1^{(\nu)} + c_0^{(\nu+2)} d_2^{(\nu)} = 0 \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \end{aligned}$$

aus welchem die Unbekannten $d_i^{(\nu)}$ sich eindeutig berechnen lassen, sofern nur $c_0^{(\nu)}$ für alle ν von Null verschieden ist.

Geht man aber umgekehrt von den Gleichungen

$$\begin{aligned}
x_\nu \;\;&= d_0^{(\nu)} y_\nu + d_1^{(\nu)} y_{\nu+1} + d_2^{(\nu)} y_{\nu+2} + \cdots \\
x_{\nu+1} &= d_0^{(\nu+1)} y_{\nu+1} + d_1^{(\nu+1)} y_{\nu+2} + d_2^{(\nu+1)} y_{\nu+3} + \cdots \\
x_{\nu+2} &= d_0^{(\nu+2)} y_{\nu+2} + d_1^{(\nu+2)} y_{\nu+3} + d_2^{(\nu+2)} y_{\nu+4} + \cdots \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots
\end{aligned}$$

aus, multipliziert diese der Reihe nach mit $c_0^{(\nu)}, c_1^{(\nu)}, c_2^{(\nu)}, \ldots$ und addiert sie dann, so erhält man analog:

$$\text{(B)} \qquad \begin{aligned}
&c_0^{(\nu)} d_0^{(\nu)} = 1 \\
&c_1^{(\nu)} d_0^{(\nu+1)} + c_0^{(\nu)} d_1^{(\nu)} = 0 \\
&c_2^{(\nu)} d_0^{(\nu+2)} + c_1^{(\nu)} d_1^{(\nu+1)} + c_0^{(\nu)} d_2^{(\nu)} = 0 \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots
\end{aligned}$$

Dies ist ein zweites Gleichungssystem für die Unbekannten $d_i^{(\nu)}$, und die gesuchte Reziprozität besteht nun darin, *dass die beiden Systeme* (*A*) *und* (*B*), *obwohl sie total von einander verschieden sind, doch die nämlichen Werte für die* $d_i^{(\nu)}$ *liefern müssen.* Man verifiziert dies leicht, indem man etwa die $i + 1$ ersten Gleichungen des Systems (A), welche die $i + 1$ Unbekannten $d_0^{(\nu)}, d_1^{(\nu)}, \ldots d_i^{(\nu)}$ enthalten, nach $d_i^{(\nu)}$ auflöst; es ergibt sich:

$$c_0^{(\nu)} c_0^{(\nu+1)} \ldots c_0^{(\nu+i)} d_i^{(\nu)} =$$

$$= \begin{vmatrix}
c_0^{(\nu)} & 0 & 0 & \ldots & 1 \\
c_1^{(\nu)} & c_0^{(\nu+1)} & 0 & \ldots & 0 \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
c_{i-1}^{(\nu)} & c_{i-2}^{(\nu+1)} & c_{i-3}^{(\nu+2)} & \ldots & 0 \\
c_i^{(\nu)} & c_{i-1}^{(\nu+1)} & c_{i-2}^{(\nu+2)} & \ldots & 0
\end{vmatrix}
= (-1)^i \begin{vmatrix}
c_1^{(\nu)} & c_0^{(\nu+1)} & 0 & \ldots & 0 \\
c_2^{(\nu)} & c_1^{(\nu+1)} & c_0^{(\nu+2)} & \ldots & 0 \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
c_{i-1}^{(\nu)} & c_{i-2}^{(\nu+1)} & c_{i-3}^{(\nu+2)} & \ldots & c_0^{(\nu+i-1)} \\
c_i^{(\nu)} & c_{i-1}^{(\nu+1)} & c_{i-2}^{(\nu+2)} & \ldots & c_1^{(\nu+i-1)}
\end{vmatrix}.$$

Um ebenso das System (B) aufzulösen, müssen wir es zuerst dadurch umformen, dass wir an Stelle von ν in der ersten Gleichung $\nu + i$ setzen, in der zweiten $\nu + i - 1$, in der dritten $\nu + i - 2$, etc. Die $i + 1$ ersten Gleichungen enthalten dann die $i + 1$ Unbekannten $d_0^{(\nu+i)}, d_1^{(\nu+i-1)}, \ldots d_i^{(\nu)}$, und die Auflösung nach $d_i^{(\nu)}$ ergibt:

$$c_0^{(\nu)} c_0^{(\nu+1)} \dots c_0^{(\nu+i)} d_i^{(\nu)} =$$

$$= \begin{vmatrix} c_0^{(\nu+i)} & 0 & 0 & \dots & 1 \\ c_1^{(\nu+i-1)} & c_0^{(\nu+i-1)} & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{i-1}^{(\nu+1)} & c_{i-2}^{(\nu+1)} & c_{i-3}^{(\nu+1)} & \dots & 0 \\ c_i^{(\nu)} & c_{i-1}^{(\nu)} & c_{i-2}^{(\nu)} & \dots & 0 \end{vmatrix} = (-1)^i \begin{vmatrix} c_1^{(\nu+i-1)} & c_0^{(\nu+i-1)} & 0 & \dots & 0 \\ c_2^{(\nu+i-1)} & c_1^{(\nu+i-2)} & c_0^{(\nu+i-2)} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{i-1}^{(\nu+1)} & c_{i-2}^{(\nu+1)} & c_{i-3}^{(\nu+1)} & \dots & c_0^{(\nu+1)} \\ c_i^{(\nu)} & c_{i-1}^{(\nu)} & c_{i-2}^{(\nu)} & \dots & c_1^{(\nu)} \end{vmatrix}.$$

Beide Resultate sind aber in der Tat identisch, da die zwei Determinanten durch Drehung um die Nebendiagonale in einander übergehen.[1]

Um jetzt zu unserer eigentlichen Aufgabe überzugehen, sei E_ν irgend ein Integral der Differenzengleichung (7). Da die Koeffizienten $b_i^{(\nu)}$ absolut unter einer endlichen Schranke H bleiben, so ist nach Satz 1:

$$|E_\nu| < C M^\nu. \tag{21}$$

Jede Funktion D_ν, die der nicht homogenen Differenzengleichung

$$D_{\nu+e} + \varrho_1^{(\nu)} D_{\nu+e-1} + \dots + \varrho_e^{(\nu)} D_\nu = E_\nu \tag{22}$$

genügt, ist offenbar ein Integral von (1). Wir wollen versuchen, ein solches Integral in Form einer unendlichen Reihe

$$D_\nu = p_0^{(\nu)} E_\nu + p_1^{(\nu)} E_{\nu+1} + p_2^{(\nu)} E_{\nu+2} + \dots \tag{23}$$

darzustellen. Da aber die $b_i^{(\nu)}$, $\varrho_i^{(\nu)}$, also auch E_ν nur für $\nu \geqq N$ eingeführt sind, so ist eine solche Darstellung natürlich auch auf die Indices $\nu \geqq N$ beschränkt. Allein die N fehlenden Werte $D_{N-1}, D_{N-2}, \dots D_0$ ergeben sich dann sofort aus (1), da ja alle $a_r^{(\nu)} \neq 0$ sind. Die Koeffizienten $p_i^{(\nu)}$ in (23) müssen wir nun derart bestimmen, dass Gleichung (22) identisch erfüllt wird. Bedeutet also ν irgend einen Index $\geqq N$, so werden wir den Ansatz machen:

$$\begin{aligned} D_\nu &= p_0^{(\nu)} E_\nu + p_1^{(\nu)} E_{\nu+1} + p_2^{(\nu)} E_{\nu+2} + \dots \\ D_{\nu+1} &= p_0^{(\nu+1)} E_{\nu+1} + p_1^{(\nu+1)} E_{\nu+2} + p_2^{(\nu+1)} E_{\nu+3} + \dots \\ &\dots\dots\dots\dots \\ D_{\nu+e} &= p_0^{(\nu+e)} E_{\nu+e} + p_1^{(\nu+e)} E_{\nu+e+1} + p_2^{(\nu+e)} E_{\nu+e+2} + \dots, \end{aligned}$$

[1] Für $i = 0$ versagen diese Determinanten. Aber dieser Fall ist trivial, da ja ohne weiteres aus der ersten Gleichung von (A) sowohl als von (B) übereinstimmend folgt: $d_0^{(\nu)} = \frac{1}{c_0^{(\nu)}}$.

sodann diese Gleichungen der Reihe nach mit $\varrho_e^{(\nu)}, \varrho_{e-1}^{(\nu)}, \dots \varrho_1^{(\nu)}, 1$ multiplizieren und sie addieren. Die rechte Seite muss sich dann, damit Gleichung (22) besteht, auf E_ν reduzieren, und dies wird sicher dann der Fall sein, wenn die $p_i^{(\nu)}$ gewissen leicht angebbaren Rekursionsformeln genügen, aus denen sie eindeutig berechnet werden können.

Wenn nun die aus den gedachten Rekursionsformeln berechneten Zahlen $p_i^{(\nu)}$ derart sind, dass die Reihe (23) für alle $\nu (\geqq N)$ konvergiert, so wird die durch diese Reihe definierte Funktion D_ν identisch die Gleichung (22) befriedigen und folglich ein Integral der Differenzengleichung (1) sein. Die gedachten Rekursionsformeln gestatten indes keine brauchbare Abschätzung der Zahlen $p_i^{(\nu)}$, um die Konvergenz der Reihe (23) erkennen zu lassen. Nun besagt aber das oben bewiesene *Reziprozitätsprinzip*, dass man genau die gleichen $p_i^{(\nu)}$ noch auf eine zweite Art berechnen kann, nämlich, indem man umgekehrt die mit (22) gleichbedeutenden Gleichungen

$$\begin{aligned}
E_\nu &= \varrho_e^{(\nu)} D_\nu + \varrho_{e-1}^{(\nu)} D_{\nu+1} + \cdots + \varrho_1^{(\nu)} D_{\nu+e-1} + D_{\nu+e} \\
E_{\nu+1} &= \varrho_e^{(\nu+1)} D_{\nu+1} + \varrho_{e-1}^{(\nu+1)} D_{\nu+2} + \cdots + \varrho_1^{(\nu+1)} D_{\nu+e} + D_{\nu+e+1} \\
E_{\nu+2} &= \varrho_e^{(\nu+2)} D_{\nu+2} + \varrho_{e-1}^{(\nu+2)} D_{\nu+3} + \cdots + \varrho_1^{(\nu+2)} D_{\nu+e+1} + D_{\nu+e+2} \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots
\end{aligned}$$

der Reihe nach mit $p_0^{(\nu)}, p_1^{(\nu)}, p_2^{(\nu)}, \dots$ multipliziert und sie dann addiert, wobei die rechte Seite sich identisch auf D_ν reduzieren muss. Es ergibt sich so das System von Gleichungen:

$$\begin{aligned}
&\varrho_e^{(\nu)} p_0^{(\nu)} = 1 \\
&\varrho_{e-1}^{(\nu)} p_0^{(\nu)} + \varrho_e^{(\nu+1)} p_1^{(\nu)} = 0 \\
&\cdots\cdots\cdots \\
&p_0^{(\nu)} + \varrho_1^{(\nu+1)} p_1^{(\nu)} + \varrho_2^{(\nu+2)} p_2^{(\nu)} + \cdots + \varrho_e^{(\nu+e)} p_e^{(\nu)} = 0 \qquad (24) \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
&p_{\lambda-e}^{(\nu)} + \varrho_1^{(\nu+\lambda-e+1)} p_{\lambda-e+1}^{(\nu)} + \varrho_2^{(\nu+\lambda-e+2)} p_{\lambda-e+2}^{(\nu)} + \cdots + \varrho_e^{(\nu+\lambda)} p_\lambda^{(\nu)} = 0 \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots
\end{aligned}$$

Hieraus ergibt sich sukzessive $p_0^{(\nu)}, p_1^{(\nu)}, p_2^{(\nu)}, \dots$. Die erste dieser Gleichungen besagt speziell:

$$p_0^{(\nu)} = \frac{1}{\varrho_e^{(\nu)}}.$$

Da wir aber $\nu \geqq N$ angenommen haben, so ergibt sich aus (20):

$$|p_0^{(\nu)}| < \frac{4}{|a_e|}\nu^{-k_e}. \tag{25}$$

Von der zweiten ab können wir die Gleichungen (24) in der gemeinsamen Form schreiben:

$$p_{\lambda-e}^{(\nu)} + \varrho_1^{(\nu+\lambda-e+1)} p_{\lambda-e+1}^{(\nu)} + \varrho_2^{(\nu+\lambda-e+2)} p_{\lambda-e+2}^{(\nu)} + \cdots + \varrho_e^{(\nu+\lambda)} p_\lambda^{(\nu)} = 0,$$

sofern wir darin $\lambda = 1, 2, 3, \ldots$ setzen und übereinkommen, dass die $p^{(\lambda)}$ mit negativem unterem Index gleich Null sein sollen. Dividiert man durch $\varrho_e^{(\nu+\lambda)}$, so kommt:

$$-p_\lambda^{(\nu)} = \sum_{j=0}^{e-1} \frac{\varrho_j^{(\nu+\lambda-e+j)}}{\varrho_e^{(\nu+\lambda)}} p_{\lambda-e+j}^{(\nu)} \qquad (\text{wobei } \varrho_0^{(\nu+\lambda-e)} = 1),$$

und hieraus, indem man die ϱ mittels der Ungleichungen (20) abschätzt:

$$\begin{aligned} |p_\lambda^{(\nu)}| &< \sum_{j=0}^{e-1} \frac{K_j(\nu+\lambda-e+j)^{\mathrm{Max}\,(k_0, k_1, \ldots k_j)}}{\frac{1}{4}|a_e|(\nu+\lambda)^{k_e}} |p_{\lambda-e+j}^{(\nu)}| \\ &< \sum_{j=0}^{e-1} \frac{4K_j}{|a_e|}(\nu+\lambda)^{\mathrm{Max}\,(k_0, k_1, \ldots k_j) - k_e} |p_{\lambda-e+j}^{(\nu)}|, \end{aligned} \tag{26}$$

wobei wieder $K_0 = 1$ zu denken ist. Bedeutet nun L eine Zahl, die so gross ist, dass

$$\sum_{j=0}^{e-1} \frac{4K_j}{|a_e|} L^{j-e} < 1 \tag{27}$$

wird, und setzt man

$$\underset{j=0}{\overset{e-1}{\mathrm{Min}}} \frac{k_e - k_j}{e-j} = s, \tag{28}$$

sodass s wegen der Ungleichungen (4) eine *positive* Zahl ist, so behaupte ich, es ist

$$|p_\lambda^{(\nu)}| < \frac{4}{|a_e|}\nu^{-k_e} L^\lambda (\lambda!)^{-s}.$$

In der Tat gilt diese Ungleichung nach (25) jedenfalls für $\lambda = 0$. Ihre Allgemeingiltigkeit ergibt sich dann durch vollständige Induktion; denn wenn wir sie für kleinere Werte von λ als richtig annehmen, so folgt aus (26):

$$|p_\lambda^{(\nu)}| < \sum_{j=0}^{e-1} \frac{4K_j}{|a_e|} (\nu + \lambda)^{\mathrm{Max}\,(k_0, k_1, \ldots k_j) - k_e} \frac{4}{|a_e|} \nu^{-k_e} L^{\lambda - e + j} [(\lambda - e + j)!]^{-s}$$

$$= \frac{4}{|a_e|} \nu^{-k_e} L^\lambda (\lambda!)^{-s} \sum_{j=0}^{e-1} \frac{4K_j}{|a_e|} (\nu + \lambda)^{\mathrm{Max}\,(k_0, k_1, \ldots k_j) - k_e} L^{j-e} [\lambda(\lambda - 1) \ldots (\lambda - e + j + 1)]^s$$

$$< \frac{4}{|a_e|} \nu^{-k_e} L^\lambda (\lambda!)^{-s} \sum_{j=0}^{e-1} \frac{4K_j}{|a_e|} L^{j-e} (\nu + \lambda)^{\mathrm{Max}\,(k_0, k_1, \ldots k_j) - k_e + (e-j)s}.$$

Wenn wir nun zeigen können, dass in jedem Term dieser letzten Summe der Exponent von $\nu + \lambda$ negativ oder höchstens gleich Null ist, so folgt wegen (27) in der Tat:

$$(29) \qquad |p_\lambda^{(\nu)}| < \frac{4}{|a_e|} \nu^{-k_e} L^\lambda (\lambda!)^{-s},$$

womit die Allgemeingiltigkeit dieser Ungleichung bewiesen wäre. Es bleibt also nur noch zu zeigen, dass

$$\mathrm{Max}\,(k_0, k_1, \ldots k_j) - k_e + (e - j)s \leqq 0 \qquad (j = 0, 1, \ldots e - 1)$$

ist. Nun besagt aber die Definitionsgleichung (28), dass s die grösste Zahl ist, welche den e Ungleichungen genügt:

$$s \leqq \frac{k_e - k_j}{e - j} \qquad (j = 0, 1, \ldots e - 1),$$

oder auch

$$(e - j)s \leqq k_e - k_j \qquad (j = 0, 1, \ldots e - 1).$$

Setzt man $j - i$ an Stelle von j, so kommt

$$(e - j + i)s \leqq k_e - k_{j-i} \qquad \begin{pmatrix} i = 0, 1, \ldots j \\ j = 0, 1, \ldots e - 1 \end{pmatrix},$$

also a fortiori

$$(e - j)s \leqq k_e - k_{j-i}.$$

Da dies für $i = 0, 1, \ldots j$ gilt, so ergibt sich auch

$$\begin{aligned}(e - j)s &\leqq \mathop{\mathrm{Min}}_{i=0}^{j} (k_e - k_{j-i}) \\ &= k_e - \mathrm{Max}\,(k_0, k_1, \ldots k_j).\end{aligned}$$

Es ist also in der Tat, wie behauptet:

$$\text{(30)} \qquad \operatorname{Max}(k_0, k_1, \dots k_j) - k_e + (e - j)s \leqq 0 \qquad (j = 0, 1, \dots e - 1),$$

womit dann auch der Beweis von (29) beendet ist. Zugleich zeigt unsere Analyse, dass s die grösste Zahl ist, welche den e Ungleichungen (30) gleichzeitig Genüge leistet.

Aus (21) und (29) folgt nun sofort die absolute Konvergenz der Reihe

$$\text{(23)} \qquad D_\nu = p_0^{(\nu)} E_\nu + p_1^{(\nu)} E_{\nu+1} + p_2^{(\nu)} E_{\nu+2} + \cdots \qquad (\nu \geqq N),$$

die folglich ein Integral von (1) darstellt. Zugleich erhält man auch die Abschätzungsformel:

$$|D_\nu| \leqq \sum_{\lambda=0}^{\infty} |p_\lambda^{(\nu)} E_{\nu+\lambda}| < \sum_{\lambda=0}^{\infty} \frac{4}{|a_e|} \nu^{-k_e} L^\lambda (\lambda!)^{-s} C M^{\nu+\lambda}$$

$$< \frac{4C}{|a_e|} M^\nu \sum_{\lambda=0}^{\infty} \frac{(LM)^\lambda}{(\lambda!)^s}.$$

Diese letzte Summe ist aber eine von ν unabhängige Konstante, sodass wir schliesslich erhalten:

$$|D_\nu| < G M^\nu,$$

wo auch G von ν nicht abhängt (wohl aber, ebenso wie C, von den Anfangswerten $E_N, E_{N+1}, \dots E_{N+r-e-1}$).

In (23) bedeutete nun E_ν ein beliebiges Integral der Differenzengleichung (7). Da diese von der $(r-e)^{\text{ten}}$ Ordnung ist, so hat sie $r-e$ unabhängige Integrale

$$E_\nu^{(1)}, E_\nu^{(2)}, \dots E_\nu^{(r-e)},$$

aus denen sich das allgemeine durch lineare Kombination ergibt. Diesen $r-e$ Integralen entsprechend erhalten wir daher auch $r-e$ Integrale von (1), welche sich für $\nu \geqq N$ in der Form darstellen lassen:

$$D_\nu^{(i)} = p_0^{(\nu)} E_\nu^{(i)} + p_1^{(\nu)} E_{\nu+1}^{(i)} + p_2^{(\nu)} E_{\nu+2}^{(i)} + \cdots \qquad (i = 1, 2, \dots r - e),$$

und welche ebenfalls linear unabhängig sind. Denn hätte man identisch für alle ν:

$$\sum_{i=1}^{r-e} c_i D_\nu^{(i)} = 0,$$

so würde hieraus folgen:

$$0 = \sum_{i=1}^{r-e} c_i D_{\nu+e}^{(i)} + \varrho_1^{(\nu)} \sum_{i=1}^{r-e} c_i D_{\nu+e-1}^{(i)} + \cdots + \varrho_e^{(\nu)} \sum_{i=1}^{r-e} c_i D_\nu^{(i)}$$

$$= \sum_{i=1}^{r-e} c_i (D_{\nu+e}^{(i)} + \varrho_1^{(\nu)} D_{\nu+e-1}^{(i)} + \cdots + \varrho_e^{(\nu)} D_\nu^{(i)}) = \sum_{i=1}^{r-e} c_i E_\nu^{(i)},$$

was aber mit der Unabhängigkeit der $E_\nu^{(i)}$ im Widerspruch steht. *Somit ist die Existenz von $r-e$ unabhängigen Partikulärintegralen der Differenzengleichung* (1) *nachgewiesen, für welche die Ungleichung gilt*

$$(31) \qquad |D_\nu^{(i)}| < M^\nu \qquad (i = 1, 2, \ldots r-e),$$

da man rechter Hand den Faktor G ja offenbar unterdrücken kann, wenn man nur die willkürlichen von ν freien Faktoren, die doch in $E_\nu^{(1)}, E_\nu^{(2)}, \ldots E_\nu^{(r-e)}$ stecken, geeignet normiert. Für jedes aus den genannten Partikulärintegralen linear zusammengesetzte Integral ist dann natürlich $|D_\nu| < CM^\nu$, wo C noch von den Anfangswerten $D_0, D_1, \ldots D_{r-1}$ abhängt.

Ist $e = 0$, so bleibt dies Resultat bestehen, da wir ja schon früher in Satz 1 sahen, dass dann für alle Integrale die Ungleichung $|D_\nu| < CM^\nu$ gilt. Für $e > 0$ aber fanden wir bis jetzt bloss $r-e$ linear unabhängige Integrale, die einer solchen Ungleichung genügen, und wir werden im nächsten Paragraphen sehen, dass es auch mehr nicht gibt. Speziell für $e = r$ ist natürlich die bisherige Untersuchung überhaupt noch resultatlos.

§ 4. Weitere Integrale von (1) ergeben sich aus der Bemerkung, dass die sämtlichen Integrale der Differenzengleichung

$$(32) \qquad D_{\nu+e} + \varrho_1^{(\nu)} D_{\nu+e-1} + \varrho_2^{(\nu)} D_{\nu+e-2} + \cdots + \varrho_e^{(\nu)} D_\nu = 0$$

a fortiori auch Integrale von (5) und folglich von (1) sind. Da die Differenzengleichung (32) von der e^{ten} Ordnung ist, so wird sie e linear unabhängige Integrale haben, die wir mit

$$(33) \qquad D_\nu^{(r-e+1)}, D_\nu^{(r-e+2)}, \ldots D_\nu^{(r)}$$

bezeichnen wollen. Es ist nun leicht zu sehen, dass diese e Integrale mit den $r-e$ vorhin gefundenen $D_\nu^{(1)}, D_\nu^{(2)}, \ldots D_\nu^{(r-e)}$ zusammen ein Fundamentalsystem von Integralen der Differenzengleichung (1) bilden. Wäre nämlich identisch für alle ν:

(34) $$\sum_{i=1}^{r} c_i D_\nu^{(i)} = 0,$$

so würde hieraus folgen:

$$0 = \sum_{i=1}^{r} c_i D_{\nu+e}^{(i)} + \varrho_1^{(\nu)} \sum_{i=1}^{r} c_i D_{\nu+e-1}^{(i)} + \cdots + \varrho_e^{(\nu)} \sum_{i=1}^{r} c_i D_\nu^{(i)}$$
$$= \sum_{i=1}^{r} c_i (D_{\nu+e}^{(i)} + \varrho_1^{(\nu)} D_{\nu+e-1}^{(i)} + \cdots + \varrho_e^{(\nu)} D_\nu^{(i)}).$$

Von dieser Summe verschwinden aber die e letzten Terme, weil die betreffenden $D_\nu^{(i)}$ Integrale von (32) sind. Die $r-e$ ersten Terme dagegen haben die allgemeine Form $c_i E_\nu^{(i)}$; also folgt

$$\sum_{i=1}^{r-e} c_i E_\nu^{(i)} = 0.$$

Eine solche Identität ist aber wieder nur möglich, wenn

$$c_1 = c_2 = \cdots = c_{r-e} = 0$$

ist. Die Gleichung (34) reduziert sich daher auf

$$\sum_{i=r-e+1}^{r} c_i D_\nu^{(i)} = 0,$$

woraus wegen der linearen Unabhängigkeit der Integrale (33) auch noch

$$c_{r-e+1} = c_{r-e+2} = \cdots = c_r = 0$$

folgt. Eine Identität der Form (34) kann also nur dann für alle ν bestehen, wenn sämtliche Koeffizienten c_i verschwinden. Das besagt aber, dass die r Integrale $D_\nu^{(1)}, D_\nu^{(2)}, \ldots D_\nu^{(r)}$ linear unabhängig sind. W. z. b. w.

Untersuchen wir nun, wie sich die e letzten Integrale, und überhaupt jedes Integral von (32) im Unendlichen verhalten. Sei D_ν irgend ein Integral von (32), und es bedeute μ einen im folgenden unverändert festzuhaltenden Index ($\geqq N$), für den $D_\mu \neq 0$ ist.[1] Es besteht dann das Gleichungssystem:

[1] Unter je e aufeinander folgenden Indices muss sich notwendig ein solcher finden, weil sonst wegen (32) D_ν für alle ν verschwinden würde. Man kann also μ etwa aus der Reihe der Zahlen $N, N+1, \ldots N+e-1$ wählen.

$$D_{\mu+e} + \varrho_1^{(\mu)} D_{\mu+e-1} + \cdots + \varrho_e^{(\mu)} D_\mu = 0$$
$$D_{\mu+e+1} + \varrho_1^{(\mu+1)} D_{\mu+e} + \cdots + \varrho_e^{(\mu+1)} D_{\mu+1} = 0$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$D_{\mu+\nu+e} + \varrho_1^{(\mu+\nu)} D_{\mu+\nu+e-1} + \cdots + \varrho_e^{(\mu+\nu)} D_{\mu+\nu} = 0 .$$

Wir multiplizieren diese Gleichungen der Reihe nach mit den Zahlen $p_0^{(\mu)}, p_1^{(\mu)}, \ldots p_\nu^{(\mu)}$, und addieren sie. Dann fallen auf der linken Seite, weil die Multiplikatoren den Rekursionsformeln (24) genügen (für $\nu = \mu$), die Grössen $D_{\mu+1}, D_{\mu+2}, \ldots D_{\mu+\nu}$ heraus, während D_μ den Koeffizienten 1 erhält. Es kommt also, wenn man D_μ auf die andre Seite bringt:

$$\begin{aligned} p_\nu^{(\mu)} D_{\mu+\nu+e} + (p_{\nu-1}^{(\mu)} + \varrho_1^{(\mu+\nu)} p_\nu^{(\mu)}) D_{\mu+\nu+e-1} + \cdots \\ + (p_{\nu-e+1}^{(\mu)} + \varrho_1^{(\mu+\nu-e+2)} p_{\nu-e+2}^{(\mu)} + \cdots + \varrho_{e-1}^{(\mu+\nu)} p_\nu^{(\mu)}) D_{\mu+\nu+1} = -D_\mu , \end{aligned}$$

oder kürzer

$$\sum_{i=1}^{e} \omega_i D_{\mu+\nu+i} = -D_\mu , \tag{35}$$

wo zur Abkürzung

$$\omega_i = \sum_{j=0}^{e-i} \varrho_j^{(\mu+\nu-e+i+j)} p_{\nu-e+i+j}^{(\mu)}$$

gesetzt ist. Für diesen letzten Ausdruck erhält man aber nach (20) und (29) die Abschätzung

$$\begin{aligned} |\omega_i| &< \sum_{j=0}^{e-i} K_j (\mu + \nu - e + i + j)^{\operatorname{Max}(k_0, k_1, \ldots k_j)} \frac{4}{|a_e|} \mu^{-k_e} L^{\nu-e+i+j} [(\nu - e + i + j)!]^{-s} \\ &< \sum_{j=0}^{e-i} K_j (\mu + \nu)^{k_e} \frac{4}{|a_e|} L^{\nu-e+i+j} [(\nu - e)!]^{-s} \\ &= (\mu + \nu)^{k_e} L^{\nu+i} [(\nu - e)!]^{-s} \sum_{j=0}^{e-i} \frac{4 K_j}{|a_e|} L^{j-e} . \end{aligned}$$

Für hinreichend grosse Werte von ν ist daher auch, da μ unverändert festbleibt:

$$|\omega_i| < \frac{(2L)^{\mu+\nu+e}}{[(\mu + \nu + e)!]^s} .$$

Aus (35) ergibt sich dann

$$\sum_{i=1}^{e} \frac{(2L)^{\mu+\nu+e}}{[(\mu+\nu+e)!]^s} |D_{\mu+\nu+i}| > |D_\mu|.$$

Somit ist mindestens einer der links stehenden Summanden grösser als $\frac{1}{e}|D_\mu|$; also jedenfalls

$$\operatorname*{Max}_{i=1}^{e} |D_{\mu+\nu+i}| > \frac{1}{e}|D_\mu| \frac{[(\mu+\nu+e)!]^s}{(2L)^{\mu+\nu+e}}$$
$$> \frac{[(\mu+\nu+e)!]^s}{(3L)^{\mu+\nu+e}},$$

wenn nur ν hinreichend gross.

Dies besagt aber, dass es unbegrenzt viele Werte von ν gibt (nämlich für genügend grosse ν unter je e aufeinanderfolgenden mindestens einen), für welche

$$(36) \qquad |D_\nu| > m_\nu (\nu!)^s$$

wird, wo m von ν und den Anfangswerten $D_0, D_1, \ldots D_{e-1}$ unabhängig ist.[1]

Dies gilt für jedes Integral von (32), also insbesondere auch von den Integralen (33). Es wird des weitern aber noch für jedes Integral von (1) gelten, welches nicht der partikulären Schar

$$c_1 D_\nu^{(1)} + c_2 D_\nu^{(2)} + \cdots + c_{r-e} D_\nu^{(r-e)}$$

angehört. Denn ein solches Integral hat notwendig die Form

$$2D_\nu + c_1 D_\nu^{(1)} + c_2 D_\nu^{(2)} + \cdots + c_{r-e} D_\nu^{(r-e)},$$

wo $2D_\nu$, also auch D_ν selbst ein nicht identisch verschwindendes Integral von (32) bedeutet. Nach (36) und (31) ist aber dann für unbegrenzt viele Werte von ν:

$$|2D_\nu + c_1 D_\nu^{(1)} + c_2 D_\nu^{(2)} + \cdots + c_{r-e} D_\nu^{(r-e)}|$$
$$> 2m^\nu (\nu!)^s - (|c_1| + |c_2| + \cdots + |c_{r-e}|) M^\nu > m^\nu (\nu!)^s.$$

W. z. b. w.

---

[1] Von den Anfangswerten abhängig dagegen ist der kleinste ν-Wert, für welchen die Ungleichung (36) besteht. Will man ihn davon unabhängig haben, so ist auf der rechten Seite von (36) noch ein konstanter Faktor C beizusetzen, der dann seinerseits von den Anfangswerten abhängen wird, oder aber man lässt m von diesen abhängen. Übrigens wird die Abhängigkeit oder Unabhängigkeit (auch der Zahlen M, L etc.) von den Anfangswerten, da sie nirgends eine Rolle spielt, im folgenden nicht mehr weiter registriert.

Dies besagt zugleich, dass es ausser den Integralen der obigen partikulären Schar keines mehr gibt, das für alle ν (oder auch nur für alle hinreichend grossen ν) der Ungleichung $|D_\nu| < M^\nu$ Genüge leistet.

Zusammenfassend gewinnen wir den folgenden

Fundamentalsatz: *Wenn die Koeffizienten der linearen Differenzengleichung r^{ter} Ordnung*

$$D_{\nu+r} + a_1^{(\nu)} D_{\nu+r-1} + a_2^{(\nu)} D_{\nu+r-2} + \cdots + a_r^{(\nu)} D_\nu = 0$$

die Form haben:

$$a_i^{(\nu)} = a_i \{\nu^{k_i}\} \qquad a_i \neq 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots r),$$
$$a_r^{(\nu)} \neq 0 \qquad (\nu = 0, 1, 2, \ldots);$$

wenn ferner e denjenigen der Indices $0, 1, \ldots r$ bedeutet, welcher durch die Ungleichungen

$$k_e \begin{cases} > k_i \text{ für } i < e \\ \geqq k_i \text{ für } i > e, \end{cases}$$

wobei $k_0 = 0$ sein soll, eindeutig bestimmt wird; wenn endlich $k_e < \infty$ ist:

dann hat die Differenzengleichung genau $r - e$ linear unabhängige Integrale, für welche

$$|D_\nu| < M^\nu \qquad (\nu = 1, 2, 3, \ldots)$$

ist, während dagegen jedes andre Integral für unbegrenzt viele Werte von ν der mit der vorigen unverträglichen Ungleichung

$$|D_\nu| > m^\nu (\nu!)^s, \quad s = \operatorname*{Min}_{j=0}^{e-1} \frac{k_e - k_j}{e - j}$$

genügt. M und m sind dabei von ν unabhängige Konstanten.

Eine Bemerkung knüpft sich noch an den Fall $e = 1$. Wir sahen nämlich, dass die Ungleichung (36) für *mindestens einen* von e aufeinanderfolgenden hinreichend grossen ν-Werten besteht. Wenn nun $e = 1$ ist, besagt dies aber, dass sie für *alle* hinreichend grossen Werte von ν gilt. Wir dürfen daher, wenn $e = 1$ ist, in dem Fundamentalsatz die Worte »für unbegrenzt viele Werte von ν» ersetzen durch: »für alle ν über einer gewissen Grenze».

Unsere Überlegungen lassen sich mit geringen Modifikationen auf den bisher ausgeschlossenen Fall $k_e = \infty$ übertragen, wobei wir jedoch annehmen müssen, dass dann die übrigen Exponenten $k_i < \infty$ sind, also endlich oder $-\infty$. Bei unserem ganzen Räsonnement kam es einzig und allein auf die Ungleichungen

(4), sowie darauf an, dass für $\nu \geqq N$ die Ungleichungen (12) bis (15) bestanden. Daraus ergab sich dann die obere Schranke H für die Zahlen $|b_i^{(\nu)}|$, sowie auch die Abschätzungsformeln für $\varrho_i^{(\nu)}$ in (20) und für $p_\lambda^{(\nu)}$ in (29) mit allen daran geknüpften Folgerungen. Nun bleiben aber die Ungleichungen (12) bis (15) in dieser Form nicht bestehen, wenn $k_e = \infty$ ist, sodass auch die weiteren Konsequenzen hinfällig scheinen.

Wir bezeichnen dann mit k eine ganz beliebig grosse, aber fest gewählte Zahl, die insbesondere grösser sein soll als jeder der Exponenten k_i $(i \neq e)$, sodass die Ungleichungen (4) noch richtig bleiben, wenn man darin k_e durch k ersetzt. Wenn man ebenso auch in den Ungleichungen (12) bis (15) an Stelle von k_e diese Zahl k setzt, so werden die entstehenden Ungleichungen wegen $k_e = \infty$ ebenfalls sicher erfüllt sein, wenn nur $\nu \geqq N$ ist,[1] wobei die Zahl N allerdings von k abhängt. Es bleiben daher auch alle aus den Ungleichungen (4) sowie (12) bis (15) gezogenen Folgerungen bestehen, sofern man in ihnen stets k_e ersetzt durch k. Insbesondere gilt dies also von den Abschätzungsformeln (20), (29) und bezüglich der Existenz der obern Schranke H für die Zahlen $|b_i^{(\nu)}|$. Daraus gewinnt man schliesslich auch, indem man immer Schritt für Schritt die früheren Überlegungen wiederholt, das gleiche Endresultat, worin wieder lediglich k_e durch k zu ersetzen ist. Es wird also $r - e$ linear unabhängige Partikulärintegrale geben, für welche $|D_\nu| < M^\nu$ ist, während alle andern Integrale für unendlich viele Werte von ν der Ungleichung

$$|D_\nu| > m^\nu (\nu!)^s$$

genügen, wobei natürlich s die entsprechende Bedeutung hat:

$$s = \operatorname*{Min}_{j=0}^{e-1} \frac{k - k_j}{e - j}.$$

Da aber die Zahl k von vorn herein beliebig gross gewählt werden durfte, so wird auch s so gross sein, wie man nur will. Während also $r - e$ linear unabhängige Partikulärintegrale kleiner bleiben als M^ν, *wird jedes andre Integral für unbegrenzt viele Werte von ν absolut grösser als eine beliebig hohe Potenz von $\nu!$.*

Bezüglich der $r - e$ Partikulärintegrale werden wir übrigens gleich noch weiter sehen, dass sie in Wahrheit noch viel kleiner sind als eben bewiesen; sie konvergieren nämlich mit wachsendem ν gegen Null, und zwar rascher als jede beliebig hohe Potenz von $\frac{1}{\nu!}$.

---

[1] Abgesehen von der Ungleichung (13) für $i = e$, welche aber, wie dort bereits bemerkt wurde, die weitere Untersuchung nicht beeinflusst.

§ 5. Der Fundamentalsatz des vorigen Paragraphen lässt sich erheblich verallgemeinern. Zu dem Zweck wenden wir die Transformation an:

$$D_\nu = (\nu!)^q \varDelta_\nu, \tag{37}$$

wo der Exponent q irgend eine endliche reelle Zahl bedeute. Dadurch geht die Differenzengleichung (1) über in

$$\varDelta_{\nu+r} + \frac{a_1^{(\nu)}}{(\nu + r)^q}\varDelta_{\nu+r-1} + \cdots + \frac{a_r^{(\nu)}}{[(\nu + r)(\nu + r - 1)\ldots(\nu + 1)]^q}\varDelta_\nu = 0,$$

wofür wir kürzer schreiben wollen

$$\varDelta_{\nu+r} + b_1^{(\nu)}\varDelta_{\nu+r-1} + b_2^{(\nu)}\varDelta_{\nu+r-2} + \cdots + b_r^{(\nu)}\varDelta_\nu = 0. \tag{38}$$

Es ist dann offenbar, wenn die $a_i^{(\nu)}$ wieder die Form (2) haben:

$$b_i^{(\nu)} = a_i\{\nu^{k_i - iq}\} \qquad (i = 1, 2, \ldots r) \tag{39}$$

$$b_r^{(\nu)} \neq 0 \qquad (\nu = 0, 1, 2, \ldots)$$

Wenn wir den Fundamentalsatz auf die Differenzengleichung (38) anwenden wollen, wird es sich darum handeln, unter den Exponenten

$$k_0 = 0,\ k_1 - q,\ k_2 - 2q, \ldots\ k_r - rq \tag{40}$$

den ersten ausfindig zu machen, welcher den maximalen Wert hat.

Um zunächst den Fall

$$k_e = \infty,\ k_i < \infty \ \text{ für } i \neq e$$

zu erledigen, beachte man, dass dann bei ganz beliebigem q die Zahl $k_e - eq = \infty$ ist, während die anderen Zahlen (40) alle $< \infty$ sind. Es wird also die Differenzengleichung (38) $r - e$ Integrale haben, für welche $|\varDelta_\nu| < M^\nu$ ist, und dann ist wegen (37)

$$|D_\nu| < M^\nu(\nu!)^q,$$

während alle anderen Integrale $\varDelta_\nu$ und also auch D_ν für unbegrenzt viele Werte von ν absolut grösser sind als eine beliebig hohe Potenz von $\nu!$ Da hierbei aber q ganz willkürlich ist, also auch eine beliebig grosse negative Zahl sein darf, so folgt, dass die $r - e$ Integrale D_ν rascher gegen Null konvergieren, als jede noch so hohe Potenz von $\frac{1}{\nu!}$. Damit ist die Bemerkung am Schluss des vorigen Paragraphen als richtig nachgewiesen, und zugleich der Fall $k_e = \infty$ erledigt.

Wenn alle $k_i < \infty$ sind, so wollen wir den Spezialfall

$$k_1 = k_2 = \cdots = k_r = -\infty$$

vorwegnehmen. Es sind dann bei beliebigem q die r letzten der Exponenten (40) gleich $-\infty$, sodass für alle Integrale von (38) die Ungleichung $|\varDelta_\nu| < M^\nu$ gilt, also auch $|D_\nu| < M^\nu (\nu!)^q$ für alle Integrale von (1). Da hier q ebenfalls wieder eine beliebig grosse negative Zahl sein darf, so folgt:

Satz 3. *Wenn die Koeffizienten der Differenzengleichung* (1) *rascher gegen Null konvergieren als jede Potenz von* $\frac{1}{\nu}$, *so konvergieren die Integrale rascher gegen Null als jede Potenz von* $\frac{1}{\nu!}$.

Nach Erledigung dieser Spezialfälle bleibt nun noch übrig, dass alle $k_i < \infty$ sind, aber mindestens ein $k_i > -\infty$ ist. Dabei nehmen wir zunächst an, es sei speziell auch

$$k_r > -\infty,$$

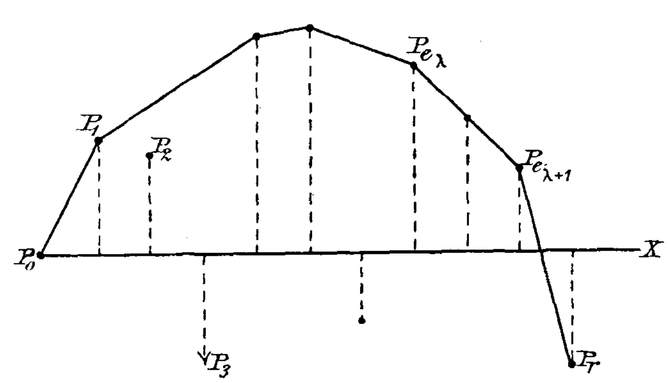
indem wir den gegenteiligen Fall nachträglich rasch werden erledigen können. Wir konstruieren dann in einer Ebene unter Zugrundelegung eines rechtwinkligen X-Y-Koordinatensystems die $r+1$ Punkte

$$P_0, P_1, \ldots P_r$$

mit den bez. Koordinaten

$$x = i, \ y = k_i \qquad (i = 0, 1, \ldots r)$$

und umspannen diese Punkte mit einem NEWTON-PUISEUX'schen Polygon. Es ist das ein die Punkte P_0 und P_r verbindender, nach der positiven Y-Seite konvexer Streckenzug, der eindeutig durch die Forderung bestimmt ist, dass jede



Ecke einer der Punkte P_i ist, während die übrigen dieser Punkte nicht auf der konvexen Seite liegen dürfen. Siehe die Figur, wo $k_3 = -\infty$ gedacht ist.

Das Polygon habe etwa $\sigma + 1$ Ecken, und diese seien der Reihe nach:

$$P_{e_0} = P_0,\ P_{e_1},\ P_{e_2}, \ldots\ P_{e_\sigma} = P_r.$$

Wir wählen dann für den Exponenten q in (37) nacheinander die folgenden $\sigma + 1$ Werte:

$$(41) \qquad \begin{aligned} q_\lambda &= \frac{k_{e_{\lambda+1}} - k_{e_\lambda}}{e_{\lambda+1} - e_\lambda} \qquad (\lambda = 0, 1, 2, \ldots \sigma - 1) \\ q_\sigma &= q_{\sigma-1} - 1. \end{aligned}$$

Es ist dann

$$(42) \qquad q_0 > q_1 > q_2 > \cdots > q_{\sigma-1} > q_\sigma.$$

Denn die letzte dieser Ungleichungen folgt aus der Definition $q_\sigma = q_{\sigma-1} - 1$; die vorhergehenden aber liest man ohne weiteres aus der Figur ab, da ja offenbar q_λ die trigonometrische Tangente des Winkels ist, den die $(\lambda + 1)^{\text{te}}$ Polygonseite mit der positiven X-Achse bildet.

Ebenso leicht erkennt man aus der Figur die weiteren Ungleichungen:

$$q_\lambda = \frac{k_{e_{\lambda+1}} - k_{e_\lambda}}{e_{\lambda+1} - e_\lambda} \begin{cases} < \dfrac{k_{e_\lambda} - k_i}{e_\lambda - i} & \text{für } i < e_\lambda \\ \geqq \dfrac{k_i - k_{e_\lambda}}{i - e_\lambda} & \text{für } i > e_\lambda \end{cases} \qquad (\lambda = 0, 1, \ldots \sigma - 1),$$

$$q_\sigma < q_{\sigma-1} = \frac{k_r - k_{e_{\sigma-1}}}{r - e_{\sigma-1}} \leqq \frac{k_r - k_i}{r - i} \qquad (i = 0, 1, \ldots r - 1).$$

Oder auch, indem man jede dieser Ungleichungen mit dem Nenner der rechten Seite, der ja stets positiv ist, multipliziert:

$$(43) \qquad k_{e_\lambda} - e_\lambda q_\lambda \begin{cases} > k_i - i q_\lambda & \text{für } i < e_\lambda \\ \geqq k_i - i q_\lambda & \text{für } i > e_\lambda \end{cases} \qquad (\lambda = 0, 1, \ldots \sigma)$$

Setzen wir daher $q = q_\lambda$, so folgt aus dem Fundamentalsatz pag. 129, dass genau $r - e_\lambda$ linear unabhängige Integrale existieren, für welche

$$|\Delta_\nu| < M^\nu,$$

also

$$|D_\nu| < M^\nu (\nu!)^{q_\lambda}$$

ist, während alle andern Integrale für unbegrenzt viele Werte von ν der Ungleichung genügen:

$$|\Delta_\nu| > m^\nu (\nu!)^s,$$

also

$$|D_\nu| > m^\nu (\nu!)^{s+q_\lambda},$$

wobei

$$s = \operatorname*{Min}_{j=0}^{e_\lambda - 1} \frac{(k_{e_\lambda} - e_\lambda q_\lambda) - (k_j - j q_\lambda)}{e_\lambda - j},$$

und folglich

$$s + q_\lambda = \operatorname*{Min}_{j=0}^{e_\lambda - 1} \frac{k_{e_\lambda} - k_j}{e_\lambda - j}$$

ist. Nun zeigt aber wiederum ein Blick auf die Figur, dass dieses Minimum nichts andres ist als

$$\frac{k_{e_\lambda} - k_{e_{\lambda-1}}}{e_\lambda - e_{\lambda-1}} = q_{\lambda-1}.$$

Man kann daher unser Resultat so aussprechen, dass die Differenzengleichung (1) genau $r - e_\lambda$ linear unabhängige Integrale

$$D_\nu^{(1)},\ D_\nu^{(2)}, \ldots D_\nu^{(r-e_\lambda)} \tag{44}$$

hat, für welche

$$|D_\nu^{(i)}| < M^\nu (\nu!)^{q_\lambda} \qquad (i = 1, 2, \ldots r - e_\lambda) \tag{45}$$

ist, während alle andern Integrale für unbegrenzt viele Werte von ν der Ungleichung genügen:

$$|D_\nu| > m^\nu (\nu!)^{q_{\lambda-1}}.$$

Nun gibt es aber auch, indem man λ durch $\lambda - 1$ ersetzt, $r - e_{\lambda-1}$ unabhängige Integrale, für die

$$|D_\nu| < M^\nu (\nu!)^{q_{\lambda-1}}$$

wird. Ausser den Integralen (44), die dieser Ungleichung wegen (45) und wegen $q_\lambda < q_{\lambda-1}$ a fortiori genügen, gibt also noch $e_\lambda - e_{\lambda-1}$ weitere Integrale dieser Art; sie seien

$$D_\nu^{(r-e_\lambda+1)},\ D_\nu^{(r-e_\lambda+2)}, \ldots D_\nu^{(r-e_{\lambda-1})}. \tag{46}$$

Für diese ist daher einerseits

$$|D_\nu^{(i)}| < M^\nu (\nu!)^{q_{\lambda-1}} \qquad (i = r - e_\lambda + 1,\ r - e_\lambda + 2, \ldots r - e_{\lambda-1});$$

anderseits aber auch, da sie ja nicht der aus den Integralen (44) entspringenden partikulären Schar angehören:

$$|D_\nu^{(i)}| > m^\nu (\nu!)^{q_{\lambda-1}} \qquad (i = r - e_\lambda + 1,\ r - e_\lambda + 2, \ldots r - e_{\lambda-1})$$

für unendlich viele Werte von ν.

Des kürzeren Ausdrucks halber definieren wir jetzt:

Eine Funktion D_ν heisst von der Ordnung q, wenn sie den Ungleichungen genügt:

$$|D_\nu| < M^\nu (\nu!)^q \text{ für } \nu > \nu_1$$

$$|D_\nu| > m^\nu (\nu!)^q \text{ für unbegrenzt viele } \nu.$$

Wir können dann sagen, dass die $e_\lambda - e_{\lambda-1}$ Integrale (46) von der Ordnung $q_{\lambda-1}$ sind. Das gleiche gilt aber offenbar auch für jedes Integral, das linear aus den Integralen (46) zusammengesetzt ist,[1] da ein solches ja ebenfalls nicht der aus den Integralen (44) entspringenden partikulären Schar angehört.

Wenn man hier für λ der Reihe nach die Werte $\sigma, \sigma - 1, \ldots 2, 1$ setzt, so lässt sich das Ergebnis in folgender Weise formulieren:

Satz 4. *Die Differenzengleichung* (1) *hat ein Fundamentalsystem von Integralen, die derart in σ Klassen zerfallen, dass die Integrale einer Klasse und deren lineare Kombinationen von ein und derselben Ordnung sind. Dabei gehören der* 1ten, 2ten, ... σten *Klasse bez.*

$$r - e_{\sigma-1},\ e_{\sigma-1} - e_{\sigma-2}, \ldots e_2 - e_1,\ e_1$$

Integrale des Fundamentalsystems an, und die zugehörigen Ordnungen sind respektive:

$$q_{\sigma-1} = \frac{k_r - k_{e_{\sigma-1}}}{r - e_{\sigma-1}},\ q_{\sigma-2} = \frac{k_{e_{\sigma-1}} - k_{e_{\sigma-2}}}{e_{\sigma-1} - e_{\sigma-2}}, \ldots\ q_1 = \frac{k_{e_2} - k_{e_1}}{e_2 - e_1},\ q_0 = \frac{k_{e_1}}{e_1}.$$

Man beachte, dass diese Ordnungszahlen in der angegebenen Reihenfolge wachsen (nach (42)). Insbesondere gibt es also genau $r - e_{\sigma-1}$ linear unabhängige Partikulärintegrale, welche die *Minimalordnung* $q_{\sigma-1}$ haben, während das *allgemeine* Integral von der Ordnung q_0 ist.

Der sehr allgemeine Satz 4 enthält nun auch die zwei Theoreme als Spezialfälle, die ich in der eingangs zitierten Arbeit in den Mathematischen Annalen Bd. 66, pag. 462, 469 mit Hilfe de Theorie der *Jacobiketten* entwickelt habe. Sei

---

[1] An sich kann ja eine lineare Kombination von Funktionen q^{ter} Ordnung sehr wohl auch von geringerer (aber niemals von höherer) Ordnung sein.

nämlich erstens P_1 eine Ecke des NEWTON'schen Polygons, d. h. $e_1 = 1$, was mit dem Bestehen der Ungleichungen

$$k_1 > \frac{k_i}{i} \qquad (i = 2, 3, \ldots r)$$

oder, was dasselbe sagt:

$$\frac{k_1 - k_i}{i - 1} > -k_1 \qquad (i = 2, 3, \ldots r)$$

äquivalent ist. Dann besagt Satz 4, indem man die $\sigma - 1$ ersten Klassen zusammenfasst, dass es genau $r - 1$ linear unabhängige Integrale gibt, welche höchstens die Ordnung

$$q_1 = \frac{k_{e_2} - k_1}{e_2 - 1} = \operatorname*{Max}_{i=2}^{r} \frac{k_i - k_1}{i - 1}$$

haben, während das r^{te} Integral von der höheren Ordnung $q_0 = k_1$ ist. Dies ist aber nur eine kürzere Formulierung des ersten der genannten Theoreme, wenn man noch die zu dem Fundamentalsatz pag. 129 gemachte Bemerkung berücksichtigt.

Sei zweitens P_{r-1} eine Ecke des NEWTON'schen Polygons, d. h. $e_{\sigma-1} = r - 1$, was mit dem Bestehen der Ungleichungen

$$\frac{k_{r-1} - k_i}{r - 1 - i} > k_r - k_{r-1} \qquad (i = 0, 1, \ldots r - 2)$$

gleichbedeutend ist. Dann hat nach Satz 4 ein und nur ein Integral genau die Ordnung $q_{\sigma-1} = k_r - k_{r-1}$, während alle andern mindestens von der höheren Ordnung

$$q_{\sigma-2} = \frac{k_{r-1} - k_{e_{\sigma-2}}}{r - 1 - e_{\sigma-2}} = \operatorname*{Min}_{i=0}^{r-2} \frac{k_{r-1} - k_i}{r - 1 - i}$$

sind. Aber dies ist abgesehen von der Bezeichnung nichts anderes als das zweite der genannten Theoreme.

Zwei extreme Fälle verdienen noch hervorgehoben zu werden.

I. Wenn die Exponenten k_i den Ungleichungen

$$\frac{k_r}{r} \geqq \frac{k_i}{i} \qquad (i = 1, 2, \ldots r - 1)$$

genügen, so ist dies ganz gleichbedeutend damit, dass nur die zwei Punkte P_0, P_r Ecken des Polygons sind. Es ist also dann $e_1 = r$, $\sigma = 1$; daher gibt es nur eine Klasse von Integralen, und alle Integrale sind von der Ordnung $q_0 = \frac{k_r}{r}$.

II. Wenn dagegen die Exponenten k_i den Ungleichungen

$$k_1 > k_2 - k_1 > k_3 - k_2 > \cdots > k_r - k_{r-1}$$

genügen, so besagt dies soviel als dass alle Punkte P_i Polygonecken sind. Dann ist also $\sigma = r$, $e_\lambda = \lambda$. Es gibt daher r verschiedene Klassen, d. h. es gibt ein Fundamentalsystem von Integralen, die lauter verschiedene Ordnungen haben, und zwar sind diese Ordnungen in wachsender Reihenfolge:

$$q_{r-1} = k_r - k_{r-1},\ q_{r-2} = k_{r-1} - k_{r-2}, \ldots\ q_1 = k_2 - k_1,\ q_0 = k_1.$$

Zum Schluss betrachten wir noch kurz den seither ausgeschlossenen Fall $k_r = -\infty$. Es sei etwa $k_{e_{\sigma-1}}$ die letzte der Zahlen $k_1, k_2, \ldots k_r$, welche $> -\infty$ ist, da ja der Fall, dass alle gleich $-\infty$ sind, durch Satz 3 bereits erledigt ist.

Dann umspannen wir die Punkte $P_0, P_1, \ldots P_{e_{\sigma-1}}$ durch ein NEWTON-PUISEUX'sches Polygon mit den σ Ecken

$$P_{e_0} = P_0,\ P_{e_1},\ P_{e_2}, \ldots\ P_{e_{\sigma-1}},$$

und erweitern dieses durch eine Strecke, welche vom Endpunkt $P_{e_{\sigma-1}}$ beliebig steil nach abwärts führt und die Ordinate $x = r$ etwa im Punkt $y = k'_r$ schneiden möge; diesen nehmen wir als letzten Polygoneckpunkt hinzu. *Es ist dann k'_r eine beliebig grosse negative Zahl.*

Alle unsere früheren Betrachtungen lassen sich nun mit ganz geringen, leicht ersichtlichen Modifikationen an dieses neue Polygon anschliessen, wobei natürlich k_r durch k'_r zu ersetzen ist. Man erhält also wiederum σ Integralklassen, und zwar haben die $\sigma - 1$ letzten Klassen wieder die in Satz 4 angegebenen Ordnungszahlen, während die $r - e_{\sigma-1}$ Integrale der ersten Klasse die Ordnung $-\infty$ haben. Dabei ist unter einer Funktion der Ordnung $-\infty$ natürlich eine solche zu verstehen, die rascher gegen Null konvergiert als jede noch so hohe Potenz von $\frac{1}{\nu!}$.

Man bemerke noch, dass sich unter dieses Resultat schliesslich auch der Fall von Satz 3 subsumieren lässt, indem dann alle Integrale von der Ordnung $-\infty$ sind.

München, November 1908.