

# LES SÉRIES DE FONCTIONS FONDAMENTALES ET LES PROBLÈMES AUX LIMITES POUR LES ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES LINÉAIRES HYPERBOLIQUES.

Par

FLORENT BUREAU

à LIÈGE.

1. Pour représenter les solutions des problèmes aux limites relatifs à des équations aux dérivées partielles linéaires totalement hyperboliques, on peut recourir à deux catégories de méthodes nettement différentes. D'une part, on peut exprimer la solution par des intégrales définies; d'autre part, on peut représenter la solution cherchée par une série de solutions particulières, simples, de l'équation donnée. Les premières méthodes utilisent un théorème de réciprocity, une solution élémentaire et une solution auxiliaire convenablement choisies de l'équation (ou seulement une fonction de Riemann pour une équation à deux variables indépendantes); les secondes méthodes, qui occupent une place importante dans le développement de la Physique mathématique, utilisent le plus souvent des séries de fonctions orthogonales dont la plus connue est la série de Fourier.

L'objet des recherches actuelles est de chercher à établir une liaison entre ces deux catégories de méthodes. Pour limiter les difficultés, nous avons considéré ici seulement des équations du second ordre à deux variables indépendantes; mais la méthode s'étend évidemment à des équations plus générales.<sup>1</sup>

Dans le premier chapitre de notre travail, nous avons rappelé comment on peut obtenir la solution du problème aux limites au moyen de la fonction de Green-Riemann ou encore à l'aide de développements en série de fonctions orthogonales.

Dans un second chapitre, nous avons étudié une solution particulière  $H_n(x, y; t)$  de l'équation donnée et montré comment on peut en déduire la solution du problème posé en utilisant la méthode des singularités. Nous avons ensuite montré que cette

---

<sup>1</sup> Cf. F. BUREAU [1 a, b]. Les chiffres entre crochets renvoient à l'index bibliographique.

fonction  $H_n(x, y; t)$  n'était différente de zéro que dans une partie seulement de son domaine d'existence et que par suite, l'application de la méthode des singularités conduisait à la formule que l'on obtiendrait en appliquant la méthode de Volterra-Tedone.

Dans un troisième chapitre, nous avons construit à l'aide des fonctions fondamentales liées à notre problème, une fonction  $K_s(x, y; t)$  dépendant analytiquement de  $s$ . En appliquant alors la formule de réciprocity, nous avons obtenu une relation dépendant analytiquement de  $s$  et vérifiée par la solution du problème aux limites. En effectuant le prolongement analytique pour  $s$ , on obtient la solution cherchée.

Nous avons montré ensuite que notre fonction  $K_s(x, y; t)$  est liée à la fonction  $G(x, t; y, \tau)$  de Green-Riemann; d'une manière précise, on a la relation

$$K_0(x, y; t) = \frac{1}{2} G(x, t; y, 0).$$

Enfin, dans un quatrième chapitre, nous avons montré que si les  $\lambda_k$ , ( $k = 1, 2, \dots$ ) sont les nombres fondamentaux liés à notre problème, la fonction  $\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^{-s}$ , analytique en  $s$ , peut être prolongée analytiquement pour  $Re s > -\frac{1}{2}$  et qu'elle possède dans ce domaine un seul pôle simple  $s = \frac{1}{2}$  avec le résidu  $\frac{1}{2}$ .

Remarquons encore que la fonction  $K_s(x, y; t)$  peut être construite pour des équations plus générales et à plus de deux variables indépendantes; on obtient ainsi une méthode régulière permettant de construire la solution d'un problème aux limites pour une équation (ou un système) aux dérivées partielles totalement hyperbolique.

Observons enfin que cette fonction  $K_s(x, y; t)$  est construite en utilisant des solutions fondamentales d'une équation elliptique associée à l'équation donnée et que ses propriétés dépendent de l'étude d'une équation parabolique.

## CHAPITRE I.

### Le problème aux limites.

2. Dans l'intervalle fini  $0 \leq x \leq l$ , considérons des fonctions continues,  $k(x)$ ,  $a(x)$ ,  $u_0(x)$ ,  $u_1(x)$  telles que

1°  $k(x) > 0$ ,  $a(x) \geq 0$ ;

2°  $k(x)$  possède des dérivées  $k'(x)$  et  $k''(x)$  continues.

Posons

$$L_x(v) = \frac{d}{dx} \left[ k(x) \frac{dv}{dx} \right] - a(x)v \quad (1.1)$$

et proposons-nous de rechercher une solution  $u(x, t)$  de l'équation aux dérivées partielles du type hyperbolique

$$D(u) = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - L_x(u) = 0 \quad (1.2)$$

vérifiant les conditions suivantes:

1° En  $t=0$ , nous avons

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = u_1(x); \quad (1.3)$$

2° Quel que soit  $t \geq 0$ , nous avons

$$u(0, t) = u(l, t) = 0. \quad (1.4)$$

Nous admettrons que  $u_0(x)$  vérifie les conditions (1.4).

Un changement de variable et d'inconnue permet d'ailleurs de supposer  $k(x) \equiv 1$  dans  $0 \leq x \leq l$ ; c'est ce que, pour abrégé, nous ferons désormais.

**3.** Dans ce qui suit, la formule de réciprocité relative à l'équation  $Du = 0$  jouera un rôle important.

Soit dans le plan  $(y, \tau)$ , un domaine  $S$  limité par une courbe  $C$ ; désignons par  $d\sigma$  l'élément de surface de  $S$ , par  $ds$  l'élément d'arc de  $C$ , par  $\vec{n} = (n_1, n_2)$  le vecteur unitaire<sup>1</sup> porté par la normale intérieure à  $C$ .

Les fonctions  $u(y, \tau)$  et  $v(y, \tau)$  étant continues ainsi que leurs dérivées partielles des deux premiers ordres, posons

$$M(u, v) = v P_n(u) - u P_n(v), \quad (1.5)$$

$$P_n(u) = \frac{\partial u}{\partial \tau} n_2 - \frac{\partial u}{\partial y} n_1, \quad (1.6)$$

$P_n(u)$  étant la dérivée conormale de  $u$ . Nous avons alors la formule de réciprocité

$$\iint_S [v D(u) - u D(v)] d\sigma = - \int_C M(u, v) ds. \quad (1.7)$$

#### A. La fonction de Green-Riemann.

**4.** La solution du problème mixte énoncé ci-dessus peut être construite de la manière suivante. Dans le plan  $(y, \tau)$ , menons par le point  $P = (x, t)$ , les caractéristiques  $PA_1$ ,  $PB_1$  [limitées respectivement aux droites  $OA_1 (y=0)$  et  $LB_1 (y=l)$ ]

<sup>1</sup> On a  $dy = n_2 ds$ ,  $d\tau = -n_1 ds$ .

et les segments de droites qui en dérivent par des réflexions successives sur  $OA_1$  et  $LB_1$ . Nous obtenons ainsi deux lignes brisées  $PA_1 A_2 A_3 \dots A$ ;  $PB_1 B_2 B_3 \dots B$ , composées d'un nombre fini de segments, les points  $A$  et  $B$  étant situés sur  $Oy$  [cf. fig. 1]. Ces lignes déterminent dans la bande  $A_1 O L B_1$  du plan  $(y, \tau)$ ,

des aires polygonales (en général, rectangles ou triangles) que nous noterons I, II, II\*, III, etc.

Désignons encore par  $OO'$  et  $LL'$  respectivement les caractéristiques passant par  $O$  et  $L$  et parallèles à  $PB_1$  et  $PA_1$ .

Cela étant posé, appelons  $R(x, t; y, \tau)$  la fonction de Riemann définie de la manière suivante:

1. Considérée comme fonction de  $(y, \tau)$ , la fonction  $R$  vérifie l'équation

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \tau^2} - L_y(u) = 0; \quad (1.8)$$

2. Sur les caractéristiques  $PA_1$  et  $PB_1$  (prolongées) issues de  $P = (x, t)$ , on a

$$dR = \frac{\partial R}{\partial y} dy + \frac{\partial R}{\partial \tau} d\tau = 0;$$

3. On a

$$R(x, t; x, t) = 1.$$

D'ailleurs, si l'équation est auto-adjointe, ce qui est le cas ici,  $R(x, t; y, \tau)$  est symétrique par rapport aux couples  $P \equiv (x, t)$  et  $M \equiv (y, \tau)$ . Puisque  $a(x)$  ne dépend pas de  $t$ , la fonction  $R$  ne dépend que de  $x, y$  et  $t - \tau$ ;

nous l'écrirons encore pour cette raison  $R(x, y; t - \tau)$ , aucune confusion n'étant possible.

Dans la bande limitée par le segment  $OA_1$  et les caractéristiques  $A_1 A_2$  et  $OO'$  prolongées, définissons<sup>1</sup> une solution  $v_1(y, \tau)$  de l'équation (1.8), nulle sur  $OA_1$  et égale à  $R(x, t; y, \tau) - R(x, t; A_1)$  sur  $A_1 A_2$ . D'après un résultat classique, cette fonction  $v_1(y, \tau)$  existe et est unique.

De même, dans la bande limitée par le segment  $LB_1$  et les caractéristiques  $B_1 B_2$  et  $LL'$  prolongées, définissons une solution  $v_1^*(y, \tau)$  de l'équation (1.8), nulle sur  $LB_1$  et égale à  $R(x, t; y, \tau) - R(x, t; B_1)$  sur  $B_1 B_2$ .

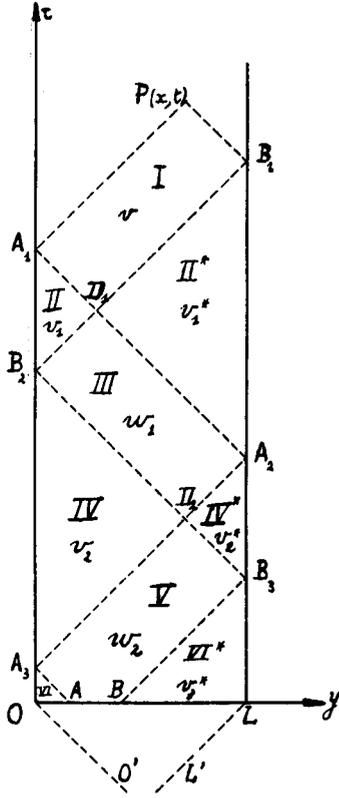


Fig. 1.

<sup>1</sup> Cf. J. HADAMARD [7 c; 7 d, spéc. Appendice II pp. 453—486].

Enfin, dans l'angle  $B_2 D_1 A_2$  déterminé par les caractéristiques  $B_1 B_2$  et  $A_1 A_2$  prolongées et se coupant en  $D_1$ , définissons une fonction  $w_1(y, \tau)$  en posant

$$w_1(y, \tau) = v_1 + v_1^* - R.$$

A partir de la fonction  $w_1(y, \tau)$ , définissons de même des solutions  $v_2, v_2^*, w_2$  de l'équation (1.8) à l'aide des caractéristiques  $B_2 B_3$  et  $A_2 A_3$ , comme  $v_1, v_1^*, w_1$  ont été définies à partir de  $v$  à l'aide des caractéristiques  $A_1 A_2$  et  $B_1 B_2$  et ainsi de suite.

A présent, considérons la fonction  $G(P, M)$  de Green-Riemann définie comme identique à  $v$  dans I, à  $v_1$  dans II, à  $v_1^*$  dans II\*, à  $w_1$  dans III, à  $v_2$  dans IV, à  $v_2^*$  dans IV\*, à  $w_2$  dans V, etc.

Cette fonction  $G(P, M)$  considérée comme dépendant de  $M$  est une solution de l'équation (1.8); elle s'annule sur  $OA_1$  et  $LB_1$  et est discontinue le long des caractéristiques  $A_1 A_2 A_3 \dots; B_1 B_2 B_3 \dots$ .

Appliquons maintenant la formule de réciprocité en prenant pour  $u$  la solution cherchée du problème mixte et pour  $v$ , la fonction  $G(P, M)$ .

En supposant que le contour  $C$  est parcouru dans le sens direct, nous avons

1. Pour une caractéristique parallèle à  $PA_1$ ,

$$M(u, v) ds = d(uv) - 2u dv;$$

2. Pour une caractéristique parallèle à  $PB_1$ ,

$$M(u, v) ds = -d(uv) + 2u dv.$$

Il résulte alors de la formule de réciprocité

$$2u(P) = \pm [u_0(A) \Delta_A G - u_0(B) \Delta_B G] + \int_0^l \left[ G u_1 - u_0 \frac{\partial G}{\partial \tau} \right] dy, \quad (A)$$

$\Delta_A G$  désignant le saut de la fonction  $G(P, M)$  en  $A$ .

D'ailleurs, la fonction  $u(x, t)$  donnée par (A) est effectivement une solution du problème posé et cette solution est unique.

En particulier, dans le plan  $(y, \tau)$ , les caractéristiques (fig. 2) passant par l'origine  $O$  et par le point  $L = (l, 0)$  déterminent un triangle  $OML$ . Une solution de l'équation (1.2) en un point  $P = (x, t)$  intérieur à ce triangle est déterminée si l'on donne dans l'intervalle  $0 \leq x \leq l$ , les données de Cauchy  $u_0(x)$  et  $u_1(x)$ . Dans le triangle  $OML$ , le problème posé est donc un problème de Cauchy et sa solution est donnée conformément à la formule précédente, par

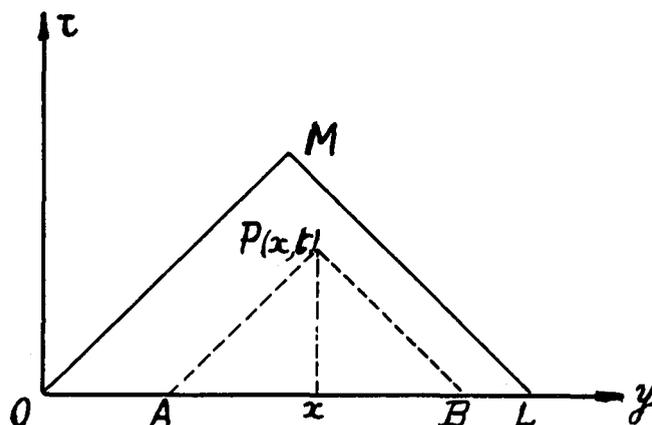


Fig. 2.

$$2u(P) = (u_0 R)_A + (u_0 R)_B + \int_{AB} \left[ u_1 R - u_0 \frac{\partial R}{\partial \tau} \right] dy, \quad (A')$$

où  $R(x, y; t)$  est la fonction de Riemann et où  $A = (x-t, 0)$  et  $B = (x+t, 0)$ .

*Remarque.* On peut dire que la fonction de Riemann est égale à  $R(x, y; t)$  dans le triangle  $PAB$  et identiquement nulle ailleurs.

### B. Les séries de fonctions fondamentales.

5. Comme il est bien connu, on obtient des solutions simples  $u(x, t) = v(x)w(t)$  de l'équation (1.2) vérifiant les conditions (1.4), en recherchant les solutions de l'équation

$$\frac{d^2 w}{dt^2} + \lambda w = 0 \quad (1.9)$$

et du système

$$L_x(v) + \lambda v = 0, \quad v(0) = v(l) = 0, \quad (1.10)$$

$\lambda$  étant une constante; la solution triviale  $v(x) = 0$  est évidemment exclue.

Les solutions  $v(x)$  du système (1.10) considérées ici<sup>1</sup>, sont supposées continues ainsi que leurs dérivées des deux premiers ordres. Il résulte des hypothèses faites que les relations (1.10) sont incompatibles pour  $\lambda = 0$ , c'est-à-dire que le système

$$L_x(v) = 0, \quad v(0) = v(l) = 0 \quad (1.11)$$

n'admet aucune solution non identiquement nulle, continue ainsi que sa dérivée première dans tout l'intervalle  $(0, l)$ .

<sup>1</sup> Cf. E. L. INCE [8, spéc. chap. XI]; R. COURANT und D. HILBERT [4, passim].

Dans ces conditions, l'opérateur  $L_x(v)$  étant auto-adjoint, il existe une fonction de Green  $G(x, y)$  symétrique en  $x$  et  $y$ , continue dans  $(0, l)$ , dont la dérivée première  $\frac{\partial G}{\partial x}$  est discontinue en un point  $y$  de  $(0, l)$  de manière que

$$\frac{\partial G(x, y)}{\partial x} \Big|_{x=y-0}^{x=y+0} = -1; \quad (1.12)$$

cette fonction  $G(x, y)$  est positive et est une solution du système (1.11) en tout point  $x$  de  $(0, l)$  distinct de  $x=y$ .

On sait d'ailleurs que le système non homogène

$$L_x(v) = -f(x), \quad v(0) = v(l) = 0 \quad (1.13)$$

où  $f(x)$  est continue par fragments dans  $(0, l)$ , admet une et une seule solution qui s'écrit

$$v(x) = \int_0^l G(x, y) f(y) dy. \quad (1.14)$$

6. Il est bien connu que le système (1.10) possède des solutions  $v_n(x)$  pour une infinité dénombrable de nombres caractéristiques (Eigenwerte)  $\lambda_n$  ( $n = 1, 2, \dots$ ), ( $\lambda_{n+1} > \lambda_n$ ) simples, réels et positifs (0 n'est pas une valeur caractéristique) ayant pour seul point limite  $+\infty$ ; ces fonctions fondamentales (Eigenfunktionen)  $v_n(x)$  vérifient les relations

$$\int_0^l v_m(x) v_n(x) dx = 0, \quad (m \neq n)$$

et sont univoquement déterminées si nous supposons que

$$\int_0^l v_n^2(x) dx = 1$$

pour  $n = 1, 2, \dots$ ; l'ensemble des fonctions  $v_n(x)$  forme une suite orthogonale, normale et fermée.

Si  $\lambda$  n'est pas une valeur caractéristique, le système (1.10) possède une et une seule fonction de Green  $G(x, y; \lambda)$ ; la solution du système

$$L_x(v) + \lambda v = -f(x), \quad v(0) = v(l) = 0 \quad (1.15)$$

s'écrit

$$v(x) = \int_0^l G(x, y; \lambda) f(y) dy. \quad (1.16)$$

Si  $\lambda$  ne coïncide avec aucun des  $\lambda_n$ , la fonction  $G(x, y; \lambda)$ , méromorphe en  $\lambda$ , s'exprime à l'aide des fonctions fondamentales  $v_n(x)$  par la relation<sup>1</sup>

<sup>1</sup> On observera que les pôles de  $G(x, y; \lambda)$  sont simples.

$$G(x, y; \lambda) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{v_n(x) v_n(y)}{\lambda_n - \lambda}. \quad (1.17)$$

La série

$$G(x, y; 0) = G(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{v_n(x) v_n(y)}{\lambda_n} \quad (1.18)$$

est d'ailleurs absolument et uniformément convergente et il en est de même à fortiori des itérées successives

$$G^{(r+1)}(x, y) = \int_0^l G(x, \alpha) G^{(r)}(\alpha, y) d\alpha = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{v_n(x) v_n(y)}{\lambda_n^{r+1}}, \quad (r = 1, 2, \dots);$$

nous avons posé  $G^{(1)}(x, y) = G(x, y)$ .

Rappelons encore la relation

$$G(x, y; \lambda) - G(x, y) = \lambda \sum_{n=1}^{\infty} \frac{v_n(x) v_n(y)}{\lambda_n (\lambda_n - \lambda)}; \quad (1.19)$$

d'après (1.18), on a aussi

$$v_n(x) = \lambda_n \int_0^l G(x, y) v_n(y) dy, \quad (n = 1, 2, \dots). \quad (1.20)$$

7. Les expressions asymptotiques des  $\lambda_n$  et des  $v_n(x)$  nous seront très utiles.

En posant  $K = \frac{l}{\pi}$ , nous avons

$$\lambda_n = \frac{1}{K^2} \left( n^2 + c + \frac{\alpha(n)}{n} \right), \quad (1.21)$$

$$v_n(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi K}} \left[ \sin \frac{nl}{\pi} x - \frac{\beta(x)}{n} \cos \frac{nl}{\pi} x + \frac{\gamma(n, x)}{n^2} \right], \quad (1.22)$$

$c$  étant une constante et les  $\alpha(n)$ ,  $\beta(x)$ ,  $\gamma(n, x)$ , des fonctions bornées de leurs arguments.

8. A présent, considérons le système

$$\left. \begin{aligned} D(u) &= \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - L_x(u) = 0, \\ u(0, t) &= u(l, t) = 0 \text{ quel que soit } t \geq 0 \end{aligned} \right\} \quad (1.23)$$

dont la solution est donnée par

$$u(x, t) = - \int_0^l G(x, y) L_y[u(y, t)] dy = - \int_0^l G(x, y) \frac{\partial^2 u(y, t)}{\partial t^2} dy. \quad (1.24)$$

Supposons la fonction  $\frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2}$  continue dans  $(0, l)$ . D'après le théorème de Hilbert-Schmidt, on sait que la fonction  $u(x, t)$  donnée par (1.24) est alors développable en une série absolument et uniformément convergente de fonctions fondamentales.

Nous poserons

$$\psi_n(t) = \int_0^l u(y, t) v_n(y) dy$$

et nous écrivons

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} v_n(x) \psi_n(t), \quad (1.25)$$

cette série étant absolument et uniformément convergente dans  $0 \leq x \leq l$ ,  $t$  variant dans un intervalle fini quelconque.

D'autre part, la formule de Taylor

$$u(x, t) = u(x, 0) + t u_t(x, 0) + \int_0^t (t - \tau) \frac{\partial^2 u(x, \tau)}{\partial \tau^2} d\tau$$

permet d'écrire en tenant compte des conditions initiales (1.3) et de l'équation donnée

$$u(x, t) = u_0(x) + t u_1(x) + \int_0^t (t - \tau) L_x[u(x, \tau)] d\tau.$$

En multipliant cette relation par  $G(x, y)$  et en intégrant entre 0 et  $l$ , il vient

$$\begin{aligned} \int_0^l G(x, y) u(y, t) dy &= \int_0^l G(x, y) u_0(y) dy + t \int_0^l G(x, y) u_1(y) dy + \\ &+ \int_0^l G(x, y) \int_0^t (t - \tau) L_y[u(y, \tau)] d\tau dy. \end{aligned}$$

La dernière intégrale s'écrit en permutant les intégrations et en tenant compte de (1.24)

$$- \int_0^t (t - \tau) u(x, \tau) d\tau;$$

nous obtenons ainsi

$$\int_0^l G(x, y) u(y, t) dy = \int_0^l G(x, y) u_0(y) dy + t \int_0^l G(x, y) u_1(y) dy - \int_0^t (t - \tau) u(x, \tau) d\tau. \quad (1.26)$$

D'ailleurs, la série (1.25), absolument et uniformément convergente, peut être intégrée terme à terme; d'après (1.20), nous avons

$$\int_0^l G(x, y) u(y, t) dy = \sum_{n=1}^{\infty} \psi_n(t) \int_0^l G(x, y) v_n(y) dy = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{v_n(x) \psi_n(t)}{\lambda_n}. \quad (1.27)$$

A présent, supposons les fonctions  $u_0(x)$  et  $u_1(x)$  développables en séries absolument et uniformément convergentes des fonctions fondamentales  $v_n(x)$  et posons

$$u_0(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n v_n(x), \quad u_1(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n v_n(x), \quad (1.28)$$

les  $a_n$  et les  $b_n$  étant les constantes de Fourier

$$a_n = \int_0^l u_0(y) v_n(y) dy, \quad b_n = \int_0^l u_1(y) v_n(y) dy; \quad (1.29)$$

il vient

$$\int_0^l G(x, y) u_0(y) dy = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n v_n(x)}{\lambda_n}, \quad (1.30)$$

$$\int_0^l G(x, y) u_1(y) dy = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n v_n(x)}{\lambda_n}. \quad (1.31)$$

En utilisant (1.27), (1.30) et (1.31), la relation (1.26) s'écrit

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{v_n(x)}{\lambda_n} \left[ \psi_n(t) - a_n - t b_n + \lambda_n \int_0^t (t - \tau) \psi_n(\tau) d\tau \right] = 0.$$

Cette série étant encore absolument et uniformément convergente, on en déduit

$$\psi_n(t) = a_n + t b_n - \lambda_n \int_0^t (t - \tau) \psi_n(\tau) d\tau, \quad (n = 1, 2, \dots).$$

En dérivant cette relation, on voit que les fonctions  $\psi_n(t)$  doivent vérifier le système

$$\psi_n''(t) + \lambda_n \psi_n(t) = 0,$$

$$\psi_n(0) = a_n, \quad \psi_n'(0) = b_n;$$

il vient donc

$$\psi_n(t) = a_n \cos \sqrt{\lambda_n} t + \frac{b_n}{\sqrt{\lambda_n}} \sin \sqrt{\lambda_n} t$$

et par conséquent

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n v_n(x) \cos \sqrt{\lambda_n} t + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{\sqrt{\lambda_n}} v_n(x) \sin \sqrt{\lambda_n} t. \quad (B)$$

Rappelons que nous avons supposé la fonction  $\frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2}$  continue et les fonctions  $u_0(x)$  et  $u_1(x)$  développables en séries absolument et uniformément convergentes des fonctions fondamentales  $v_n(x)$ .

9. Dans les paragraphes précédents et sous les conditions rappelées, nous avons admis que la solution du problème posé existe et nous avons montré que cette solution a alors nécessairement la forme (B).

Réciproquement, supposons que l'on construise à priori la fonction  $u(x, t)$  donnée par (B). Il faut vérifier, ce qui est souvent négligé, que cette fonction remplit toutes les conditions du problème posé; en d'autres termes, il est nécessaire de faire la synthèse de la solution.

A cet effet, on remarquera que les coefficients de Fourier

$$a_n = \int_0^l f(y) v_n(y) dy, \quad (n = 1, 2, \dots)$$

d'une fonction  $f(x)$  vérifient les relations

$$1^\circ \quad |a_n| < \frac{M_1}{n}, \quad (n = 1, 2, \dots) \quad (1.32)$$

si  $f(x)$  est bornée et intégrable dans  $(0, l)$ ;

$$2^\circ \quad |a_n| < \frac{M_2}{n^2}, \quad (n = 1, 2, \dots) \quad (1.33)$$

si  $f(x)$  possède dans  $(0, l)$  une dérivée  $f'(x)$  bornée et intégrable;  $M_1$  et  $M_2$  sont des nombres positifs indépendants de  $n$ .

Cependant, cette synthèse résulte aussi de l'existence et de l'unicité de la solution donnée par (A). Nous verrons en effet, dans les chapitres suivants que l'on peut déduire la forme (B) de  $u(x, t)$  à l'aide d'une méthode utilisant la formule de réciprocity et le prolongement analytique.

10. D'après (A), la solution du problème mixte peut être exprimée par une intégrale définie portant sur les données du problème; d'après (B), si ces données sont représentées par des séries convenables [cf. (1.28)], la solution peut aussi se mettre sous la forme d'une série.

Dans (A), chaque élément des données influe directement sur la solution; au contraire, dans (B), les données<sup>1</sup> semblent n'intervenir que globalement par les intégrales exprimant les coefficients  $a_n$  et  $b_n$ .

On peut se proposer d'établir une relation entre les deux formes (A) et (B) de la solution de notre problème. Ainsi, il paraît intéressant de rechercher si la fonc-

---

<sup>1</sup> Il convient cependant de remarquer qu'il y a en général une infinité de coefficients  $a_n$  et  $b_n$ .

tion de Green-Riemann  $G(P, M)$  peut être représentée dans l'intervalle  $(0, l)$  par une série des fonctions

$$v_n(x) v_n(y) \frac{\sin \sqrt{\lambda_n} t}{\sqrt{\lambda_n}}.$$

En particulier, on peut rechercher si la fonction de Riemann  $R(x, y; t)$  peut être représentée dans l'intervalle  $(0, l)$  par une série des fonctions

$$v_n(x) v_n(y) \frac{\sin \sqrt{\lambda_n} t}{\sqrt{\lambda_n}},$$

cette série étant différente de zéro dans une partie seulement  $(x-t \leq y \leq x+t)$  de son intervalle de définition  $(0, l)$ .

## CHAPITRE II.

### Application de la méthode des singularités.

#### A. La fonction<sup>1</sup> $H_n(x, y; t)$ .

II. Supposons les nombres fondamentaux simples rangés par ordre de grandeur non décroissante  $(\lambda_k < \lambda_{k+1})$ . Désignons par  $C_p$  la circonférence du plan des  $\lambda$  ayant pour centre  $\lambda=0$  et un rayon compris entre  $\lambda_p$  et  $\lambda_{p+1}$ ,  $(\lambda_p \neq \lambda_{p+1})$ ; il y a exactement  $p$  nombres caractéristiques intérieurs à  $C_p$ .

Proposons-nous d'étudier la fonction

$$H_n^{(p)}(x, y; t) = \frac{1}{2i\pi} \int_{C_p^+} F(\lambda) d\lambda$$

avec

$$F(\lambda) = \frac{G(x, y; \lambda)}{\lambda^n} \cdot \frac{e^{it\sqrt{\lambda}} - e^{-it\sqrt{\lambda}}}{2i\sqrt{\lambda}},$$

$n$  étant un nombre entier au moins égal à 1 et  $G(x, y; \lambda)$ , la fonction de Green dont il a été question ci-dessus.

Puisque les  $\lambda_k$  sont différents de zéro, la fonction  $F(\lambda)$  est analytique et uniforme dans et sur  $C_p$ ; elle possède des pôles simples en  $\lambda = \lambda_k$ ,  $(k=1, 2, \dots, p)$  et un pôle multiple d'ordre  $n$  en  $\lambda=0$ .

---

<sup>1</sup> Une fonction analogue à  $H_n$  a été rencontrée par S. ZAREMBA [14] dans l'étude du problème mixte pour l'équation des ondes à quatre dimensions.

De l'expression (1.19) de  $G(x, y; \lambda)$ , on déduit que le résidu de  $F(\lambda)$  en  $\lambda = \lambda_k$  est

$$-\frac{v_k(x)v_k(y)}{\lambda_k^n} \cdot \frac{\sin \sqrt{\lambda_k} t}{\sqrt{\lambda_k}}.$$

Pour calculer le résidu de  $F(\lambda)$  en  $\lambda = 0$ , remplaçons  $\sin x$  par son développement

$$\sin x = \sum_{q=0}^{\infty} (-1)^q \frac{x^{2q+1}}{(2q+1)!}$$

et recherchons le coefficient de  $\lambda^{n-1}$  dans le développement de

$$\lambda^n F(\lambda) = G(x, y; \lambda) \frac{\sin \sqrt{\lambda} t}{\sqrt{\lambda}}$$

au voisinage de  $\lambda = 0$ . En posant

$$G(x, y; \lambda) = \sum_{r=0}^{\infty} \lambda^r G_r(x, y),$$

les  $G_r(x, y)$  étant les itérées successives de  $G(x, y)$ , nous obtenons

$$\begin{aligned} \lambda^n F(\lambda) &= \sum_{r=0}^{\infty} \sum_{q=0}^{\infty} (-1)^q \frac{\lambda^{q+r} t^{2q+1}}{(2q+1)!} G_r(x, y) = \\ &= \sum_{s=0}^{\infty} \lambda^s \sum_{q=0}^{\infty} (-1)^q \frac{t^{2q+1}}{(2q+1)!} G_{s-q}(x, y). \end{aligned}$$

Le coefficient de  $\lambda^{n-1}$  dans le développement précédent étant

$$\sum_{q=0}^{n-1} (-1)^q \frac{t^{2q+1}}{(2q+1)!} G_{n-1-q}(x, y) = \sum_{r=0}^{n-1} (-1)^{n-1-r} \frac{t^{2(n-r)-1}}{\Gamma(2n-2r)} G_r(x, y),$$

nous avons

$$H_n^{(p)}(x, y; t) = - \sum_{k=1}^p \frac{v_k(x)v_k(y)}{\lambda_k^n} \cdot \frac{\sin \sqrt{\lambda_k} t}{\sqrt{\lambda_k}} + (-1)^{n-1} \sum_{r=0}^{n-1} (-1)^r \frac{t^{2(n-r)-1}}{\Gamma(2n-2r)} G_r(x, y).$$

La seconde somme du second membre est indépendante de la circonférence  $C_p$ ; si  $p$  grandit indéfiniment, la première somme est absolument et uniformément convergente par rapport à  $x, y, t$  [pour  $0 \leq x, y \leq l, t$  quelconque], si  $2n+1 > 1$  ou  $n > 0$ , puisque  $|\sin \sqrt{\lambda_k} t| \leq 1$  et que  $|v_k(x)|$  est borné dans l'intervalle  $(0, l)$ .

**12.** Nous poserons

$$\begin{aligned} H_n(x, y; t) &= \lim_{p \rightarrow \infty} H_n^{(p)}(x, y; t) = \\ &= - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{v_k(x)v_k(y)}{\lambda_k^n} \cdot \frac{\sin \sqrt{\lambda_k} t}{\sqrt{\lambda_k}} + (-1)^{n-1} \sum_{r=0}^{n-1} (-1)^r \frac{t^{2(n-r)-1}}{\Gamma(2n-2r)} G_r(x, y). \end{aligned} \quad (2.1)$$

---

<sup>1</sup>  $G_r(x, y) = G^{(r+1)}(x, y)$ , ( $r = 0, 1, \dots$ );  $G_0(x, y) \equiv G(x, y)$ .

Pour mettre l'expression précédente sous une autre forme, remarquons que l'on a les formules suivantes [cf. (1.18), (1.19), (1.20)]

$$\begin{aligned} G(x, y) &= G(x, y; 0) = G_0(x, y), \\ G_r(x, y) &= \int_0^l G_{r-1}(x, z) G(z, y) dz = \int_0^l G(x, z) G_{r-1}(z, y) dz, \quad (r=1, 2, \dots), \quad (2.2) \\ v_k(x) &= \lambda_k \int_0^l G(x, z) v_k(z) dz, \quad (k=1, 2, \dots). \end{aligned}$$

En écrivant

$$K_n(x, y; t) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{v_k(x) v_k(y)}{\lambda_k^n} \cdot \frac{\sin \sqrt{\lambda_k} t}{\sqrt{\lambda_k}}, \quad (2.3)$$

on trouve

$$\begin{aligned} K_n(x, y; t) &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{v_k(y)}{\lambda_k^{n-1}} \cdot \frac{\sin \sqrt{\lambda_k} t}{\sqrt{\lambda_k}} \int_0^l G(x, z) v_k(z) dz = \\ &= \int_0^l G(x, z) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{v_k(y) v_k(z)}{\lambda_k^{n-1}} \cdot \frac{\sin \sqrt{\lambda_k} t}{\sqrt{\lambda_k}} dz = \\ &= \int_0^l G(x, z) K_{n-1}(z, y; t) dz \end{aligned} \quad (2.4)$$

et par conséquent

$$H_n(x, y; t) = - \int_0^l G(x, z) K_{n-1}(z, y; t) dz + (-1)^{n-1} \sum_{r=0}^{n-1} (-1)^r \frac{t^{2(n-r)-1}}{\Gamma(2n-2r)} G_r(x, y). \quad (2.5)$$

**13.** Nous nous proposons de montrer que la fonction  $H_n(x, y; t)$  satisfait aux conditions suivantes:

1. Elle vérifie l'équation aux dérivées partielles donnée si  $x \neq y$ ;
2. Elle est nulle pour  $x=0, x=l$  quel que soit  $t$ ;
3. On a  $H_n(x, y; 0) = 0, \frac{\partial H_n}{\partial t}(x, y; 0) = 0$ ;
4. Elle est continue le long de  $x=y$ ; sa dérivée première par rapport à  $x$  est discontinue pour  $x=y$  et l'on a

$$\left. \frac{\partial H_n(x, y; t)}{\partial x} \right|_{x=y=0}^{x=y=l} = (-1)^n \frac{t^{2n-1}}{\Gamma(2n)}. \quad (2.6)$$

Considérons d'abord  $K_n(x, y; t)$ . La fonction  $G(x, y)$  étant, sauf en  $x=y$ , une solution de l'équation  $L_x(u)=0$ , nous avons [cf. (1.14)],

$$L_x K_n(x, y; t) = L_x \int_0^l G(x, z) K_{n-1}(z, y; t) dz = -K_{n-1}(x, y; t);$$

en dérivant terme à terme, la série (2.3), il vient

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} K_n(x, y; t) = -K_{n-1}(x, y; t) \quad (2.7)$$

ce qui montre que

$$\frac{\partial^2 K_n}{\partial t^2} - L_x K_n = 0.$$

D'autre part, puisque  $L_x G_r(x, y) = -G_{r-1}(x, y)$ , nous pouvons écrire

$$\sum_{r=0}^{n-1} (-1)^r \frac{t^{2(n-r)-1}}{\Gamma(2n-2r)} L_x G_r(x, y) = - \sum_{r=1}^{n-1} (-1)^r \frac{t^{2(n-r)-1}}{\Gamma(2n-2r)} G_{r-1}(x, y); \quad (2.8)$$

de plus, nous avons

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} \sum_{r=0}^{n-1} (-1)^r \frac{t^{2(n-r)-1}}{\Gamma(2n-2r)} G_r(x, y) = \sum_{r=0}^{n-2} (-1)^r \frac{t^{2(n-r-1)-1}}{\Gamma[2n-2(r+1)]} G_r(x, y)$$

ce qui devient en changeant  $r$  en  $r+1$ ,

$$- \sum_{r=1}^{n-1} (-1)^r \frac{t^{2(n-r)-1}}{\Gamma(2n-2r)} G_{r-1}(x, y). \quad (2.9)$$

Les relations (2.8) et (2.9) montrent que  $H_n(x, y; t)$  vérifie l'équation donnée.

La série intervenant dans (2.1) est absolument et uniformément convergente si  $n > 0$ ; chacun de ses termes étant nul pour  $x=0$  et  $x=l$ , il en est de même de cette série.

On a pour la même raison,  $H_n(x, y; 0) = 0$ .

Pour obtenir  $\frac{\partial H_n}{\partial t}$ , on peut dériver terme à terme l'expression (2.1), si  $n \geq 1$ ;

la série obtenue est encore absolument et uniformément convergente et il vient<sup>1</sup> pour  $t=0$

$$\frac{\partial H_n}{\partial t}(x, y; 0) = - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{v_k(x) v_k(y)}{\lambda_k^n} + G_{n-1}(x, y) = 0.$$

Enfin,  $H_n(x, y; t)$  est continue sur  $y=x$  car la série intervenant dans (2.1) est absolument et uniformément convergente ainsi que  $G(x, y)$  [cf. (1.18)] et ses itérées

---

<sup>1</sup> On a  $G_{n-1}(x, y) = G^{(n)}(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{v_k(x) v_k(y)}{\lambda_k^n}$ .

successives (en particulier pour  $x=y$ ). La dérivée première de  $H_n$  par rapport à  $t$  est continue car on peut dériver terme à terme et la série obtenue est encore absolument et uniformément convergente si  $n > 1$ .

La dérivée première par rapport à  $x$  s'écrit

$$\frac{\partial H_n}{\partial x} = - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{v'_k(x) v_k(y)}{\lambda_k^n} \cdot \frac{\sin \sqrt{\lambda_k} t}{\sqrt{\lambda_k}} + (-1)^{n-1} \sum_{r=0}^{n-1} (-1)^r \frac{t^{2(n-r)-1}}{\Gamma(2n-2r)} \frac{\partial G_r(x, y)}{\partial x}.$$

Or, les dérivées des itérées  $G_1(x, y), \dots, G_r(x, y)$  de  $G(x, y)$  sont continues; mais on a

$$\left. \frac{\partial G(x, y)}{\partial x} \right|_{x=y+0}^{x=y-0} = -1$$

d'où le résultat annoncé.

### B. La solution du problème aux limites.

**14.** Dans le plan  $(y, \tau)$ , considérons le rectangle  $OLCD$  limité par les axes  $Oy$  et  $O\tau$ , une parallèle  $LC$  à  $O\tau$  passant par  $L=(l, 0)$  et une parallèle  $DC$  à  $Oy$  passant par le point  $P=(x, t)$  en lequel nous nous proposons de calculer  $u(x, t)$ . Soient encore  $EH$  et  $FG$ , deux parallèles à  $O\tau$  ayant respectivement pour abscisses  $x-\varepsilon$  et  $x+\varepsilon$ ; ces droites déterminent dans  $OLCD$ , deux rectangles  $OEHD$  et  $FLCG$ .

Appliquons la formule de réciprocité dans chacun des rectangles  $OEHD$  et

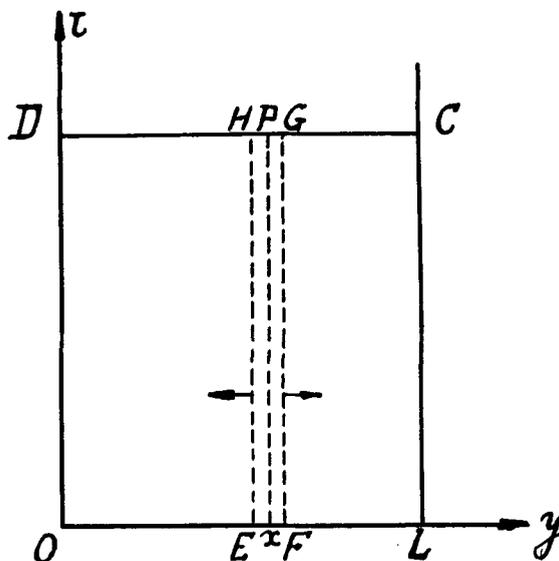


Fig. 3.

*FLCG* en prenant pour  $u$  la solution cherchée et pour  $v$  la fonction  $H_n(x, y; t - \tau)$ . En faisant tendre  $\varepsilon$  vers zéro, il vient

1. Dans *OEHD*, ( $H_n \equiv 0$  sur  $OD$ ),

$$\int_{OE} \left[ H_n(x, y; t) u_1(y) + \frac{\partial H_n(x, y; t)}{\partial t} u_0(y) \right] dy + \\ + \int_{EH} \left[ H_n(x, x - \varepsilon; t - \tau) \frac{\partial u(y, \tau)}{\partial y} - u(y, \tau) \frac{\partial H_n(x, x - \varepsilon; t - \tau)}{\partial y} \right] d\tau = 0;$$

2. Dans *FLCG*,

$$\int_{FL} \left[ H_n(x, y; t) u_1(y) + \frac{\partial H_n(x, y; t)}{\partial t} u_0(y) \right] dy + \\ + \int_{GF} \left[ H_n(x, x + \varepsilon; t - \tau) \frac{\partial u(y, \tau)}{\partial y} - u(y, \tau) \frac{\partial H_n(x, x + \varepsilon; t - \tau)}{\partial y} \right] d\tau = 0.$$

En additionnant ces deux relations, en remarquant que  $H_n(x, y; t - \tau)$  est continu sur  $y = x$  et en utilisant la relation (2.6), il vient

$$\frac{(-1)^{n-1}}{\Gamma(2n)} \int_0^t (t - \tau)^{2n-1} u(x, \tau) d\tau = \int_0^t \left[ H_n(x, y; t) u_1(y) + \frac{\partial H_n(x, y; t)}{\partial t} u_0(y) \right] dy. \quad (2.10)$$

En dérivant la formule précédente,  $2n$  fois par rapport à  $t$ , on obtient la solution cherchée  $u(x, t)$ .

En utilisant la définition [cf. (2.1)] de  $H_n(x, y; t)$ , le second membre de (2.10) peut s'écrire

$$P_{2n-1}(t) - \sum_{k=1}^{\infty} b_k \frac{v_k(x)}{\lambda_k^n} \cdot \frac{\sin \sqrt{\lambda_k} t}{\sqrt{\lambda_k}} - \sum_{k=1}^{\infty} a_k \frac{v_k(x)}{\lambda_k^n} \cos \sqrt{\lambda_k} t = P_{2n-1}(t) + \Phi(x, t),$$

où  $P_{2n-1}(t)$  désigne un polynôme en  $t$  au plus de degré  $2n-1$  et où les  $a_k$  et les  $b_k$  sont respectivement les coefficients de Fourier de  $u_0(x)$  et de  $u_1(x)$  [cf. (1.29)].

Il vient ainsi

$$u(x, t) = (-1)^{n-1} \frac{\partial^{2n}}{\partial t^{2n}} \Phi(x, t). \quad (2.11)$$

Il reste à effectuer

- 1°) La dérivation indiquée au second membre de l'expression précédente;
- 2°) La synthèse de la formule obtenue.

Puisque la solution  $u(x, t)$  existe et est unique, elle est donnée par la formule précédente dans laquelle on peut d'ailleurs supposer  $n=1$ .

Remarquons encore qu'une dérivation formelle effectuée sous le signe de sommation donne la formule (B).

### C. Une autre expression de $H_n(x, y; t)$ .

**15.** Dans le plan  $(y, \tau)$ , les caractéristiques passant par l'origine  $O$  et par le point  $L \equiv (l, 0)$  déterminent avec  $Oy$  un triangle  $OML$ . Pour éviter des difficultés, nous nous bornerons à considérer des points  $P \equiv (x, t)$  intérieurs à ce triangle. Pour ces points  $P$ , le problème posé est un problème de Cauchy [cf. § 4].

Les caractéristiques passant par le point  $P$  [cf. la figure 2] déterminent avec  $Oy$  un triangle  $APB$ ,  $A$  et  $B$  étant intérieurs à l'intervalle  $(0 \leq y \leq l)$ . Nous nous proposons de montrer qu'il existe une solution  $v(x, y; t - \tau)$  de l'équation (1.2) vérifiant les conditions suivantes:

1. Elle est nulle sur les caractéristiques  $t - \tau = \pm(x - y)$ ;
2. Elle est continue dans le triangle  $APB$ ;
3. Ses dérivées premières sont continues dans le triangle  $APB$  sauf éventuellement sur la droite  $y = x$ ;
4. Sur la droite  $y = x$ , la dérivée première par rapport à  $y$  possède la discontinuité

$$\frac{\partial v(x, y; t - \tau)}{\partial y} \Big|_{y=x=0}^{y=x=0} = (-1)^{n-1} \frac{(t - \tau)^{2n-1}}{\Gamma(2n)}. \quad (2.12)$$

**16.** Dans le cas de l'équation des cordes vibrantes, cette fonction est facile à construire; il suffit en effet de poser

1°. Dans le triangle  $AxP$

$$v(x, y; t - \tau) = \frac{(-1)^{n-2}}{2 \cdot 2^n \Gamma(2n)} (t - \tau + y - x)^{2n};$$

2°. Dans le triangle  $PxB$

$$v(x, y; t - \tau) = \frac{(-1)^{n-2}}{2 \cdot 2^n \Gamma(2n)} (t - \tau - y + x)^{2n}.$$

On voit aussitôt que la fonction ainsi construite est continue sur  $y = x$  et vérifie la relation (2.12).

Plus généralement, notre problème<sup>1</sup> revient à trouver une solution de l'équation (1.2) s'annulant sur une caractéristique passant par un point  $P = (a, b)$  et telle que

<sup>1</sup> Ce problème est à rapprocher du problème consistant à déterminer une solution de l'équation  $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$  dans un domaine  $S$  limité par une courbe  $C$ , connaissant les valeurs de  $u$  sur une partie  $C_1$  de  $C$  et celles de  $\frac{du}{dn}$  sur  $C - C_1$ .

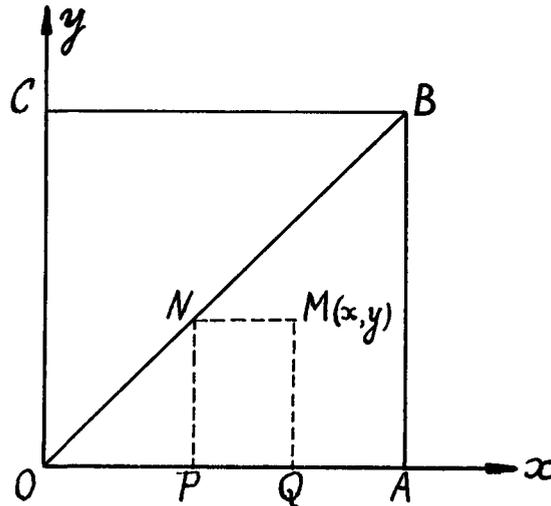


Fig. 4.

sur  $x=a$ , sa dérivée  $\frac{\partial u}{\partial x}$  prenne une valeur donnée. Par exemple, pour l'équation  $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$ , la solution  $u(x, t) = (t-x)^2$  est nulle sur  $t=x$  et sa dérivée  $\frac{\partial u}{\partial x}$  est égale à  $-2t$  sur  $x=0$ .

Pour simplifier, proposons-nous de construire une solution de l'équation

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = a(x, y) u,$$

connaissant sur le segment  $OA$  de  $Ox$  les valeurs  $f(x)$  de  $u(x, y)$  et sur le segment  $OB$  de la bissectrice  $x=y$ , les valeurs  $g(x)$  de  $\frac{\partial u}{\partial n} \equiv \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}$ . Nous admettrons que les fonctions  $f(x)$  et  $g(x)$  sont continues sur  $OA$  et que la fonction  $a(x, y)$  est continue dans le rectangle  $OABC$  [cf. fig. 4].

Pour démontrer l'existence de la fonction  $u$ , nous utiliserons la méthode des approximations successives.

La solution de l'équation  $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = 0$  vérifiant les conditions indiquées s'écrit

$$u(x, y) = f(x) + f(y) - f(0) - \int_0^y g(\alpha) d\alpha. \quad (2.13)$$

Si  $g(0) = 0$ , la dérivée  $\frac{\partial u}{\partial y} = -g(y)$  est nulle pour  $y=0$  et la solution  $u(x, y)$  se raccorde avec la solution identiquement nulle le long de  $Ox$ .

La fonction  $A(x, y)$  étant supposée connue, recherchons une solution de l'équation

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = A(x, y),$$

nulle sur  $Ox$  et telle que  $\frac{\partial u}{\partial n} = 0$  sur  $y = x$ . A cet effet, menons par le point  $M(x, y)$  des parallèles aux axes et considérons le rectangle  $MNPQ$  et le triangle  $ONP$ . La solution cherchée s'écrit

$$u(x, y) = 2 \iint_{OPN} A(\alpha, \beta) d\alpha d\beta + \iint_{PQMN} A(\alpha, \beta) d\alpha d\beta$$

c'est-à-dire

$$u(x, y) = 2 \int_0^y d\alpha \int_0^\alpha A(\alpha, \beta) d\beta + \int_0^y d\beta \int_y^x A(\alpha, \beta) d\alpha. \quad (2.14)$$

En effet, on voit aussitôt que  $u = 0$  pour  $y = 0$ . Pour calculer  $\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}$ , on remarque que l'on peut permuter les intégrations dans la dernière intégrale de (2.14) il vient

$$\frac{\partial u}{\partial n} = \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} = \int_0^y A(x, \alpha) d\alpha - \int_0^y A(y, \alpha) d\alpha - \int_y^x A(\alpha, y) d\alpha$$

ce qui se réduit à zéro pour  $x = y$ .

17. A présent, considérons le système

$$\frac{\partial^2 u_1}{\partial x \partial y} = 0, \quad \frac{\partial^2 u_k}{\partial x \partial y} = a(x, y) u_{k-1}, \quad (k = 2, 3, \dots) \quad (2.15)$$

et déterminons les solutions  $u_k$  par les conditions

1. Pour  $u_1$ :

$$\begin{aligned} u_1 &= f(y) && \text{sur } Ox, \\ \frac{\partial u_1}{\partial n} &= g(x) && \text{sur } x = y; \end{aligned}$$

2. Pour  $u_k$ :

$$\begin{aligned} u_k &= 0 && \text{sur } Ox, \\ \frac{\partial u_k}{\partial n} &= 0 && \text{sur } x = y. \end{aligned}$$

La solution  $u_1(x, y)$  est déterminée par (2.13) et la solution  $u_k(x, y)$  par (2.14) avec  $A(x, y) \equiv a(x, y) u_{k-1}$ .

Pour démontrer la convergence absolue et uniforme de  $\sum u_k$ ,  $\sum \frac{\partial u_k}{\partial x}$ ,  $\sum \frac{\partial u_k}{\partial y}$ , on utilise les considérations habituelles. Soient  $M$  et  $K$  respectivement un maximum de  $|u_1(x, y)|$  et de  $|a(x, y)|$  dans le rectangle  $OABC$ . On vérifie aussitôt les inégalités ( $k \geq 2$ )

$$|u_k| < M K^{k-1} \frac{x^{k-1}}{(k-1)!} \frac{y^{k-1}}{(k-1)!},$$

$$\left| \frac{\partial u_k}{\partial x} \right| < M K^{k-1} \frac{x^{k-2}}{(k-2)!} \frac{y^{k-1}}{(k-1)!}.$$

La relation

$$\frac{\partial u_k}{\partial y} = \int_0^y a(y, \alpha) u_{k-1}(y, \alpha) d\alpha + \int_y^x a(\alpha, y) u_{k-1}(\alpha, y) d\alpha$$

nous donne

$$\left| \frac{\partial u_2}{\partial y} \right| < M K x,$$

$$\left| \frac{\partial u_k}{\partial y} \right| < M K^{k-1} \frac{x^{k-2}}{(k-2)!} \frac{y^{k-2}}{(k-1)!} (x+y),$$

on en déduit le résultat annoncé.

En partant des relations (2.15), on voit aussi que la série  $\sum \frac{\partial^2 u_k}{\partial x \partial y}$  est absolument et uniformément convergente.

L'unicité de la solution  $u(x, y)$  se démontre par le raisonnement connu.

**18.** A présent<sup>1</sup>, menons par le point  $P$ , une parallèle  $DC$  à  $Oy$ ; elle forme avec  $O\tau$ ,  $Oy$  et la parallèle  $LC$  à  $O\tau$ , un rectangle  $OLCD$ . Considérons aussi une parallèle  $IN$  à  $Oy$ , le point  $I$  ayant pour ordonnée  $\tau = t_1$  ( $0 < t_1 < t$ ). Soient encore  $EH$  et  $FG$  deux parallèles à  $O\tau$  ayant respectivement pour abscisses  $x - \varepsilon$  et  $x + \varepsilon$  ( $\varepsilon$  positif et très petit); ces droites coupent  $IN$  respectivement en  $J$  et en  $M$ .

Cela étant dit, définissons une fonction  $\Phi(x, y; t - \tau)$  en posant

$$\Phi(x, y; t - \tau) = \begin{cases} H_n(x, y; t - \tau) - v(x, y; t - \tau) & \text{dans le triangle } APB, \\ H_n(x, y; t - \tau) & \text{dans la partie du rectangle } OLCD \\ & \text{extérieure au triangle } APB. \end{cases}$$

Si  $y$  coïncide avec  $x$ , on remplace  $H_n(x, y; t - \tau) - v(x, y; t - \tau)$  par sa limite pour  $y \rightarrow x$ ,  $x$ , et  $t - \tau$  restant fixes.

La fonction  $\Phi(x, y; t - \tau)$  considérée comme dépendant de  $y$  et de  $\tau$  possède les propriétés suivantes:

<sup>1</sup> Cf. fig. 5 page suivante.

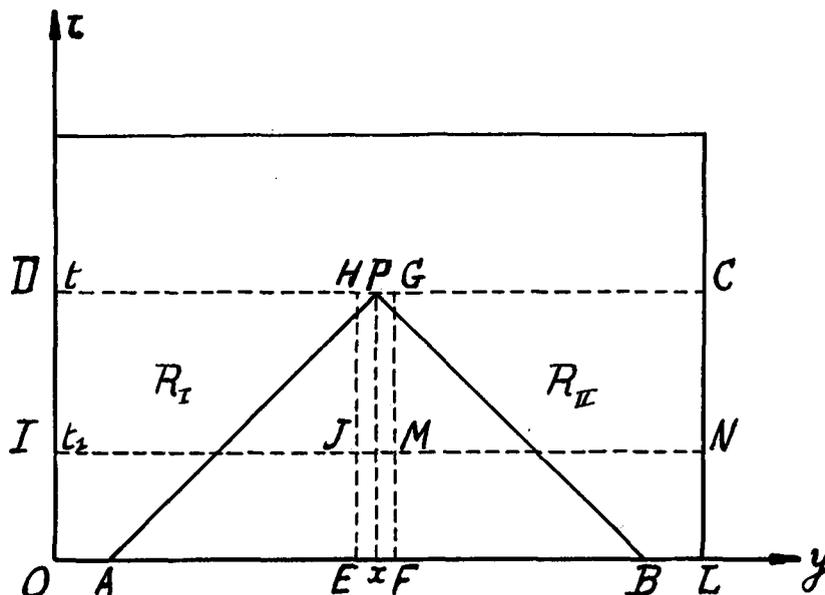


Fig. 5.

1. Elle est continue dans le rectangle  $OLCD$  et sur sa frontière; ses dérivées premières restent bornées au voisinage de la droite  $y=x$ , singulière pour  $H_n$ ;

2. Le long de  $t-\tau = \pm(x-y)$ ,  $\Phi$  reste continue; ses dérivées jusqu'au second ordre restent aussi continues; dans le rectangle  $OLCD$ , la fonction  $\Phi$  vérifie l'équation proposée sauf éventuellement sur  $y=x$ ;

3. Sur  $x=0$  et  $x=l$ , on a  $\Phi(x, y; t-\tau) = 0$ ;

4. Pour  $y \neq x$  et  $\tau = t$ , on a  $\Phi(x, y; 0) = 0$  et  $\frac{\partial \Phi}{\partial t}(x, y; 0) = 0$ .

A présent, appliquons la formule de réciprocité aux fonctions  $\Phi(x, y; t-\tau)$  et

$$\varphi_k(x, y; t_1 - \tau) = v_k(y) \sin \sqrt{\lambda_k} (t_1 - \tau),$$

$t_1$  désignant un nombre quelconque distinct de  $t$ ; nous prendrons pour domaine  $S$ , respectivement les rectangles  $R_I \equiv IJHD$  et  $R_{II} \equiv MNCG$ . Nous obtenons puisque  $d\tau = 0$  sur  $IN$ :

1. Dans le rectangle  $R_I$ :

$$-\int_{IJ} \left( \varphi_k \frac{\partial \Phi}{\partial \tau} - \Phi \frac{\partial \varphi_k}{\partial \tau} \right) dy + \int_{IH} \left( -\varphi_k \frac{\partial \Phi}{\partial y} + \Phi \frac{\partial \varphi_k}{\partial y} \right) d\tau = 0; \quad (2.16)$$

2. Dans le rectangle  $R_{II}$ :

$$-\int_{MN} \left( \varphi_k \frac{\partial \Phi}{\partial \tau} - \Phi \frac{\partial \varphi_k}{\partial \tau} \right) dy + \int_{GM} \left( -\varphi_k \frac{\partial \Phi}{\partial y} + \Phi \frac{\partial \varphi_k}{\partial y} \right) d\tau = 0. \quad (2.17)$$

Additionnons les relations (2.16) et (2.17) et faisons tendre  $\varepsilon$  vers zéro. Puisque  $\Phi$ ,  $\frac{\partial \Phi}{\partial y}$ ,  $\varphi_k$ ,  $\frac{\partial \varphi_k}{\partial y}$  sont continues sur la droite  $x=y$ , nous avons

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left( \int_{IJ} + \int_{MN} \right) = 0.$$

De plus, sur la droite  $\tau=t_1$ , nous avons

$$\varphi_k(y, 0) = 0, \quad \frac{\partial \varphi_k}{\partial \tau} = -\sqrt{\lambda_k} v_k(y).$$

En rassemblant ces résultats, nous obtenons

$$\int_{IN} \Phi(x, y; t-t_1) v_k(y) dy = 0$$

pour toutes les valeurs entières et positives de  $k$ .

Les  $v_k(y)$  formant un système complet et fermé, nous déduisons aussitôt de ces relations

$$\Phi(x, y; t-t_1) = 0$$

quel que soit  $t_1$  différent de  $t$  et quel que soit  $y$  (et aussi  $x$ ) dans l'intervalle  $(0, l)$ .

Il résulte alors de  $\Phi(x, y; 0) = 0$  et  $\frac{\partial \Phi}{\partial t}(x, y; 0) = 0$  que  $\Phi(x, y; t-\tau)$  est identiquement nul.

En particulier, nous avons

$$H_n(x, y; t-\tau) \equiv \begin{cases} v(x, y; t-\tau) & \text{dans le triangle } APB, \\ 0 & \text{dans la partie du rectangle } OLCD \\ & \text{extérieure au triangle } APB. \end{cases} \quad (2.18)$$

19. En tenant compte de ce dernier résultat, la formule (2.10) s'écrit

$$\frac{(-1)^{n-1}}{\Gamma(2n)} \int_0^t (t-\tau)^{2n-1} u(x, \tau) d\tau = \int_A^B \left[ v(x, y; t) u_1(y) + \frac{\partial v(x, y; t)}{\partial t} u_0(y) \right] dy$$

avec  $A=(x-t, 0)$ ,  $B=(x+t, 0)$ . C'est la formule que l'on obtiendrait en appliquant la méthode de Volterra-Tedone.

## CHAPITRE III.

**Les séries de fonctions fondamentales et la solution du problème  
aux limites.**

**A. La fonction  $K_s(x, y; t)$ .**

**20.** Les résultats obtenus précédemment montrent comment on peut obtenir à l'aide de la fonction  $H_n(x, y; t)$ , la solution du problème aux limites sous la forme d'un développement en série de fonctions fondamentales.

Cependant, la solution du problème posé peut encore être exprimée au moyen de la fonction de Green-Riemann. Pour établir une liaison entre ces deux formes de la solution, nous utiliserons la fonction de la variable complexe  $s$ , ( $Rs = \sigma$ ), définie par

$$K_s(x, y; t) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{v_k(x) v_k(y)}{\lambda_k^s} \cdot \frac{\sin \sqrt{\lambda_k} t}{\sqrt{\lambda_k}}. \quad (3.1)$$

Puisque  $|v_k(x)|$  et  $|\sin \sqrt{\lambda_k} t|$  sont bornés et que  $\lambda_k$  est de l'ordre de  $k^2$ , on voit en comparant  $K_s(x, y; t)$  à  $\sum_{k=1}^{\infty} k^{-(2\sigma+1)}$  que la série (3.1) est convergente pour  $\sigma > 0$  et par suite que la fonction  $K_s(x, y; t)$  est analytique dans le demi-plan  $Rs > 0$ .

En dérivant terme à terme la série (3.1) par rapport à  $t$ , on obtient la relation

$$\frac{\partial^{2p}}{\partial t^{2p}} K_s(x, y; t) = K_{s-p}(x, y; t)$$

valable lorsque  $Rs > \frac{1}{2} + p$ ,  $p$  étant un entier positif.

D'ailleurs, on vérifie encore facilement que la fonction  $K_s(x, y; t)$  satisfait aux conditions suivantes:

1. Elle vérifie l'équation aux dérivées partielles proposée si  $Rs$  est assez grand;
2. Elle est nulle pour  $x=0$ ,  $x=l$  quel que soit  $t$ ;
3. On a  $K_s(x, y; 0) = 0$ ,  $\frac{\partial K_s}{\partial t}(x, y; 0) = \zeta_s(x, y)$  où nous avons posé<sup>1</sup>

$$\zeta_s(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{v_k(x) v_k(y)}{\lambda_k^s}; \quad (3.2)$$

4. Elle est continue dans le domaine  $0 \leq x, y \leq l$ ,  $t \geq 0$  si  $Rs > 0$ .

---

<sup>1</sup> La fonction  $\zeta_s(x, y)$  a été introduite par S. MINAKSHISUNDARAM pour d'autres équations et dans un autre but. Cf. [10, 11, 13].

Appliquons la formule de réciprocité dans le rectangle  $OLCD$  (fig. 3) en prenant pour  $u(y, \tau)$  la solution du problème posé et pour  $v(y, \tau)$  la fonction  $K_s(x, y; t - \tau)$  ( $R_s$  assez grand). Il vient

a) Sur  $OL$ :

$$n_1 = 0, \quad n_2 = 1; \quad P_n(u) = u_1(y),$$

$$P_n(v) = \frac{\partial K_s(x, y; t - \tau)}{\partial \tau} \Big|_{\tau=0} = - \frac{\partial K_s(x, y; t)}{\partial t};$$

b) Sur  $LC$  et  $DO$ :

$$v = 0, \quad u = 0;$$

c) Sur  $CD$ :

$$n_1 = 0, \quad n_2 = -1; \quad P_n(u) = - \frac{\partial u}{\partial \tau}, \quad K_s(x, y; t - \tau)_{t-\tau} = 0;$$

$$P_n(v) = - \frac{\partial K_s(x, y; t - \tau)}{\partial \tau} \Big|_{t-\tau} = \frac{\partial K_s}{\partial t}(x, y; 0) = \zeta_s(x, y).$$

La formule de réciprocité nous donne alors

$$\int_0^l u(y, t) \zeta_s(x, y) dy = \int_0^l \left[ u_1(y) K_s(x, y; t) + u_0(y) \frac{\partial K_s(x, y; t)}{\partial t} \right] dy. \quad (3.3)$$

Nous obtenons ainsi une relation dépendant analytiquement de  $s$  et vérifiée par la solution  $u(y, \tau)$  du problème aux limites. En effectuant le prolongement analytique pour  $s$  et en calculant la valeur pour  $s=0$  des deux membres de la relation précédente, nous obtiendrons le résultat cherché.

**21.** La fonction  $\zeta_s(x, y)$ . La fonction  $\zeta_s(x, y)$  définie par (3.2) est analytique en  $s$  pour  $R_s > \frac{1}{2}$ . Pour  $s=1$ ,  $\zeta_s(x, y)$  est la fonction de Green  $G(x, y)$ ; pour  $s$  entier et plus grand que 1,  $\zeta_s(x, y)$  se réduit aux itérées successives de  $G(x, y)$ .

La relation

$$v_k(y) = \lambda_k \int_0^l G(y, z) v_k(z) dz$$

permet d'écrire

$$\zeta_s(x, y) = \int_0^l G(y, z) \zeta_{s-1}(x, z) dz.$$

Pour étudier la fonction  $\zeta_s(x, y)$ , considérons la série

$$\theta(x, y; t - \tau) = \sum_{k=1}^{\infty} v_k(x) v_k(y) e^{-\lambda_k(t-\tau)}. \quad (3.4)$$

Cette série est absolument et uniformément convergente par rapport à  $x, y, t, \tau$  lorsque

$$0 \leq x, y \leq l, \quad 0 < \delta \leq t - \tau \leq \Delta,$$

$\delta$  étant un nombre positif arbitraire; il en est de même des séries obtenues en dérivant terme à terme la série (3.4) un nombre quelconque de fois par rapport à  $t$  et à  $\tau$ .

En outre, la fonction  $\theta(x, y; t - \tau)$  vérifie les équations

$$L_x(u) = \frac{\partial u}{\partial t}, \quad L_y(u) = -\frac{\partial u}{\partial \tau}. \quad (3.5)$$

Plus précisément  $\theta(x, y; t - \tau)$  est une solution élémentaire de l'équation (3.5) et l'on a

$$\theta(x, y; t - \tau) = \frac{1}{2\sqrt{\pi(t - \tau)}} e^{-\frac{(x-y)^2}{4(t-\tau)}} + \Theta(x, y; t - \tau), \quad (3.6)$$

$\Theta(x, y; t - \tau)$  restant fini si  $t$  tend vers  $\tau + 0$  et pour toutes les valeurs de  $x$  et  $y$  appartenant à l'intervalle ouvert  $(0, l)$ ; si  $x$  ou  $y$  coïncide avec une des extrémités 0 ou  $l$  de cet intervalle,  $\theta(x, y; t - \tau)$  est identiquement nulle.<sup>1</sup>

**22.** Une limitation plus précise de  $\Theta(x, y; t)$  nous sera très utile.

A cet effet, écrivons l'équation  $L_x(u) = \frac{\partial u}{\partial t}$  de la manière suivante:

$$\mathfrak{L}(u) = \frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = a(x)u. \quad (3.7)$$

Nous admettrons que le coefficient  $a(x)$  est continu dans l'intervalle  $-\infty < x < +\infty$  et que  $|a(x)| < M$ ,  $M$  étant une constante.

Pour obtenir une solution élémentaire<sup>2</sup>  $U_0(x, y; t)$  de l'équation (3.7), posons

$$u_0(x, y; t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{(x-y)^2}{4t}}$$

et construisons les solutions  $u_k(x, y; t)$  des équations

$$\mathfrak{L}(u_k) = a(x)u_{k-1}, \quad (k = 1, 2, \dots)$$

déterminées par les conditions

$$u_k(x, 0) = 0, \quad (k = 1, 2, \dots).$$

<sup>1</sup> Cf. E. T. COPSON [3].

<sup>2</sup> Cf. J. HADAMARD [7 a]; M. GEVREY [6, p. 192].

Nous avons

$$u_k(x, y; t) = \int_0^t d\eta \int_{-\infty}^{\infty} u_0(x, \xi; t-\eta) a(\xi) u_{k-1}(\xi, y; \eta) d\xi, \quad (k=1, 2, \dots);$$

en utilisant la relation<sup>1</sup>

$$u_0(x, y; t_1 + t_2) = \int_{-\infty}^{\infty} u_0(x, \xi; t_1) u_0(\xi, y; t_2) d\xi,$$

on trouve facilement l'inégalité

$$|u_k(x, y; t)| < \frac{M^k t^k}{k!} u_0(x, y; t), \quad (k=1, 2, \dots),$$

d'où il résulte que la série  $\sum_{k=0}^{\infty} u_k$  est convergente, vérifie l'équation (3.7) et se comporte comme  $u_0(x, y; t)$  au voisinage de  $x=y, t=0$ . Cette série représente donc une solution élémentaire  $U_0(x, y; t)$  de l'équation (3.7).

D'ailleurs, nous pouvons écrire

$$U_0(x, y; t) = u_0 + w, \quad (3.8)$$

avec

$$|w(x, y; t)| < u_0(x, y; t) (e^{Mt} - 1) < Mt e^{Mt} u_0(x, y; t); \quad (3.9)$$

$w$  reste fini au voisinage de la droite  $t=0$  et s'annule avec  $t$ .

**23.** Déterminons maintenant une solution  $G(x, y; t)$  de l'équation (3.7) (en  $x$  et  $t$ ) vérifiant les conditions suivantes [cf. fig. 3]:

1. Elle se comporte comme  $U_0(x, y; t)$  au voisinage du point  $x=y, t=0$ ;
2. Elle s'annule sur  $OD$  et sur  $LC$ ;
3. Elle tend vers zéro lorsque la quantité positive  $t$  tend vers zéro.

A cet effet, posons

$$G(x, y; t) = U_0(x, y; t) - g(x, y; t).$$

La fonction  $g(x, y; t)$  est une solution de l'équation (3.7) prenant sur le contour  $DOLC$ , les mêmes valeurs que  $U_0(x, y; t)$ . Cette solution  $g$  est unique et l'on a

$$|g(x, y; t)| < K \max |U_0|,$$

$K$  étant un coefficient ne dépendant que de  $a(x)$  et  $\max |U_0|$  désignant le maximum de  $|U_0|$  sur le contour  $DOLC$ .

Cela étant rappelé, supposons<sup>2</sup>  $0 < t \leq T$  et soit  $d_y$  la plus courte distance de  $y$  aux points 0 et  $l$ ; nous avons d'après (3.8),

<sup>1</sup> G. DOETSCH [5, p. 618].

<sup>2</sup>  $t$  est fixe.

$$\max |U_0| \leq e^{M_T} \frac{e^{-\frac{d_y^2}{4t}}}{2\sqrt{\pi t}}$$

et par conséquent

$$|g(x, y; t)| < K_1 \frac{e^{-\frac{d_y^2}{4t}}}{\sqrt{t}}, \quad (3.10)$$

$K_1$  étant une constante ne dépendant que de  $a(x)$  et de  $T$ .

D'autre part, d'après (3.9),  $|w|$  vérifie aussi une relation analogue à (3.10).

Ainsi, nous pouvons écrire

$$G(x, y; t) = u_0(x, y; t) - g_1(x, y; t),$$

avec

$$|g_1(x, y; t)| < K_2 \frac{e^{-\frac{d_y^2}{4t}}}{\sqrt{t}},$$

$K_2$  étant une constante ne dépendant que de  $a(x)$  et de  $T$ .

Or, la fonction de Green  $G(x, y; t)$  s'exprime à l'aide des fonctions fondamentales  $v_k(x)$  par les relations (3.4); par suite, si  $x$  est un point quelconque de l'intervalle  $(0, l)$ , si  $t$  varie dans un intervalle fini quelconque et si  $d_y$  désigne la distance minimum de  $y$  aux points 0 et  $l$ , nous avons

$$|\Theta(x, y; t)| < \frac{c}{\sqrt{t}} e^{-\frac{d_y^2}{4t}}, \quad (3.11)$$

$c$  étant une constante indépendante de  $x$  et de  $t$ .

#### 24. Considérons à présent l'intégrale

$$I_s(x, y) = \int_0^\infty \theta(x, y; \alpha) \alpha^{s-1} d\alpha; \quad (3.12)$$

puisque

$$\int_0^\infty e^{-\lambda_k \alpha} \alpha^{s-1} d\alpha = \frac{\Gamma(s)}{\lambda_k^s},$$

nous avons

$$I_s(x, y) = \Gamma(s) \zeta_s(x, y). \quad (3.13)$$

a) Supposons d'abord  $x \neq y$ . Désignons par  $T$  une quantité positive; décomposons l'intervalle d'intégration  $(0, \infty)$  en les deux intervalles  $(0, T)$  et  $(T, \infty)$  et écrivons

$$\int_0^{\infty} = \int_0^T + \int_T^{\infty}$$

ou

$$I_s(x, y) = I_s^{(1)}(x, y) + I_s^{(2)}(x, y). \quad (3.14)$$

Lorsque  $\alpha \geq T$  et puisque  $|v_k(x)| < M$ , nous avons

$$\begin{aligned} |\theta(x, y; \alpha)| &< M^2 e^{-\lambda_1 \alpha} \sum_{k=1}^{\infty} e^{-(\lambda_k - \lambda_1) \alpha} < M^2 e^{-\lambda_1 \alpha} \left[ 1 + \frac{1}{\alpha} \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{\lambda_k - \lambda_1} \right] < \\ &< M^2 e^{-\lambda_1 \alpha} \left[ 1 + \frac{1}{T} \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{\lambda_k - \lambda_1} \right] < M^* e^{-\lambda_1 \alpha}, \end{aligned} \quad (3.15)$$

$M^*$  étant une constante indépendante de  $x, y, \alpha$ . Il en résulte que

$$|I_s^{(2)}(x, y)| < M^* \int_T^{\infty} e^{-\lambda_1 \alpha} \alpha^{\sigma-1} d\alpha, \quad (\sigma = R s),$$

et par suite que  $I_s^{(2)}(x, y)$  est une fonction entière de  $s$ .

D'autre part, d'après (3.6), nous avons

$$\begin{aligned} I_s^{(1)}(x, y) &= \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_0^T e^{-\frac{(x-y)^2}{4\alpha}} \alpha^{\sigma-3/2} d\alpha + \int_0^T \Theta(x, y; \alpha) \alpha^{\sigma-1} d\alpha = \\ &= I_s^{(3)}(x, y) + I_s^{(4)}(x, y). \end{aligned} \quad (3.16)$$

Or, la première intégrale  $I_s^{(3)}(x, y)$  est une fonction entière de  $s$ , comme le montre le changement de variable  $(x-y)^2 = 4\alpha\beta$ .

Pour vérifier que la seconde intégrale  $I_s^{(4)}(x, y)$  est aussi une fonction entière de  $s$ , remarquons que l'on a  $\frac{x^n}{n!} < e^x$ , si  $x$  et  $n$  sont positifs. Il en résulte que le nombre positif  $n$  étant fixé arbitrairement, nous avons, si  $\alpha$  est assez grand,

$$|\Theta(x, y; \alpha)| < \frac{4^n n! c}{d_y^{2n}} \alpha^{n-1/2} \quad (3.17)$$

ou encore puisque  $T$  est fixé,

$$|\Theta(x, y; \alpha)| < K \alpha^{n-1/2},$$

$K$  étant une constante indépendante de  $\alpha$ .

Il vient alors

$$|I_s^{(4)}(x, y)| < K \int_0^T \alpha^{n+\sigma-3/2} d\alpha = K \frac{T^{n+\sigma-1/2}}{n+\sigma-\frac{1}{2}}$$

et  $I_s^{(4)}(x, y)$  converge dans le demi-plan  $\operatorname{Re} s > -n + \frac{1}{2}$ . Ceci revient à dire, puisque le nombre positif  $n$  est fixé arbitrairement, que  $I_s^{(4)}(x, y)$  est une fonction entière de  $s$ .

Ainsi, si  $x \neq y$ , l'intégrale  $I_s(x, y)$  est une fonction entière de  $s$ .

b) Supposons  $x = y$ . L'intégrale  $I_s^{(2)}(x, y)$  est encore une fonction entière de  $s$ . D'ailleurs, nous avons

$$\theta(x, x; \alpha) = \frac{1}{2\sqrt{\pi\alpha}} + \Theta(x, x; \alpha);$$

si  $x$  est un point intérieur de l'intervalle  $(0, l)$ ,  $d_x$  est différent de zéro et la relation (3.11) est encore valable. Il en résulte que  $I_s^{(4)}(x, x)$  (cf. (3.16)) est encore une fonction entière de  $s$ .

D'autre part, nous avons

$$I_s^{(3)}(x, x) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \frac{\Gamma^{s-1/2}}{s^{-1/2}}.$$

Ainsi, la fonction  $I_s(x, x) = \Gamma(s) \zeta_s(x, x)$  est une fonction analytique et régulière de  $s$  dans tout le plan à distance finie sauf au point  $s = \frac{1}{2}$  où elle possède un pôle simple avec le résidu  $\frac{1}{2\sqrt{\pi}}$ .

Puisque  $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$ , nous avons au voisinage de  $s = \frac{1}{2}$ , le développement

$$\zeta_s(x, x) = \frac{1}{2\pi} \frac{1}{s - \frac{1}{2}} + Z_s(x, x),$$

$Z_s(x, x)$  étant une fonction holomorphe de  $s$  au voisinage de  $s = \frac{1}{2}$ .

En résumé, si  $x \neq y$ ,  $\zeta_s(x, y)$  est une fonction entière de  $s$ ; si  $x = y$ ,  $\zeta_s(x, y)$  est une fonction analytique et régulière de  $s$  dans tout le plan à distance finie sauf au point  $s = \frac{1}{2}$  où elle possède un pôle simple avec le résidu  $\frac{1}{2\pi}$ . En outre,  $\zeta_s(x, y)$  possède des zéros pour les valeurs de  $s$ , ( $s = 0, -1, -2, \dots$ ) annulant la fonction entière  $\frac{1}{\Gamma(s)}$ .

## B. Le prolongement analytique et la solution du problème aux limites.

25. A présent, étudions le prolongement analytique de

$$F_s(x) = \int_0^l f(y) \zeta_s(x, y) dy$$

$f(y)$  étant dans  $(0, l)$  une fonction bornée continue sauf éventuellement en un nombre fini de points de discontinuité de première espèce.

Nous désignerons par  $M$ , une borne supérieure de  $|f(y)|$  dans  $(0, l)$ .

Nous supposerons en outre qu'à tout point  $x$  de l'intervalle  $(0, l)$  où la fonction  $f(y)$  est continue, on peut faire correspondre un nombre positif  $\varepsilon$ , tel que si  $y$  varie dans l'intervalle  $(x - \varepsilon, x + \varepsilon)$ , on ait

$$|f(x) - f(y)| < N |x - y|, \quad (3.18)$$

$N$  étant une constante finie; cette relation a évidemment lieu si  $f(y)$  possède en  $y = x$  une dérivée bornée.

D'après la relation (3.13), le prolongement analytique de  $F_s(x)$  revient à celui de

$$\mathcal{J}_s(x) = \Gamma(s) F_s(x) = \int_0^l f(y) I_s(x, y) dy = \int_0^l [I_s^{(1)}(x, y) + I_s^{(2)}(x, y)] f(y) dy = \mathcal{J}_s^{(1)}(x) + \mathcal{J}_s^{(2)}(x).$$

Des relations (3.18) et (3.15), nous déduisons

$$|\mathcal{J}_s^{(2)}(x)| < M M^* \int_0^l \int_T^\infty e^{-\lambda_1 \alpha} \alpha^{\sigma-1} dy d\alpha$$

ce qui montre que  $\mathcal{J}_s^{(2)}(x)$  est une fonction entière de  $s$ .

D'après la relation (3.16), nous avons

$$\mathcal{J}_s^{(1)}(x) = \int_0^l [I_s^{(3)}(x, y) + I_s^{(4)}(x, y)] f(y) dy = \mathcal{J}_s^{(3)}(x) + \mathcal{J}_s^{(4)}(x).$$

Si  $d_x$  désigne le minimum de la distance de  $x$  aux points 0 et  $l$ , nous avons d'après (3.17),  $n$  désignant un nombre entier positif arbitrairement fixé,

$$|\mathcal{J}_s^{(4)}(x)| \leq \frac{M 4^n n! c}{d_x^{2n}} \int_0^l \int_0^T \alpha^{n+\sigma-3/2} dy d\alpha \leq \frac{M 4^n n! c l}{d_x^{2n}} \frac{T^{n+\sigma-1/2}}{n+\sigma-1/2}.$$

Ainsi,  $\mathcal{J}_s^{(4)}(x)$  converge dans le demi-plan  $Rs > -n + \frac{1}{2}$ . Le nombre entier et positif  $n$  étant fixé arbitrairement, ceci revient à dire que  $\mathcal{J}_s^{(4)}(x)$  est une fonction entière de  $s$ .

**26.** Pour étudier  $\mathcal{J}_s^{(3)}(x)$ , considérons un nombre positif  $\varepsilon$  assez petit pour que  $x - \varepsilon$  et  $x + \varepsilon$  étant intérieurs à l'intervalle  $(0, l)$ , la relation (3.18) soit vérifiée. Décomposons l'intervalle  $(0, l)$  en les intervalles partiels  $(0, x - \varepsilon)$ ,  $(x - \varepsilon, x + \varepsilon)$ ,  $(x + \varepsilon, l)$ ; nous avons avec des notations évidentes

$$\mathcal{J}_s^{(3)}(x) = \int_0^{x-\varepsilon} + \int_{x-\varepsilon}^{x+\varepsilon} + \int_{x+\varepsilon}^l = \mathcal{J}_s^{(5)}(x) + \mathcal{J}_s^{(6)}(x) + \mathcal{J}_s^{(7)}(x).$$

Considérons d'abord  $\mathcal{J}_s^{(5)}(x)$ . En posant  $x-y=z$ , nous avons

$$\mathcal{J}_s^{(5)}(x) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_{\varepsilon}^x f(x-z) \int_0^T e^{-\frac{z^2}{4\alpha}} \alpha^{s-3/2} dz d\alpha$$

et par conséquent,  $n$  étant un entier positif quelconque,

$$\begin{aligned} |\mathcal{J}_s^{(5)}(x)| &\leq \frac{M}{2\sqrt{\pi}} \int_{\varepsilon}^x \int_0^T e^{-\frac{z^2}{4\alpha}} \alpha^{\sigma-3/2} dz d\alpha \leq \frac{M}{2\sqrt{\pi}} 4^n n! \int_{\varepsilon}^x \int_0^T z^{-2n} \alpha^{n+\sigma-3/2} dz d\alpha \leq \\ &\leq \frac{M 4^n n!}{2\sqrt{\pi} (2n+1)} \frac{T^{n+\sigma-1/2}}{n+\sigma-\frac{1}{2}} \left[ \frac{1}{\varepsilon^{2n+1}} - \frac{1}{x^{2n+1}} \right]. \end{aligned}$$

Puisque  $\varepsilon$  est positif et différent de zéro, cette relation montre que  $\mathcal{J}_s^{(5)}(x)$  est une fonction entière de  $s$ .

Il en est de même de  $\mathcal{J}_s^{(7)}(x)$  comme on le voit en posant  $y-x=z$ .

27. En posant  $\frac{z^2}{4\alpha} = u$ ,  $\alpha = v$ , il vient successivement

$$\begin{aligned} L_s^0 &= \int_0^\infty \int_0^T e^{-\frac{z^2}{4\alpha}} \alpha^{s-3/2} d\alpha dz = \int_0^\infty \int_0^T e^{-u} u^{-1/2} v^{s-1} du dv = \sqrt{\pi} \frac{T^s}{s}, \\ L_s^1 &= \int_0^\infty \int_0^T z e^{-\frac{z^2}{4\alpha}} \alpha^{s-3/2} d\alpha dz = \int_0^\infty \int_0^T e^{-u} v^{s-1/2} du dv = 2 \frac{T^{s+1/2}}{s+\frac{1}{2}}. \end{aligned} \quad (3.19)$$

Si  $\sigma$  est une quantité positive, nous avons en utilisant le même changement de variables

$$L_\sigma^s = \int_{\varepsilon}^\infty \int_0^T e^{-\frac{z^2}{4\alpha}} \alpha^{\sigma-3/2} d\alpha dz = \int_0^T \int_{\frac{z^2}{4v}}^\infty e^{-u} u^{-1/2} v^{\sigma-1} du dv.$$

D'après la relation<sup>1</sup>

---

<sup>1</sup> Puisque  $a > 0$ , on a successivement

$$\begin{aligned} \int_a^\infty e^{-u} u^{-1/2} du &= \int_a^\infty u^{-1/2} d(e^{-u}) = \frac{e^{-a}}{\sqrt{a}} + \frac{1}{2} \int_a^\infty e^{-u} u^{-3/2} du, \\ \int_a^\infty e^{-u} u^{-3/2} du &< e^{-a} \int_a^\infty u^{-3/2} du = 2 \frac{e^{-a}}{\sqrt{a}}, \end{aligned}$$

d'où la relation annoncée.

$$\left| \int_a^\infty e^{-u} u^{-1/2} du \right| \leq \frac{e^{-a}}{\sqrt{a}},$$

où  $a$  est une quantité positive, il vient

$$L_\sigma^\varepsilon \leq \frac{2}{\varepsilon} \int_0^T e^{-\frac{\varepsilon^2}{4v}} v^{\sigma-1/2} dv = \frac{\varepsilon^{2\sigma}}{4^\sigma} \int_{\frac{\varepsilon^2}{4T}}^\infty e^{-w} w^{-(\sigma+1/2)} dw,$$

la dernière intégrale étant convergente quel que soit  $\sigma$ .

Pour étudier l'intégrale  $\mathcal{J}_s^{(6)}(x)$ , écrivons  $f(y) = f(x) + [f(y) - f(x)]$  et posons

$$V_s(x) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_{x-\varepsilon}^{x+\varepsilon} \int_0^T e^{-\frac{(x-y)^2}{4\alpha}} \alpha^{s-3/2} dy d\alpha, \quad (3.20)$$

$$W_s(x) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_{x-\varepsilon}^{x+\varepsilon} \int_0^T [f(x) - f(y)] e^{-\frac{(x-y)^2}{4\alpha}} \alpha^{s-3/2} dy d\alpha;$$

il vient

$$\mathcal{J}_s^{(6)}(x) = f(x) V_s(x) + W_s(x).$$

Or, nous avons d'après (3.18),

$$|W_s(x)| \leq \frac{N}{2\sqrt{\pi}} \int_{x-\varepsilon}^{x+\varepsilon} \int_0^T |x-y| e^{-\frac{(x-y)^2}{4\alpha}} \alpha^{s-3/2} dy d\alpha;$$

en remplaçant l'intervalle  $(x-\varepsilon, x+\varepsilon)$  par  $(-\infty, +\infty)$  et en décomposant ce dernier en  $(-\infty, x)$  et  $(x, +\infty)$ , il vient

$$|W_s(x)| \leq \frac{N}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty \int_0^T z e^{-\frac{z^2}{4\alpha}} \alpha^{s-3/2} d\alpha dz$$

et d'après (3.19)

$$|W_s(x)| \leq \frac{2N}{\sqrt{\pi}} \frac{T^{\sigma+1/2}}{\sigma + \frac{1}{2}}.$$

Cette relation montre que  $W_s(x)$  est une fonction holomorphe de  $s$  pour  $Rs > -\frac{1}{2}$ .

En décomposant l'intervalle  $(x-\varepsilon, x+\varepsilon)$  en  $(x-\varepsilon, x)$  et  $(x, x+\varepsilon)$ , nous obtenons

$$V_s(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^\varepsilon \int_0^T e^{-\frac{z^2}{4\alpha}} \alpha^{s-3/2} d\alpha dz = \frac{1}{\sqrt{\pi}} L_s^0 - \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^\varepsilon \int_0^T e^{-\frac{z^2}{4\alpha}} \alpha^{s-3/2} d\alpha dz;$$

la dernière intégrale étant convergente quel que soit  $s$ , représente une fonction entière de  $s$ .

En tenant compte de la valeur de  $L_s^0$ , il vient en rassemblant les résultats précédents,

$$\mathfrak{J}_s^{(0)}(x) = \frac{T^s}{s \Gamma(s)} f(x) + H_s(x),$$

$H_s(x)$  étant une fonction holomorphe de  $s$  pour  $Rs > -\frac{1}{2}$ .

En résumé, nous avons

$$F_s(x) = \frac{f(x)}{s \Gamma(s)} + \frac{\mathfrak{H}_s(x)}{\Gamma(s)},$$

$\mathfrak{H}_s(x)$  étant une fonction holomorphe de  $s$  pour  $Rs > -\frac{1}{2}$ .

**28.** En particulier, supposons que lorsque  $t$  varie dans un intervalle  $(0, t_1)$  fini quelconque, la solution  $u(x, t)$  de notre problème possède les propriétés indiquées pour la fonction  $f(x)$  [cf. (3.18)].

Considérons la fonction

$$U_s(x, t) = \int_0^t u(y, t) \zeta_s(x, y) dy.$$

D'après ce qui précède, nous avons

$$U_s(x, t) = \frac{u(x, t)}{s \Gamma(s)} + \frac{H_s^{(1)}(x, t)}{\Gamma(s)},$$

$H_s^{(1)}(x, t)$  étant une fonction holomorphe de  $s$  pour  $Rs > -\frac{1}{2}$ .

Il en résulte que le prolongement analytique de  $U_s(x, t)$  pour  $s=0$  est  $u(x, t)$  et par conséquent la formule (3.3) devient

$$u(x, t) = \text{prol. anal.}_{s=0} \int_0^t \left[ u_1(y) K_s(x, y; t) + u_0(y) \frac{\partial K_s(x, y; t)}{\partial t} \right] dy. \quad (3.21)$$

**29.** Pour obtenir le prolongement analytique de

$$\int_0^t u_1(y) K_s(x, y; t) dy = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{b_k v_k(x) \sin \sqrt{\lambda_k} t}{\lambda_k^{s+1/2}} \quad (3.22)$$

pour  $s=0$ , on peut utiliser les relations (1.29), vérifiées par les coefficients de Fourier  $b_k$ .

En particulier, il résulte de (1.29) que la série (3.21) est majorée par la série

$$A \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k \lambda_k^{s+1/2}}, \quad (3.23)$$

$A$  étant un nombre positif.

Or,  $\varepsilon$  étant un nombre positif arbitrairement petit, nous avons  $|\lambda_k| > k^{2-\varepsilon}$  si  $k$  est assez grand. Il en résulte que la série (3.23) est convergente pour  $\sigma > -\frac{1}{2}$  et par suite que l'abscisse de convergence absolue de la série de Dirichlet (3.22) n'est pas située à droite de  $Rs = -\frac{1}{2}$ .

Ainsi, pour  $Rs > -\frac{1}{2}$ , la série (3.22) représente une fonction analytique et régulière de  $s$  et sa valeur pour  $s=0$  est

$$\sum_{k=1}^{\infty} b_k v_k(x) \frac{\sin \sqrt{\lambda_k} t}{\sqrt{\lambda_k}}.$$

De même, si  $u_0(y)$  possède une dérivée bornée et intégrable, le prolongement analytique de

$$\int_0^l u_0(y) \frac{\partial K_s(x, y; t)}{\partial t} dy = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k v_k(x) \cos \sqrt{\lambda_k} t}{\lambda_k^s}$$

pour  $s=0$  s'écrit

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k v_k(x) \cos \sqrt{\lambda_k} t.$$

### C. Le prolongement analytique de $K_s(x, y; t)$ et la fonction de Green-Riemann.

**30.** La fonction de Green-Riemann est liée à la fonction  $K_s(x, y; t)$ . Pour le montrer, il est utile de transformer l'expression de  $K_s(x, y; t)$ .

A cet effet, considérons la fonction

$$\zeta_s(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{v_k(x) v_k(y)}{\lambda_k^s} \quad (3.24)$$

analytique en  $s$  pour  $Rs > \frac{1}{2}$  et remarquons que  $v_k(x) \frac{\sin \sqrt{\lambda_k} t}{\sqrt{\lambda_k}}$  est une solution du système

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - L_x(u) = 0,$$

$$u(x, 0) = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = v_k(x)$$

et que par suite, nous avons [cf. (A)]

$$v_k(x) \frac{\sin \sqrt{\lambda_k} t}{\sqrt{\lambda_k}} = \frac{1}{2} \int_0^l G(x, t; y, 0) v_k(y) dy. \quad (3.25)$$

Dès lors, la série (3.1) peut s'écrire si  $Rs$  est assez grand,

$$K_s(x, y; t) = \frac{1}{2} \int_0^l G(x, t; z, 0) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{v_k(z) v_k(y)}{\lambda_k^s} dz = \frac{1}{2} \int_0^l G(x, t; z, 0) \zeta_s(z, y) dz. \quad (3.26)$$

Le raisonnement que nous avons fait à l'occasion de la fonction  $u(x, t)$  est applicable ici puisque  $G(x, t; y, 0)$  est bornée et a une dérivée  $\frac{\partial G}{\partial x}$  sauf au plus en deux points de l'intervalle  $0 \leq x \leq l$ . Nous avons donc

$$K_s(x, y; t) = \frac{G(x, t; y, 0)}{2s \Gamma(s)} + \frac{E_s(x, y; t)}{\Gamma(s)},$$

$E_s(x, y; t)$  étant une fonction analytique régulière pour  $Rs > -\frac{1}{2}$ .

Il en résulte puisque  $s=0$  est un zéro de  $\frac{1}{\Gamma(s)}$  et que  $\lim_{s \rightarrow 0} s \Gamma(s) = 1$ , la relation

$$K_0(x, y; t) = \frac{1}{2} G(x, t; y, 0).$$

**31. Remarque.** La formule (3.25) est particulièrement suggestive lorsque le point  $(x, t)$  est situé à l'intérieur du triangle  $OML$  (fig. 2). Dans ce cas, la fonction  $G(x, t; y, 0)$  se réduit à la fonction de Riemann  $R(x, t; y, 0)$  et n'est différente de zéro que si  $y$  est intérieur à l'intervalle  $(x-t, x+t)$ .

*Exemples.*

a) Pour l'équation des cordes vibrantes  $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$  et l'intervalle  $(0, \pi)$ , on obtient le système

$$\frac{d^2 v}{dx^2} + \lambda v = 0, \quad v(0) = v(\pi) = 0$$

qui possède les valeurs caractéristiques  $\lambda_k = k^2$ , ( $k$  entier et positif) et les fonctions fondamentales  $v_k(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin kx$ .

La fonction de Riemann se réduit à 1 pour  $x-t < y < x+t$  et à zéro si  $y$  est à l'extérieur de cet intervalle; la formule (3.25) se vérifie aussitôt.

b) Pour l'équation des ondes amorties

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + u, \quad (3.27)$$

et l'intervalle  $(0, \pi)$ , on obtient le système

$$\frac{d^2 v}{dx^2} + (1 + \lambda) v = 0, \quad v(0) = v(\pi) = 0$$

qui possède les valeurs caractéristiques  $\lambda_k = k^2 - 1$  ( $k$  entier et positif,  $\lambda_k > 0$ ) et les fonctions fondamentales  $v_k(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin kx$ .

La fonction de Riemann est ici

$$R(x, t; z, 0) = I_0(\sqrt{t^2 - (x-z)^2})$$

avec  $I_0(x) = J_0(ix)$ ,  $J_0(z)$  étant la fonction de Bessel d'indice 0. Nous avons d'après (3.25)

$$\frac{\sin \sqrt{k^2 - 1} t}{\sqrt{k^2 - 1}} \sin kx = \frac{1}{2} \int_{x-t}^{x+t} I_0[\sqrt{t^2 - (x-z)^2}] \sin kz dz.$$

En posant  $x - z = \alpha$ , on trouve facilement

$$\frac{\sin \sqrt{k^2 - 1} t}{\sqrt{k^2 - 1}} = \int_0^t I_0(\sqrt{t^2 - \alpha^2}) \cos k\alpha d\alpha.$$

D'autre part, en remarquant que la solution

$$u(x, t) = \frac{\sin \sqrt{k^2 - 1} t}{\sqrt{k^2 - 1}} e^{tkx}$$

de l'équation (3.27) vérifie les relations

$$u(x, 0) = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = e^{tkx},$$

on obtient

$$\frac{\sin \sqrt{k^2 - 1} t}{\sqrt{k^2 - 1}} e^{tkx} = \frac{1}{2} \int_{x-t}^{x+t} I_0[\sqrt{t^2 - (x-z)^2}] e^{tkz} dz$$

et on en déduit aisément la formule connue

$$\frac{\sin \sqrt{k^2 - 1} t}{\sqrt{k^2 - 1}} = \frac{1}{2} \int_{-t}^t I_0(\sqrt{t^2 - \alpha^2}) e^{tka} d\alpha.$$

Cette formule est d'ailleurs valable même si  $k$  est une constante réelle quelconque.

**32. Conclusion.** Nous avons obtenu la solution  $u(x, t)$  du problème mixte à l'aide de la fonction de Green-Riemann [cf. (A)] et nous avons remarqué que cette

solution existe et est unique. Il en résulte que les autres expressions obtenues pour  $u(x, t)$  [cf. (2.11); (3.21)] représentent aussi la fonction donnée par (A).

Pour abrégé, supposons  $u_0(x)$  identiquement nulle.

La solution  $u(x, t)$  s'écrit alors [cf. (2.11)]

$$u(x, t) = (-1)^{n-1} \frac{\partial^{2n}}{\partial t^{2n}} \Phi(x, t)$$

avec

$$\Phi(x, t) = - \sum_{k=1}^{\infty} b_k \frac{v_k(x)}{\lambda_k^n} \cdot \frac{\sin \sqrt{\lambda_k} t}{\sqrt{\lambda_k}}$$

où nous pouvons d'ailleurs supposer  $n=1$ .

La série est absolument et uniformément convergente et il en est de même de la série obtenue en dérivant terme à terme par rapport à  $t$ , puisque  $|b_k| < \frac{M}{k}$ . Il vient donc

$$u(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k v_k(x) \frac{\sin \sqrt{\lambda_k} t}{\sqrt{\lambda_k}}$$

et par conséquent [cf. (A)]

$$\frac{1}{2} \int_0^l u_1(y) G(x, t; y, 0) dy = \sum_{k=1}^{\infty} b_k v_k(x) \frac{\sin \sqrt{\lambda_k} t}{\sqrt{\lambda_k}}.$$

Nous avons aussi obtenu l'expression

$$u(x, t) = \text{prol. anal.} \int_0^l u_1(y) K_s(x, y; t) dy;$$

par comparaison avec (A), nous en déduisons

$$\frac{1}{2} \int_0^l u_1(y) G(x, t; y, 0) dy = \text{prol. anal.} \int_0^l u_1(y) K_s(x, y; t) dy.$$

Puisque pour  $y$  intérieur à  $(0, l)$ , nous avons

$$K_0(x, y; t) = \frac{1}{2} G(x, t; y, 0),$$

nous avons aussi, si  $u_1(y)$  n'est différent de zéro que dans un intervalle  $(a, b)$  complètement intérieur à  $(0, l)$ , la relation

$$\frac{1}{2} \int_0^l u_1(y) G(x, t; y, 0) dy = \int_0^l u_1(y) K_0(x, y; t) dy.$$

## CHAPITRE IV.

**La fonction**<sup>1</sup>  $\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^{-s}$ .

**33.** Pour abrégier l'écriture, nous supposons  $l = \pi$ ; nous avons

$$\lambda_k = k^2 + c + \frac{\gamma(k)}{k}$$

où  $c$  est une constante et  $\gamma(k)$  une fonction bornée de  $k$ . Nous poserons

$$c_k = c + \frac{\gamma(k)}{k};$$

nous avons  $|c_k| < C$ ,  $C$  étant une constante indépendante de  $k$ .

Si  $Rs = \sigma > 1$ , nous avons

$$F(s) = \Gamma(s) \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^{-s} = \int_0^{\infty} G(t) t^{s-1} dt \quad (4.1)$$

avec

$$G(t) = \sum_{k=1}^{\infty} e^{-\lambda_k t}.$$

En effet, puisque

$$\int_0^{\infty} e^{-\lambda_k t} t^{s-1} dt = \frac{\Gamma(s)}{\lambda_k^s},$$

nous avons

$$\Gamma(s) \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^{-s} = \sum_{k=1}^{\infty} \int_0^{\infty} e^{-\lambda_k t} t^{s-1} dt$$

et le résultat annoncé s'en déduit aussitôt, si l'on peut permuter les signes  $\sum_{k=1}^{\infty}$  et  $\int_0^{\infty}$ .  
Or, posons

$$F_1(s) = \sum_{k=1}^{\infty} \int_0^1 e^{-\lambda_k t} t^{s-1} dt,$$

$$F_2(s) = \sum_{k=1}^{\infty} \int_1^{\infty} e^{-\lambda_k t} t^{s-1} dt;$$

nous avons

$$F(s) = F_1(s) + F_2(s).$$

---

<sup>1</sup> Cf. S. MINAKSHISUNDARAM [10]; H. WEYL [13].

Or, si  $t \geq 1$ , les termes  $e^{-\lambda_k t}$  sont majorés à partir d'un certain rang par  $e^{-k^{2-\varepsilon} t}$  ( $\varepsilon > 0$  arbitraire) et la série  $G(t)$  est majorée par la série  $\sum e^{-k^{2-\varepsilon} t}$ . D'ailleurs, la série  $\sum e^{-k^{2-\varepsilon} t}$  est uniformément convergente dans tout intervalle  $1 \leq t \leq t_1$  ( $t_1$  arbitraire) et  $t^{\sigma-1}$  est continu pour toute valeur finie de  $t$ . On peut donc intégrer terme à terme<sup>1</sup> et l'on a

$$F_2(s) = \int_1^{\infty} G(t) t^{s-1} dt.$$

D'ailleurs,  $F_2(s)$  est une fonction entière de  $s$ .

Pour étudier la fonction  $F_1(s)$ , remarquons que l'on a  $e^{-u} < \frac{1}{u}$  pour  $u \geq 0$  et par suite ( $t \geq 0$ ,  $Rs = \sigma > 1$ )

$$|e^{-\lambda_k t} t^{s-1}| = e^{-\lambda_k t} t^{\sigma-1} \leq \frac{t^{\sigma-2}}{\lambda_k};$$

il en résulte que pour  $0 \leq t \leq 1$ ,  $\sigma > 2$ , la série  $G(t) t^{\sigma-2}$  est absolument et uniformément convergente et que

$$|F_1(s)| \leq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_k} \int_0^1 t^{\sigma-2} dt = \frac{1}{\sigma-1} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_k}.$$

Cette dernière expression reste finie pour  $\sigma > 1$  puisque  $\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^{-1}$  est convergente. Ainsi, on a encore

$$F_1(s) = \int_0^1 G(t) t^{s-1} dt \quad (Rs > 1)$$

ce qui démontre la relation (4.1).

**34.** Pour étudier la fonction  $F_1(s)$  de  $s$ , écrivons

$$e^{-\lambda_k t} = e^{-k^2 t} - e^{-k^2 t} [1 - e^{-c k t}],$$

$$G_1(t) = \sum_{k=1}^{\infty} e^{-k^2 t},$$

$$G_2(t) = \sum_{k=1}^{\infty} e^{-k^2 t} (1 - e^{-c k t}),$$

$$G(t) = G_1(t) - G_2(t).$$

Pour  $0 \leq t \leq 1$ , nous avons

$$|1 - e^{-c k t}| < A t, \tag{4.2}$$

$A$  étant une constante numérique.

<sup>1</sup> Cf. T. J. I. BROMWICH [2, p. 500, B].

En effet, pour  $t \geq 0$ , nous avons [cf. § 33].

$$|1 - e^{-ck^2 t}| \leq C t e^{Ct} \quad (4.3)$$

d'après la relation  $|1 - e^{-x}| \leq x e^x$ , ( $x \geq 0$ ). La relation (4.2) se déduit aussitôt de (4.3).

Il en résulte

$$|G_2(t)| < A t \sum_{k=1}^{\infty} e^{-k^2 t}$$

ou encore

$$|G_2(t)| < A t G_1(t).$$

Or, la formule de Poisson ( $x > 0$ )

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{-k^2 \pi x} = \frac{1}{\sqrt{x}} \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{-\frac{k^2 \pi}{x}}$$

nous donne en prenant  $x = \frac{t}{\pi}$ ,

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{-k^2 t} = \sqrt{\frac{\pi}{t}} \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{-\frac{k^2 \pi^2}{t}}$$

ou encore ( $t > 0$ )

$$1 + 2 G_1(t) = \sqrt{\frac{\pi}{t}} \left[ 1 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} e^{-\frac{k^2 \pi^2}{t}} \right].$$

Puisque  $e^{-u} < \frac{1}{u}$  pour  $u \geq 0$ , il vient ( $0 < t \leq 1$ )

$$G_1(t) < \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{t}} \left[ 1 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{t}{k^2 \pi^2} \right] < \frac{B}{\sqrt{t}},$$

$B$  étant une constante numérique.<sup>1</sup> On en déduit

$$|G_2(t)| < A B \sqrt{t} \quad (4.4)$$

et par suite pour  $Rs = \sigma > 1$ ,

$$\int_0^1 G(t) t^{s-1} dt = \int_0^1 G_1(t) t^{s-1} dt - \int_0^1 G_2(t) t^{s-1} dt.$$

Or, d'après (4.4), nous avons

$$\left| \int_0^1 G_2(t) t^{s-1} dt \right| < \frac{A B}{\sigma + \frac{1}{2}}$$

et l'intégrale considérée représente une fonction holomorphe de  $s$  pour  $Rs > -\frac{1}{2}$ .

---

<sup>1</sup> On a  $B = \frac{2}{3} \sqrt{\pi}$  puisque  $\sum_{k=1}^{\infty} k^{-2} = \frac{\pi^2}{6}$ .

D'ailleurs, si  $\zeta(s)$  est la fonction de Riemann<sup>1</sup> nous avons

$$\int_0^1 G_1(t) t^{s-1} dt = \int_0^{\infty} G_1(t) t^{s-1} dt - \int_1^{\infty} G_1(t) t^{s-1} dt = \Gamma(s) \zeta(2s) - \int_1^{\infty} G_1(t) t^{s-1} dt,$$

la dernière intégrale représentant encore une fonction entière de  $s$ .

En rassemblant ces résultats, on obtient

$$F(s) = \Gamma(s) \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^{-s} = \Gamma(s) \zeta(2s) + H(s),$$

$H(s)$  représentant une fonction holomorphe de  $s$  pour  $Rs = \sigma > -\frac{1}{2}$ .

Or, la fonction  $\zeta(2s)$ , représentée par  $\sum_{k=1}^{\infty} k^{-2s}$  pour  $Rs > \frac{1}{2}$ , est une fonction analytique de  $s$  ayant à distance finie le seul pôle simple  $s = \frac{1}{2}$  de résidu  $\frac{1}{2}$ .

Ainsi, la fonction représentée par la série  $\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^{-s}$  et analytique si  $Rs$  est assez grand, peut être prolongée analytiquement pour  $Rs > -\frac{1}{2}$ ; elle possède dans ce domaine un seul pôle simple  $s = \frac{1}{2}$  avec le résidu  $\frac{1}{2}$ .

### Bibliographie.

1. F. BUREAU. a) *Le problème de Cauchy et les séries de fonctions fondamentales*. C. R. Acad. Sc. Paris, t. 234, 1952, pp. 791—792. *Remarque sur la note précédente* par M. J. HADAMARD. Ibid., p. 792.  
b) *Problème de Cauchy et problème aux limites pour les équations linéaires aux dérivées partielles totalement hyperboliques*. Rendiconti del IV Congresso dell'Unione Matematica Italiana; Taormina 1951.
2. T. J. I. BROMWICH. *An introduction to the theory of infinite series*. London 1942.
3. E. T. COPSON. *On the elementary solution of a partial differential equation of parabolic type*. Proc. Roy. Soc. Edinburgh, vol. LXI, A; pp. 37—53; 54—60.
4. R. COURANT und D. HILBERT. *Methoden der mathematischen Physik*, Bd. I, II. Berlin 1931, 1937.
5. G. DOETSCH. *Theta Relationen als Konsequenzen des Huygensschen und Eulerschen Prinzips in der Theorie der Wärmeleitung*. Math. Zeit., Bd. 40, 1935, bl. 613—628.
6. M. GEVREY. *Sur les équations aux dérivées partielles du type parabolique*. Thèse Paris. 1913; Journal Math. pures et appliquées, s. 6, t. IX, 1913, pp. 305—471; t. X, 1914, pp. 105—148.

---

<sup>1</sup>  $\int_0^{\infty} e^{-k^2 t} t^{s-1} dt = \Gamma(s) k^{-2s}$ ;  $\zeta(s) = \sum_{k=1}^{\infty} k^{-s}$ .

7. J. HADAMARD. a) *Sur la solution fondamentale des équations aux dérivées partielles du type parabolique*. C. R. Acad. Sc. Paris, t. 152, 1911, p. 1148.  
b) *Sur un problème mixte aux dérivées partielles*. Bull. Soc. Math. France, t. 31, 1903, pp. 208—224.  
c) *Résolution d'un problème aux limites pour les équations linéaires du type hyperbolique*. Ibid., t. 32, 1904, pp. 242—268.  
d) *Le problème de Cauchy et les équations aux dérivées partielles linéaires hyperboliques*. Paris 1932.
8. E. L. INCE. *Ordinary differential equations*. London 1927; New-York 1944.
9. E. E. LEVI. *Sull' equazione del calore*. Annali di Matematica, s. 3, t. XIV, 1908, pp. 187—264.
10. S. MINAKSHISUNDARAM. *A generalization of Epstein zeta functions* (with a supplementary note by H. Weyl). Canadian Journal of Math., vol. 1, 1949, pp. 320—327.
11. S. MINAKSHISUNDARAM and Å. PLEIJEL. *Some properties of Eigenvalues of the Laplace-operator on Riemannian manifolds*. Ibid., vol. 1, 1949, pp. 242—256.
12. E. ROTHE. *Über die Grundleistung bei parabolischen Gleichungen*. Math. Zeit., Bd. 33, 1931, bl. 488—504.
13. H. WEYL. *Ramifications, old and new, of the Eigenvalue problem*. Bull. Amer. Math. Soc., vol. 56, 1950, pp. 115—139.
14. S. ZAREMBA. *Sur une classe de problèmes mixtes relatifs à l'équation des ondes sphériques*. Bull. Acad. Sc. Cracovie, série A, 1913, pp. 385—417.