UN PROBLÈME DE COMPOSITION DES SINGULARITÉS DES SÉRIES DE DIRICHLET GÉNÉRALES.

Par

MAURICE BLAMBERT.

Introduction.

Le problème de la composition des singularités des séries de Dirichlet générales à exposants réels fut, en 1929, dans un mémoire de cette revue, posé en termes précis par S. MANDELBROJT qui formulait des théorèmes généralisant les théorèmes célèbres de J. HADAMARD et A. HURWITZ sur la composition des singularités des développements tayloriens.

Quelques années plus tard, en 1933, dans un mémoire des Annals of Mathematics, G. PÓLYA énonçait, au sujet du théorème de J. HADAMARD, des conditions suffisantes pour que le produit de deux points singuliers des fonctions composantes soit point singulier de la fonction composée; précisant une terminologie relative à diverses espèces de points singuliers, cet auteur obtenait un important théorème contenant comme cas particuliers des résultats anciens, bien connus, obtenus dans cette voie par E. BOREL et G. FABER.

A ma conaissance aucun essai analogue à ceux de E. BOREL, G. FABER, G. PÓLYA n'avait jusqu'ici été tenté sur la généralisation dûe à S. MANDELBROJT du théorème de J. HADAMARD, généralisation que nous conviendrons d'appeler théorème HADAMARD-MANDELBROJT. Précisons cependant que H. CRAMÉR avait posé un problème très voisin: celui de la recherche des singularités des séries de Dirichlet d'une certaine classe communément appelée depuis, par divers auteurs, classe de CRAMÉR; problème auquel G. PÓLYA, à l'aide de ses notions de «point extrême» et de «diagramme conjugué» d'une fonction entière, a apporté une contribution intéressante généralisée par V. BERNSTEIN s'inspirant d'un travail de J. SOULA.

Utilisant pour base le théorème fondamental HADAMARD-MANDELBROJT, je me propose dans ce travail d'étendre aux séries de Dirichlet à exposants réels les résultats de E. BOREL, et ceux de G. PÓLYA dans le cas où l'une des singularités composantes est un pôle. Me limitant à cette forme d'extension que l'on peut qualifier de type borelien, j'aborde l'étude du cas difficile où il existe des points «composés» qui coïncident. Un tel problème n'a pas été posé, pour les séries de Taylor, par les auteurs cités.

J'évite, dans les principaux résultats, toute hypothèse restrictive explicite sur les suites d'exposants et de coefficients des séries composantes et je ne me limite pas à la considération des singularités situées sur les axes d'holomorphie.

Dans un autre travail, à paraître prochainement, j'étudie un type faberien de problèmes analogues où l'un des points singuliers composants est, non plus un pôle, mais un point essentiel.

En terminant, qu'il me soit permis d'associer dans un même sentiment de reconnaissance, les noms de deux maîtres de la pensée mathématique contemporaine, MM. S. MANDELBROJT et G. PÓLYA, aussi intimement que leurs œuvres respectives sont unies tout au long de ce travail.

I.

1. Définitions et notations.

Soient deux séries de Dirichlet $\sum a_n e^{-s\lambda_n}$ et $\sum b_n e^{-s\mu_n}$, les suites $\{\lambda_n\}$ et $\{\mu_n\}$ croissant strictement vers l'infini. σ_C^f, σ_U^f, σ_A^f sont respectivement les abscisses de convergence simple, uniforme, absolue de la série $f(s) = \sum a_n e^{-s\lambda_n}$. Soit n_0 le plus petit entier tel que $\mu_n > \lambda_1$ et soit k un entier positif. L'expression $a_{\mu_n}^{(k)}$, égale par définition à:

$$0 \text{ si } 1 \leq n < n_0$$

$$\sum_{\lambda_m < \mu_n} (\mu_n - \lambda_m)^k a_m \text{ si } n \geq n_0$$

est dite le $n^{\text{ième}}$ coefficient d'ordre k, par rapport à la suite $\{\mu_n\}$, de la fonction $f(s)$ définie par $\sum a_n e^{-s\lambda_n}$. En particulier, $\sum\limits_{\lambda_m < n} (n - \lambda_m)^k a_m$, où la suite $\{\mu_n\}$ est identique à la suite des entiers, est le $n^{\text{ième}}$ coefficient «taylorien» d'ordre k de la fonction $f(s)$. Nous appelons opérateur HADAMARD-MANDELBROJT et le notons $H_M[f, \varphi | k]$ celui qui fait correspondre formellement la série composée $\sum a_{\mu_n}^{(k)} b_n e^{-s\mu_n}$ au couple des deux séries composantes $\sum a_n e^{-s\lambda_n}$, $\sum b_n e^{-s\mu_n}$; la fonction, définie par le prolongement analytique, à partir de son demi-plan de convergence, de la série composée, est notée $H_M[f(s), \varphi(s) | k]$.

Soit $-\infty < \sigma_1 < \infty$, et soit Δ un domaine[1] situé dans le demi-plan $\sigma > \sigma_1$, ayant les caractères suivants:

A) Δ contient des points s tels que $\Re s = \sigma > \sigma_A^f$,

B) Il existe une fonction $f(s)$ holomorphe dans Δ, égale à la somme de la série $\sum a_n e^{-s\lambda_n}$ pour $s \in \Delta$, $\sigma > \sigma_A^f$.

S'il existe un domaine $\Delta(\sigma_1)$ qui contient chaque domaine Δ ayant les propriétés mentionnées, par définition, la fonction $f(s)$ holomorphe dans $\Delta(\sigma_1)$ et égale à la somme de la série pour $s \in \Delta(\sigma_1)$, $\sigma > \sigma_A^f$, est dite «uniforme U_M» dans le demi-plan $\sigma > \sigma_1$. L'ensemble formé de tous les points du demi-plan $\sigma \geq \sigma_1$ qui ne sont pas points de $\Delta(\sigma_1)$ sera représenté par $S_f^{\sigma_1}$ et appelé «l'ensemble singulier de $f(s)$ par rapport au demi-plan $\sigma > \sigma_1$». L'ensemble $S_f^{\sigma_1}$ est fermé. Les points de la droite $\sigma = \sigma_1$ appartiennent à $S_f^{\sigma_1}$. Si $\sigma_1' < \sigma_1$, on a évidemment $\Delta(\sigma_1) \subset \Delta(\sigma_1')$. $f(s)$ définie au moyen du prolongement analytique de la série dans les domaines $\Delta(\sigma_1)$ et $\Delta(\sigma_1')$, prend, à l'intersection de ces domaines, les mêmes valeurs, si elle est uniforme dans l'ensemble de ces domaines. Dire que $f(s) = \sum a_n e^{-s\lambda_n}$ est «uniforme U_M» dans le demi-plan signifie que:

a) $\Delta(\sigma_1)$ existe,

b) $f(s)$ est holomorphe dans $\Delta(\sigma_1)$,

c) $f(s)$ est donnée pour $s \in \Delta(\sigma_1)$, $\sigma > \sigma_C^f$, par la somme de $\sum a_n e^{-s\lambda_n}$,

d) $f(s)$ ne peut être prolongée analytiquement jusqu'à un point de $S_f^{\sigma_1}$ sans qu'on puisse effectuer ce prolongement le long d'un chemin coupant la droite $\sigma = \sigma_1$.

Comme dans tout le cours de ce travail σ_1 sera choisi fixe, on note P_f et $\overline{P}_f$ respectivement les demi-plans $\sigma > \sigma_1$ et $\sigma \geq \sigma_1$. Dire que les seules singularités «possibles»[2] dans P_f, d'une fonction $f(s)$ définie par une série $\sum a_n e^{-s\lambda_n}$, $\sigma_C^f < \infty$, sont les points d'un ensemble S fermé, signifie que dans tout domaine $\Delta \subset \complement_{\overline{P}_f}(\overline{P}_f \cap S)$ et contenant des points du demi-plan $\sigma > \sigma_C^f$,

a) $f(s)$ est holomorphe,

b) $f(s) = \sum a_n e^{-s\lambda_n}$, si $\Re s = \sigma > \sigma_C^f$.

---

[1] Ensemble connexe de points tous intérieurs.

[2] Les notions, «uniformité U_M» et singularités «possibles», peuvent évidemment être étendues à des fonctions non représentables en séries de Dirichlet. Nous utiliserons cette remarque ultérieurement.

Ces précautions de langage prennent toute leur importance quand on constate qu'il peut exister des points $\alpha \in S_f^{\sigma_1}$ et cependant tels qu'ils appartiennent non seulement au domaine d'existence de $f(s)$, au sens de Weierstrass, mais aussi au complémentaire de $S_f^{\sigma_1'}$ par rapport au demi-plan $\sigma \geq \sigma_1'$ si $\sigma_1' < \sigma_1$. Notons que la branche principale de $f(s)$ est holomorphe dans $\underset{P_f}{\complement} S_f^{\sigma_1}$. $S_f^{\sigma_1}$ est «l'ensemble singulier par rapport à P_f» de cette branche.

Après l'importante notion de «l'uniformité U_M», passons à celle non moins importante de «l'ordre généralisé O_M». Soit $f(s) = \sum a_n e^{-s\lambda_n}$ «uniforme U_M» dans P_f. Posons $S_f^{\sigma_1}(\varepsilon) = \bigcup c(s, \varepsilon)$, $s \in S_f^{\sigma_1}$, où $c(s, \varepsilon)$ est le cercle ouvert de centre s et de rayon ε. Supposons par hypothèse qu'il existe une constante non négative m ayant la propriété suivante: à chaque $\varepsilon > 0$ il correspond une constante $k(\varepsilon, m, \sigma_1)$ telle que, dans toute région appartenant à $\underset{P_f}{\complement} \overline{(P_f \cap S_f^{\sigma_1}(\varepsilon))}$, $|f(s)| < k(\varepsilon, m, \sigma_1)|t|^m$ si $|t|$ est suffisamment grand. A chaque $\eta > 0$ et à chaque $\varepsilon > 0$, il correspondra une constante $N(\varepsilon, \eta, \sigma_1)$ telle que $|f(s)| < N(\varepsilon, \eta, \sigma_1)\ |t|^{\nu+\eta}$ pour s ainsi choisi et $|t|$ suffisamment grand. De plus, aucune quantité inférieure à ν ne possédera cette propriété. Par définition, ν est «l'ordre généralisé O_M» ou plus brièvement «l'ordre O_M» de la fonction $f(s)$ «uniforme U_M» dans P_f.

Posons $\sigma_H^f = \underline{\text{borne}}\ \sigma'$, $f(s)$, holomorphe dans $\sigma > \sigma'$, et définie par la somme de la série $\sum a_n e^{-s\lambda_n}$ pour $\sigma > \sigma_C^f$. C'est l'abscisse d'holomorphie au sens habituel.

Posons $\sigma_H^f(\sigma_1) = \overline{\text{borne}}\ \sigma$, $s \in S_f^{\sigma_1} \cdot \sigma_H^f(\sigma_1)$ est par définition l'abscisse d'holomorphie de $f(s)$ dans P_f. Il est évident que $\sigma_H^f(\sigma_1) = \sigma_H^f$ si $\sigma_1 < \sigma_H^f$, et $\sigma_H^f(\sigma_1) = \sigma_1$ si $\sigma_1 \geq \sigma_H^f$.

Si E_1 et E_2 sont des ensembles de nombres complexes, par définition, l'ensemble «somme composée» des ensembles E_1 et E_2 est l'ensemble formé de tous les nombres $\alpha + \beta$, où $\alpha \in E_1$, et $\beta \in E_2$.

$S_{f\varphi}^{\sigma_1 \sigma_2}$ représentant l'ensemble composé de $S_f^{\sigma_1}$ et $S_\varphi^{\sigma_2}$, on dira qu'un point $\gamma \in (S_\varphi^{\sigma_2} \cup \bar{S}_{f\varphi}^{\sigma_1 \sigma_2})$ est un point γ^* s'il est assujetti à la condition suivante: il existe un arc de Jordan $\mathfrak{C}$, sans point multiple, d'origine z_0, $\Re z_0 > \sigma_A^f + \sigma_A^\varphi$, d'extrémité γ, dont tous les points, à l'exception évidemment de γ, appartiennent au complémentaire par rapport à $\bar{P}$ (demi-plan $\sigma \geq \max\ (0, \sigma_H^f(\sigma_1)) + \sigma_2$) de l'intersection de $(S_\varphi^{\sigma_2} \cup \bar{S}_{f\varphi}^{\sigma_1 \sigma_2})$ et de $\bar{P}$; succinctement, on écrira:

$$\text{si } \gamma \in (S_\varphi^{\sigma_2} \cup \bar{S}_{f\varphi}^{\sigma_1 \sigma_2})$$

$$\text{et si } \mathfrak{C}[z_0, \gamma) \subset \underset{\bar{P}}{\complement} (\bar{P} \cap (S_\varphi^{\sigma_2} \cup \bar{S}_{f\varphi}^{\sigma_1 \sigma_2}))$$

alors γ est un γ^*.

(La notation $\mathfrak{C}[z_0, \gamma)$ représentant l'ensemble $\mathfrak{C}$ fermé au point z_0 et ouvert au point γ.)

2. Ces définitions étant posées, voici les théorèmes fondamentaux que nous utiliserons.

Théorème A. *Supposons que* $f(s) = \sum a_n e^{-s\lambda_n}$, $\sigma_A^f < \infty$, *soit «uniforme* U_M*» et «d'ordre* O_M*» égal à* ν *dans le demi-plan* $P_f(\sigma > \sigma_1)$ *et que* $\varphi(s) = \sum b_n e^{-s\mu_n}$, $\sigma_A^\varphi < \infty$, *soit «uniforme* U_M*» et «d'ordre* O_M*» égal à* μ *dans le demi-plan* $P_\varphi(\sigma > \sigma_2)$. *Soit* $S_f^{\sigma_1}$ *l'ensemble singulier de* $f(s)$ *par rapport à* P_f *et soit* $S_\varphi^{\sigma_2}$ *celui de* $\varphi(s)$ *par rapport à* P_φ. *Si* $k > \nu + \mu$, *la série* $\sum a_{\mu_n}^{(k)} b_n e^{-s\mu_n}$ *a une abscisse de convergence absolue qui n'est pas supérieure à* $Max(\sigma_A^\varphi, \sigma_A^f + \sigma_A^\varphi)$, *la fonction* $H_M[f(s), \varphi(s)|k]$ *est «uniforme* U_M*» dans le demi-plan* $\sigma > max[\sigma_H^f(\sigma_1), 0] + \sigma_2$, *et les seules singularités «possibles» de cette fonction dans ce demi-plan sont les points de l'ensemble* $\bar{S}_{f\varphi}^{\sigma_1\sigma_2} \cup S_\varphi^{\sigma_2}$.

Théorème B. *Avec les mêmes hypothèses que dans le théorème précédent, si* $s = 0$ *est un point régulier de* $f(s)$, *la fonction* $H_M[f(s), \varphi(s)|k]$ *est «uniforme* U_M*» dans le demi-plan* $\sigma > \sigma_H^f(\sigma_1) + \sigma_2$ *et les seules singularités «possibles», dans ce demi-plan, de la fonction* $H_M[f(s), \varphi(s)|k] - I_k(s)$, *où* $I_k(s) = \sum_{j=0}^{j=k} (-1)^j C_k^j f^{(k-j)}(0) \varphi^{(j)}(s)$, *sont les points de l'ensemble* $\bar{S}_{f\varphi}^{\sigma_1\sigma_2}$.

Comme on le voit, le théorème B est une modification simple du théorème A. La remarque qui suit n'est pas inutile pour la compréhension du sens de la conclusion de chacun de ces théorèmes. Celle de A signifie que la somme de la série de Dirichlet $\sum a_{\mu_n}^{(k)} b_n e^{-s\mu_n}$ peut être prolongée analytiquement, dans le demi-plan $\Re s > \max(0, \sigma_H^f(\sigma_1)) + \sigma_2$, le long de tout arc de Jordan $\mathfrak{C}$, sans point multiple, ayant pour origine un point s_0 du demi-plan $\Re s > \max(\sigma_A^f + \sigma_A^\varphi, \sigma_A^\varphi)$ et tel que

$$\mathfrak{C} \cap (S_\varphi^{\sigma_2} \cup \bar{S}_{f\varphi}^{\sigma_1\sigma_2}) = \phi.$$

Dire qu'un point s_1, $\Re s_1 = \sigma_1 > \max(0, \sigma_H^f(\sigma_1)) + \sigma_2$ est régulier pour la fonction $H_M[f(s), \varphi(s)|k]$, c'est affirmer l'existence d'une telle courbe $\mathfrak{C}$ dont le point s_1 est l'extrémité.

Il n'entre pas dans l'objet de ce travail d'exposer en détail la démonstration des théorèmes A et B, mais, comme nous en utiliserons fréquemment les matériaux, il est nécessaire de fournir les explications indispensables à l'intelligence du texte.

Nous renvoyons, à ce sujet, et pour toutes questions connexes, à l'ouvrage de S. Mandelbrojt, «Dirichlet series» (The Rice Institute Pamphlet, 31 (1944)), d'où proviennent certaines définitions et notations du § I, ainsi qu'aux mémoires originaux[1]. Ces théorèmes constituent une extension très large aux séries de Dirichlet générales du célèbre théorème de J. HADAMARD[2].

On démontre que l'intégrale $\frac{\Gamma(k+1)}{2\pi i}\int\limits_{c-i\infty}^{c+i\infty} f(s)\,\varphi(z-s)\frac{ds}{s^{1+k}}$, où $c>\max(0,\sigma_A^f)$, définit la même fonction de z que la série $\sum a_{\mu_n}^{(k)} b_n e^{-z\mu_n}$. On pave la bande $\sigma_1\leq\sigma\leq c$ avec des carrés de côté $\varepsilon=\frac{c-\sigma_1}{q}$, q entier. Soit $D_1(\varepsilon)$ l'ensemble composé de tous les carrés qui ne contiennent dans leur fermeture ni un point de $S_f^{\sigma_1}$ ni le point $s=0$ et qui ne sont pas contigus à de tels carrés. ε est choisi suffisamment petit pour que tous les carrés bordant la droite $\sigma=c$ appartiennent à $D_1(\varepsilon)$. Ceci est possible en raison du choix de c. Soit $D_1^{*f}(\varepsilon)$ la plus grande région appartenant à $D_1(\varepsilon)$ et contenant les carrés bordant la droite $\sigma=c$. Soit $C_1^{*f}(\varepsilon)$ la partie de la frontière de $D_1^{*f}(\varepsilon)$ qui ne contient pas les points de $\sigma=c$. On démontre que la fonction de z définie par la série est la même que celle définie par l'intégrale

$$\frac{\Gamma(k+1)}{2\pi i}\int\limits_{C_1^{*f}(\varepsilon)} f(s)\,\varphi(z-s)\frac{ds}{s^{1+k}}.$$

Nous ne ferons pas usage d'une manière explicite du reste.

II.

1. Considérons la fonction $f(s)$ du théorème A. Par $\mathfrak{L}$ on représente un ensemble défini comme suit:

a) $\mathfrak{L}\subset S_f^{\sigma_1}$,

b) $\mathfrak{L}$ est à distance positive de son complémentaire par rapport à $S_f^{\sigma_1}$,

c) $\mathfrak{L}$ ne contient pas le point origine.

De b) et de la définition de $S_f^{\sigma_1}$ résulte qu'il est possible de trouver une courbe

[1] S. MANDELBROJT, « Contribution à la théorie du prolongement analytique des séries de Dirichlet », Acta Math., 55 (1929). ——, « Sur la recherche des points singuliers d'une série de Dirichlet », Bull. Soc. Math. France, 57 (1929). D. V. WIDDER, « The singularities of a function defined by a Dirichlet series », Amer. Journal of Math., 1927. V. BERNSTEIN, Leçons sur les progrès récents de la théorie des séries de Dirichlet, Paris, 1933. S. BOCHNER, « Hadamard's theorem for Dirichlet series », Annals of Math., 41 (1940). H. B. BRUNK, « Theorems of composition for Dirichlet's series », Duke math. Journal, 12 (1945).

[2] Au sujet de ce théorème, consulter: S. MANDELBROJT, « Modern Researches on the singularities of functions defined by Taylor series », The Rice Institute Pamphlet, 14 (1927). — Pour une intéressante généralisation de ce théorème, consulter également W. J. TRJITZINSKY, « On composition of singularities », Transactions of the Amer. Math. Soc., 32 (1930).

rectifiable $\mathfrak{C}$, intérieure à P_f, limitant un domaine D contenant des points s satisfaisant à $\Re s = \sigma > \sigma_C^f$, et telle que $\mathfrak{L} \subset D$, $\mathfrak{L} \cap \mathfrak{C} = \varnothing$, $D \cap \complement_{S_f^{\sigma_1}} \mathfrak{L} = \varnothing$.

L'ensemble $\mathfrak{L}$, en vertu de sa définition et puisqu'il est singulier pour la branche principale de $f(s)$ (la seule que l'on considère en raison de la façon dont $S_f^{\sigma_1}$ est défini), est un ensemble fermé.

Posons $L(s) = \dfrac{1}{2\pi i} \displaystyle\int_C \frac{f(z)\,dz}{z-s}$, $s \notin \bar{D}$, l'intégrale étant prise dans le sens indirect par rapport au domaine D limité par $\mathfrak{C}$, et $F(s) = f(s) - L(s)$. Tout point de $\complement_{S_f^{\sigma_1}} \mathfrak{L}$ est «singulier par rapport à P_f» pour $F(s)$, $L(s)$ étant régulière en tout point extérieur à D et tend vers 0 avec $1/|s|$; tout point de $\mathfrak{L}$ est régulier pour $F(s)$.

Théorème I. *Dans les hypothèses relatives à $f(s)$ et $\varphi(s)$ du théorème A (ou B) et le choix de l'entier $k > \nu + \mu$, joints aux hypothèses suivantes:*

a) $\omega \in \mathfrak{L}$,

b) *β point isolé de $S_\varphi^{\sigma_2}$, pôle de $\varphi(s)$,*

c) *$\gamma = \omega + \beta$ est un γ^*,*

d) *$\gamma \notin (S_\varphi^{\sigma_2} \cup \bar{S}'^{\sigma_1 \sigma_2}_{f\varphi})$, où $S'^{\sigma_1 \sigma_2}_{f\varphi}$ est l'ensemble composé de $S_f^{\sigma_1}$ et de $S'^{\sigma_2}_\varphi$ (déduit de $S_\varphi^{\sigma_2}$ par suppression du point β),*

alors, γ est singulier pour la fonction $H_M[f(s), \varphi(s) | k]$.

Pour ε suffisamment petit, la partie de $C_1^{*f}(\varepsilon)$, correspondant à l'ensemble $\mathfrak{L}$, que l'on note $c^*(\mathfrak{L}, \varepsilon)$, est disjointe de $\complement_{C_1^{*f}(\varepsilon)} c^*(\mathfrak{L}, \varepsilon)$. On a $C_1^{*f}(\varepsilon) = c^*(\mathfrak{L}, \varepsilon) \cup C_1^{*F}(\varepsilon)$.
En choisissant z intérieur au demi-plan $\Re z > \sigma_A^f + \sigma_A^\varphi + 2\varepsilon$, on peut écrire légitimement:

$$\text{(I)} \quad \begin{aligned} \int_{C_1^{*f}(\varepsilon)} f(s)\,\varphi(z-s) \frac{ds}{s^{1+k}} = \int_{C_1^{*F}(\varepsilon)} F(s)\,\varphi(z-s) \frac{ds}{s^{1+k}} &+ \\ + \int_{C_1^{*f}(\varepsilon)} L(s)\,\varphi(z-s) \frac{ds}{s^{1+k}} &+ \int_{c^*(\mathfrak{L},\varepsilon)} F(s)\,\varphi(z-s) \frac{ds}{s^{1+k}}, \end{aligned}$$

où les fonctions $f(s)$, $\varphi(s)$ et l'entier k satisfont aux seules conditions du théorème A. La méthode que nous utilisons consiste à étudier la première intégrale du second membre à l'aide du théorème A, la seconde à l'aide d'une méthode analogue à celle permettant les généralisations dûes à J. SOULA[1], et V. BERNSTEIN[2] d'un théorème de G. PÓLYA[3], la troisième en utilisant les seules notions d'intégrale de CAUCHY et de prolongement analytique.

a. $F(s)$ admet, par rapport à P_f, l'ensemble singulier $S_F^{\sigma_1} = \complement_{S_f^{\sigma_1}} \mathfrak{L}$. Elle est «uniforme U_M» et «d'ordre O_M» égal à ν dans P_f. L'étude des singularités «possibles» de la fonction définie par la première intégrale n'exigeant nullement que $F(s)$ soit représentable, dans un certain demi-plan, par une série de Dirichlet, les conclusions du théorème A (ou B) sont donc valables avec le choix $k > \nu + \mu$. Pour fixer les idées, utilisons le théorème A; appelant $J_1(z)$ la fonction à étudier, ses singularités «possibles» dans le demi-plan $\sigma > \max(0, \sigma_H^F(\sigma_1)) + \sigma_2$ sont les points de l'ensemble $\bar{S}_{F\,\varphi}^{\sigma_1\,\sigma_2} \cup S_\varphi^{\sigma_2}$. Or la fermeture de l'ensemble composé des ensembles $S_\varphi'^{\sigma_2}$ et $\complement_{S_f^{\sigma_1}} \mathfrak{L}$ appartient à $\bar{S}_{f\,\varphi}'^{\sigma_1\,\sigma_2}$. En vertu de (d), $\omega + \beta$ ne peut appartenir à la fermeture de l'ensemble composé de $S_\varphi'^{\sigma_2}$ et $\complement_{S_f^{\sigma_1}} \mathfrak{L}$. En outre, il ne peut appartenir à la fermeture de l'ensemble composé de $S_\varphi^{\sigma_2}$ et $\complement_{S_f^{\sigma_1}} \mathfrak{L}$, sinon, eu égard à (d), il devrait exister $\alpha \in \complement_{S_f^{\sigma_1}} \mathfrak{L}$ tel que $\alpha + \beta = \omega + \beta$, c'est-à-dire $\alpha = \omega$, ou bien une suite $\{\alpha_i\} \subset \complement_{S_f^{\sigma_1}} \mathfrak{L}$ telle que $\lim \alpha_i = \omega$, ce qui est contraire à la définition de $\mathfrak{L}$. Enfin, $\gamma = \omega + \beta$ est un γ^*; il existe donc un arc de Jordan $\mathfrak{C}$, sans point multiple, d'origine z_0 ($\Re z_0 > \sigma_A^f + \sigma_A^\varphi + 2\varepsilon$), d'extrémité γ dont tous les points, sauf γ, sont intérieurs à $\complement_{\bar{P}} (\bar{P} \cap (S_\varphi^{\sigma_2} \cup \bar{S}_{f\,\varphi}^{\sigma_1\,\sigma_2}))$; par conséquent, tous les points de $\mathfrak{C}$ sont intérieurs à $\complement_{P_1} (\bar{P}_1 \cap (S_\varphi^{\sigma_2} \cup \bar{S}_{F\,\varphi}^{\sigma_1\,\sigma_2}))$, où $\bar{P}_1$ est le demi-plan $\sigma \geq \max(0, \sigma_H^F(\sigma_1)) + \sigma_2$, et γ est point régulier de $J_1(z)$.

b. L'hypothèse (b) implique $\Re \beta > \sigma_2$ (les points de $\sigma = \sigma_2$ ne sont évidemment pas des singularités ponctuelles «par rapport à P_φ» pour $\varphi(s)$) et, en raison de la définition de $S_\varphi^{\sigma_2}$, il existe un domaine contenant des points s, $\sigma > \sigma_A^\varphi$, à l'intérieur duquel β est la seule singularité de $\varphi(s)$ obtenue par prolongement dans P_φ de la somme de la série $\sum b_n e^{-s\mu_n}$.

Soit $\varphi(s) = \sum_{m=1}^{M} (-1)^m \frac{B_m}{(s-\beta)^m} + \varphi_0(s)$, $\varphi_0(s)$ étant régulière au point β, la représentation de $\varphi(s)$ dans ce domaine au voisinage du point β.

Posons $S = (S_\varphi^{\sigma_2} \cup \bar{S}_{f\,\varphi}^{\sigma_1\,\sigma_2}) \cap \bar{P}$, $\bar{P}$ défini par $\sigma \geq \max(0, \sigma_H^f) + \sigma_2$,

$$E = \complement_{\bar{P}} S.$$

---

[1] «Sur les fonctions définies par des séries de Dirichlet». Journal de math., 4 (1925).

[2] Voir la note p. 222.

[3] «Untersuchungen über Lücken und Singularitäten von Potenzreihen», Math. Zeit., 29 (1929).

Les ensembles $\bar{P}$, $(S_\varphi^{\sigma_2} \cup \bar{S}_{f\varphi}^{\sigma_1,\sigma_2})$, et par conséquent S sont fermés. Considérons Δ un domaine borné contenant à son intérieur des points du demi-plan $\sigma > \max(\sigma_A^\varphi, \sigma_A^f + \sigma_A^\varphi)$ et tel que $\Delta \subset E$, $\bar{\Delta} \cap S = \phi$. Alors pour $s \in C_1^{*f}(\varepsilon)$, $z \in \Delta$ et ε suffisamment petit, $z - s$ est intérieur à $\complement_{\bar{P}_\varphi} S_\varphi^{\sigma_2}$. Par conséquent $z - s$ est régulier pour $\varphi(\zeta)$ et on peut écrire

$$\varphi(z-s) = \sum_{m=1}^{M} \frac{(-1)^m B_m}{(z-s-\beta)^m} + \varphi_0(z-s);$$

d'où

$$\int_{C_1^{*f}(\varepsilon)} L(s)\,\varphi(z-s)\frac{ds}{s^{1+k}} = \sum_{m=1}^{M} B_m \int_{C_1^{*f}(\varepsilon)} \frac{L(s)\,ds}{s^{1+k}\,[s-(z-\beta)]^m} + \int_{C_1^{*f}(\varepsilon)} L(s)\,\varphi_0(z-s)\frac{ds}{s^{1+k}}.$$

$z - \beta$ est intérieur au complémentaire par rapport à $\bar{P}'$ $(\sigma \geq \max(0, \sigma_H^f) + \sigma_2 - \Re\beta)$ de l'intersection de $S_f^{\sigma_1}$ et $\bar{P}'$. On peut faire en sorte que $\complement_{\bar{P}'}(S_f^{\sigma_1} \cap \bar{P}') \subset \complement_{\bar{P}_f} S_f^{\sigma_1}$. Il suffit de choisir σ_2 suffisamment voisin de $\Re\beta$ de façon que $\max(0, \sigma_H^f) - \sigma_1 > \Re\beta - \sigma_2$. Ceci est toujours possible et ne diminue pas la généralité de la démonstration.

Il en résulte

$$\int_{C_1^{*f}(\varepsilon)} L(s)\,\varphi(z-s)\frac{ds}{s^{1+k}} = -2\pi i \sum_{m=1}^{M} \frac{B_m}{\Gamma(m)} \left\{\frac{L(z-\beta)}{(z-\beta)^{1+k}}\right\}^{(m-1)} +$$

$$+ \sum_{m=1}^{M} B_m \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{L(s)\,ds}{s^{1+k}\,[s-(z-\beta)]^m} + \int_{C_1^{*f}(\varepsilon)} L(s)\,\varphi_0(z-s)\frac{ds}{s^{1+k}}$$

c étant choisi suffisamment loin sur le demi-plan réel positif de façon à satisfaire à la condition $c > \max(0, \sigma_H^f, \overline{\text{borne}}\,\Re(z-\beta))$, $z \in \Delta$. La seconde fonction est holomorphe pour $\Re z < c + \Re\beta$. La droite $\Re z = c + \Re\beta$ est d'ailleurs une coupure pour cette fonction mais qui peut être rejetée arbitrairement loin à droite. Le théorème A s'applique à la troisième fonction et, eu égard aux conditions (c), (d), on déduit que $\omega + \beta$ est régulier pour cette fonction; il est atteint dans le prolongement analytique de cette fonction le long du même arc $\mathfrak{C}$ que ci-dessus.

L'égalité précédente peut être considérée comme une équation différentielle linéaire, à coefficients constants, non homogène, satisfaite par la solution $L(z-\beta)/(z-\beta)^{1+k}$. Si la fonction $J_2(z)$ définie par l'intégrale du premier membre est holomorphe au point $\omega + \beta$, alors, en raison des propriétés bien connues des équations différentielles du type ici considéré et des propriétés de régularité des deux fonctions du membre droit, la solution $L(z-\beta)/(z-\beta)^{1+k}$ est régulière en ce point, résultat contradictoire avec l'hypothèse $\omega\,(\neq 0) \in \mathfrak{L}$, singulier pour $L(s)$. Par conséquent, $\omega + \beta$ est singulier pour $J_2(z)$. Pour les mêmes raisons, tout point de l'arc $\mathfrak{C}$, à l'exception évidemment de $\omega+\beta$, est régulier pour $J_2(z)$.

c. $F(s)$ est holomorphe à l'intérieur et sur le contour du domaine (ou des domaines) limité par $c^*(\mathfrak{L}, \varepsilon)$, ε suffisamment petit. Si $z \in \Delta$ et $s \in C_1^{*f}(\varepsilon)$, ε suffisamment petit, alors $(z-s) \in \complement_{P_\varphi} S_\varphi^{\sigma_2}$ et par conséquent $\varphi(z-s)$ considérée comme fonction de s est holomorphe lorsque s décrit $c^*(\mathfrak{L}, \varepsilon)$ ou est intérieur au domaine (ou aux domaines) limité par $c^*(\mathfrak{L}, \varepsilon)$. La fonction $J_3(z)$ définie par la troisième intégrale du second membre de (1) est identiquement nulle.

La réunion de résultats établit le théorème.

Théorème II. *Dans les hypothèses relatives à $f(s)$ et $\varphi(s)$ du théorème A (ou B) et le choix de l'entier $k > \nu + \mu$, si:*

a) $\omega\,(\neq 0)$ *est point isolé de $S_f^{\sigma_1}$, pôle de $f(s)$,*

b) $\beta \in S_\varphi^{\sigma_2}$,

c) $\gamma = \omega + \beta$ *est un* γ^*,

d) $\gamma \notin (S_\varphi^{\sigma_2} \cup \bar{S}'^{\sigma_1\sigma_2}_{f\varphi})$, *où $S'^{\sigma_1\sigma_2}_{f\varphi}$ est l'ensemble composé de $S_\varphi^{\sigma_2}$ et $S_f'^{\sigma_1}$ (déduit de $S_f^{\sigma_1}$ par suppression du point ω),*

alors, le point γ est singulier pour la fonction $H_M[f(s), \varphi(s) \mid k]$.

Pour ε suffisamment petit, la partie de $C_1^{*f}(\varepsilon)$ correspondant au point ω, que l'on note $c^*(\omega, \varepsilon)$, est disjointe de $\complement_{C_1^{*f}(\varepsilon)} c^*(\omega, \varepsilon)$. Choisissons z tel que $\Re z > \sigma_A^f + \sigma_A^\varphi + 2\varepsilon$.

Soit $c > \max(0, \sigma_H^f)$. Posons $f_\omega(s) = \sum_{i=1}^{\mathfrak{K}} \dfrac{A_i}{(s-\omega)^i}$, la partie principale de $f(s)$ au pôle ω, et

$$\frac{1}{s^{1+k}(s-\omega)^i} = \sum_{j=1}^{i} \frac{B_j^i}{(s-\omega)^j} + \sum_{j=1}^{1+k} \frac{D_j^i}{s^j}.$$

Le choix ci-dessus de z et ε permet d'écrire

$$\text{(I)}\quad \begin{aligned} \int_{C_1^{*f}(\varepsilon)} f(s)\,\varphi(z-s)\frac{ds}{s^{1+k}} &= \int_{C_1^{*f}(\varepsilon)} f_\omega(s)\,\varphi(z-s)\frac{ds}{s^{1+k}} + \\ &+ \int_{c^*(\omega,\varepsilon)} F(s)\,\varphi(z-s)\frac{ds}{s^{1+k}} + \int_{C_1^{*F}(\varepsilon)} F(s)\,\varphi(z-s)\frac{ds}{s^{1+k}}, \end{aligned}$$

où $F(s) = f(s) - f_\omega(s)$, $C_1^{*f}(\varepsilon) = c^*(\omega, \varepsilon) \cup C_1^{*F}(\varepsilon)$.

La première intégrale du second membre, $J_1(z)$, s'écrit en raison de la convergence absolue de la série pour le choix de z, et la légitimité de la permutation des signes $\sum$ et $\int$,

$$J_1(z) = \sum b_p\, e^{-z\mu_p} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} f_\omega(s)\, e^{s\mu_p} \frac{ds}{s^{1+k}}$$

d'où, par application de l'intégrale Hadamard–Perron, et après un calcul facile,

$$\text{(II)} \quad \begin{aligned} J_1(z) = 2\pi i \sum_{r=0}^{\mathfrak{K}-1} (-1)^r \frac{\varphi^{(r)}(z-\omega)}{\Gamma(r+1)} \sum_{j=r+1}^{\mathfrak{K}} A_j B_{r+1}^j + \\ + 2\pi i \sum_{r=1}^{1+k} (-1)^{r-1} \frac{\varphi^{(r-1)}(z)}{\Gamma(r)} \sum_{j=1}^{\mathfrak{K}} A_j D_r^j, \end{aligned}$$

les coefficients B_{r+1}^j, D_r^j dépendant de r, j, ω, k.

a. D'après (c) et (d), on a $\gamma \in \complement_{P_\varphi} S_\varphi^{\sigma_2}$. Par conséquent, γ est régulier pour la seconde fonction de (II). Mais γ est singulier pour la première fonction de (II) en vertu de (c) et des propriétés des équations différentielles du type linéaire à coefficients constants. En outre, cette fonction ne peut disparaître, c'est-à-dire qu'il n'existe, dans nos hypothèses, aucune fonction $f(s)$, ni aucun entier $k > \nu + \mu$, tels que les $\mathfrak{K}$ coefficients, $\sum_{j=r+1}^{\mathfrak{K}} A_j B_{r+1}^j$, $r = 0, 1, 2, \ldots, \mathfrak{K}-1$, soient tous nuls. Sinon ceci exigerait, comme le montre une application très simple des propriétés élémentaires des déterminants, qu'il existe au moins un entier j tel que $B_j^j = 0$. Mais on constate facilement que $B_j^j = \frac{1}{\omega^{1+k}}$, $1 \leq j \leq \mathfrak{K}$.

γ est singulier pour $J_1(z)$.

b. On constate que pour le choix de z, la fonction de z définie par la seconde intégrale de (I) est identiquement nulle.

c. $F(s)$ admet, par rapport à P_f, l'ensemble singulier $S_F^{\sigma_1} = S_f'^{\sigma_1}$. Elle est, comme $f(s)$, « uniforme U_M » et d'ordre O_M égal à ν dans P_f. L'étude des singularités « possibles » de la fonction définie par la troisième intégrale de (I) n'exige nullement que $F(s)$ soit représentable, dans un certain demi-plan, par une série de Dirichlet; les conclusions du théorème A (ou B) relatives aux singularités sont donc valables avec le choix $k > \nu + \mu$. Pour fixer les idées, utilisons le théorème A; appelant $J_3(z)$ la fonction à étudier, ses singularités « possibles » dans le demi-plan $\sigma > \max(0, \sigma_H^F(\sigma_1)) + \sigma_2$ sont les points de l'ensemble $S_\varphi^{\sigma_2} \cup \bar{S}_{f\,\varphi}'^{\sigma_1 \sigma_2}$. Eu égard à (c) et (d), le point γ est régulier pour $J_3(z)$.

Réunissons les résultats: il existe un arc de Jordan $\mathfrak{C}$, sans point multiple, d'origine z_0 ($\Re z_0 > \sigma_A^f + \sigma_A^\varphi + 2\varepsilon$), d'extrémité γ, dont tous les points, à l'exception de γ, sont intérieurs à $\complement_P (\bar{P} \cap (S_\varphi^{\sigma_2} \cup \bar{S}_{f\varphi}^{\sigma_1\sigma_2}))$ et réguliers pour $J_1(z)$ et $J_3(z)$ définies par prolongement analytique le long de cet arc.

Le point γ singulier pour $J_1(z)$ et régulier pour $J_3(z)$ est singulier pour $H_M[f(s), \varphi(s) \mid k]$.

Lorsque $s=0$ est pôle de $f(s)$, le théorème I s'énonce:

Théorème (II.2). *Dans les hypothèses relatives à $f(s)$, $\varphi(s)$, k du théorème I, si*

a) *l'origine est pôle de $f(s)$, isolé dans $S_f^{\sigma_1}$,*

b) *$\beta \in S_\varphi^{\sigma_2}$ est un β^*,*

c) *$\beta \notin \bar{S}'^{\sigma_1\sigma_2}_{f\varphi}$, fermeture de l'ensemble composé de $S_\varphi^{\sigma_2}$ et $S_f'^{\sigma_1}$ (déduit de $S_f^{\sigma_1}$ par suppression de l'origine)*

β est singulier pour la fonction $H_M[f(s), \varphi(s) \mid k]$.

La démonstration utilise, avec les mêmes précautions dans le choix de ε et z, l'égalité:

$$\text{(III)} \quad \begin{aligned} \frac{1}{2\pi i}\int_{C_1^{*f}(\varepsilon)} f\varphi \frac{ds}{s^{1+k}} &= \left\{\frac{1}{2\pi i}\int_{C_1^{*f}(\varepsilon)} f_0\varphi \frac{ds}{s^{1+k}} + \sum_{j=0}^{k}(-1)^j C_k^j F^{(k-j)}(0)\,\varphi^{(j)}(z)\right\} + \\ &+ \left\{\int_{C_1^{*F}(\varepsilon)} F\varphi \frac{ds}{s^{1+k}} - \sum_{j=0}^{k}(-1)^j C_k^j F^{(k-j)}(0)\,\varphi^{(j)}(z)\right\} \end{aligned}$$

où $f_0(s)$ est la partie principale de $f(s)$ à l'origine, $F(s) = f(s) - f_0(s)$. Il suffit de constater que $C_1^{*f}(\varepsilon) \equiv C_1^{*F}(\varepsilon)$.

β est singulier pour la première fonction du second membre et régulier (en vertu du th. B et c)), pour la seconde fonction. La réunion des résultats, eu égard à b), établit le théorème.

2. On sait que G. Pólya a énoncé que: si α est un pôle de $f(z) = \sum a_n z^n$ et le seul point singulier situé sur le cercle de convergence de la série, et si β est un point singulier quelconque de $\varphi(z) = \sum b_n z^n$ situé sur le cercle de convergence de cette série, alors $\alpha\beta$ est singulier pour $h(z) = \sum a_n b_n z^n$. (Lorsque α est une singularité plus compliquée, la conclusion subsiste pour β convenablement précisé. Comme nous nous limitons ici à des propriétés de type borelien nous ne nous étendrons pas davantage sur ce sujet, renvoyant le lecteur au beau mémoire[1]

[1] G. Pólya, «Untersuchungen über Lücken und Singularitäten von Potenzreihen», Annals of Math., 34 (1933). — Ce mémoire fait suite (et en utilise certains matériaux) au célèbre mémoire de même titre, Math. Zeit., 29 (1929), p. 549.

de cet auteur.) Ce résultat contient évidemment un résultat élémentaire primitif de E. BOREL qui suppose β pôle. Il est manifeste que les théorèmes antérieurs généralisent largement ce résultat de type borelien. Cependant lorsque $f(s)$ et $\varphi(s)$ sont, ce que S. MANDELBROJT a appelé des séries de Taylor-D, c'est-à-dire lorsque les suites $\{\lambda_n\}$ et $\{\mu_n\}$ sont identiques à la suite des entiers positifs, les théorèmes antérieurs ne sont plus applicables. En raison de la périodicité de la répartition des singularités, à tout point $\alpha+\beta$, $\alpha \in S_f^{\sigma_1}$, $\beta \in S_\varphi^{\sigma_2}$, correspond l'ensemble des couples $\alpha'=\alpha+2\pi n i$, $\beta'=\beta-2\pi n i$, $n=0, \pm 1, \pm 2, \ldots$. Or, l'hypothèse (d) des théorèmes I et II élimine précisément la possibilité d'existence de tels couples.

Cette remarque ne constitue pas une critique majeure du point de vue consistant à considérer les théorèmes antérieurs comme une généralisation du résultat rappelé de BOREL-PÓLYA. En effet, il suffit d'une modification très naturelle de la condition (d), modification qui tient compte du caractère de périodicité des fonctions $f(s)$, $\varphi(s)$, pour retrouver, avec le langage des séries de Taylor-D, le résultat de BOREL-PÓLYA sous une forme un peu plus générale.

Pour satisfaire à l'unité de l'exposé on introduit quelques précautions de langage:

Soient α complexe et $\Im\alpha$ la partie imaginaire de α. J'appelle «résidu minimum positif» de $\Im\alpha$, module 2π, le plus petit nombre r positif (ou nul) satisfaisant à une égalité de la forme $\Im\alpha=r+2\pi p$, p entier, et je le note $(\Im\alpha)_0$; $\Im\alpha\equiv(\Im\alpha)_0 \pmod{2\pi}$. J'appelle «affixe réduite» d'un point d'affixe α, et je la note α_0, le nombre complexe $\alpha_0=\Re\alpha+i(\Im\alpha)_0$.

Par T je désigne l'ensemble des points $s=\sigma+it$, $0\leq t<2\pi$. $B_f^{\sigma_1}$ est défini par l'égalité $B_f^{\sigma_1}=T\cap S_f^{\sigma_1}$, et $B_\varphi^{\sigma_2}=T\cap S_\varphi^{\sigma_2}$.

Le théorème suivant, dont la démonstration plus délicate utilise les mêmes méthodes que les théorèmes antérieurs, légitime notre point de vue.

Théorème III. *Dans les hypothèses:*

a) $f(s)$ *et* $\varphi(s)$ *sont des séries de Taylor-D,*

b) $\gamma=\omega+\beta$ *est un* γ^*,

c) il n'existe aucun point de l'ensemble $\bar{B}'^{\sigma_1\sigma_2}_{f\varphi}\cup B_\varphi^{\sigma_2}$ *dont «l'affixe reduite» soit égale à «l'affixe réduite» du point d'affixe* $\omega+\beta$,

où:

$\beta\in S_\varphi^{\sigma_2}$,

ω $(\omega_0\neq 0)$ *isolé dans* $S_f^{\sigma_1}$ *est pôle de* $f(s)$,

$B'^{\sigma_1\sigma_2}_{f\varphi}$ *est l'ensemble composé de* $B_\varphi^{\sigma_2}$ *et* $B_f'^{\sigma_1}$ *(déduit de* $B_f^{\sigma_1}$ *par suppression de* ω_0*), tous les points* $\omega+\beta+2\pi n i$, $n=0, \pm 1, \pm 2, \ldots$, *sont singuliers pour la fonction* $H_M[f(s), \varphi(s)\,|\,k]$, k *entier* ≥ 1.

Théorème III.2. *L'assertion du théorème III reste vraie si* $\omega_0 = 0$ *à condition de remplacer l'hypothèse* (c) *par:*

(c′) *il n'existe aucun point de* $\bar{B}'^{\sigma_1}_{f}{}^{\sigma_2}_{\varphi}$ *dont «l'affixe réduite» soit égale à* β_0, *«affixe réduite» de* β, ($B'^{\sigma_1}_f$ *déduit de* $B^{\sigma_1}_f$ *par suppression du point origine*).

Nous ne démontrons pas ces théorèmes, la démonstration de leurs analogues de type faberien devant paraître prochaine dans un autre périodique.

III.

Au chapitre II, on a fait un usage systématique des propriétés élémentaires des équations différentielles linéaires, non homogènes, à coefficients constants, d'ordre fini. Le passage du type borelien au type faberien de problèmes aboutit à l'introduction d'équations différentielles d'un type dont l'étude est plus délicate et moins avancée, celui des équations différentielles linéaires non homogènes, à coefficients constants, d'ordre infini. C'est là que réside la difficulté du sujet traité lorsque l'on maintient une hypothèse de l'espèce (d) des théorèmes I et II. Les théorèmes de composition que l'on est en mesure d'énoncer avec les méthodes introduites ci-dessus, sont tributaires de l'état d'avancement de cette théorie.

Si l'on élargit cette hypothèse dans le sens de l'existence, correspondant au point $\gamma = \alpha_0 + \beta_0$ étudié, d'un nombre, par exemple fini, N, de couples $\alpha_n \in S^{\sigma_1}_f$, $\beta_n \in S^{\sigma_2}_\varphi$, tels que $\gamma = \alpha_n + \beta_n$, $n = 1, 2, \ldots, N$, à l'exclusion de tout autre couple, les mêmes méthodes introduisent la considération d'équations différentielles aux différences. C'est un problème de cette espèce, que l'on se propose d'étudier dans ce chapitre à l'aide d'une méthode qui utilise les propriétés élémentaires des déterminants d'ordre fini et un résultat (énoncé sans démonstration, à l'exception de brèves indications, par G. Pólya[1] et développé par E. Schwengeler[2]) relatif à la distribution des zéros de polynomes exponentiels généralisés dont les coefficients sont des polynomes algébriques. On énonce le résultat de Pólya–Schwengeler sous forme de lemme. Quelques notations préliminaires simplifieront son énoncé. En outre, comme à ma connaissance, la thèse de E. Schwengeler, dans laquelle figure cette propriété n'a pas fait l'objet d'une publication dans un périodique, il n'est pas inutile, je crois, de donner la démonstration de ce lemme; celui-ci étant un cas particulier et élémentaire de la

[1] G. Pólya, «Geometrisches über die Verteilung der Nullstellen gewisser ganzer transzendenter Funktionen», Sitzungsberichte der Bayerischen Akademie der Wissenschaften. Math.-phys. Klasse. München, 1920.

[2] E. Schwengeler, «Geometrisches über die Verteilung der Nullstellen spezieller ganzer Funktionen.» (Dissertation, Zürich, 1925).

théorie des zéros des fonctions entières, on conservera à sa démonstration un caractère volontairement élémentaire.

Posons $\pi(z) = \sum_{t=1}^{t=m} P_t(z) e^{z\alpha_t}$, où les $P_t(z)$ sont des polynomes et les α_t sont des constantes complexes distinctes. Considérons le plus petit polygone convexe contenant dans sa fermeture les points d'affixe $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ du plan de la variable z. Soit $\mathfrak{P}$ ce polygone et soient $\alpha_{n_1}, \alpha_{n_2}, \ldots, \alpha_{n_\nu}$ ses sommets, $n_i \leq m$, $i = 1, 2, \ldots \nu$; il se peut que $\nu < m$. Ordonnons ces ν sommets de sorte que, les appelant $\alpha'_1, \alpha'_2, \ldots \alpha'_\nu$, on les rencontre successivement dans l'ordre naturel des indices quand on tourne dans le sens positif par rapport au polygone. α'_1 est choisi arbitrairement parmi les α_{n_i}; pour préciser ce choix, on peut prendre par exemple α'_1 tel que $\Re\,\alpha'_J \geq \Re\,\alpha'_1$, $J > 1$. Considérons $\overline{\mathfrak{P}}$, le polygone image du polygone $\mathfrak{P}$, par rapport à l'axe réel. Ses sommets sont $\bar\alpha'_1, \bar\alpha'_2, \ldots \bar\alpha'_\nu$. Considérons les rayons issus de l'origine et engendrés par les points $i\varrho(\bar\alpha'_2 - \bar\alpha'_1)$, $i\varrho(\bar\alpha'_3 - \bar\alpha'_2)$, $\ldots$ $i\varrho(\bar\alpha'_\nu - \bar\alpha'_{\nu-1})$, $i\varrho(\bar\alpha'_1 - \bar\alpha'_\nu)$, $\varrho \geq 0$.

Avec ces rayons pour axes de symétrie, construisons les secteurs de sommet $z = 0$ et d'ouverture 2ε, $\varepsilon > 0$. Chacun d'eux constitue un ensemble fermé. On suppose ε choisi de sorte que deux quelconques de ces secteurs n'aient aucun point commun, à distance finie, à l'exception de l'origine. Notons S_λ le secteur contenant le point $i(\bar\alpha'_{\lambda+1} - \bar\alpha'_\lambda)$, $\lambda = 1, 2, \ldots, \nu - 1$, et S_ν celui contenant le point $i(\bar\alpha'_1 - \bar\alpha'_\nu)$. Notons S'_λ le secteur de sommet $z = 0$, limité par des rayons frontières des secteurs S_λ et $S_{\lambda+1}$, et ne contenant aucun des points $i(\bar\alpha'_{\lambda+1} - \bar\alpha'_\lambda)$, $\lambda = 1, 2, \ldots, \nu - 1$, ni $i(\bar\alpha'_1 - \bar\alpha'_\nu)$; S'_ν est le secteur limité par des rayons frontières de S_ν et S_1, et ne contenant aucun des points $i(\bar\alpha'_{\lambda+1} - \bar\alpha'_\lambda)$, ni $i(\bar\alpha'_1 - \bar\alpha'_\nu)$, $\lambda = 1, 2, \ldots, \nu - 1$.

On achève de caractériser les ensembles S'_λ en les assujettissant à ne contenir aucun de leurs points frontières situés à distance finie, à l'exclusion du sommet. Donc pour $z \neq 0$, $|z| < \infty$, si $z \in S'_\lambda$ alors $z \notin S_\mu$, réciproquement si $z \in S_\lambda$ alors $z \notin S'_\mu$; λ, μ prenant indépendamment l'un de l'autre les valeurs $1, 2, \ldots, \nu$.

Lemme. *Il n'existe qu'un nombre fini de zéros de la fonction $\pi(s)$ hors des secteurs $S_1, S_2, \ldots S_\nu$, aussi petit que soit $\varepsilon > 0$.*

Posons $\arg(\alpha'_{\lambda+1} - \alpha'_\lambda) = \theta_\lambda$, $\lambda = 1, 2, \ldots, \nu - 1$, et $\arg(\alpha'_1 - \alpha'_\nu) = \theta_\nu$, où $0 \leq \theta_1 < 2\pi$ et où θ_λ est le plus petit des arguments de $\alpha'_{\lambda+1} - \alpha'_\lambda$ supérieur à $\theta_{\lambda-1}$, $\lambda = 2, \ldots, \nu - 1$; θ_ν étant le plus petit des arguments de $\alpha'_1 - \alpha'_\nu$ supérieur à $\theta_{\nu-1}$. On prend $\arg(\bar\alpha'_{\lambda+1} - \bar\alpha'_\lambda) = -\theta_\lambda$, $\arg i(\bar\alpha'_{\lambda+1} - \bar\alpha'_\lambda) = \frac{\pi}{2} - \theta_\lambda$, $\lambda = 1, 2, \ldots, \nu - 1$, $\arg(\bar\alpha'_1 - \bar\alpha'_\nu) = -\theta_\nu$, arg $i(\bar{\alpha}'_1 - \bar{\alpha}'_\nu) = \frac{\pi}{2} - \theta_\nu$. Considérons S'_{λ_0}, λ_0 choisi arbitrairement, mais fixe, parmi les ν premiers entiers. Je dis que ce secteur ne renferme qu'un nombre fini, au plus, de zéros de $\pi(z)$. Soit $c(0, \varrho)$ un cercle renfermant la totalité des zéros des polynomes $P_t(z)$, et soit $z \in \complement_{S'_{\lambda_0}} (S'_{\lambda_0} \cap \bar{c}(0, \varrho))$. α'_{λ_0+1} est un des α_t, par exemple α_{t_0}; on a:

$$\frac{\pi(z)}{P_{t_0}(z)\, e^{\alpha'_{\lambda_0+1} z}} = 1 + \sum_{t(\neq t_0)=1}^{m} \frac{P_t(z)}{P_{t_0}(z)}\, e^{(\alpha_t - \alpha'_{\lambda_0+1}) z}.$$

Dans le domaine précisé, cette fonction est évidemment holomorphe, quel que soit le choix de λ_0 fait ci-dessus. On voit facilement que pour $t \neq t_0$, l'égalité arg $(\alpha_t - \alpha'_{\lambda_0+1}) = \theta_{\lambda_0+1} + \xi_t \pi$, $0 \leq \xi_t < 1$, est légitime.

D'où

$$\frac{\pi}{2} + \varepsilon \leq \frac{\pi}{2} + \varepsilon + \xi_t \pi < \arg\{(\alpha_t - \alpha'_{\lambda_0+1})\, z\} < \frac{\pi}{2} + \theta_{\lambda_0+1} - \theta_{\lambda_0} - \varepsilon + \xi_t \pi \leq \frac{3\pi}{2} - \varepsilon$$

et

$$\lim_{|z| \to \infty} \sum_{t(\neq t_0)=1}^{m} \frac{P_t(z)}{P_{t_0}(z)}\, e^{(\alpha_t - \alpha'_{\lambda_0+1}) z} = 0.$$

Ainsi dans le domaine ci-dessus, $\pi(z)$ a la forme $P_{t_0}(z)\, e^{\alpha'_{\lambda_0+1} z}\,(1 + \eta(z))$, $\eta(z)$ y étant holomorphe et $\lim_{|z| \to \infty} \eta(z) = 0$. Le lemme est dès lors évident.

Théorème IV. *Dans les hypothèses relatives à $f(s)$ et $\varphi(s)$ du théorème A, jointes aux suivantes:*

a) $\alpha_n\,(\neq 0)$, $n = 0, 1, 2, \ldots N$, *points isolés de $S_f^{\sigma_1}$, sont des pôles de $f(s)$ ne vérifiant aucune relation de la forme $P(\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_N) = 0$, où P est un polynome à coefficients entiers, par rapport aux arguments α_n,*

b) $\Re\, \alpha_n \neq 0$, $\Re\, \alpha_n \neq \Re\, \alpha_{n'}$, $n \neq n'$,

c) il existe $\beta_n \in S_\varphi^{\sigma_2}$ tels que $\gamma = \alpha_0 + \beta_0 = \alpha_n + \beta_n$, $n = 1, 2, \ldots N$, soit un γ^*,

d) $\gamma \notin (S_\varphi^{\sigma_2} \cup \bar{S}'^{\sigma_1 \sigma_2}_{f \varphi})$, où $S'^{\sigma_1 \sigma_2}_{f \varphi}$ est l'ensemble composé des ensembles $S_\varphi^{\sigma_2}$ et $S'^{\sigma_1}_f$ (déduit de $S_f^{\sigma_1}$ par suppression des $N+1$ points α_n),

il existe un entier k_0 fini (dépendant du choix de $f(s)$ et $\varphi(s)$) tel que le point γ est singulier pour chaque fonction $H_M[f(s), \varphi(s) | k]$, k entier $\geq k_0$.

On exposera brièvement les parties de la démonstration qui ne présentent pas de nouveauté.

Posons: $f_{\alpha_n}(s) = \sum_{j=1}^{\mathfrak{K}_n} \frac{A_j^n}{(s - \alpha_n)^j}$ la partie principale de $f(s)$ au pôle α_n d'ordre $\mathfrak{K}_n$,

$$\mathfrak{F}(s)=\sum_{n=0}^{N} f_{\alpha_n}(s),\ \mathfrak{F}(s)=f(s)-F(s).$$

Soient $c>\max(0,\sigma_A^f)$, $z\in\Delta$, Δ étant un domaine borné tel que, pour z quelconque dans ce domaine, on ait $\Re z>c+\sigma_A^\varphi+2\varepsilon$, $\varepsilon>0$. Soit ε choisi suffisamment petit de sorte que, appellant $c^*(\alpha_n,\varepsilon)$ la partie de $C_1^{*f}(\varepsilon)$ correspondant au pôle α_n, on ait:

$$c^*(\alpha_n,\varepsilon)\cap \complement_{C_1^{*f}(\varepsilon)} c^*(\alpha_n,\varepsilon)=\phi,\ n=0,1,2,\ldots,N.$$

Il résulte de ce choix, compte tenu des remarques faites au théorème II sur les fonctions de l'égalité (I) que, pour $z\in\Delta$, on a:

$$\int_{C_1^{*f}(\varepsilon)} f(s)\,\varphi(z-s)\frac{ds}{s^{1+k}}=\int_{C_1^{*\mathfrak{F}}(\varepsilon)} \mathfrak{F}(s)\,\varphi(z-s)\frac{ds}{s^{1+k}}+\sum_{n=0}^{N}\int_{C_1^{*f}(\varepsilon)} f_{\alpha_n}(s)\,\varphi(z-s)\frac{ds}{s^{1+k}}.$$

La démonstration du théorème II ne nécessitait pas d'expliciter le calcul des coefficients B_j^i, D_j^i de l'égalité (II); il est utile, pour ce qui suit, de combler cette lacune. Un calcul facile montre que

$$\frac{1}{s^{1+k}(s-\alpha_n)^i}=\sum_{j=1}^{i}(-1)^{i+j}\frac{C_{k+i-j}^{k}}{\alpha_n^{k+i-j+1}(s-\alpha_n)^j}+(-1)^i\sum_{j=1}^{1+k}\frac{C_{k+i-j}^{k-j+1}}{\alpha_n^{k+i-j+1}\,s^j},$$

où les C_{k+i-j}^{k}, C_{k+i-j}^{k-j+1} sont des coefficients binomiaux. Posons

$$\Phi_n(z)=\frac{\Gamma(k+1)}{2\pi i}\int_{C_1^{*f}(\varepsilon)} f_{\alpha_n}(s)\,\varphi(z-s)\frac{ds}{s^{1+k}},\ z\in\Delta.$$

Se rapportant à la démonstration du théorème II et aux expressions ci-dessus des constantes B_j^i, D_j^i, on a:

$$\Phi_n(z)=\Gamma(k+1)\sum_{r=0}^{\mathfrak{K}_n-1}\frac{\varphi^{(r)}(z-\alpha_n)}{\Gamma(r+1)}\sum_{j=r+1}^{\mathfrak{K}_n}(-1)^{j-1}\frac{A_j^n\,C_{k+j-r-1}^{k}}{\alpha_n^{k+j-r}}$$
$$+\Gamma(k+1)\sum_{r=0}^{k}(-1)^r\frac{\varphi^{(r)}(z)}{\Gamma(r+1)}\sum_{j=1}^{\mathfrak{K}_n}(-1)^j\frac{A_j^n\,C_{k+j-r-1}^{k-r}}{\alpha_n^{k+j-r}},$$

k entier $>\nu+\mu$.

Posons $\gamma_r^n(k)=\Gamma(k+1)\sum_{j=r+1}^{\mathfrak{K}_n}(-1)^{j-1}\dfrac{A_j^n\,C_{k+j-r-1}^{k}}{\alpha_n^{k+j-r}}$.

On sait (théorème II) que les $\mathfrak{K}_n$ coefficients, $\gamma_r^n(k)$, $r=0, 1, 2, \ldots \mathfrak{K}_n-1$, correspondants à un même indice n, ne peuvent être simultanément nuls. En vertu de (c) et (d), le point γ est régulier pour la seconde fonction du membre droit représentant $\Phi_n(z)$. La condition (b) entraîne que la fonction $\varphi(z)$ ne peut être solution de l'équation fonctionnelle $\sum_{n=0}^{N} \Phi_n(z)=0$, ni de l'équation fonctionnelle

$$\psi(z\,|\,k) \equiv \sum_{n=0}^{N} \Phi_n^*(z)=0,$$

où on pose

$$\Phi_n^*(z)=\sum_{r=0}^{\mathfrak{K}_n-1} \frac{\varphi^{(r)}(z-\alpha_n)}{\Gamma(r+1)}\,\gamma_r^n(k).$$

Cette assertion constitue un point important de la démonstration. Le raisonnement qui la justifie est exposé en détail dans un passage de la démonstration qui suit où l'on étudie une équation fonctionnelle de même espèce que celles ci-dessus.

Je dis qu'il existe un entier k_0 tel que pour chaque entier $k \geq k_0$, chaque fonction $\psi(z\,|\,k)$ admet γ pour point singulier. En effet, sinon, quel que soit l'entier choisi fixe $k' > \nu+\mu$, on peut toujours trouver $N_0\,(=\sum_{n=0}^{N} \mathfrak{K}_n)$ entiers, $k_1 < k_2 < \cdots < k_{N_0}$, $k_1 > k'$, pour lesquels les N_0 fonctions $\psi(z\,|\,k_i)$ associées aux entiers k_i sont régulières au point γ.

Supposons ce choix fait et considérons, associé à l'ensemble fini de ces N_0 fonctions:

$$\psi(z\,|\,k_i)=\sum_{r=0}^{\mathfrak{K}_0-1} \frac{\varphi^{(r)}(z-\alpha_0)}{\Gamma(r+1)}\,\gamma_r^0(k_i)+\sum_{r=0}^{\mathfrak{K}_1-1} \frac{\varphi^{(r)}(z-\alpha_1)}{\Gamma(r+1)}\,\gamma_r^1(k_i)+\cdots+\sum_{r=0}^{\mathfrak{K}_n-1} \frac{\varphi^{(r)}(z-\alpha_N)}{\Gamma(r+1)}\,\gamma_r^N(k_i),$$
$$i=1, 2, \ldots, N_0,$$

le déterminant $D(k_1, k_2, \ldots k_{N_0})=\|\gamma_r^n(k_i)\|$, où $\gamma_r^n(k_i)$ est le terme du tableau situé au croisement de la $i^{\text{ème}}$ ligne et de la colonne de rang $r+1+\sum_{p=0}^{n-1} \mathfrak{K}_p$.

On ne se propose pas l'étude directe de la valeur du déterminant. Deux cas sont donc, «a priori», possibles:

$D(k_1, \ldots, k_{N_0}) \neq 0$, alors les fonctions $\varphi(z-\alpha_n)$, $n=0, 1, 2, \ldots, N$, peuvent s'exprimer linéairement à l'aide des fonctions $\psi(z\,|\,k_i)$, $i=1, 2, \ldots, N_0$, et le point γ serait régulier pour chacune d'elles. Ce cas est à rejeter.

$D(k_1, \ldots, k_{N_0})=0$; soit h, $1 \leq h \leq N_0-1$, l'ordre du déterminant principal extrait du tableau $\|\gamma_r^n(k_i)\|$. Si on considère le système des formes

$$\sum_{n=0}^{N} \sum_{r=0}^{\mathfrak{K}_n - 1} X_r^n \gamma_r^n (k_i), \quad i = 1, 2, \ldots, N_0,$$

où les variables sont les X_r^n, on sait qu'il existe h formes indépendantes et que les autres formes du système s'expriment linéairement en fonction de celles-ci.

(Pour éviter l'introduction d'un nouveau symbole, il n'y a aucun inconvénient à conserver la notation $\psi(z|k_i)$ pour les formes ci-dessus). Il existe donc au moins, parmi les $\psi(z|k_i)$, une forme, soit $\psi(z|k_{i_0})$ cette forme, et des entiers $i_1, i_2, \ldots, i_h$, appartenant aux N_0 premiers entiers, tels que

$$\text{(III.1)} \qquad \psi(z|k_{i_0}) + \sum_{m=1}^{h} A_{i_m} \psi(z|k_{i_m}) \equiv 0,$$

les formes $\psi(z|k_{i_m})$ étant des formes indépendantes, $m = 1, 2, \ldots, h$. Les constantes A_{i_m} ne sont pas toutes nulles. On sait que les A_{i_m} sont, à un coefficient près (le même pour ces h constantes puisque c'est la valeur du déterminant principal d'ordre h), des mineurs du déterminant caractéristique construit avec les coefficients des formes $\psi(z|k_{i_m})$, $m = 0, 1, 2, \ldots, h$.

L'identité (III.1) s'obtient en développant, suivant sa dernière colonne, le déterminant obtenu en bordant le déterminant principal issu du tableau $\|\gamma_r^n(k_i)\|$ par les coefficients de la forme $\psi(z|k_{i_0})$, (qui constituent la dernière ligne), et par les formes $\psi(z|k_{i_m})$, $m = 0, 1, 2, \ldots, h$, (qui constituent la dernière colonne). Mettant en évidence les X_r^n, on obtient les relations

$$\gamma_r^n(k_{i_0}) + \sum_{m=1}^{h} A_{i_m} \gamma_r^n(k_{i_m}) = 0, \; r = 0, 1, 2, \ldots, \mathfrak{K}_n - 1; \; n = 0, 1, 2, \ldots, N.$$

Chacune de ces expressions est le développement d'un déterminant à $h+1$ lignes et colonnes, nul comme ayant deux colonnes identiques ou bien comme déterminant d'ordre $h+1$ issu du tableau. Il est évident que l'identité (III.1) est vraie quand on remplace (avec correspondance des indices) les X_r^n par les

$$\varphi^{(r)}(z - \alpha_n) / \Gamma(r+1), \quad z \in \Delta:$$

$$\text{(III.2)} \qquad \frac{1}{2\pi i} \int_{C_1^{*f}(\varepsilon)} F(s) \varphi(z-s) \left\{ \frac{\Gamma(k_{i_0}+1)}{s^{1+k_{i_0}}} + \sum_{m=1}^{h} A_{i_m} \frac{\Gamma(k_{i_m}+1)}{s^{1+k_{i_m}}} \right\} ds = \mathfrak{X}(z),$$

avec

$$\mathfrak{X}(z) = \Gamma(k_{i_0}+1)\sum_{r=0}^{k_{i_0}}(-1)^r \frac{\varphi^{(r)}(z)}{\Gamma(r+1)}\left(\sum_{n=0}^{N}\sum_{j=1}^{\mathfrak{K}_n}\cdots\right)$$
$$+\sum_{m=1}^{h} A_{i_m}\Gamma(k_{i_m}+1)\sum_{r=0}^{k_{i_m}}(-1)^r\frac{\varphi^{(r)}_{(z)}}{\Gamma(r+1)}\left(\sum_{n=0}^{N}\sum_{j=1}^{\mathfrak{K}_n}\cdots\right).$$

Posons $k^* = \overline{\text{borne}}\, k_{i_m}$, $k_* = \underline{\text{borne}}\, k_{i_m}$, $m = 0, 1, 2, \ldots, h$.

Ecrivons (III.2) sous la forme condensée, $\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{C_1^{*f}(\varepsilon)} F\varphi P\frac{ds}{s^{1+k^*}} = \mathfrak{X}(z)$, $P(s)$ polynome de degré $k^* - k_*$ au plus.

Si $\psi(z\,|\,k_{N_0})$ est une des formes indépendantes, alors $k^* = k_{N_0}$, sinon elle est liée aux formes indépendantes et on choisit précisément pour i_0 l'entier N_0, donc on a encore $k^* = k_{N_0}$.

Les α_n sont racines de $P(s)$. En effet, faisons $r = \mathfrak{K}_n - 1$ dans $\gamma_r^n(k_{i_m})$ et $s = \alpha_n$ dans

$$\left\{\frac{\Gamma(k_{i_0}+1)}{s^{1+k_{i_0}}} + \sum_{m=1}^{h} A_{i_m}\frac{\Gamma(k_{i_m}+1)}{s^{1+k_{i_m}}}\right\}$$

on obtient:

$$\gamma^n_{\mathfrak{K}_n-1}(k_{i_m}) = (-1)^{\mathfrak{K}_n-1}A^n_{\mathfrak{K}_n}\frac{\Gamma(k_{i_m}+1)}{\alpha_n^{k_{i_m}+1}}$$

et

$$\frac{(-1)^{\mathfrak{K}_n-1}}{A^n_{\mathfrak{K}_n}}\left\{\gamma^n_{\mathfrak{K}_n-1}(k_{i_0}) + \sum_{m=1}^{h} A_{i_m}\gamma^n_{\mathfrak{K}_n-1}(k_{i_m})\right\} = \frac{P(\alpha_n)}{\alpha_n^{1+k^*}} = 0.$$

Il est impossible que les α_n soient racines de $P(s)$, toutes à l'ordre respectif $\mathfrak{K}_n$. Sinon, on devrait avoir:

$$\frac{\Gamma(t+k_{i_0}+1)}{\alpha_n^{t+k_{i_0}+1}} + \sum_{m=1}^{h} A_{i_m}\frac{\Gamma(t+k_{i_m}+1)}{\alpha_n^{t+k_{i_m}+1}} = 0,$$

ou, en introduisant les $\gamma_r^n(k)$,

$$\gamma^n_{\mathfrak{K}_n-1}(t+k_{i_0}) + \sum_{m=1}^{h} A_{i_m}\gamma^n_{\mathfrak{K}_n-1}(t+k_{i_m}) = 0,$$

$t = 0, 1, 2, \ldots, \mathfrak{K}_n - 1$; $n = 0, 1, 2, \ldots, N$.

Ainsi les constantes $1, A_{i_1}, A_{i_2}, \ldots, A_{i_h}$ constitueraient un système de solutions des N_0 équations homogènes à $h+1$ inconnues X_m, $m = 0, 1, 2, \ldots, h$:

$$\sum_{m=0}^{h} X_m\gamma^n_{\mathfrak{K}_n-1}(t+k_{i_m}) = 0,$$

$t = 0, 1, 2, \ldots, \mathfrak{K}_n - 1$; $n = 0, 1, 2, \ldots, N$.

Mais, en raison de (a), ce système ne peut admettre que la seule solution $X_m = 0$. La contradiction établit l'assertion. (Il en résulte que, dans le cas étudié,

$$D(k_1, \ldots, k_{N_0}) = 0,$$

il est impossible que les α_n soient tous pôles d'ordre 1 de $f(s)$).

On a donc:

$$F(s)\,P(s) = E(s) + \frac{P_1(s)}{\prod_{n=0}^{N}(s-\alpha_n)^{\mathfrak{K}'_n}},$$

$E(s)$ et $P_1(s)$ étant des polynomes, $P_1(s)$ n'admettant aucun α_n pour racine et étant de degré au plus égal à $\sum_{n=0}^{N} \mathfrak{K}'_n - 1$, $0 \leq \mathfrak{K}'_n \leq \mathfrak{K}_n$; $P_1(s) \not\equiv 0$.

Par conséquent:

$$\begin{aligned}\frac{1}{2\pi i}\int_{C_1^{*\,f(e)}} PF\varphi\frac{ds}{s^{1+k^*}} &= \sum_{q=0}^{Q}(-1)^{k^*-q}\frac{B_q\,\varphi_{(z)}^{(k^*-q)}}{\Gamma(k^*-q+1)} \\ &+ \frac{1}{\Gamma(k^*+1)}\sum_{n=0}^{N}\sum_{r=0}^{\mathfrak{K}'_n-1}\frac{\varphi^{(r)}(z-\alpha_n)}{\Gamma(r+1)}\gamma_r'^{\,n}(k^*) \\ &+ \sum_{n=0}^{N}\sum_{r=0}^{k^*}(-1)^r\frac{\varphi_{(z)}^{(r)}}{\Gamma(r+1)}\sum_{j=1}^{\mathfrak{K}'_n}(-1)^j\frac{A_j'^{\,n}\,C_{k^*+j-r-1}^{k^*-r}}{\alpha_n^{k^*+j-r}} = \mathfrak{X}(z),\end{aligned} \tag{III.3}$$

où on a posé:

$$E(s) = \sum_{q=0}^{Q} B_q\,s^q,\quad \frac{P_1(s)}{\prod_{n=0}^{N}(s-\alpha_n)^{\mathfrak{K}'_n}} = \sum_{n=0}^{N}\sum_{j=1}^{\mathfrak{K}'_n}\frac{A_j'^{\,n}}{(s-\alpha_n)^j},$$

$\gamma_r'^{\,n}(k^*)$ est obtenu en substituant $A_j'^{\,n}$, $\mathfrak{K}'_n$ et k^* respectivement à A_j^n, $\mathfrak{K}_n$ et k dans l'expression $\gamma_r^n(k)$.

Les coefficients $\gamma_r'^{\,n}(k^*)$ correspondants à un même indice n ne peuvent être *simultanément nuls.*[1]

(III.3) est une expression de la forme:

$$\sum_{n=0}^{N}\sum_{r=0}^{\mathfrak{K}'_n-1}\frac{\varphi^{(r)}(z-\alpha_n)}{\Gamma(r+1)}\gamma_r'^{\,n}(k^*) + \sum_{r=0}^{Q'}\frac{\varphi_{(z)}^{(r)}}{\Gamma(r+1)}\delta_r = 0, \tag{III.4}$$

les δ_r étant des constantes.

---

[1] Il est bien entendu que les coefficients $\gamma_r'^{\,n}(k^*)$ proviennent de pôles α_n pour lesquels $\mathfrak{K}'_n \geq 1$; les pôles α_n pour lesquels $\mathfrak{K}'_n = 0$ disparaîssant, en fait, du produit $\prod_0^N (s-\alpha_n)^{\mathfrak{K}'_n}$.

Posons

$$\theta(z) = \sum_{n=0}^{N} e^{\alpha_n z} \sum_{r=0}^{\mathfrak{R}_n'-1} (-1)^r \frac{\gamma_r'^{\,n}(k^*) z^r}{\Gamma(r+1)} + \sum_{r=0}^{Q'} \frac{(-1)^r \delta_r z^r}{\Gamma(r+1)}.$$

Si $\varphi(z)$ était une solution de l'équation fonctionnelle (III.4), on aurait

$$\sum_{p=1}^{\infty} b_p\, \theta(\mu_p)\, e^{-z\mu_p} = 0,\ z \in \Delta,$$

ce qui exigerait $\theta(\mu_p) = 0$, $p = 1, 2, \ldots, \infty$ (ceci suppose $b_p \neq 0$, $p = 1, 2, \ldots, \infty$, ce qui ne diminue d'ailleurs pas la généralité du raisonnement. Sinon, il suffit de constater que $\sum b_p\, \theta(\mu_p)\, e^{-z\mu_p} = 0$ exige qu'il existe une suite infinie d'entiers $P_i \uparrow \infty$ tels que $\theta(\mu_{p_i}) = 0$). En vertu de (b), le plus petit polygone convexe, contenant dans sa fermeture l'origine et les points α_n, n'a pas de côté parallèle (ou confondu) à l'axe imaginaire. En vertu du lemme, dans un secteur de sommet à l'origine ayant le demi-axe réel positif pour axe de symétrie et d'ouverture 2ε, $\varepsilon > 0$ suffisamment petit, il n'existe qu'un nombre fini, au plus, de zéros de $\theta(z)$. Donc $\varphi(z)$ ne peut être solution de l'équation fonctionnelle (III.4) et donc $D(k_1, \ldots, k_{N_0}) \neq 0$; γ serait alors régulier pour $\varphi(z - \alpha_n)$. Cette contradiction entraîne, également dans ce cas, l'existence d'un k_0 tel que pour chaque entier $k \geq k_0$, chaque fonction $\psi(z|k)$ admet γ pour point singulier. En vertu de (c) et (d), γ est régulier pour la fonction définie par l'intégrale

$$\int_{C_1^{*\,\lambda(\varepsilon)}} \mathfrak{F}(s)\, \varphi(z-s)\, \frac{ds}{s^{1+k}}.$$

La réunion des résultats, compte tenu que γ est un γ^*, établit le théorème.

Théorème IV.2. *Si les pôles α_n sont tous du premier ordre, l'assertion du théorème IV est vraie sans l'hypothèse* b).

Cette proposition résulte immédiatement, comme cas particulier, de la démonstration ci-dessus. Ici, $\mathfrak{R}_n = 1$, et on a $D(k_1, \ldots, k_{N_0}) \neq 0$, sinon les constantes Λ_{i_m} devraient satisfaire aux conditions

$$\gamma_0^n(k_{i_0}) + \sum_{m=1}^{h} \Lambda_{i_m} \gamma_0^n(k_{i_m}) = 0,\ n = 0, 1, 2, \ldots, N,\ N_0 = N+1,$$

ce qui est impossible en raison de a); mais cette condition relative au déterminant est à rejeter, d'où résulte le théorème.

Remarquons qu'ici l'étude directe du déterminant $D(k_1, \ldots, k_{N_0})$ est très simple. La fonction $\psi(z|k)$ se réduit à

$$\sum_{n=0}^{N} \varphi(z-\alpha_n)\,\gamma_0^n(k) \equiv \Gamma(k+1) \sum_{n=0}^{N} \varphi(z-\alpha_n)\,\frac{A_1^n}{\alpha^{1+k}}.$$

On a $D(k_1, \ldots, k_{N_0}) = \left(\prod_{n=0}^{N} A_1^n\right)\left(\prod_{i=1}^{N_0} \Gamma(k_i+1)\right)\cdot\|\alpha_n^{-k_i-1}\|$, où $\alpha_n^{-k_i-1}$ est au croisement de la ligne de rang $n+1$ et de la colonne de rang i. L'hypothèse (a) entraine manifestement $D(k_1, \ldots, k_{N_0}) \neq 0$.

Si $k_{i+1} = 1 + k_i$, $i = 1, 2, \ldots, N_0 - 1$, cette hypothèse est inutile et on a

$$D(k_1, \ldots, k_{N_0}) = \left(\prod_{i=0}^{N} A_1^i\,\alpha_i^{-k_1-1}\right)\cdot\left(\prod_{i=1}^{N_0} \Gamma(k_i+1)\right)\|\alpha_n^{k_1-k_i}\|,$$

où $\|\alpha_n^{k_1-k_i}\|$ est un déterminant classique de VANDERMONDE.

D'où le corollaire:

Si les pôles α_n sont tous du premier ordre, alors, avec les seules hypothèses (c), (d), il est impossible qu'il existe plus de N valeurs successives de l'entier k pour lesquelles la fonction $H_M[f(s), \varphi(s)\,|\,k]$ admette γ pour point régulier; $k > \nu + \mu$.

Le théorème IV peut être énoncé sous une forme un peu plus générale si on ne se limite pas à rechercher la généralité en formulant les hypothèses restrictives dont on a besoin de préférence sur les α_n.

Théorème IV.3. *L'assertion du théorème IV est vraie si, toutes les autres conditions restant inchangées, l'hypothèse* b) *est remplacée par:*

b') *à chaque pôle α_n on peut associer un certain point $\beta \in S_\varphi^{\sigma_2}$, ($\beta$ dépendant évidemment du pôle α_n considéré), $(\alpha_n+\beta) \in P$ $(\sigma > max\,(0,\ \sigma_H^f) + \sigma_2)$ est un $(\alpha_n+\beta)^*$, tel qu'on ne peut faire correspondre $\beta' \in S_\varphi^{\sigma_2}$ vérifiant $\alpha_n+\beta = \alpha_{n'}+\beta'$, $n' \neq n$, ni $\beta'' \in S_\varphi^{\sigma_2}$ vérifiant $\alpha_n+\beta = \beta''$.*

Il suffit de reprendre la démonstration du théorème IV à la condition (III.4). Il existe au moins un pôle parmi les α_n qui n'est pas racine de $P(s)$ à l'ordre $\mathfrak{K}_n$. Soit α_{n_0} un tel pôle. La condition (III.4) s'écrit, en mettant en évidence le terme correspondant à ce pôle:

$$\text{(III.4)} \qquad \sum_{r=0}^{\mathfrak{K}'_{n_0}-1} \cdots + \left\{ \sum_{n(\neq n_0)=0}^{N} \sum_{r=0}^{\mathfrak{K}'_n-1} \cdots + \sum_{r=0}^{Q'} \cdots \right\} = 0.$$

L'hypothèse b') entraîne qu'il existe au moins un point singulier pour la première fonction et régulier pour l'expression entre crochets. Donc, $z \in \Delta$, $\varphi(z)$ ne peut être solution de l'équation fonctionnelle (III.4). Il en est de même pour les équations fonctionnelles $\sum_{n=0}^{N} \Phi_n(z) = 0$ et $\psi(z\,|\,k) = 0$.

Ces remarques suffisent pour établir le théorème, tout le reste de la démonstration restant valable mot pour mot.

Citons encore quelques propriétés, conséquences de l'utilisation immédiate pour la démonstration du th. IV de résultats dûs à A. OSTROWSKI[1] sur les fonctions «algebrico-transcendantes» (terminologie dûe à E. H. MOORE) et leur extension sous la forme de solutions d'une certaine classe d'équations différentielles algébriques aux différences qui admettent une représentation dirichletienne.

Il est bien connu que HÖLDER a démontré que la fonction gamma ne vérifie aucune équation différentielle algébrique. E. H. MOORE, N. NIELSEN, A. OSTROWSKI ont donné des démonstrations de cette propriété. HILBERT a établi la même propriété pour la fonction $\zeta(s)$ de RIEMANN et énoncé comme «probable» que la fonction $\zeta(x, s) = \sum_{p=1}^{\infty} \frac{x^p}{p^s}$ ne peut vérifier aucune équation différentielle algébrique partielle. A. OSTROWSKI généralise ces résultats et établit que les séries de Dirichlet générales, $f(s) = \sum a_n e^{-s\lambda_n}$ dont les exposants ne sont pas exprimables sous formes linéaires à coefficients entiers, au moyen d'un nombre fini d'entre eux, possèdent aussi cette propriété; plus généralement encore, ces séries de Dirichlet ne peuvent vérifier une équation différentielle algébrique aux différences, c'est-à-dire une équation fonctionnelle de la forme

$$\text{(III.5)}\quad P(s, f(s), \ldots, f^{(\nu)}(s); f(s+h_1), \ldots, f^{(\nu_1)}(s+h_1); \ldots; f(s+h_\tau), \ldots, f^{(\nu_\tau)}(s+h_\tau)) = 0,$$

où $h_1, h_2, \ldots, h_\tau$ sont des nombres réels et où P est un polynome des arguments qui figurent.

En particulier, $\zeta(s)$ ne vérifie aucune équation fonctionnelle de cette espèce. Cet auteur démontre également la propriété énoncée par HILBERT au sujet de $\zeta(x, s)$, à savoir que $\zeta(x, s)$ ne peut vérifier aucune équation fonctionnelle de la forme $P(\zeta_{\mu,\lambda}(x, s)) = 0$ où P est un polynome des arguments $\zeta_{\mu,\lambda}(x, s) = \dfrac{\partial^\mu \partial^\lambda \zeta(x, s)}{\partial x^\mu \partial s^\lambda}$.

Théorème IV.4. *L'assertion du théorème IV est vraie si, toutes les autres conditions restant inchangées, l'hypothèse* (2) *est remplacée par:*

(2″) $\Im \alpha_n = 0$, $n = 0, 1, 2, \ldots, N$,

et si la suite $\{\mu_p\}$ *des exposants de* $\varphi(s)$ *n'admet pas de base linéaire finie.*

Comme pour (IV.3) on reprend la démonstration de (IV) à la condition (III.4). Si $\varphi(z)$, $z \in \Delta$, était solution de cette équation fonctionnelle, en vertu d'un théorème

[1] «Über Dirichletsche Reihen und algebraische Differentialgleichungen», Math. Zeit., 1920.

d'OSTROWSKI[1] la suite $\{\mu_p\}$ devrait posséder une base linéaire (même remarque pour les équations $\sum_{n=0}^{N} \Phi_n(z)=0$, $\psi(z|k)=0$) c'est-à-dire que les μ_p seraient des formes linéaires, à coefficients entiers, d'un certain nombre d'entre eux. Il est intéressant de noter que *le théorème reste vrai, si la condition sur la suite* $\{\mu_p\}$ *est remplacée par la condition* $\overline{\lim}\, \mu_p/\mu_{p-1}=\infty$.[2]

J. POPKEN[3] a récemment énoncé le complément suivant: Si $f(s)=\sum a_n e^{-s\lambda_n}$ satisfait à une équation différentielle aux différences de l'espèce (III.5), où les a_n sont tous non nuls, alors il existe un nombre $c>0$ et un entier fini n_0 tels que $\lambda_n>n^c$, pour chaque $n\geq n_0$.

Ainsi: *le théorème est encore vrai si la condition sur* $\{\mu_p\}$ *est remplacée par la suivante: il est impossible de trouver un nombre* $c>0$ *tel que* $\underline{\lim}\, \mu_p/p^c\geq 1$.

Ces trois dernières formes du théorème IV supposent, (en raison de l'emploi des théorèmes rappelés de A. OSTROWSKI et J. POPKEN), les b_p non nuls; cette condition n'est pas restrictive:

Théorème IV.5. *L'assertion du théorème IV est vraie si, toutes les autres conditions restant inchangées, l'hypothèse* b) *est remplacée par:*

b''') *les pôles* α_n *appartiennent à la bande* $|t|<\pi D$, *et si la suite* $\{\mu_p\}$ *est mesurable, de densité D, d'indice de condensation (au sens de* V. BERNSTEIN) *nul.*

Comme pour IV.3 et IV.4, on modifie la démonstration à partir de la condition (III.4). Le polynome de Dirichlet $\theta(z)$ vérifie manifestement, pour r suffisamment grand et $|\tau|\leq\pi/2$, la relation

$$|\theta(z)|<e^{(\varepsilon_1 \log r\cdot\cos\tau+b\,|\sin\tau|+\varepsilon_2)\,r},\quad z=r\,e^{i\tau},$$

ε_1 et ε_2 étant des arbitrairement petits positifs, $b=\overline{\text{borne}}\,|\Im\alpha_n|$, $n=0,1,\ldots,N$. Supposons $\theta(\mu_p)=0$ à partir d'une certaine valeur de l'indice p; $\theta(z)$ satisfait alors comme cas particulier aux conditions d'un théorème dû à V. BERNSTEIN[4] que nous énonçons:

Soit $\Phi(z)$ *holomorphe dans le demi-plan* $|\arg z|\leq\frac{\pi}{2}$ *et y satisfaisant, quelque petit que soit* $\varepsilon>0$, *pour* r *suffisamment grand, à l'inégalité*

---

[1] Loc. cit. par. 1 & 4.

[2] Loc. cit. par. 1.

[3] «A property of a Dirichlet series representing a function satisfying an algebraic difference-differential equation», K. Nederlandse Akademie van Wetenschappen, 52 (1949).

[4] «Leçons sur les progrès récents de la théorie des séries de Dirichlet», Chap. IX, p. 249.

$$|\Phi(z)| < e^{(a \log r \cdot \cos \tau + b\,|\sin \tau| + \varepsilon)\, r},$$

où a et b sont des constantes réelles non négatives.

Si $\{\mu_p\}$ est une suite de nombres positifs d'indice de condensation nul et de densité D telle que $\pi D > b + \frac{\pi a}{2}$, si $\Phi(\mu_p) = 0$ à partir d'une certaine valeur de p, alors $\Phi(z) \equiv 0$.

Ici, il suffit de choisir ε_1 tel que $\pi D > b + \frac{\pi \varepsilon_1}{2}$, où

$$b = \overline{\text{borne}}\, |\Im\, \alpha_n|, \quad n = 0, 1, 2, \ldots, N.$$

Il en résulterait $\theta(z) \equiv 0$. Or on sait que le théorème de LINDEMANN-WEIERSTRASS[1] énonce que: $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_N$ étant des nombres algébriques différents, et $\delta_0, \delta_1, \ldots, \delta_N$ des nombres algébriques arbitraires, alors si $\sum_{n=0}^{N} \delta_n e^{\alpha_n} = 0$, on a nécessairement $\delta_0 = \delta_1 = \delta_2 = \cdots = \delta_N = 0$. Une propriété analogue mais élémentaire est que: $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_n$ étant, cette fois, des nombres différents, $P_0(z), P_1(z), \ldots, P_N(z)$ étant des polynomes arbitraires, alors si $\sum_{n=0}^{N} P_n(z)\, e^{\alpha_n z} \equiv 0$, on a nécessairement

$$P_0(z) \equiv P_1(z) \equiv P_2(z) \equiv \cdots \equiv P_N(z) \equiv 0.$$

Donc, il existe une suite infinie d'entiers $\{P_i\}$ telle que $\theta(\mu_{P_i}) \neq 0$.

Le raisonnement se poursuit maitenant comme au th. IV et suppose qu'on ne peut trouver parmi la suite $\{b_p\}$ une suite partielle infinie de coefficients tous nuls (ceci ne diminue en rien la généralité du raisonnement).

---

[1] WEIERSTRASS, «Zu Lindemanns Abhandlung Über die Ludolphsche Zahl», Math. Werke II.