

# DER ALLGEMEINE INTEGRALKOSINUS $\text{Ci}(z, \alpha)$ .

VON

E. KREYSZIG

in DARMSTADT.<sup>1</sup>

## Inhalt:

	Seite
1. Definition. Frühere Ergebnisse. Eine weitere Reihenentwicklung .....	107
2. Das Nullstellenverhalten .....	110
3. Reliefdarstellungen und Tafellegung .....	115
Literatur .....	130

### 1.1. Definition.

Der allgemeine Integralkosinus

$$(1.1) \quad \text{Ci}(z, \mu) = \int_0^z \frac{\cos t}{t^\mu} dt \quad (\Re(\mu) < 1)$$

ist eine Funktion der beiden komplexen Variablen

$$z = x + iy = r e^{i\theta} \quad \text{und} \quad \mu = \alpha + i\beta.$$

Er bildet das Gegenstück zu dem in einer früheren Arbeit<sup>2</sup> behandelten allgemeinen Integralsinus

$$(1.2) \quad \text{Si}(z, \mu) = \int_0^z \frac{\sin t}{t^\mu} dt \quad (\Re(\mu) < 2).$$

Trotz des einfachen Zusammenhanges zwischen diesen beiden Funktionen, nämlich

$$(1.3) \quad \text{Ci}(z, \mu) = z^{-\mu} \sin z + \mu \text{Si}(z, \mu + 1), \quad (\Re(\mu) < 1)$$

erscheint doch eine eigene Betrachtung von  $\text{Ci}(z, \mu)$  aus funktionentheoretischen

---

<sup>1</sup> Meinem verehrten Lehrer, Herrn Prof. Dr. A. WALTHER, danke ich wiederum für wertvolle Anregungen und für grosszügige Hilfe durch die Mittel seines Instituts für Praktische Mathematik.

<sup>2</sup> Acta math. 85 (1951), 117—181, fortan mit (I) und nachfolgender Seitenzahl zitiert.

Gründen lohnend, z. B. wegen der Nullstellen.<sup>1</sup> Sie wird im folgenden durchgeführt. Der Hauptwert von  $\text{Ci}(z, \mu)$  hinsichtlich  $z$  sei durch  $-\pi < \vartheta \leq \pi$  definiert. Schwarzsches Spiegelungsprinzip und Umlaufrelation

$$(1.4) \quad \text{Ci}(ze^{i p \pi}, \mu) = e^{i(1-\mu)p\pi} \text{Ci}(z, \mu) \quad (\alpha < 1, p = 1, 2, \dots)$$

ermöglichen die Begrenzung der Untersuchung auf den ersten Quadranten  $0 \leq \vartheta \leq \pi/2$  der  $z$ -Ebene. Durchweg wird  $\mu = \alpha$  reell genommen. Die theoretischen Erörterungen umfassen den gesamten  $\alpha$ -Existenzbereich. Die Vertafelung beschränkt sich<sup>2</sup> auf die positiven Werte  $\alpha = 0,25$ ,  $\alpha = 0,5$  und  $\alpha = 0,75$ . Für  $\alpha = 0,5$  liegt im wesentlichen das Fresnelsche Integral

$$C(z) = \int_0^z \cos t^2 dt = \frac{1}{2} \int_0^{z^2} \frac{\cos t}{t^{1/2}} dt$$

vor.

## 1.2. Frühere Ergebnisse.

Es existieren die Darstellungen

$$(1.5) \quad \text{Ci}(z, \alpha) = z^{-\alpha} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n+1}}{(2n)! (2n+1-\alpha)} \quad (0 < \alpha < 1) \text{ (I, 121)}$$

und

$$(1.6) \quad \text{Ci}(z, \alpha) = \frac{z^{1-\alpha}}{1-\alpha} \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{b_n^2}\right) \left(1 - \frac{z^2}{\bar{b}_n^2}\right) \quad (0 < \alpha < 1) \text{ (I, 146)}$$

Dabei bedeuten  $b_n$  und  $\bar{b}_n$  Nullstellen des allgemeinen Integralkosinus, die entweder konjugiert komplex oder „benachbart“ sind, d. h. auf der reellen Geraden zu beiden Seiten von  $z = (4n+3)\pi/2$  ( $n = 0, 1, 2, \dots$ ) liegen; ihr maximaler Abstand von diesem Punkt beträgt  $\pi/2$  bei positivem  $\alpha$ . Für grosse, nicht rein imaginäre  $z$  gilt die asymptotische Entwicklung

$$(1.7) \quad \begin{aligned} \text{Ci}(z, \alpha) \sim & B(\alpha) + z^{-\alpha} \left\{ \cos z \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \alpha(\alpha+1) \dots (\alpha+2n-2)}{z^{2n-1}} + \right. \\ & \left. + \sin z \left( 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \alpha(\alpha+1) \dots (\alpha+2n-1)}{z^{2n}} \right) \right\}, \quad (0 < \alpha < 1) \text{ (I, 129)} \end{aligned}$$

Für rein imaginäre Werte  $z = iy$  entfällt das Glied  $B(\alpha)$ .

<sup>1</sup> Der Wunsch nach einer Tabellierung ist auch in einer Besprechung von (I) durch A. ERDÉLYI ausgedrückt worden, Math. Tables and other Aids to Computation V No. 35 (July 1951), 156.

<sup>2</sup> Integrale vom Typus  $\int_0^z t^{-\alpha} \cos t dt$  und  $\int_0^z t^{-\alpha} \sin t dt$  können sämtlich durch partielle Integration auf den Bereich  $0 \leq \alpha < 1$  reduziert werden.

Wir werden die Beziehungen zu den unvollständigen Gammafunktionen

$$P(\nu, z) = \int_0^z e^{-t} t^{\nu-1} dt \quad \text{und} \quad Q(\nu, z) = \int_z^\infty e^{-t} t^{\nu-1} dt$$

benötigen (I, 123):

$$(1.8) \quad \text{Ci}(z, \alpha) = \frac{i}{2} \left\{ e^{-i\alpha \frac{\pi}{2}} P(1-\alpha, -iz) - e^{i\alpha \frac{\pi}{2}} P(1-\alpha, iz) \right\}$$

und

$$(1.9) \quad \text{ci}(z, \alpha) = \frac{i}{2} \left\{ e^{i\alpha \frac{\pi}{2}} Q(1-\alpha, iz) - e^{-i\alpha \frac{\pi}{2}} Q(1-\alpha, -iz) \right\},$$

wobei der Zielwert  $\lim_{z \rightarrow \infty} \text{Ci}(z, \alpha) = B(\alpha)$  bei asymptotisch  $x$ -paralleler Integration und nur dann existiert. Aus (1.8) folgt unmittelbar

$$B(\alpha) = \sin \alpha \frac{\pi}{2} \cdot \Gamma(1-\alpha)$$

in Übereinstimmung mit (I, 126). Wie in (I) bedeutet

$$(1.10) \quad \text{ci}(z, \alpha) = - \int_z^\infty \frac{\cos t}{t^\alpha} dt \quad (\alpha < 1).$$

### 1.3. Eine weitere Reihenentwicklung.

Taylorreihe bzw. asymptotische Entwicklung reichen hin, um das Funktionsverhalten für kleine bzw. grosse Argumentwerte zu beurteilen. Für mittelgrosse Argumente ist die nachfolgende Entwicklung, welche die ersten Differenzen von  $\text{Ci}(z, \alpha)$  liefert, der Taylorentwicklung hinsichtlich der Güte der Konvergenz überlegen. Aus (1.9) folgt mit

$$Q(\nu, z+h) - Q(\nu, z) = -e^{-z} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \binom{n-\nu}{\nu} \frac{P(n+1, h)}{z^{n+1-\nu}}$$

das Analogon zu (I, 132)<sup>1</sup>

$$(1.11) \quad \begin{aligned} \text{Ci}(z+h, \alpha) &= \text{Ci}(z, \alpha) + \frac{z^{-\alpha}}{2i} \left\{ e^{-iz} \sum_{n=0}^{\infty} e^{in \frac{\pi}{2}} \binom{n+\alpha-1}{1-\alpha} \frac{P(n+1, ih)}{z^n} \right. \\ &\quad \left. - e^{iz} \sum_{n=0}^{\infty} e^{-in \frac{\pi}{2}} \binom{n+\alpha-1}{1-\alpha} \frac{P(n+1, -ih)}{z^n} \right\} \equiv \text{Ci}(z, \alpha) + e^{-iz} \sum_{n=0}^{\infty} b_n(z) + e^{iz} \sum_{n=0}^{\infty} d_n(z). \end{aligned}$$

<sup>1</sup> Tafel der Koeffizienten  $P(n+1, h)$  für  $n=0, \dots, 10$  und  $h = \pm 1$  und  $h = \pm i$  siehe (I, 166), 8 Dezimalen.

Ausserdem bleiben die (für  $|z| > 1$ ) dem Betrage nach grössten Glieder  $|b_0(z)|$  und  $|d_0(z)|$  wesentlich kleiner als das grösste Glied  $|a_n(z)|$  der Taylorentwicklung.  $|a_n(z)|$  ergibt sich auch der Forderung, es soll

$$\left| \frac{a_{n-1}}{a_n} \right| < 1 \text{ und zugleich } \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| \geq 1$$

erfüllt sein. Welches Glied maximal wird, hängt von  $z$  ab; es gilt

$$2n+3 > |z(n)| > 2n, \quad (0 \leq \alpha < 1, n > 1).$$

Hieraus folgt

$$\frac{(2n+3)^{2n+1}}{(2n)! \cdot 2n} > |z|^\alpha |a_n(z)| > \frac{(2n)^{2n+1}}{(2n+1)!}.$$

## 2. Das Nullstellenverhalten.

Bekanntlich (I, 143 ff.)<sup>1</sup> bewegen sich die Nullstellen  $z_0 = x_0 + iy_0$  von ihren Grenzlagen

$$\lim_{\alpha \rightarrow 1} x_0(\alpha) = (2n+1)\pi, \quad \lim_{\alpha \rightarrow 1} y_0(\alpha) = \pm \infty$$

bei fallendem  $\alpha$  konjugiert komplex gegen die reelle Achse, wo sie bei  $x_{00} = (4n+3)\pi/2$ , ( $n=0, 1, 2, \dots$ ), paarweise zusammenfliessen. Diese Doppelnullstellenbildung erfolgt nacheinander in der Reihenfolge wachsender Werte von  $n$ . Bei weiter abnehmendem  $\alpha$  löst sich jede Doppelnullstelle in ein „Paar“ reeller Nullstellen auf, von denen die jeweils linken monoton den Grenzlagen

$$\lim_{\alpha \rightarrow -\infty} x_0(\alpha) = (4n+1) \frac{\pi}{2}, \quad (n=0, 1, \dots),$$

zustreben. Bei den rechten verläuft der entsprechende Prozess nicht monoton, sondern hat Umkehrpunkte bei  $x = (2n+2)\pi$  für  $\alpha=0$  und führt zu den Grenzlagen

$$\lim_{\alpha \rightarrow -\infty} x_0(\alpha) = (4n+3) \frac{\pi}{2}, \quad (n=0, 1, \dots),$$

also zurück zum Orte der genannten Auflösung.

Dieses grobe Bild soll im folgenden verfeinert und ergänzt werden. Hierzu untersuchen wir zunächst das Nullstellenverhalten im Reellen, dann die Bildung der Doppelnullstellen und schliesslich die Verhältnisse im Komplexen.

---

<sup>1</sup> S. 143 Zeile 9 lies  $\frac{\pi}{2}$  statt  $\pi$ .

2.1. **Reelle Nullstellen.**

2.11. Es existieren nullstellenfreie Intervalle  $(x'_n)$  und  $(x''_n)$  im Reellen:  $(x'_n)$  wird durch die Beziehung

$$2n\pi \leq x'_n \leq (2n+1)\pi \quad (n=0, 1, \dots)$$

festgelegt und bleibt für positive  $\alpha$  nullstellenfrei. Der Beweis hierfür folgt für grosse  $n$  aus (1.7) wegen  $B(\alpha) > 0$  für  $\alpha > 0$ , er ergibt sich ganz allgemein daraus, dass  $|\text{Ci}((n+1)\pi, \alpha) - \text{Ci}(n\pi, \alpha)|$  für positive  $\alpha$  mit  $n$  monoton abnimmt. Das Intervall  $(x''_n)$ ,

$$2n\pi \leq x''_n \leq (4n+1)\frac{\pi}{2} \quad (n=0, 1, \dots)$$

bleibt sogar für beliebige  $\alpha$  frei von reellen Nullstellen, wie aus Obigem unter Zuhilfenahme des Rolleschen Satzes erschliessbar ist.

2.12. Für positive  $\alpha$  liegen die beiden zu einem Paar<sup>1</sup> gehörenden Nullstellen näherungsweise in gleichem Abstand  $0 \leq \delta(n, \alpha) \leq \pi/2$  zu beiden Seiten von

$$x_{00} = (4n+3)\pi/2.$$

Es ist  $\delta(n, 0) = \pi/2$ . Aus (1.7) folgt bei Berücksichtigung der ersten beiden Glieder

$$(2.1) \quad \delta(n, \alpha) \sim \arccos \left\{ \left[ (4n+3)\frac{\pi}{2} \right]^\alpha B(\alpha) \right\}.$$

Mit  $B(\alpha)$  ist auch  $\delta(\alpha)$  eine monotone Funktion von  $\alpha$  bei festem  $n$ . Dieses  $\delta(\alpha)$  sinkt mit wachsendem  $\alpha$ , bis sich bei  $x_{00}$  eine Doppelnullstelle bildet. Wir bezeichnen

$$\lim_{\delta(n) \rightarrow 0} \alpha(\delta(n)) = \omega(n).$$

Dass die Werte  $\delta(n)$  eine monoton mit  $n$  abnehmende Folge bilden, ergibt sich aus (2.1) ebenso wie aus dem Bildungsgesetz für die Doppelnullstellen, das weiter unten erörtert wird.

Genauer betrachtet ist der Abstand der rechten Nullstelle<sup>1</sup> von  $(4n+3)\pi/2$  für positive  $\alpha$  jeweils um einen geringfügigen Betrag  $\gamma$  grösser als der der linken, wie dies aus dem Bau des Integranden von  $\text{Ci}(z, \alpha)$  mit Rücksicht auf die Monotonie von  $x^{-\alpha}$  folgt. Für  $\alpha=0$  verschwindet  $\gamma$ . Für negatives  $\alpha$  wird  $\gamma$  ebenfalls negativ, bis es für  $\alpha \rightarrow -\infty$  seinen Maximalwert  $|\gamma| = \pi$  erreicht.

2.13. Um zu einer Aussage über das Auftreten reeller Nullstellen überhaupt zu kommen, betrachten wir die Extrema von  $\text{Ci}(z, \alpha)$ . Mit den Nullstellen des Integranden liegen die Maxima bzw. Minima für alle  $\alpha$  fest bei

<sup>1</sup> Definition siehe vorstehend.

$$x = (4n+1)\frac{\pi}{2} \text{ bzw. } x = (4n+3)\frac{\pi}{2}, \quad (n=0, 1, \dots).$$

Wir zerlegen

$$\text{Ci}(x, \alpha) = \text{Ci}\left(\frac{\pi}{2}, \alpha\right) + \sum_{n=0}^N \int_{(2n+1)\pi/2}^{(2n+3)\pi/2} t^{-\alpha} \cos t \, dt + r(x) \equiv a + \sum_{n=0}^N D(2n+1) + r(x).$$

Die Teilintegrale  $D(n)$  zwischen 2 benachbarten Nullstellen des Integranden wachsen für negatives und fallen für positives  $\alpha$ , für  $\alpha=0$  sind sie konstant. Es ist  $D(2n) < 0$  und  $D(2n+1) > 0$ . Hieraus folgt der Anstieg der Maxima und das Fallen der Minima in Abhängigkeit von  $x$  bei negativem  $\alpha$ . Für positives  $\alpha$  ist es umgekehrt. Folglich tritt bei positivem  $\alpha$  der Funktionswert

$$I(\alpha) = \text{Ci}\left(\frac{3\pi}{2}, \alpha\right)$$

nur für  $x=3\pi/2$  und sonst nirgends im Reellen auf. Die reelle Achse ist also insbesondere für  $\alpha > \omega(0) = 0,3086$  nullstellenfrei.<sup>1</sup>

2.14. Hieran anknüpfend sei bemerkt: Es existiert für  $\alpha > 0$  eine monoton fallende Folge  $C_0, S_0, C_1, S_1, \dots$  der Maxima der Komplementfunktionen.

$$\text{ci}(x, \alpha) = \text{Ci}(x, \alpha) - B(\alpha)$$

nach Gleichung (1.10) und

$$\text{si}(x, \alpha) = \text{Si}(x, \alpha) - A(\alpha) = \text{Si}(x, \alpha) - \int_0^{\infty} t^{-\alpha} \sin t \, dt \quad (0 < \alpha < 2) \quad (\text{I, 123}).$$

Hierbei ist

$$C_n = \text{Ci}\left\{(4n+1)\frac{\pi}{2}, \alpha\right\} - B(\alpha) \text{ und } S_n = \text{Si}\{(2n+1)\pi, \alpha\} - A(\alpha) \quad (n=0, 1, \dots).$$

Weiterhin existiert für  $\alpha > 0$  eine monoton wachsende Folge  $c_0, s_0, c_1, s_1, \dots$  der Minima

$$c_n = \text{Ci}\left\{(4n-1)\frac{\pi}{2}, \alpha\right\} - B(\alpha) \text{ und } s_n = \text{Si}(2n\pi, \alpha) - A(\alpha), \quad (n=1, 2, \dots)$$

der genannten Komplementfunktionen.

Der Beweis folgt für hinreichend grosse  $n$  aus (1.7) und damit für alle  $n$  durch Induktion auf Grund der Monotonie der Beträge der Abschnittsintegrale

$$D(2n) = \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} t^{-\alpha} \sin t \, dt \text{ und } D(2n+1) = \int_{(2n+1)\pi/2}^{(2n+3)\pi/2} t^{-\alpha} \cos t \, dt, \quad (n=0, 1, \dots).$$

Denn es ist

<sup>1</sup> Weitere  $\omega(n)$  siehe Tafel 4.

$$|D(m)| - |D(m+p)| = \int_0^\pi \left\{ \left( m \frac{\pi}{2} + \tau \right)^{-a} - \left( (m+p) \frac{\pi}{2} + \tau \right)^{-a} \right\} \sin \tau \, d\tau \geq 0$$

für  $\alpha \geq 0$  und  $m=0, 1, \dots$  sowie  $p=1, 2, \dots$ , und diese Differenzen bilden wiederum eine in  $m$  monotone Folge bei festem  $p$ .

2.15. Vorbereitend zum Abschnitt 2.3 stellen wir fest, dass wegen

$$B(\alpha) = \alpha A(\alpha + 1)$$

die Beziehung

$$(2.2) \quad B(\alpha) \geq A(\alpha) \quad (0 < \alpha < 1, \alpha \geq \frac{1}{2})$$

gilt. Dies bedeutet wegen (1.7) für die Minima

$$(2.3 a) \quad Ci \left\{ (4n-1) \frac{\pi}{2}, \alpha \right\} < Si(2n\pi, \alpha) \quad (n=1, 2, \dots; 0 < \alpha \leq \frac{1}{2})$$

und für die Maxima

$$(2.3 b) \quad Ci \left\{ (4n+1) \frac{\pi}{2}, \alpha \right\} > Si \{ (2n+1)\pi, \alpha \} \quad (n=0, 1, \dots; \frac{1}{2} \leq \alpha < 1).$$

Speziell zeichnen sich also die Fresnelschen Integrale durch die Gültigkeit beider Beziehungen aus. Für die Komplementfunktionen  $ci(x, \alpha)$  und  $si(x, \alpha)$  ergibt sich aus (1.7)

$$\left| \frac{ci(x, \alpha)}{si \left( x + \frac{\pi}{2}, \alpha \right)} \right| \sim \left( \frac{x + \pi/2}{x} \right)^\alpha \sim 1 + \frac{\alpha\pi}{2x}.$$

Die Funktion  $ci(x, \alpha)$  ist also von den beiden Funktionen bei „einander entsprechendem Argument“, wie für die Zuordnung  $ci(x, \alpha)$  und  $si(x + \pi/2, \alpha)$  kurz gesagt werden soll, dem Betrage nach stets die grössere für alle endlichen  $x$ . Dass dies streng und nicht nur asymptotisch für grosse  $x$  gilt, erschliesst man aus den Integranden.

## 2.2. Reelle Doppelnulstellen

Reelle Doppelnulstellen entstehen bei  $x_{00} = (4n+3)\pi/2$  durch Zusammenfliessen von je einer rechten und einer linken Nullstelle bei wachsendem  $\alpha$  bzw. durch das Zusammenfliessen von 2 konjugiert komplexen bei fallendem  $\alpha$ . Genauer gesagt, es folgt aus

$$B(\alpha) \sim \left[ (4n+3) \frac{\pi}{2} \right]^{-a} \left( 1 + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^m \alpha(\alpha+1) \dots (\alpha+2m-1)}{\left[ (4n+3) \frac{\pi}{2} \right]^{2m}} \right)$$

deren Existenz für diejenige abzählbar unendliche Menge von Zahlen  $\alpha$ , für die

$$n \sim \frac{[B(\alpha)]^{-1}}{2\pi} - \frac{3}{4} \quad (0 < \alpha < 1, n = 0, 1, \dots)$$

ganzzahlig wird. Für  $n=0$  ist  $\alpha=0,3086$ , wie schon erwähnt wurde. Mit  $B(\alpha)$  ist auch  $n(\alpha)$  monoton in  $\alpha$ . Deshalb bilden sich bei wachsendem  $\alpha$  die Doppelnulstellen nacheinander im Sinne fallender  $n$  und lösen sich ebenso nacheinander auf, wobei die entstehenden beiden einfachen Nullstellen ins Komplexe auswandern. Liegt bei  $x_{00}$  eine Doppelnulstelle vor, so haben die vorangehenden reellen Nullstellen die Abszissenwerte  $x = (4n-1)\pi/2 \pm \lambda$  mit

$$\lambda \sim 2 \sqrt{\frac{2\alpha}{4n+3}} \quad (n = 0, 1, \dots)$$

Dies gilt asymptotisch hinsichtlich  $n$ .

### 2.3. Komplexe Nullstellen der Fresnelschen Integrale.

Das Nullstellenverhalten im Komplexen wurde bereits einleitend zu diesem Abschnitt allgemein gekennzeichnet. Darüber hinaus verdient der Sonderfall  $\alpha=1/2$  Beachtung. Wir vergleichen die Lage der Nullstellen  $z_0 = x_0 + iy_0$  der beiden Fresnelschen Integrale  $C(z)$  und  $S(z)$  miteinander. (1.7) liefert für die Differenz der Funktionswerte an „entsprechenden“<sup>1</sup> Kreuzungspunkten

$$\text{Si}(2n\pi, \frac{1}{2}) - \text{Ci}\left\{(4n-1)\frac{\pi}{2}, \frac{1}{2}\right\} \sim -\frac{\sin(4n-1)\pi/2}{\left[(4n-1)\frac{\pi}{2}\right]^{1/2}} - \frac{\cos(2n\pi)}{(2n\pi)^{1/2}} \sim \frac{1}{8(2\pi)^{1/2}n^{3/2}}$$

einen positiven Wert. Entsprechende Stellen des Integranden haben für  $\text{Ci}(z, \alpha)$  einen grösseren Betrag des Funktionswertes als für  $\text{Si}(z, \alpha)$ , weil sie um  $\Delta x = \pi/2$  weiter links liegen. Beide Umstände bewirken, dass der von den obengenannten Kreuzungspunkten aus längs der Kurve  $\varphi = \pi/2$  bis zu den Nullstellen geführte Integrationsweg bei  $\text{Ci}(z, \alpha)$  kürzer als bei  $\text{Si}(z, \alpha)$  ist.<sup>2</sup> Die Integration ergibt vor allem einen negativen Realteil und ausserdem, da  $\varphi$  nur annähernd und nicht genau ordnatenparallel verläuft, d. h. im Sinne abnehmender  $x$ -Werte leicht gekrümmt ist, einen kleinen negativen Imaginärteil. Letzterer kann durch Integration längs eines kurzen  $x$ -parallelen Wegstückes zum Verschwinden gebracht werden. Dass hierbei  $x_0 < x_{00}$  bleibt, ist leicht zu beweisen.

<sup>1</sup> Definition „entsprechender“ Punkte der  $z$ -Ebene siehe Seite 113.

<sup>2</sup>  $z^{-\alpha} \cos z = \rho e^{i\varphi}$  bzw.  $z^{-\alpha} \sin z = \rho e^{i\varphi}$ .

Der angestellte Vergleich ergibt also: Von 2 entsprechenden Nullstellen der Fresnelschen Integrale hat diejenige von  $C(z)$  den kleineren Imaginärteil, jedoch ist dieser grösser als der Imaginärteil der nach links hin folgenden Nullstelle von  $S(z)$ . Daher bilden die Nullstellen von  $S(z)$  und von  $C(z)$  zusammen hinsichtlich ihrer Imaginärteile eine monoton wachsende Folge, wenn man sie monoton wachsend in  $x_0$  anordnet. Aus der Art obiger Beweisgründe folgt für die beiden genannten Funktionen das asymptotische Zusammenfallen der „Nullstellenpfade“, wie wir die vollmonotone Kurve  $y(x)$  durch die Nullstellen  $z_0 = x_0 + iy_0$ ,  $x_0 > 0$ ,  $y_0 > 0$ , nennen wollen. Dass  $C(z)$  und  $S(z)$  die einzigen in dieser Weise ausgezeichneten unter den betrachteten Funktionen sein müssen, erkennt man, wenn man die Neigung  $(dy/dx)$  der Pfade in Abhängigkeit von  $\alpha$  und zugleich ihren Abstand in Abhängigkeit von  $B(\alpha)$  bzw.  $A(\alpha)$  untersucht. Ferner folgt aus dem Gesagten, dass für gleiche  $\alpha < 0,5$  die Nullstellenpfade von  $Ci(z, \alpha)$  wegen (2.2) abszissenäher als die von  $Si(z, \alpha)$  liegen. Für  $\alpha > 0,5$  ist es umgekehrt.

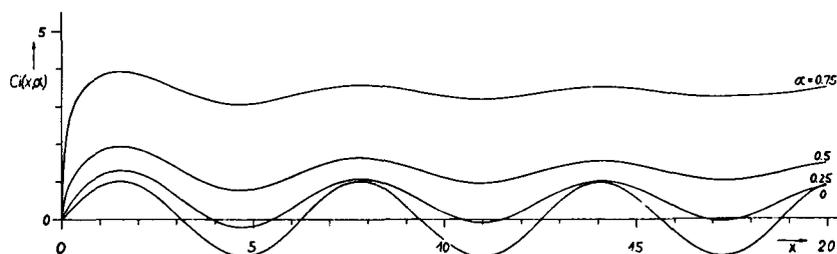


Abb. 1. Allgemeiner Integralkosinus  $Ci(z, \alpha)$  für reelles  $z=x$ .

### 3. Reliefdarstellungen und Tafellegung.

Die Vertafelung wurde in einem komplexen  $z$ -Bereich durchgeführt, der für alle Werte von  $\alpha$  drei Nullstellenpaare enthält. In Tafel 1 sind Funktionswerte  $Ci(x, \alpha)$  für  $x=0(0,2)4$  und  $x=4(0,5)20$  mit 3 Dezimalen, jeweils für  $\alpha=0,25$ ,  $\alpha=5$  (Fresnelsches Integral) und  $\alpha=0,75$  verzeichnet.

Für dieselben Werte von  $\alpha$  und alle ganzzahligen Abszissen im genannten Bereich sowie alle ganzzahligen Ordinaten  $y$  zwischen 0 und 5 werden komplexe Funktionswerte mit 2 Dezimalen in Tafel 2 angegeben. Beide Tafeln wurden mit Hilfe der Beziehung (1.3) aus den Tafeln 1 und 2 von (I) gewonnen und durch unabhängige Kontrollrechnungen überprüft. Die Genauigkeit der Werte beträgt  $\pm 1$  Einheit der letzten angegebenen Ziffer.

Die einfachen Nullstellen  $z_0 = x_0 + iy_0$  in Tafel 3 und die doppelten in Tafel 4 wurden gesondert berechnet, nachdem ihr Verhalten theoretisch untersucht worden war. Als

Rechnungsgrundlage konnte die asymptotische Entwicklung (1.7) dienen, da die Entfernung der Nullstellen vom Punkt  $z=0$  ausreicht, um die gewünschte Stellenzahl zu sichern. Es wurde das Newtonsche Näherungsverfahren angewendet und dabei von einem Gliede ausgegangen und sukzessive weitere Glieder hinzugenommen.

Für  $\alpha=0,25$  lieferte die Beziehung (2.1) die Ausgangswerte bei dieser Rechnung. Für das Fresnelsche Integral  $C(z)$  wurde entsprechend wie bei  $S(z)$  verfahren, also mit dem Ansatz

$$x_0 = (4n+3) \frac{\pi}{2} - \xi \quad (n=0, 1, \dots)$$

in die nach Betrag und Phase zerlegte Gleichung

$$(3.1) \quad B(\alpha) = -z^{-\alpha} \sin z, \quad (0 < \alpha < 1),$$

wie sie aus (1.7) folgt, eingegangen.  $\xi$  und  $y_0$  wurden hierbei als kleine Grössen behandelt, was durch die vorhergehenden Untersuchungen gerechtfertigt ist. Es ergab sich

$$(3.2 a) \quad x_0 = (4n+3) \frac{\pi}{2} - \frac{2\alpha}{(4n+3)\pi}$$

und

$$(3.2 b) \quad y_0 = \text{Ar cos h} \left\{ B(\alpha) \left[ (4n+3) \frac{\pi}{2} \right]^\alpha \right\}.$$

Im Fall  $\alpha=0,75$  ist  $y_0$  als gross anzusehen, so dass die Hyperbelfunktionen durch die Exponentialfunktion ersetzt werden können. (3.1) ist dann wie in (I, 147) zu bearbeiten.

Die in Tafel 4 angegebenen Doppelnulstellen für  $n=1, 2, \dots, 10$  wurden mit Hilfe der asymptotischen Entwicklung berechnet. Die Abbildung 2 vermittelt einen Eindruck von der weiteren Abnahme von  $\alpha=\omega(n)$  mit wachsendem  $n$ .

Die Tabelle 5 mit Werten von  $B(\alpha)$  für kleine  $\alpha$  wurde ebenfalls des Doppelnulstellenproblems wegen beigelegt. Für noch kleinere Werte von  $\alpha < 0,001$ , die dann einem  $n > 10^{2300}$  entsprechen, kann man

$$(3.3) \quad B(\alpha) \sim \frac{\alpha \pi}{2}$$

setzen, die Abweichung vom exakten Wert liegt noch für  $\alpha=0,01$  unterhalb von 1%. Ausserdem gilt für  $\alpha < 1$  stets die Ungleichung

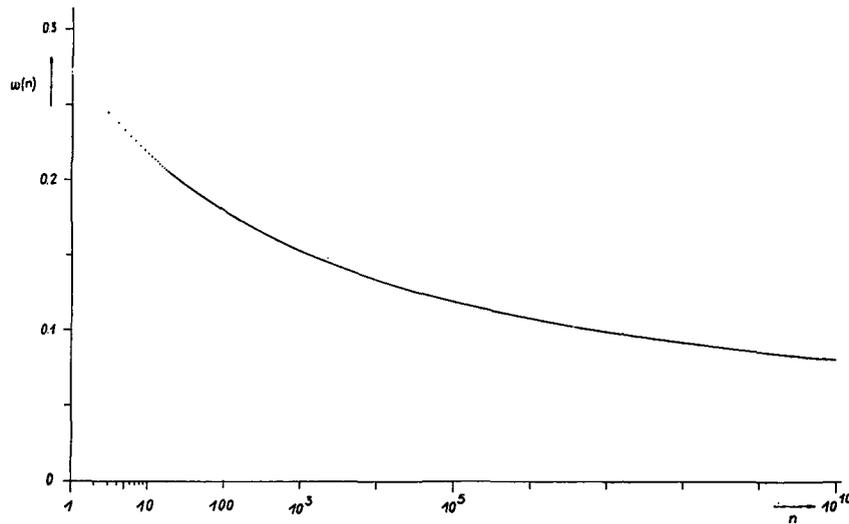


Abb. 2. Zum Auftreten von Doppelnullstellen bei  $x_{00} = (4n + 3)\pi/2$  in Abhängigkeit von  $n$ .

$$B(\alpha) > \alpha \frac{\pi}{2}.$$

Die nach den Tafeln gezeichneten Reliefs zeigen  $|Ci(z, \alpha)|$  aufgetragen über der  $xy$ -Grunde ebene. Sie bestätigen anschaulich das durch die vorhergehenden Untersuchungen gewonnene Bild. Auf einige wichtige Einzelheiten sei aufmerksam gemacht. Die im Grenzfall  $Ci(z, 0) = \sin z$  vorliegende Periodizität mit  $x = 2\pi$  ist für  $\alpha = 0,25$  bereits erheblich gestört. Man erkennt die Tendenz der im dargestellten Argumentbereich noch sämtlich reellen Nullstellen, paarweise zusammenzurücken. Dieses Bestreben ist für die grössten der dargestellten Nullstellen am stärksten und nimmt nach kleineren  $x$ -Werten hin monoton ab. Die nächsten beiden Nullstellen nach rechts hin sind bereits komplex (vgl. Tafel 4). Die Grösse  $\gamma$ , um welche die rechte Nullstelle jeweils weiter von  $x_{00} = (4n + 3)\pi/2$  ( $n = 0, 1, 2, \dots$ ) als die linke entfernt ist, bleibt unterhalb der Grenze des zeichnerisch Darstellbaren.

Das Fresnelsche Integral, also der Fall  $\alpha = 0,5$ , hat bereits lauter komplexe Nullstellen in noch verhältnismässig geringem Abstand von der Abszisse. Sein Bild ähnelt dem von  $S(z)$  weitgehend (I, 169), während die Darstellungen von  $Ci(z, \alpha)$  und  $Si(z, \alpha)$  für alle anderen  $\alpha$  nicht so viele gemeinsame Züge aufweisen. Dies befindet sich mit der Überlegung von Abschnitt 2.3 in Einklang.

Im Falle  $\alpha = 0,75$  erkennt man das Fortstreben der Nullstellenpfade von der reellen Achse. Die Nullstellenumgebungen steigen nach allen Richtungen hin stark an.

Diesen mit  $\alpha$  variierenden Merkmalen stehen andere gegenüber, die allen dargestellten Flächen gemeinsam sind:<sup>1</sup>

Für grosse  $y$  wird  $\sin z$  sehr gross gegen  $B(\alpha)$ . Die Projektionen der Linien konstanten Betrages in die  $z$ -Ebene nehmen also gemäss (1.7) mit wachsendem  $y$  desto eher einen wenig gekrümmten Verlauf an, je kleiner  $B(\alpha)$  und damit auch  $\alpha$  ist. Ihr annähernd logarithmisches Fortstreben von der reellen Achse mit wachsendem  $x$  ist nach (1.7) für grosse  $\alpha$  am stärksten. Die Linien konstanter Phase verhalten sich dementsprechend für hinreichend grosse  $y$  recht regelmässig; zu einer Differenz  $\Delta x = 2\pi$  gehört jeweils eine ebensolche Phasendifferenz.

Der Taylorschen Entwicklung

$$\text{Ci}(z, \alpha) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\text{Ci}(z_n, \alpha)^{(n)}}{n!} (z - z_n)^n \equiv \sum_{n=0}^{\infty} a_n \zeta^n$$

entnimmt man, dass der Anstieg der Fläche in der Umgebung einfacher Nullstellen gemäss  $|a_1| = |z^{-\alpha} \cos z|$  mit  $\alpha$  monoton wächst. Wegen (1.7) ist er für grosse  $y$  bei festem  $\alpha$  für alle Nullstellen gleich. Dass dieses Gesetz nur asymptotisch und nicht für kleine  $y$  gilt, ist z. B. an Hand des Doppelnullstellenverhaltens beweisbar. Am Ort der Nullstellen ist  $\arccos(z^{-\alpha} \cos z) \approx \pi/2$  und deshalb wegen  $\arccos \text{Ci}(z_0, \alpha) \approx \arccos \xi + \pi/2$  ein weitgehend übereinstimmendes Verhalten der Falllinien zu verzeichnen. Der Gauss'schen Krümmung der Betragfläche nach zerfällt die Nullstellenumgebung wegen  $|a_2| \neq 0$  in je 1 Gebiet mit elliptischer und hyperbolischer Krümmung, wie Abbildung 3 zeigt. Die Grenze zwischen diesen beiden Gebieten bildet die parabolische Linie mit der Gleichung

$$\Re \left( \frac{-z^{1-\alpha} \cos^2 z}{(z \sin z + \alpha \cos z) \text{Ci}(z, \alpha)} \right) = 1.$$

Sie umfasst die Menge aller nicht isoliert gelegenen Punkte der Betragfläche mit parabolischer Krümmung und hat am Ort der Nullstellen  $z_0$  wegen

$$\arccos a_2 - \arccos a_1 - \frac{\pi}{2} = \varepsilon(y_0), \quad \lim_{y_0 \rightarrow 0} \varepsilon(y_0) = 0$$

eine nur wenig gegen die  $x$ -Achse geneigte Tangente, beispielsweise etwe  $10^\circ$  bei der zweiten Nullstelle des Fresnelschen Integrals. Ausserdem existieren singuläre parabolische Punkte, nämlich die durch

---

<sup>1</sup> Herrn Prof. Dr. E. ULLRICH, Giessen, verdanke ich den Hinweis auf die unter seiner Leitung entstandene grundlegende Arbeit von J. Zaat, Differentialgeometrie der Betragflächen analytischer Funktionen. Diss., Mitt. Math. Sem. Univ. Giessen, Heft 30 (1944).

$$\operatorname{tg} z = -\frac{\alpha}{z}$$

bestimmten reellen Wendepunkte im Abstand  $\nu$  links von  $n\pi$ ;  $\nu$  nimmt monoton mit  $n$  ab. Die Doppelnullstellen sind, wie stets, Nabelpunkte der Betragflächen  $e$ . Die reelle Kreuzungspunkte zeigen für  $x = (4n + 1)\pi/2$  maximalen Fall in  $x$ -Richtung und maximalen Anstieg in  $y$ -Richtung; für  $x = (4n + 3)\pi/2$  ist es umgekehrt. Die Linien mit horizontaler Tangente bilden jeweils die Winkelhalbierenden.

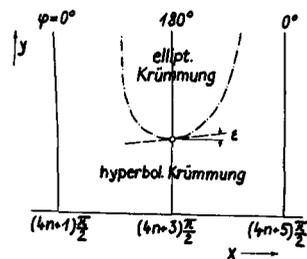


Abb. 3. Krümmungsverhalten der Betragflächen (schematisch).

Tafel I.

Ci ( $z, \alpha$ ) für reelles Argument  $z = x$ .

$x$	$\alpha=0,25$	$\alpha=0,5$	$\alpha=0,75$	$x$	$\alpha=0,25$	$\alpha=0,5$	$\alpha=0,75$
0	0	0	0	7,5	1,026	1,584	3,546
0,2	0,397	0,891	2,669	8,0	1,057	1,603	3,557
0,4	0,656	1,245	3,153	8,5	0,945	1,536	3,517
0,6	0,865	1,494	3,451	9,0	0,720	1,406	3,442
0,8	1,032	1,678	3,652	9,5	0,441	1,246	3,350
1,0	1,160	1,809	3,787	10,0	0,175	1,095	3,265
1,2	1,249	1,896	3,872	10,5	-0,012	0,990	3,206
1,4	1,299	1,943	3,917	11,0	-0,079	0,954	3,186
1,6	1,312	1,955	3,927	11,5	-0,011	0,990	3,206
1,8	1,289	1,935	3,910	12,0	0,173	1,089	3,260
2,0	1,234	1,888	3,870	12,5	0,423	1,224	3,331
2,2	1,151	1,819	3,812	13,0	0,681	1,360	3,403
2,4	1,043	1,731	3,741	13,5	0,882	1,465	3,458
2,6	0,916	1,630	3,661	14,0	0,979	1,516	3,485
2,8	0,775	1,520	3,575	14,5	0,950	1,501	3,477
3,0	0,626	1,406	3,488	15,0	0,805	1,427	3,439
3,2	0,476	1,293	3,403	15,5	0,581	1,314	3,382
3,4	0,330	1,184	3,322	16,0	0,333	1,189	3,320
3,6	0,193	1,085	3,249	16,5	0,121	1,084	3,267
3,8	0,071	0,996	3,185	17,0	-0,003	1,023	3,236
4,0	-0,033	0,923	3,131	17,5	-0,009	1,019	3,235
4,5	-0,186	0,815	3,057	18,0	0,100	1,072	3,261
5,0	-0,174	0,823	3,064	18,5	0,298	1,168	3,307
5,5	-0,007	0,934	3,137	19,0	0,535	1,282	3,362
6,0	0,267	1,111	3,252	19,5	0,752	1,386	3,412
6,5	0,581	1,309	3,377	20,0	0,898	1,455	3,445
7,0	0,855	1,479	3,482				

Tafel 2.

$Ci(x + iy, \alpha)$

$\alpha = 0,25$   $x = 0 (1) 20$   $y = 0 (1) 5$   $\alpha = 0,25 (0,25) 0,75$

x	y=0		y=1		y=2		x	y=3		y=4		y=5	
	ℜ	ℑ	ℜ	ℑ	ℜ	ℑ		ℜ	ℑ	ℜ	ℑ	ℜ	ℑ
0	0,00	0,00	0,58	1,41	1,43	3,44	0	3,36	8,11	8,17	19,7	20,4	49,4
1	1,16	0,00	1,66	0,55	3,49	1,25	1	8,21	2,60	20,2	5,60	51,3	13,0
2	1,23	0,00	1,62	-0,44	3,06	-1,50	2	6,77	-4,39	16,0	-12,2	39,7	-32,8
3	0,63	0,00	0,65	-0,88	0,66	-2,68	3	0,50	-7,20	-0,41	-18,9	-3,65	-49,4
4	-0,03	0,00	-0,34	-0,53	-1,60	-1,52	4	-5,20	-3,87	-15,0	-9,61	-41,2	-23,9
5	-0,18	0,00	-0,52	0,23	-1,88	0,80	5	-5,64	2,43	-15,5	7,14	-41,4	20,4
6	0,27	0,00	0,19	0,72	-0,11	2,24	6	-0,82	6,17	-2,39	16,7	-5,78	44,8
7	0,86	0,00	1,08	0,54	2,04	1,62	7	4,79	4,30	12,4	11,2	33,3	29,2
8	1,06	0,00	1,37	-0,11	2,66	-0,38	8	6,27	-1,21	16,0	-3,71	41,9	-11,0
9	0,72	0,00	0,84	-0,62	1,31	-1,93	9	2,56	-5,37	5,74	-14,7	13,7	-39,7
10	0,18	0,00	0,00	-0,55	-0,72	-1,68	10	-2,82	-4,54	-8,68	-12,1	-24,9	-32,1
11	-0,08	0,00	-0,38	0,01	-1,59	0,06	11	5,02	0,27	-14,3	1,05	-39,5	3,64
12	0,18	0,00	0,02	0,53	-0,58	1,66	12	-2,23	4,64	-6,58	12,7	-17,9	34,8
13	0,68	0,00	0,81	0,56	1,33	1,71	13	2,87	4,68	7,19	12,6	19,3	33,7
14	0,98	0,00	1,26	0,08	2,40	0,22	14	5,63	0,52	14,5	1,18	38,4	2,58
15	0,81	0,00	0,98	-0,46	1,69	-1,42	15	3,66	-3,96	8,92	-10,9	22,9	-29,9
16	0,33	0,00	0,25	-0,56	-0,10	-1,73	16	-1,12	-4,74	-4,04	-12,8	-12,3	-34,5
17	0,00	0,00	-0,25	-0,16	-1,32	-0,46	17	-4,32	-1,21	-12,6	-3,12	-34,9	-7,96
18	0,10	0,00	-0,09	0,38	-0,89	1,18	18	-3,10	3,31	-9,08	9,12	-25,1	25,1
19	0,53	0,00	0,58	0,56	0,76	1,71	19	1,31	4,71	2,92	12,8	7,57	34,6
20	0,90	0,00	1,13	0,22	2,10	0,68	20	4,85	1,82	12,4	4,81	33,0	12,7

Ci ( $x + iy, \alpha$ ) $\alpha=0,5$  (Fresnelsches Integral)

Tafel 2 (Forts.).

x	y=0		y=1		y=2		x	y=3		y=4		y=5	
	ℜ	ℑ	ℜ	ℑ	ℜ	ℑ		ℜ	ℑ	ℜ	ℑ	ℜ	ℑ
0	0,00	0,00	1,56	1,56	2,96	2,96	0	5,79	5,79	12,3	12,3	27,8	27,8
1	1,81	0,00	2,34	0,46	4,00	0,66	1	7,82	0,58	16,8	0,10	38,3	2,40
2	1,89	0,00	2,18	-0,39	3,17	-1,40	2	5,37	-4,12	10,3	-11,1	21,4	-28,9
3	1,41	0,00	1,39	-0,66	1,24	-1,99	3	0,57	-5,12	-1,75	-12,8	-8,69	-31,6
4	0,92	0,00	0,69	-0,36	-0,24	-0,97	4	-2,88	-2,19	-9,87	-4,74	-28,1	-10,1
5	0,82	0,00	0,61	0,16	-0,27	0,61	5	-2,56	1,95	-8,31	5,86	-22,6	16,9
6	1,11	0,00	1,07	0,46	0,94	1,43	6	0,75	3,92	0,66	10,5	1,38	27,5
7	1,48	0,00	1,63	0,33	2,24	0,95	7	4,05	2,42	9,06	5,99	22,8	14,7
8	1,60	0,00	1,79	0,07	2,55	0,27	8	4,63	-0,93	10,1	-2,96	24,3	9,07
9	1,41	0,00	1,47	-0,36	1,71	-1,12	9	2,28	-3,12	3,58	-8,51	6,35	-23,0
10	1,10	0,00	0,99	0,31	0,57	0,92	10	0,70	-2,44	4,30	-6,33	14,3	-16,3
11	0,95	0,00	0,79	0,01	0,13	0,06	11	-1,74	0,28	-6,73	1,10	-20,1	3,82
12	1,09	0,00	1,01	0,29	0,71	0,90	12	-0,09	2,54	-2,08	6,99	-6,98	19,1
13	1,36	0,00	1,43	0,29	1,72	0,89	13	2,60	2,41	5,13	6,37	12,3	16,8
14	1,52	0,00	1,66	0,04	2,25	0,10	14	3,92	0,18	8,45	0,23	20,7	0,02
15	1,43	0,00	1,51	-0,23	1,86	-0,73	15	2,80	-2,06	5,25	-5,71	11,5	-15,8
16	1,19	0,00	1,15	-0,28	0,96	-0,86	16	0,39	-2,34	-1,28	-6,26	-6,09	-16,7
17	1,02	0,00	0,89	-0,08	0,37	-0,21	17	-1,12	-0,53	-5,19	-1,25	-16,3	-2,89
18	1,07	0,00	0,98	0,18	0,60	0,58	18	-0,43	1,65	-3,18	4,59	-10,4	12,7
19	1,28	0,00	1,30	0,26	1,40	0,82	19	1,72	2,24	2,66	6,05	5,48	16,3
20	1,45	0,00	1,57	0,11	2,03	0,31	20	3,34	0,81	6,96	2,06	16,8	5,19

$Ci(x + iy, \alpha)$

$\alpha = 0,75$

Tafel 2 (Forts.).

x	y=0		y=1		y=2		x	y=3		y=4		y=5	
	℞	ℑ	℞	ℑ	℞	ℑ		℞	ℑ	℞	ℑ	℞	ℑ
0	0,00	0,00	3,91	1,62	5,56	2,30	0	8,48	3,51	14,6	6,06	28,5	11,8
1	3,79	0,00	4,33	0,37	5,75	0,19	1	8,57	-0,73	14,5	-3,25	27,8	-9,60
2	3,87	0,00	4,09	-0,34	4,73	-1,26	2	5,88	-3,60	7,92	-9,23	11,7	-22,8
3	3,49	0,00	3,45	-0,50	3,23	-1,45	3	2,38	-3,56	0,29	-8,30	-7,70	-19,1
4	3,13	0,00	2,96	-0,25	2,28	-0,61	4	0,40	-1,17	-4,43	-1,99	-16,5	-2,88
5	3,06	0,00	2,92	0,11	2,37	0,45	5	0,99	1,48	-2,23	4,51	-9,65	12,8
6	3,25	0,00	3,23	0,30	3,19	0,91	6	3,23	2,47	3,71	6,46	5,81	16,5
7	3,48	0,00	3,58	0,20	3,97	0,56	7	5,14	1,35	8,36	3,11	17,1	7,00
8	3,56	0,00	3,67	-0,94	4,11	-0,19	8	5,31	-0,67	8,33	-2,18	16,0	-6,75
9	3,44	0,00	3,48	-0,21	3,59	-0,65	9	3,84	-1,82	4,29	-4,97	4,87	-13,2
10	3,26	0,00	3,21	-0,17	2,95	-0,51	10	2,19	-1,31	0,02	-3,28	-6,04	-8,13
11	3,19	0,00	3,10	0,01	2,73	0,05	11	1,73	0,23	-0,94	0,88	-7,92	3,04
12	3,26	0,00	3,22	0,16	3,07	0,49	12	2,69	1,38	1,80	3,82	-0,19	10,4
13	3,40	0,00	3,44	0,15	3,61	0,46	13	4,10	1,23	5,55	3,22	9,72	8,28
14	3,48	0,00	3,56	0,02	3,86	0,04	14	4,72	0,04	7,05	-0,08	13,3	-0,70
15	3,44	0,00	3,48	-0,12	3,65	-0,38	15	4,10	-1,07	5,22	-2,98	8,00	-8,24
16	3,32	0,00	3,30	-0,14	3,20	-0,43	16	2,88	-1,15	1,95	-3,05	0,79	-8,05
17	3,24	0,00	3,17	-0,04	2,91	-0,10	17	2,18	-0,23	0,17	-0,47	-5,27	-0,92
18	3,26	0,00	3,22	0,09	3,04	0,29	18	2,56	0,82	1,30	2,31	-1,93	6,44
19	3,36	0,00	3,37	0,13	3,43	0,39	19	3,60	1,07	4,13	2,86	5,76	7,64
20	3,44	0,00	3,50	0,05	3,72	0,14	20	4,35	0,36	6,07	0,87	10,8	2,08

Tafel 3.

Einfache Nullstellen  $z_0 = x_0 + i y_0$ .

$\alpha$	$x_0$	$y_0$
1. Nullstellenpaar		
0	3,14	0
	6,28	0
0,25	3,93	0
	5,52	0
0,5	4,62	$\pm 1,68$
0,75	4,40	$\pm 3,12$
2. Nullstellenpaar		
0	9,42	0
	12,57	0
0,25	10,45	0
	11,55	0
0,5	10,94	$\pm 2,11$
0,75	10,81	$\pm 3,72$
3. Nullstellenpaar		
0	15,71	0
	18,85	0
0,25	16,99	0
	17,57	0
0,5	17,24	$\pm 2,34$
0,75	17,15	$\pm 4,05$

*Tafel 4.*

Zur Existenz von Doppelnulstellen bei  $x = (4n + 3)\pi/2$ .

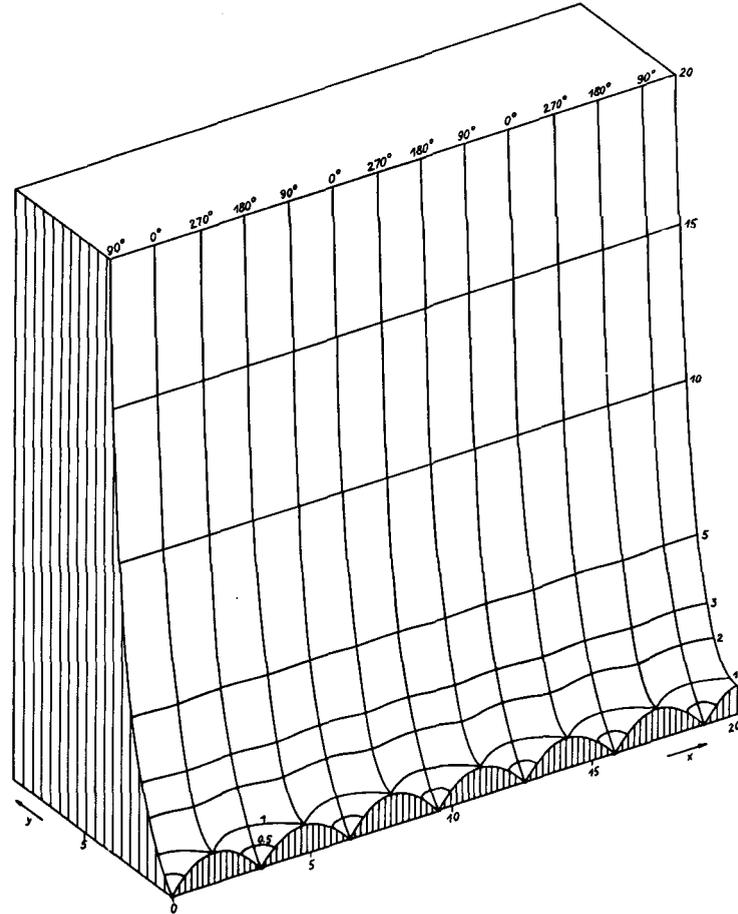
$n$	$\alpha = \omega(n)$	$n$	$\alpha = \omega(n)$
0	0,3086	6	0,2296
1	0,2728	7	0,2261
2	0,2557	8	0,2231
3	0,2459	9	0,2205
4	0,2390	10	0,2183
5	0,2338		

*Tafel 5.*

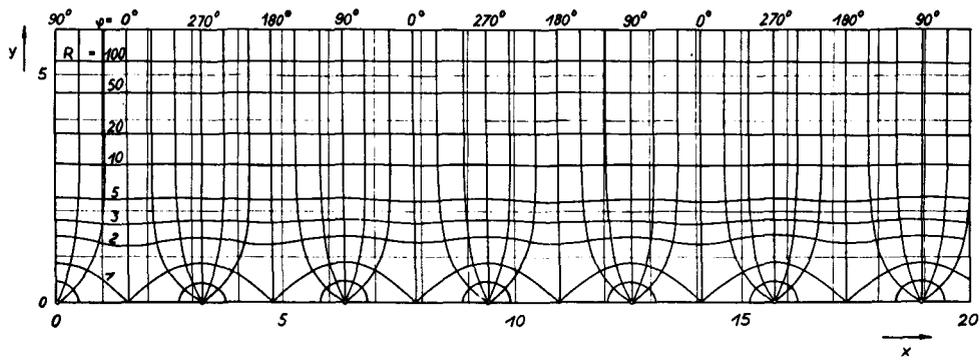
$B(\alpha)$  für kleine Werte des Argumentes.<sup>1</sup>

$\alpha$	$B(\alpha)$	$\alpha$	$B(\alpha)$
0,001	0,001 57	0,014	0,022 17
0,002	0,003 15	0,015	0,023 77
0,003	0,004 72		
0,004	0,006 30	0,016	0,025 37
0,005	0,007 88	0,017	0,026 97
		0,018	0,028 57
0,006	0,009 46	0,019	0,030 18
0,007	0,011 04	0,020	0,031 79
0,008	0,012 63		
0,009	0,014 21	0,025	0,039 85
0,010	0,015 80	0,030	0,047 97
		0,035	0,056 13
0,011	0,017 39	0,040	0,064 34
0,012	0,018 98	0,045	0,072 61
0,013	0,020 58		

<sup>1</sup>  $B(\alpha)$  für  $\alpha = 0$  (0,05) 1 mit 5 Dez. siehe (I, 165).



Betragfläche

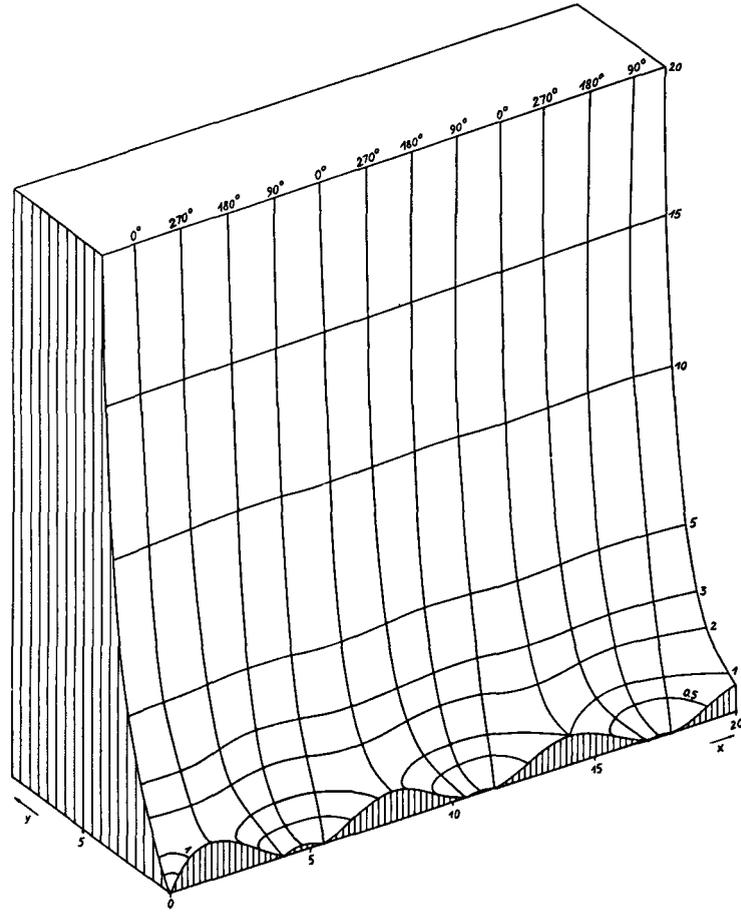


Grundriss

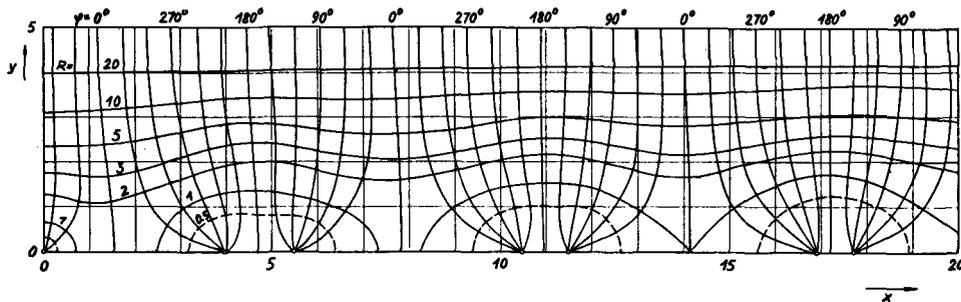
$z = x + iy$

$\text{Ci}(z, 0) = \sin z$   
Abb. 4 und 5.

$\text{Ci}(z, 0) = R e^{i\varphi}$



Betragfläche

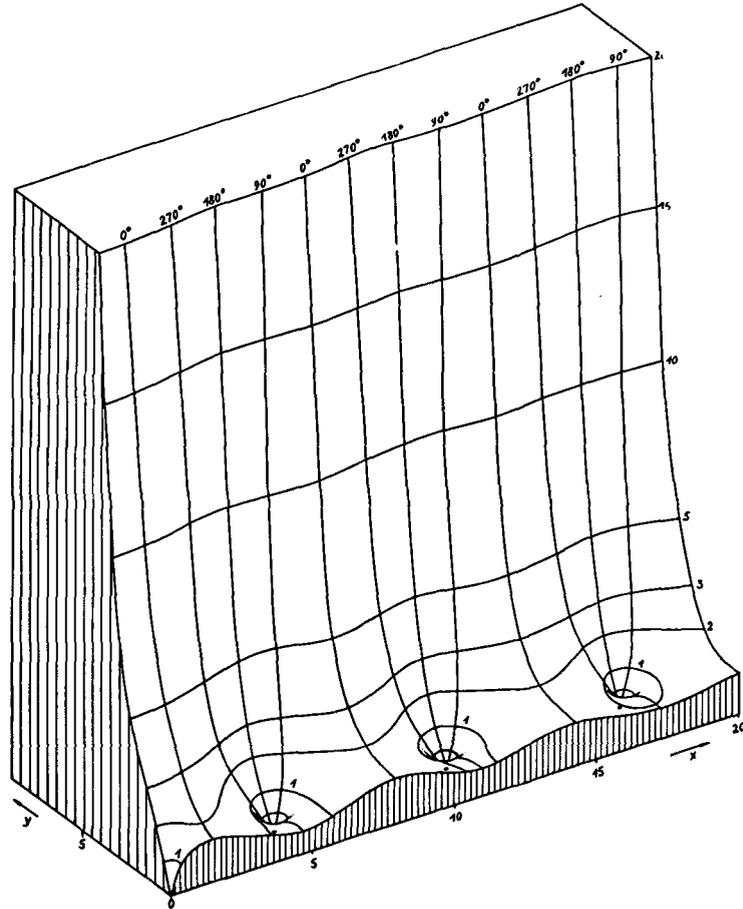


Grundriss

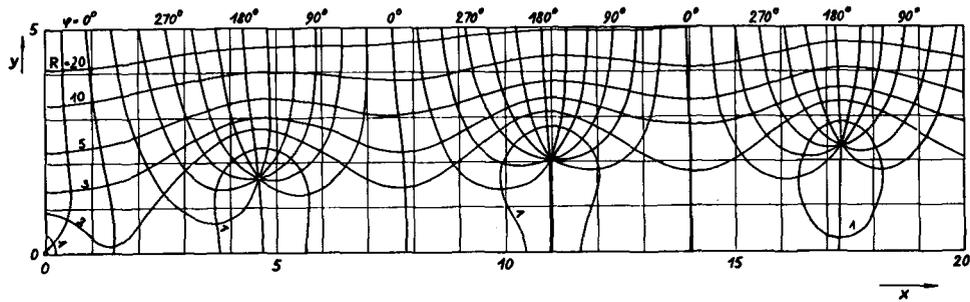
$z = x + iy$

$Ci(z, 0,25)$   
Abb. 6 und 7.

$Ci(z, 0,25) = R e^{i\varphi}$



Betragfläche



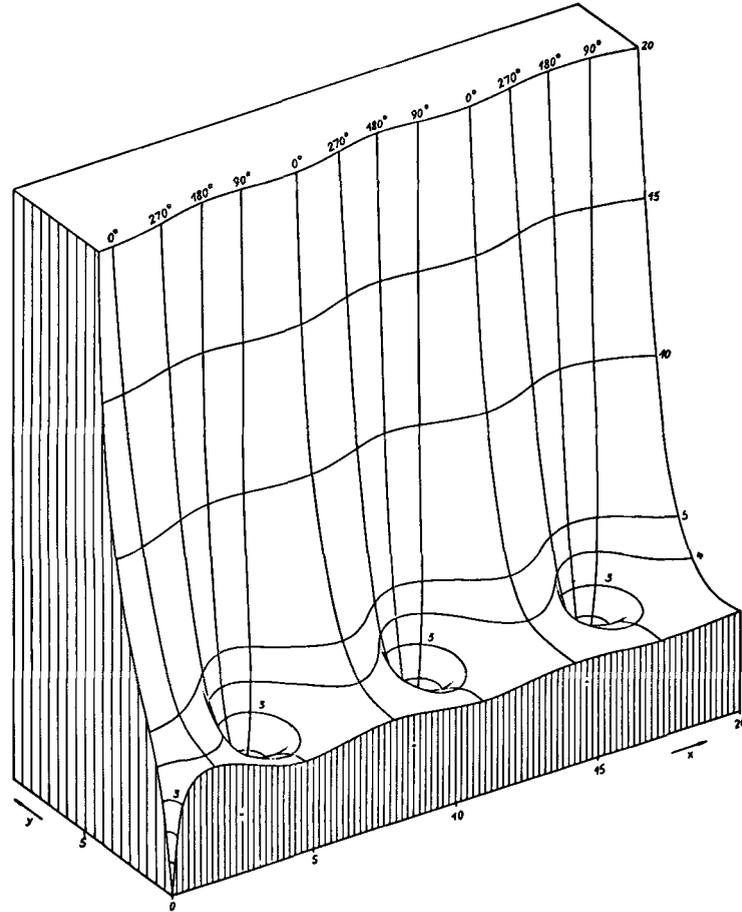
Grundriss

$z = x + iy$

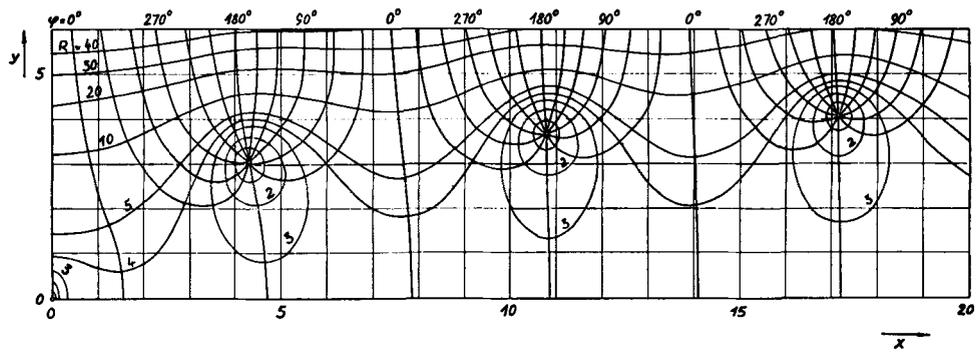
$Ci(z, 0,5)$  (Fresnelsches Integral)

$Ci(z, 0,5) = R e^{i\varphi}$

Abb. 8 und 9.



Betragsfläche



Grundriss

$$z = x + iy$$

$$Ci(z, 0,75)$$

$$Ci(z, 0,75) = R e^{i\varphi}$$

Abb. 10 und 11.

**Literatur.****A. Theorie.**

Siehe (I), Acta math. 85 (1951), 175—176.

**B. Anwendungen.**

l. c., 176—178.

**C. Tafeln.**

Für komplexes Argument existieren noch keine Tafeln.

Die für das Fresnelsche Integral  $S(z)$  angegebenen (I, 180—181) umfassen jeweils auch das Fresnelsche Integral  $C(z)$  für denselben Argumentbereich. Ausserdem sind zu nennen:

BOUMAN, J. und DE JONG, W. F., Verhand. K. Akad. Wet. Amsterdam (Afd. Naturkunde, Sect. 1) 14 (4)

$$\frac{1}{\sqrt{2}} C(u) \text{ und } \frac{1}{\sqrt{2}} S(u) \text{ für } u=0(0,1) 8,5.$$

LOMMELE, E., Abh. Bayr. Akad. Wiss. München 15 (1886), 529 - 664.  $C(x)$  für  $x=0(0,1) 1(0,5) 50, 6$  Dez.

MAYALL, R., Proc. Camb. Phil. Soc. 9, (1897), 259—269.

$$\frac{1}{2} \left\{ \frac{1}{2} - C(u) \right\}^2 + \frac{1}{2} \left\{ \frac{1}{2} - S(u) \right\}^2 \text{ für } u=0(0,05) 1. \quad (\text{I, 180})$$

STRUVE, H., Fresnels Interferenzerscheinungen. Ann. Physik Chemie (2) 15 (1882), 49—80 (Diss., im Auszug).

$$\int_0^{\infty} \cos(t^2 - v^2) dt \text{ für } v=0(0,1) 6, 5 \text{ Dez.} \quad (\text{I, 181})$$

Tafeln für die Komplementfunktion  $ci(x)$ :

BICKLEY, W. G., (Manuskript 1941)  $ci(x) - \ln x$  für  $x=0(0,01) 0,27, 11$  Dez., 4. Diff. (I, 178)

BRETSCHNEIDER, C. A., a) Arch. Math. Physik 3 (1843), 27—34,  $ci(x)$  für  $x=1(1) 10, 10$  Dez. (I, 175).

b) Z. Math. Physik 6 (1861), 127—139,  $ci(x)$  für  $x=1(1) 10, 20$  Dez.,  $x=0(0,01) 7,5, 10$  Dez. (I, 178)

Brit. Assn. Adv. Sc., Mathematical Tables I, London 1931.  $ci(x)$  für  $x=5(0,1) 20(0,2) 40, 10$  Dez. (I, 178)

Brit. Assn., Report for 1927 (AIREY, J. R.).  $ci(x)$  für  $x=5(0,1) 20, 10$  Dez.

- DALE, J. B., Five Figure Tables of mathematical Functions. London 1903.  $ci(x)$  für  $x=20(5)100(10)200(100)1000(1000)10^4, 10^5, 10^6, 4$  Dez. (I, 178)
- GLAISHER, J. W. L., Phil. Trans. London 160 (1870), 367—387  $ci(x)$  für  $x=0(0,01)1, 18$  Dez. 3. Diff.,  $x=1(0,1)5, 11$  Dez. 3. Diff.,  $x=6(1)15, 11$  Dez.  
 $x=20(5)100(10)200(100)1000(1000)11000, 7$  Dez.,  $x=10^5(1)^8, 7$  Dez.,  $x=2, 43$  Dez.,  $x=20, 12$  Dez.;  $ci((2n-1)\pi/2)$  für  $n=1(1)40, n=p$  und  $p+1$  für  $p=50(10)100(50)700, 7$  Dez. (I, 179)
- JAHNKE, E. und EMDE, F., Tafeln höherer Funktionen 4. Aufl. Leipzig 1948.  $ci(x)$  für  $x=0(0,01)1(0,1)5(1)15(5)100(10)130, 4$  gelt. Ziff.,  $\frac{x}{\pi}=0,5(1)15,5, 5$  gelt. Ziff. (I, 179)
- LASKA, W., Sammlung von Formeln der reinen und angewandten Mathematik. Braunschweig, 1888—94.  $ci(x)$  für  $x=0(0,01)1(1)10, 9$  Dez.,  $10^2(1)^5, 7$  Dez. (I, 179)
- National Bureaus of Standards. a) Tables of Sine, Cosine, and Exponential Integrals. New York 1940. Band I:  $ci(x)$  für  $x=0(0,0001)1,9999, 9$  Dez., 2. Diff.  
 b) do. Band II:  $ci(x)$  für  $x=0(0,001)10, 10$  Dez., 2. Diff.,  $x=10(0,1)20(0,2)40, 10$  Dez. 2., 4., . . . Diff.,  $ci(2n-1)\frac{\pi}{2}$  für  $n=1(1)3, 15$  Dez.;  $ci\left\{(2n-1)\frac{\pi}{2} \pm h\right\}$  für  $n=1(1)3$  und  $h=0(0,0001)0,01(0,001)0,05, 15$  Dez., 2. und 4. Diff.  
 c) Table of Sine and Cosine Integrals from 10 to 100. New York 1942.  $ci(x)$  für  $x=10(0,01)100, 10$  Dez., 2. Diff. (I, 179)
- PEDERSEN, P. O., Ingeniørvidenskabelige Skrifter a No 38, Kopenhagen (1935).  $\ln x + \gamma - ci(x)$  für  $x=0(0,1)25$  und  $50, 5$  Dez. (I, 179)
- SCHLÖMILCH, O., J. Math. 33 (1846), 316—324.  $ci(x)$  für  $x=1(1)10, 10$  Dez. (I, 176)
- TANI, K., Tables of  $si(x)$  and  $ci(x)$  for the Range  $x=0$  to  $x=50$ . Tokyo 1931.  $ci(x)$  für  $x=0(0,0001)0,05(0,001)1(0,01)50, 6$  Dez., 1. Diff. (I, 179)
- TÖLKE, F., Praktische Funktionenlehre Bd. 1. Berlin 1943.  $ci(x)$  für  $x=0(0,01)5, 4$  Dez. 1. Diff. (I, 180)