

Quantification geometrique, operateurs d'entrelacement et representations unitaires de $\widetilde{SL}_3(\mathbf{R})$

by

PIERRE TORASSO

*Université de Poitiers
Poitiers, France*

Introduction

Nous désignons par $\widetilde{SL}_3(\mathbf{R})$ le revêtement connexe simplement connexe du groupe $SL_3(\mathbf{R})$ et par π la projection canonique de $\widetilde{SL}_3(\mathbf{R})$ sur $SL_3(\mathbf{R})$. Le groupe $SO_3(\mathbf{R})$ est un sous-groupe compact maximal de $SL_3(\mathbf{R})$ dont l'image réciproque par π dans $\widetilde{SL}_3(\mathbf{R})$ est isomorphe à SU_2 . Il est usuel de paramétrer les représentations unitaires irréductibles de SU_2 par leur spin qui est un demi-entier $k/2$ avec $k \in \mathbf{N}$.

La classification des représentations unitaires irréductibles de $\widetilde{SL}_3(\mathbf{R})$ a été achevée par D. Sijacki [15]. Dans le dual unitaire de $\widetilde{SL}_3(\mathbf{R})$ l'ensemble des représentations, non triviales, et « multiplicity free » i.e. dont les SU_2 -types interviennent avec la multiplicité 1, est constitué de deux familles continues de représentations de $SL_3(\mathbf{R})$, $\varrho_{\varepsilon, \lambda}$, $\varepsilon = \pm 1$, $\lambda \in \mathbf{R}$, et d'une seule représentation fidèle de $\widetilde{SL}_3(\mathbf{R})$, $\bar{\varrho}$; ces représentations qui ont respectivement pour SU_2 -types $2k$, $k \in \mathbf{N}$, $2k+1$, $k \in \mathbf{N}$, $2k+1/2$, $k \in \mathbf{N}$, avaient déjà été découvertes par D. W. Joseph [10].

Les deux familles continues de représentations dont il est question ici sont bien connues. On peut les obtenir en appliquant aux orbites non triviales de dimension minimale (à savoir 4) de la représentation coadjointe de $SL_3(\mathbf{R})$ la méthode « des orbites de Kirillov ». Autrement dit, ces représentations sont des séries principales dégénérées induites à partir d'un caractère unitaire d'un parabolique maximal. En terme de quantification géométrique cette construction revient à quantifier en utilisant une polarisation $\widetilde{SL}_3(\mathbf{R})$ -invariante sur chacune des orbites en question (cf. [20]). Les orbites considérées constituent une famille \mathcal{O}_λ , $\lambda \in \mathbf{R}$ et à chaque orbite on associe ainsi les deux représentations $\varrho_{\varepsilon, \lambda}$, $\varepsilon = \pm 1$.

La représentation $\bar{\varrho}$ est particulièrement intéressante; elle présente beaucoup d'analogies avec les représentations de Shale-Weil pour les groupes métaplectiques réels, à savoir :

- (i) elle est « multiplicity free »,
- (ii) elle réalise $\tilde{S}\tilde{L}_3(\mathbf{R})$ comme groupe d'opérateurs unitaires,
- (iii) elle est isolée dans le dual unitaire de $\tilde{S}\tilde{L}_3(\mathbf{R})$.

Il semble aussi qu'elle soit d'un certain intérêt en physique (voir l'introduction de [13]).

Le but principal de ce travail, c'est d'associer à une des orbites \mathcal{O}_λ , cette représentation $\tilde{\varrho}$ de Joseph, et d'en obtenir ainsi une réalisation dans un espace de Hilbert « concret », en l'occurrence $L^2(\mathbf{R}^2)$.

Parmi les orbites considérées il y a une seule orbite nilpotente, \mathcal{O}_0 , les autres étant semi-simples. Le groupe fondamental de \mathcal{O}_0 est isomorphe à $\mathbf{Z}/4\mathbf{Z}$ alors que celui des autres orbites \mathcal{O}_λ est isomorphe à $\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$, et, sur l'orbite \mathcal{O}_0 , il existe quatre fibrés en droites hermitiens $\tilde{S}\tilde{L}_3(\mathbf{R})$ -homogènes dont deux seulement sont $SL_3(\mathbf{R})$ -homogènes alors que, sur les orbites \mathcal{O}_λ , $\lambda \neq 0$, il en existe uniquement deux, qui sont $SL_3(\mathbf{R})$ -homogènes. De plus la représentation $\tilde{\varrho}$ de $\tilde{S}\tilde{L}_3(\mathbf{R})$ a même caractère infinitésimal que les représentations $\varrho_{\varepsilon,0}$, $\varepsilon = \pm 1$. Il est donc naturel d'essayer de construire la représentation $\tilde{\varrho}$ en utilisant la structure de variété symplectique et $\tilde{S}\tilde{L}_3(\mathbf{R})$ -homogène de \mathcal{O}_0 .

En quantifiant la situation à l'aide d'une polarisation réelle non invariante et avec singularité, \mathcal{P}_0 (resp. \mathcal{P}_λ), sur l'orbite \mathcal{O}_0 (resp. \mathcal{O}_λ), nous construisons quatre (resp. deux) représentations unitaires (irréductibles) du stabilisateur de cette polarisation, lequel est un sous-groupe parabolique maximal noté P_3 de $\tilde{S}\tilde{L}_3(\mathbf{R})$. Nous disposons ainsi de deux familles continues de représentations unitaires de $\pi(P_3)$ et de deux représentations unitaires fidèles de P_3 .

En utilisant alors la technique du « pairing » de Blattner-Kostant-Sternberg nous construisons pour un élément particulier ω de $\tilde{S}\tilde{L}_3(\mathbf{R})$, transformant la polarisation choisie en une polarisation transverse, un opérateur unitaire qui doit permettre de prolonger ces représentations de P_3 à $\tilde{S}\tilde{L}_3(\mathbf{R})$. Ceci fait l'objet des chapitres III et IV de ce travail. La technique utilisée ne fait appel qu'aux demi-densités (voir [7] p. 230–240 et [16]).

Dans le chapitre V on montre que ces résultats peuvent être obtenus en appliquant la méthode des orbites de Kirillov à des sous-groupes paraboliques maximaux de $\tilde{S}\tilde{L}_3(\mathbf{R})$. La projection de \mathcal{O}_λ sur \mathfrak{p}_3^* , le dual de l'algèbre de Lie \mathfrak{p}_3 de P_3 , contient une unique P_3 -orbite de dimension 4 isomorphe à un ouvert dense \mathcal{O}_λ^3 de \mathcal{O}_λ , sur lequel la polarisation \mathcal{P}_λ est bien définie. L'application de la méthode des orbites à \mathcal{O}_λ^3 avec la polarisation invariante \mathcal{P}_λ , permet de construire quatre représentations de P_3 ; lorsque $\lambda=0$ on retrouve les quatre représentations de P_3 déjà obtenues, lorsque $\lambda \neq 0$ on

retrouve les deux représentations déjà obtenues plus deux représentations fidèles de P_3 .

On choisit alors un autre parabolique maximal P_1 contenant l'élément ω , auquel on associe de la même manière une P_1 -orbite de la représentation coadjointe, isomorphe à un ouvert dense \mathcal{O}_λ^1 de \mathcal{O}_λ et sur laquelle il existe une polarisation P_1 -invariante; à chacune de ces orbites la méthode de Kirillov permet encore d'associer quatre représentations unitaires de P_1 .

Soit $B = P_1 \cap P_3$; c'est un sous-groupe de Borel de $\widetilde{SL}_3(\mathbf{R})$ et sa composante neutre \mathring{B} est un groupe exponentiel. La projection de \mathcal{O}_λ sur \mathfrak{b}^* , le dual de l'algèbre de Lie \mathfrak{b} de B , contient encore une B -orbite de dimension 4 isomorphe à l'ouvert dense $\mathcal{O}_\lambda^1 \cap \mathcal{O}_\lambda^3$ de \mathcal{O}_λ , et la restriction à B des représentations de P_3 et P_1 considérées sont des représentations construites à partir de cette B -orbite à l'aide de la méthode de Kirillov, mais en utilisant des polarisations différentes. En fait pour chaque représentation ϱ_3 de P_3 associée à \mathcal{O}_λ^3 et dont l'espace est \mathcal{H}_3 il existe une unique représentation ϱ_1 de P_1 associée à \mathcal{O}_λ^1 et dont l'espace est \mathcal{H}_1 telle que $\varrho_3|_B$ soit équivalente à $\varrho_1|_B$. De plus les représentations $\varrho_3|_B$ pour ϱ_3 parcourant toutes les représentations de P_3 que nous avons construites sont deux à deux inéquivalentes.

En utilisant la méthode exposée dans [3] et en vérifiant qu'elle s'applique encore ici nous construisons explicitement un opérateur unitaire $\mathcal{C}_{1,3}: \mathcal{H}_3 \rightarrow \mathcal{H}_1$ entreliant $\varrho_3|_B$ et $\varrho_1|_B$ et, en posant

$$\varrho_3(\omega) = (\mathcal{C}_{1,3})^{-1} \circ \varrho_1(\omega) \circ \mathcal{C}_{1,3}$$

on dispose d'un opérateur unitaire pour tenter de prolonger la représentation ϱ_3 à $\widetilde{SL}_3(\mathbf{R})$. Dans les cas où les deux méthodes s'appliquent on obtient le même résultat. L'idée d'utiliser les sous-groupes paraboliques P_1 et P_3 et d'appliquer simultanément la méthode des orbites de Kirillov aux projections de \mathcal{O}_λ sur \mathfrak{p}_1^* et \mathfrak{p}_3^* nous a été suggérée par M. Duflo.

Soit $Q = P_3 \cap \omega P_3 \omega^{-1}$; c'est un sous-groupe fermé de dimension 4 de $\widetilde{SL}_3(\mathbf{R})$ et la projection de \mathcal{O}_λ sur \mathfrak{q}^* le dual de l'algèbre de Lie \mathfrak{q} de Q contient l'unique Q -orbite de dimension 4 et les restrictions à Q des représentations ϱ_3 de P_3 sont irréductibles : ceci permet de voir que les opérateurs $\varrho_3(\omega)$ que l'on a construit sont les seuls permettant, éventuellement, de prolonger les représentations ϱ_3 à $\widetilde{SL}_3(\mathbf{R})$.

Dans le chapitre VI nous montrons que les représentations de $\pi(P_3)$ se prolongent en des représentations de $\widetilde{SL}_3(\mathbf{R})$ qui sont bien les représentations $\varrho_{e,\lambda}$ comme on

espérait. Pour ce faire nous construisons un opérateur d'entrelacement en utilisant la technique du « pairing » de Blattner-Kostant-Sternberg, mais pour des polarisations non transverses (voir [16]). Nous obtenons ainsi de nouvelles formules pour les représentations $\varrho_{\varepsilon, \lambda}$.

L'idée d'étudier les représentations $\varrho_{\varepsilon, \lambda}$, $\lambda \neq 0$ nous a été suggérée par P. Barrat : en adoptant un autre point de vue il a montré que les formules que nous avons obtenues pour les représentations $\varrho_{\varepsilon, 0}$, $\varepsilon = \pm 1$ peuvent s'étendre aux groupes $SL_3(\mathbf{Q}_p)$, et par sa méthode il obtient en fait une famille de représentations indexée par les caractères unitaires du corps \mathbf{Q}_p sur lequel il travaille

Dans le chapitre VII, nous montrons qu'une seule des représentations fidèles de P_3 se prolonge à $\tilde{S}\tilde{L}_3(\mathbf{R})$. Cette démonstration repose sur des résultats classiques d'analyse, essentiellement les propriétés relativement à la transformation de Fourier des distributions sur la droite réelle $x_+^{-1/2+i\lambda}$ et $x_-^{-1/2+i\lambda}$, $\lambda \in \mathbf{R}$ (cf. [6]).

Dans le dernier chapitre nous déterminons les paramètres de Langlands [2] des représentations que nous avons construites, ainsi qu'un opérateur d'entrelacement avec la série principale dans laquelle elles sont « naturellement » plongées. Pour les représentations $\varrho_{\varepsilon, \lambda}$ ceci est relativement facile puisque ce sont des séries principales dégénérées. Pour la représentation fidèle de $\tilde{S}\tilde{L}_3(\mathbf{R})$ la détermination de ses paramètres de Langlands repose sur l'étude du comportement asymptotique de certains de ses coefficients. Cette étude nécessitait que l'on détermine le SU_2 -type minimal de $\bar{\varrho}$. Nous l'avons fait dans le chapitre VIII, ainsi que pour les représentations $\varrho_{\varepsilon, \lambda}$, les formules que nous trouvons dans ce cas là nous paraissant tout aussi intéressantes.

La liste des représentations unitaires irréductibles de $\tilde{S}\tilde{L}_3(\mathbf{R})$, donnée avec les multiplicités de leur SU_2 -types par Sijacki [15], permet de voir que la représentation $\bar{\varrho}$ est la seule représentation fidèle de $\tilde{S}\tilde{L}_3(\mathbf{R})$ dont la dimension de Guelfand-Kirillov est 2. Il est alors immédiat, modulo le fait qu'une représentation de $\tilde{S}\tilde{L}_3(\mathbf{R})$ dont la restriction à P_3 est de dimension de Guelfand-Kirillov 2 est elle-même de dimension de Guelfand-Kirillov 2, qu'il y a au plus une représentation fidèle de P_3 qui se prolonge en une représentation de $\tilde{S}\tilde{L}_3(\mathbf{R})$ et que, s'il en existe une, son prolongement est équivalent à $\bar{\varrho}$.

Enfin le chapitre I de ce travail est consacré à l'étude du groupe $\tilde{S}\tilde{L}_3(\mathbf{R})$ et, plus particulièrement, à la détermination des relations de commutations entre ω et P_3 qui permettent de le définir. Le chapitre II, quant à lui, est entièrement voué à l'étude des fibrés en droite hermitiens $\tilde{S}\tilde{L}_3(\mathbf{R})$ -homogènes définis sur les orbites \mathcal{O}_λ , $\lambda \in \mathbf{R}$.

Ce travail a pour origine une question de S. Sternberg qui m'a été rapportée par M. Duflo, à savoir trouver un modèle de la représentation $\bar{\varrho}$ associé à la structure

symplectique de l'orbite \mathcal{O}_0 . Question à laquelle J. Rawnsley et S. Sternberg [13] ont indépendamment apporté une réponse différente. En utilisant une polarisation totalement complexe et SU_2 -invariante de l'orbite \mathcal{O}_0 , ils ont construit une réalisation très intéressante des représentations $\rho_{\varepsilon, 0}$, $\varepsilon = \pm 1$ et $\tilde{\rho}$ dans des espaces de fonctions holomorphes sur \mathbf{C}^2 . Il serait intéressant de comparer leur réalisation avec la notre, et, en particulier, d'exhiber un opérateur d'entrelacement. Disons simplement que le modèle de J. Rawnsley et S. Sternberg est mieux adapté à l'étude des restrictions des représentations considérées au sous-groupe compact maximal, alors que le notre est mieux adapté à l'étude des restrictions de ces mêmes représentations au sous-groupe parabolique maximal P_3 . D'autre part notre modèle semble se prêter — d'après P. Barrat — à une généralisation aux groupes $SL(3, \mathbf{Q}_p)$ en ce qui concerne les représentations $\rho_{\varepsilon, \lambda}$ et éventuellement à leurs revêtements de Steinberg en ce qui concerne la représentation $\tilde{\rho}$.

Lorsque l'on essaie d'étendre la méthode utilisée à la construction de représentations exceptionnelles du revêtement à deux feuillets, $\tilde{SL}(n, \mathbf{R})$, de $SL(n, \mathbf{R})$ avec $n > 3$, on s'aperçoit que l'on ne peut pas utiliser l'orbite nilpotente de dimension minimale, puisque sur celle-ci il n'existe pas de fibré en droite hermitien qui soit $\tilde{SL}(n, \mathbf{R})$ -homogène sans être $SL(n, \mathbf{R})$ -homogène. Les orbites nilpotentes de dimension minimales pour lesquelles cela se produit sont de rang $[n/2]$ (il n'y en a qu'une si n est impair et deux si n est pair). Ceci semble être en accord avec les récents travaux de R. Howe sur ce qu'il appelle le rang des représentations unitaires des groupes de Lie classiques (voir l'introduction de [13]).

En tout état de cause il semble possible d'appliquer la méthode de quantification géométrique décrite à ces orbites pour n quelconque, et l'autre méthode, utilisant la méthode des orbites de Kirillov, lorsque n est impair (lorsque n est pair tout parabolique maximal de $SL(n, \mathbf{R})$ associé à une des orbites considérées est centré, i.e. sa partie réductive est isomorphe à $S(GL([n/2], \mathbf{R}) \times GL([n/2], \mathbf{R}))$, et il n'est pas possible de trouver deux paraboliques maximaux centrés de $SL(n, \mathbf{R})$ dont l'intersection contienne un sous-groupe de Borel et dont la réunion engendre $SL(n, \mathbf{R})$. Nous espérons revenir ultérieurement sur cette question.

Je suis heureux de remercier M. Duflo qui m'a proposé ce sujet et dont les conseils et les encouragements m'ont permis de mener à bien ce travail, ainsi que J. Rawnsley et S. Sternberg qui m'ont tenu au courant du développement de leur travail.

Je tiens aussi à remercier M. Raïs pour les nombreuses et fructueuses discussions que j'ai eues avec lui, G. Lion pour m'avoir éclairé sur les résultats contenus dans [3] et [4], ainsi que P. Barrat pour m'avoir tenu au courant de ses travaux sur $SL(3, \mathbf{Q}_p)$.

I. Le groupe $\tilde{SL}_3(\mathbf{R})$

1. L'algèbre de Lie $sl_3(\mathbf{R})$

Soit α la sous-algèbre de Cartan déployée de $sl_3(\mathbf{R})$ constituée des matrices diagonales. Le système des racines de $sl_3(\mathbf{R})$ relativement à α est l'ensemble des $\alpha_{k,l}$, $1 \leq k, l \leq 3$ où

$$\alpha_{k,l} \begin{pmatrix} a_1 & 0 & 0 \\ 0 & a_2 & 0 \\ 0 & 0 & a_3 \end{pmatrix} = a_k - a_l, \quad \forall a_1, a_2, a_3 \in \mathbf{R} \text{ avec } a_1 + a_2 + a_3 = 0.$$

On choisit pour système de racines positives Δ_+ l'ensemble des $\alpha_{k,l}$ avec $1 \leq k < l \leq 3$. Les racines simples sont alors $\alpha_{1,2}$ et $\alpha_{2,3}$ et la demi-somme γ des racines positives est donnée par

$$\gamma = \alpha_{1,3} = \alpha_{1,2} + \alpha_{2,3}.$$

On considère les éléments suivants de $sl_3(\mathbf{R})$

$$H_{k,l} = E_{k,k} - E_{l,l}, \quad 1 \leq k, l \leq 3, \quad X_{k,l} = E_{k,l}, \quad Y_{k,l} = {}^t X_{k,l}, \quad 1 \leq k < l \leq 3$$

où les $E_{k,l}$, $1 \leq k, l \leq 3$ constituent la base canonique de l'algèbre de Lie des matrices 3×3 réelles (si M est une matrice, ${}^t M$ désigne la matrice transposée).

La base de Chevalley de $sl_3(\mathbf{R})$ associée à Δ_+ est constituée des éléments suivants :

$$H_{1,2}, H_{2,3}, X_{k,l}, Y_{k,l}, \quad 1 \leq k < l \leq 3.$$

Le sous-espace radiciel associé à $\alpha_{k,l}$ (resp. $-\alpha_{k,l}$) est engendré par $X_{k,l}$ (resp. $Y_{k,l}$) ceci pour $1 \leq k < l \leq 3$.

On note n_+ (resp. n) la sous-algèbre nilpotente de $sl_3(\mathbf{R})$ engendrée par les $X_{k,l}$ (resp. $Y_{k,l}$) et on considère les sous-algèbres de Borel

$$\mathfrak{b}_+ = \alpha \oplus n_+, \quad \mathfrak{b} = \alpha \oplus n$$

ainsi que les sous-algèbres paraboliques maximales

$$\mathfrak{p}_3 = \mathfrak{b} \oplus \mathbf{R}X_{1,2}, \quad \mathfrak{p}_1 = \mathfrak{b} \oplus \mathbf{R}X_{2,3}.$$

Considérons la base de Chevalley de $sl_2(\mathbf{R})$ constituée des éléments

$$H_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad X_0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad Y_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

ainsi que l'élément

$$W_0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Pour tout $1 \leq k < l \leq 3$, on notera $dj_{k,l}$ l'unique homomorphisme (injectif) d'algèbre de Lie de $sl_2(\mathbf{R})$ dans $sl_3(\mathbf{R})$ tel que

$$dj_{k,l}(H_0) = H_{k,l}, \quad dj_{k,l}(X_0) = X_{k,l}, \quad dj_{k,l}(Y_0) = Y_{k,l}.$$

La sous-algèbre compacte $so_3(\mathbf{R})$ de $sl_3(\mathbf{R})$ admet pour base les éléments $W_{k,l}$, $1 \leq k < l \leq 3$, définis par

$$W_{k,l} = dj_{k,l}(W_0) = X_{k,l} - Y_{k,l}.$$

Cette sous-algèbre est isomorphe à l'algèbre de Lie $su_2(\mathbf{C})$ dont les éléments s'écrivent

$$\frac{1}{2} \begin{pmatrix} ix & y+iz \\ -y+iz & -ix \end{pmatrix}, \quad x, y, z \in \mathbf{R}$$

et on note dj l'isomorphisme de $su_2(\mathbf{C})$ sur $so_3(\mathbf{R})$ défini par

$$dj \left(\frac{1}{2} \begin{pmatrix} ix & y+iz \\ -y+iz & -ix \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} 0 & -x & -y \\ x & 0 & -z \\ y & z & 0 \end{pmatrix}. \quad (1)$$

2. Le groupe $\tilde{SL}_2(\mathbf{R})$

Dans la suite si k est un corps on désigne par k^* le groupe multiplicatif des éléments non nuls de k .

On note $\tilde{SL}_2(\mathbf{R})$ le revêtement connexe à deux feuilletés de $SL_2(\mathbf{R})$, dont nous allons décrire une réalisation. Le groupe $SL_2(\mathbf{R})$ opère dans \mathbf{P} , l'ensemble des nombres complexes z tels que $\text{Im } z > 0$ (demi-plan de Poincaré) de la façon suivante

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot z = (az+b)(cz+d)^{-1}.$$

On réalise $\tilde{SL}_2(\mathbf{R})$ comme l'ensemble des couples (g, Φ) où $g \in SL_2(\mathbf{R})$ et Φ est une fonction holomorphe sur \mathbf{P} telle que

$$[\Phi(z)]^2 = cz+d, \quad \forall z \in \mathbf{P} \text{ où } c \text{ et } d \text{ sont tels que } g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix},$$

la loi de groupe sur $\widetilde{SL}_2(\mathbf{R})$ étant définie par

$$(g_1, \Phi_1)(g_2, \Phi_2) = (g_1 g_2, \Phi_3), \quad \text{avec } \Phi_3(z) = \Phi_1(g_2 \cdot z) \Phi_2(z) \quad \forall z \in \mathbf{P}.$$

Un élément (g, Φ) de $\widetilde{SL}_2(\mathbf{R})$ est déterminé dès l'on connaît $g \in SL_2(\mathbf{R})$ et $\Phi(i)$; on peut donc identifier $\widetilde{SL}_2(\mathbf{R})$ à la sous-variété fermée de $SL_2(\mathbf{R}) \times \mathbf{C}^*$ dont les éléments sont les couples

$$(g, \Phi), \quad g \in SL_2(\mathbf{R}), \quad g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \quad \Phi \in \mathbf{C}^* \quad \text{vérifiant } \Phi^2 = ci + d.$$

Dans ces conditions la structure de variété analytique de $\widetilde{SL}_2(\mathbf{R})$ est induite par celle de $SL_2(\mathbf{R}) \times \mathbf{C}^*$.

Dans la suite on note $z \mapsto z^{1/2}$ la détermination de la racine carrée définie sur \mathbf{C}^* par

$$z^{1/2} = \rho^{1/2} e^{i\theta/2}, \quad \text{si } z = \rho e^{i\theta} \text{ avec } \rho > 0, \quad -\pi < \theta \leq \pi.$$

Considérons les éléments suivants de $\widetilde{SL}_2(\mathbf{R})$:

$$\left. \begin{aligned} \alpha(t) &= \exp(tX_0) = \left(\begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, 1 \right), \quad t \in \mathbf{R} \\ \mathbf{y}(t) &= \exp(tY_0) = \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ t & 1 \end{pmatrix}, (1+tz)^{1/2} \right), \quad t \in \mathbf{R} \\ \omega(t) &= \alpha(t) \mathbf{y}(-1/t) \alpha(t), \quad t \in \mathbf{R}^* \\ \omega_-(t) &= \mathbf{y}(t) \alpha(-1/t) \mathbf{y}(t), \quad t \in \mathbf{R}^* \\ \omega &= \omega(1) \\ \mathbf{h}(t) &= \omega(t) \omega^{-1}, \quad t \in \mathbf{R}^*. \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

On a pour tout $t \in \mathbf{R}$,

$$\exp(tW_0) = \left(\begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{pmatrix}, e^{-it/2} \right) \quad (3)$$

et si on note σ l'élément non trivial du noyau de la projection canonique de $\widetilde{SL}_2(\mathbf{R})$ sur $SL_2(\mathbf{R})$

$$\sigma = \exp(2\pi W_0). \quad (4)$$

Pour tout nombre réel t non nul on pose $\varepsilon(t) = t/|t|$

LEMME 1. *On a les relations suivantes*

$$\omega(t) = \left(\begin{pmatrix} 0 & t \\ -1/t & 0 \end{pmatrix}, (-z/t)^{1/2} \right), \quad t \in \mathbf{R}^*, \quad (5)$$

$$\mathfrak{h}(t) = \left(\begin{pmatrix} t & 0 \\ 0 & 1/t \end{pmatrix}, t^{(1-\varepsilon(t))/2} |t|^{-1/2} \right), \quad t \in \mathbf{R}^*. \quad (6)$$

Démonstration. La première égalité résulte immédiatement de la relation

$$y(-1/t) \alpha(t) = \left(\begin{pmatrix} 1 & t \\ -1/t & 0 \end{pmatrix}, (-z/t)^{1/2} \right).$$

Comme $\omega^{-1} = \omega(-1)$, il vient

$$\mathfrak{h}(t) = \left(\begin{pmatrix} 0 & t \\ -1/t & 0 \end{pmatrix}, (-z/t)^{1/2} \right) \left(\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, z^{1/2} \right) = \left(\begin{pmatrix} t & 0 \\ 0 & 1/t \end{pmatrix}, \Phi \right)$$

avec

$$\Phi(z) = |t|^{-1/2} \left(\frac{\varepsilon(t)}{z} \right)^{1/2} (z)^{1/2}, \quad \forall z \in \mathbf{P}$$

et il vient alors

$$\Phi(t) = |t|^{-1/2} (e^{-i\varepsilon(t)\pi/2})^{1/2} (e^{i\pi/2})^{1/2} = |t|^{-1/2} e^{(i\pi/2)(1-\varepsilon(t))/2}$$

d'où la dernière égalité.

Q.E.D.

Il est alors immédiat que l'on a

$$\omega = \exp \frac{\pi}{2} W_0 \quad \text{et} \quad \omega^4 = \sigma, \quad (7)$$

$$\mathfrak{h}(t) = \mathfrak{h}(|t|) \omega^{\varepsilon(t)-1} = \exp(\log |t| H_0) \omega^{\varepsilon(t)-1}, \quad t \in \mathbf{R}^*, \quad (8)$$

$$\mathfrak{h}(s) \mathfrak{h}(t) = \mathfrak{h}(t) \mathfrak{h}(s) = \mathfrak{h}(st), \quad t \in \mathbf{R}^*, s > 0. \quad (9)$$

Le centre de $\widetilde{SL}_2(\mathbf{R})$ est le sous groupe, isomorphe à $\mathbf{Z}/4\mathbf{Z}$, engendré par ω^2 .

Comme il est clair, d'après la formule (8), que $\mathfrak{h}(1/t) = \omega \mathfrak{h}(t) \omega^{-1}$ il vient, par définition de $\mathfrak{h}(t)$, $\omega(t)$ et $\omega_{-}(t)$

$$\mathfrak{h}(1/t) = \omega_{-}(-t) \omega^{-1}, \quad t \in \mathbf{R}^*. \quad (10)$$

3. Le groupe $\widetilde{SL}_3(\mathbf{R})$

Nous désignons ainsi le revêtement connexe à deux feuillets, ou connexe et simplement connexe, de $SL_3(\mathbf{R})$; nous notons π la projection canonique de $\widetilde{SL}_3(\mathbf{R})$ sur $SL_3(\mathbf{R})$. On

identifie le groupe $SU_2(\mathbf{C})$ avec le sous-groupe compact maximal $\pi^{-1}(SO_3(\mathbf{R}))$ de $\tilde{S}\tilde{L}_3(\mathbf{R})$ au moyen de l'unique injection de $SU_2(\mathbf{C})$ dans $\tilde{S}\tilde{L}_3(\mathbf{R})$ dont la différentielle est dj .

Pour tout $1 \leq k < l \leq 3$ on note $j_{k,l}$ le plongement de $\tilde{S}\tilde{L}_2(\mathbf{R})$ dans $\tilde{S}\tilde{L}_3(\mathbf{R})$ dont la différentielle est $dj_{k,l}$ et on considère les éléments suivants de $\tilde{S}\tilde{L}_3(\mathbf{R})$

$$\left. \begin{aligned} \mathfrak{x}_{k,l}(t) &= j_{k,l}(\mathfrak{x}(t)) = \exp(tX_{k,l}), \quad t \in \mathbf{R}, \\ \mathfrak{y}_{k,l}(t) &= j_{k,l}(\mathfrak{y}(t)) = \exp(tY_{k,l}), \quad t \in \mathbf{R}, \\ \mathfrak{w}_{k,l}(t) &= j_{k,l}(\mathfrak{w}(t)), \quad t \in \mathbf{R}^* \quad \text{et} \quad \mathfrak{w}_{k,l} = j_{k,l}(\mathfrak{w}) = \exp\left(\frac{\pi}{2} W_{k,l}\right) \\ \mathfrak{b}_{k,l}(t) &= j_{k,l}(\mathfrak{b}(t)), \quad t \in \mathbf{R}^*. \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

A l'aide de (1) et (11) on voit que l'on a les identifications suivantes avec des éléments de SU_2 :

$$\omega_{1,2} = \begin{pmatrix} e^{-i\pi/4} & 0 \\ 0 & e^{i\pi/4} \end{pmatrix}, \quad \omega_{1,3} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \omega_{2,3} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -i \\ -i & 1 \end{pmatrix} \quad (12)$$

d'autre part pour tout $1 \leq k < l \leq 3$ on a

$$j_{k,l}(\sigma) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

qui est l'élément non trivial du centre de SU_2 ou de $\tilde{S}\tilde{L}_3(\mathbf{R})$ que nous noterons encore σ . Les éléments $\omega_{1,2}^2$ et $\omega_{2,3}^2$ engendrent un sous-groupe de SU_2 isomorphe au groupe quaternionien qui contient outre σ et l'élément neutre e les six éléments $\omega_{k,l}^2, \sigma\omega_{k,l}^2$, $1 \leq k < l \leq 3$. Ce sous-groupe est la partie compacte M du sous-groupe de Cartan de $\tilde{S}\tilde{L}_3(\mathbf{R})$ d'algèbre de Lie \mathfrak{a} . On a la relation

$$\omega_{1,2}^2 \omega_{2,3}^2 = \omega_{1,3}^2. \quad (13)$$

On note N_+ (resp. N, A) le sous-groupe analytique de $\tilde{S}\tilde{L}_3(\mathbf{R})$ d'algèbre de Lie \mathfrak{n}_+ (resp. $\mathfrak{n}, \mathfrak{a}$), B_+ (resp. B) le sous-groupe de Borel de $\tilde{S}\tilde{L}_3(\mathbf{R})$ d'algèbre de Lie \mathfrak{b}_+ (resp. \mathfrak{b}) et P_j le sous-groupe parabolique maximal de $\tilde{S}\tilde{L}_3(\mathbf{R})$ d'algèbre de Lie \mathfrak{p}_j , $j=1, 3$.

Alors P_3 (resp. P_1) est le sous-groupe de $\tilde{S}\tilde{L}_3(\mathbf{R})$ dont les éléments \mathfrak{p} sont tels que

$$\pi(\mathfrak{p}) = \begin{pmatrix} a & b & 0 \\ c & d & 0 \\ u & v & t \end{pmatrix} \quad \left(\text{resp. } \pi(\mathfrak{p}) = \begin{pmatrix} t & 0 & 0 \\ u & a & b \\ v & c & d \end{pmatrix} \right).$$

On note Q le sous-groupe de P_3 tel que

$$Q = P_3 \cap (\omega_{2,3} P_3 \omega_{2,3}^{-1})$$

alors les éléments de Q sont les $q \in \tilde{SL}_3(\mathbf{R})$ vérifiant

$$\pi(q) = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ c & d & 0 \\ u & 0 & t \end{pmatrix}.$$

Ainsi Q est engendré par les éléments suivants

$$\left. \begin{array}{l} y_{1,2}(t), y_{1,3}(t), \quad t \in \mathbf{R}, \\ h_{1,2}(t), h_{2,3}(t), \quad t > 0, \\ \omega_{1,2}^2, \omega_{2,3}^2 \end{array} \right\} \quad (14)$$

et si on note $q \mapsto q'$ l'automorphisme de Q induit par la conjugaison par $\omega_{2,3}$ on a

$$\left. \begin{array}{l} y_{1,2}(t)' = y_{1,3}(-t), y_{1,3}(t)' = y_{1,2}(t), \quad t \in \mathbf{R}, \\ h_{1,2}(t)' = h_{1,3}(t), h_{2,3}(t)' = h_{2,3}(1/t), \quad t > 0, \\ (\omega_{1,2}^2)' = \sigma \omega_{1,3}^2, (\omega_{2,3}^2)' = \omega_{2,3}^2 \end{array} \right\} \quad (15)$$

Soit Ω l'ensemble des éléments $g \in \tilde{SL}_3(\mathbf{R})$ tels que $\pi(g)_{2,3} \neq 0$ (si A est une matrice, $A_{k,l}$ désigne le coefficient de la $k^{\text{ième}}$ ligne et de la $l^{\text{ième}}$ colonne de A .); Ω est un ouvert de $\tilde{SL}_3(\mathbf{R})$ dont le complémentaire est une sous-variété de codimension 1.

Les deux lemmes qui suivent sont conséquence immédiate des résultats analogues pour $SL_3(\mathbf{R})$ lesquels résultent de calculs évidents.

LEMME 2. Soit $g \in \tilde{SL}_3(\mathbf{R})$; pour qu'il existe deux réels s et t et un élément $p \in P_3$ tels que

$$g = \alpha_{1,2}(s) y_{2,3}(t) \omega_{2,3} p$$

il faut et il suffit que $g \in \Omega$. Dans ce cas cette décomposition de g est unique.

LEMME 3. Soit $p \in P_3$.

(i) Si $\pi(p)_{2,2} \neq 0$ p s'écrit de manière unique sous la forme

$$p = \alpha_{1,2}(s) y_{2,3}(t) q \quad \text{avec } s, t \in \mathbf{R}, q \in Q.$$

(ii) Si $\pi(p)_{2,2}=0$ p s'écrit de manière unique sous la forme

$$p = \omega_{1,2} y_{2,3}(t) q \quad \text{avec } t \in \mathbf{R}, q \in Q.$$

Pour établir le principal résultat de ce paragraphe nous avons besoin du résultat technique suivant.

LEMME 4. On a les formules suivantes :

$$\omega_{2,3} \alpha_{1,2}(s) y_{2,3}(t) \omega_{2,3} = \alpha_{1,2}(s/t) y_{2,3}(-1/t) \omega_{2,3} \mathfrak{b}_{2,3}(t)^{-1} \alpha_{1,2}(s/t) y_{2,3}(-1/t), \quad \forall s, t, t \neq 0, \quad (16)$$

$$\omega_{2,3} \omega_{1,2} y_{2,3}(t) \omega_{2,3} = \alpha_{1,2}(1/t) \omega_{2,3} \omega_{1,2} \mathfrak{b}_{2,3}(-1/t) \omega_{2,3}^2 y_{2,3}(-1/t), \quad \forall t, t \neq 0. \quad (17)$$

Démonstration. Par définition de $\omega_{2,3}(-t)$ il vient

$$\omega_{2,3} \alpha_{1,2}(s) y_{2,3}(t) \omega_{2,3} = \alpha_{1,3}(-s) \alpha_{2,3}(-t) \omega_{2,3}^2 = \alpha_{1,3}(-s) y_{2,3}(-1/t) \alpha_{2,3}(t) \omega_{2,3}(-t) \omega_{2,3}^2$$

or on a

$$\alpha_{1,3}(-s) y_{2,3}(-1/t) \alpha_{1,3}(s) = \alpha_{1,2}(s/t) y_{2,3}(-1/t)$$

comme il résulte de l'égalité analogue dans $SL_3(\mathbf{R})$, et on peut donc écrire

$$\begin{aligned} \omega_{2,3} \alpha_{1,2}(s) y_{2,3}(t) \omega_{2,3} &= \alpha_{1,2}(s/t) y_{2,3}(-1/t) \alpha_{1,3}(-s) \alpha_{2,3}(t) \omega_{2,3}(-t) \omega_{2,3}^2 \\ &= \alpha_{1,2}(s/t) y_{2,3}(-1/t) \omega_{2,3} \alpha_{1,2}(s) y_{2,3}(-t) \omega_{2,3}^{-1} \omega_{2,3}(-t) \omega_{2,3}^2 \end{aligned}$$

mais d'après la définition de $\mathfrak{b}(t)$ on a

$$\omega_{2,3}(-t) = \omega_{2,3}^{-1} \mathfrak{b}_{2,3}(t)^{-1}$$

et on peut donc écrire

$$\omega_{2,3} \alpha_{1,2}(s) y_{2,3}(t) \omega_{2,3} = \alpha_{1,2}(s/t) y_{2,3}(-1/t) \omega_{2,3} \alpha_{1,2}(s) y_{2,3}(-t) \omega_{2,3}^{-2} \mathfrak{b}_{2,3}(t)^{-1} \omega_{2,3}^2$$

qui n'est autre que (16) puisque ω^2 est central dans $\widetilde{SL}_2(\mathbf{R})$ et que

$$\mathfrak{b}_{2,3}(t) \alpha_{1,2}(s) y_{2,3}(-t) \mathfrak{b}_{2,3}(t)^{-1} = \alpha_{1,2}(s/t) y_{2,3}(-1/t)$$

comme il résulte de l'égalité analogue dans $SL_3(\mathbf{R})$.

Comme par définition de $\omega_{2,3}(t)$ on a

$$y_{2,3}(t) = \alpha_{2,3}(1/t) \omega_{2,3}(-1/t) \alpha_{2,3}(1/t)$$

il vient immédiatement

$$\omega_{2,3} \omega_{1,2} y_{2,3}(t) \omega_{2,3} = \omega_{2,3} \omega_{1,2} \alpha_{2,3}(1/t) \omega_{2,3}(-1/t) \alpha_{2,3}(1/t) \omega_{2,3}$$

or

$$\omega_{2,3} \omega_{1,2} \alpha_{2,3}(1/t) \omega_{1,2}^{-1} \omega_{2,3}^{-1} = \alpha_{1,2}(1/t)$$

et il vient

$$\begin{aligned} \omega_{2,3} \omega_{1,2} y_{2,3}(t) \omega_{2,3} &= \alpha_{1,2}(1/t) \omega_{2,3} \omega_{1,2} \omega_{2,3}(-1/t) \omega_{2,3} y_{2,3}(-1/t) \\ &= \alpha_{1,2}(1/t) \omega_{2,3} \omega_{1,2} \beta_{2,3}(-1/t) \omega_{2,3}^2 y_{2,3}(-1/t). \quad \text{Q.E.D.} \end{aligned}$$

Le résultat suivant analogue au lemme 1 de [5] donne une condition nécessaire et suffisante pour qu'une représentation unitaire de P_3 s'étende à $\widetilde{SL}_3(\mathbf{R})$. On remarquera que le groupe $\widetilde{SL}_3(\mathbf{R})$ est engendré par P_3 et $\omega_{2,3}$.

LEMME 5. Soient ϱ une représentation unitaire du groupe P_3 dans un espace de Hilbert \mathcal{H} et U un opérateur unitaire de \mathcal{H} . La représentation ϱ se prolonge en une représentation unitaire de $\widetilde{SL}_3(\mathbf{R})$ telle que $\varrho(\omega_{2,3})=U$ si et seulement si les conditions suivantes sont vérifiées :

$$\left. \begin{array}{l} \text{(i) } U\varrho(q)U^{-1} = \varrho(q'), \quad \forall q \in Q \\ \text{(ii) } U^2 = \varrho(\omega_{2,3}^2) \\ \text{(iii) } U\varrho(\omega_{1,2})U = \varrho(\omega_{1,2})U\varrho(\omega_{1,2}). \end{array} \right\} \quad (18)$$

Il est clair que dans ce cas le prolongement de ϱ à $\widetilde{SL}_3(\mathbf{R})$ est uniquement déterminé par la condition $\varrho(\omega_{2,3})=U$.

Démonstration. Il est clair que ces conditions sont nécessaires. Supposons les vérifiées. Si un tel prolongement de ϱ existe, pour tout $g \in \Omega$ on a

$$\varrho(g) = \varrho(\alpha_{1,2}(s) y_{2,3}(t)) U\varrho(p). \quad (19)$$

avec

$$g = \alpha_{1,2}(s) y_{2,3}(t) \omega_{2,3} p, \quad s, t \in \mathbf{R}, p \in P_3.$$

Définissons donc une application de l'ouvert Ω dans le groupe unitaire de \mathcal{H} à l'aide de la formule (19) et supposons que nous ayons montré les relations

$$\varrho(g_1)\varrho(g_2) = \varrho(g_3), \quad \forall g_1, g_2, g_3 \in \Omega \text{ tels que } g_1 g_2 = g_3$$

alors en utilisant le lemme 6 de [19] on voit que ϱ s'étend en une représentation de $\widetilde{SL}_3(\mathbf{R})$, continue parce que sa restriction à Ω qui est donnée par la formule (19) est continue.

Soient donc $g_1, g_2, g_3 \in \Omega$ tels que $g_1 g_2 = g_3$. Ecrivons

$$g_k = \alpha_{1,2}(s_k) y_{2,3}(t_k) \omega_{2,3} p_k, \quad s_k, t_k \in \mathbf{R}, p_k \in P_3, k = 1, 2, 3.$$

On doit donc vérifier au niveau de ϱ la relation

$$\alpha_{1,2}(s_1) y_{2,3}(t_1) \omega_{2,3} p_1 \alpha_{1,2}(s_2) y_{2,3}(t_2) \omega_{2,3} p_2 = \alpha_{1,2}(s_3) y_{2,3}(t_3) \omega_{2,3} p_3.$$

En utilisant le fait que ϱ est une représentation de P_3 et que les éléments $\alpha_{1,2}(s)$ et $y_{2,3}(t)$, $s, t \in \mathbf{R}$ commutent, on se ramène à la vérification au niveau de ϱ de la relation de décomposition

$$\omega_{2,3} p \omega_{2,3} = \alpha_{1,2}(s) y_{2,3}(t) \omega_{2,3} p', \quad s, t \in \mathbf{R}, p' \in P_3$$

ceci pour tout $p \in P_3$ tel que $\omega_{2,3} p \omega_{2,3} \in \Omega$. Le lemme 3 et la condition (18) (i) permettent de se ramener à l'un des deux cas suivants

$$p = \alpha_{1,2}(s) y_{2,3}(t) \text{ ou } p = \omega_{1,2} y_{2,3}(t), \quad s, t \in \mathbf{R}.$$

Il est aisé de voir que dans ces conditions $\omega_{2,3} p \omega_{2,3} \in \Omega$ si et seulement si $t \neq 0$. Nous devons donc étudier deux cas

$$(a) p = \alpha_{1,2}(s) y_{2,3}(t), \quad s, t \in \mathbf{R}, t \neq 0.$$

D'après le lemme 4, relation (16) on se ramène à vérifier

$$U \varrho(\alpha_{1,2}(s) y_{2,3}(t)) U = \varrho(\alpha_{1,2}(s/t) y_{2,3}(-1/t)) U \varrho(\mathfrak{b}_{2,3}(t)^{-1}) \varrho(\alpha_{1,2}(s/t) y_{2,3}(-1/t))$$

relation qui par le fait que

$$\alpha_{1,2}(s) y_{2,3}(t) = \mathfrak{b}_{2,3}(|t|^{-1/2}) \alpha_{1,2}(s|t|^{-1/2}) y_{2,3}(\varepsilon(t)) \mathfrak{b}_{2,3}(|t|^{1/2})$$

et grâce à la condition (18) (i) est équivalente à

$$U \varrho(\alpha_{1,2}(s|t|^{-1/2}) y_{2,3}(\varepsilon(t))) U = \varrho(\alpha_{1,2}(s\varepsilon(t) |t|^{-1/2}) y_{2,3}(-\varepsilon(t))) \\ \times U \varrho(\mathfrak{b}_{2,3}(|t|^{1/2}) \mathfrak{b}_{2,3}(t)^{-1} \mathfrak{b}_{2,3}(|t|^{1/2})) \varrho(\alpha_{1,2}(s\varepsilon(t) |t|^{1/2}) y_{2,3}(-\varepsilon(t)))$$

que l'on peut écrire grâce à la relation (8)

$$U\varrho(\alpha_{1,2}(s|t|^{-1/2})\mathbf{y}_{2,3}(\varepsilon(t)))U = \varrho(\alpha_{1,2}(s\varepsilon(t)|t|^{-1/2})\mathbf{y}_{2,3}(-\varepsilon(t))) \\ \times U\varrho(\mathfrak{h}_{2,3}(\varepsilon(t))^{-1})\varrho(\alpha_{1,2}(s\varepsilon(t)|t|^{1/2})\mathbf{y}_{2,3}(-\varepsilon(t))).$$

On se ramène donc aux deux conditions

$$U\varrho(\alpha_{1,2}(s)\mathbf{y}_{2,3}(1))U = \varrho(\alpha_{1,2}(s)\mathbf{y}_{2,3}(-1))U\varrho(\alpha_{1,2}(s)\mathbf{y}_{2,3}(-1)) \quad (1)$$

$$U\varrho(\alpha_{1,2}(s)\mathbf{y}_{2,3}(-1))U = \varrho(\alpha_{1,2}(-s)\mathbf{y}_{2,3}(1))U\varrho(\mathfrak{h}_{2,3}(-1)^{-1})\varrho(\alpha_{1,2}(-s)\mathbf{y}_{2,3}(1)).$$

La deuxième de ces relations est équivalente à la première. En effet elle s'écrit

$$U^{-1}\varrho(\alpha_{1,2}(-s)\mathbf{y}_{2,3}(1))U^{-1} = \varrho(\alpha_{1,2}(s)\mathbf{y}_{2,3}(-1))\varrho(\mathfrak{h}_{2,3}(-1))U^{-1}\varrho(\alpha_{1,2}(s)\mathbf{y}_{2,3}(-1))$$

qui est clairement la relation cherchée, modulo (18) (i) et (ii), (8) et le fait que

$$\omega_{2,3}^2 \alpha_{1,2}(-s)\mathbf{y}_{2,3}(1)\omega_{2,3}^2 = \sigma \alpha_{1,2}(s)\mathbf{y}_{2,3}(1), \quad \forall s \in \mathbf{R}.$$

Posons,

$$A = U\varrho(\alpha_{1,2}(s)\mathbf{y}_{2,3}(1))U$$

$$B = \varrho(\alpha_{1,2}(s)\mathbf{y}_{2,3}(1))U\varrho(\alpha_{1,2}(s)\mathbf{y}_{2,3}(-1)).$$

Il nous faut donc voir que, modulo (18) (i), (ii), (iii) et le fait que ϱ représente P , on a $A=B$, ou $A'=B'$ avec

$$A' = U\varrho(\omega_{1,2})A\varrho(\omega_{1,2}^{-1})U^{-1}$$

$$B' = U\varrho(\omega_{1,2})B\varrho(\omega_{1,2}^{-1})U^{-1}.$$

En utilisant (18) (i) et (iii) on peut écrire

$$A' = \varrho(\omega_{1,2})U\varrho(\omega_{1,2})\varrho(\alpha_{1,2}(s)\mathbf{y}_{2,3}(1))\varrho(\omega_{2,3}^2)\varrho(\omega_{1,2}^{-1})U^{-1}\varrho(\omega_{1,2}^{-2}).$$

Mais on a compte-tenu du fait que ϱ est une représentation de P_3 et des relations (18) (i), (ii) et (15)

(¹) Je tiens ici à remercier encore P. Barrat, qui m'a expliqué comment on pouvait déduire cette relation des relations (18) (i) (ii) et (iii), ce qui m'a permis de simplifier considérablement la démonstration du théorème 1.

$$\begin{aligned}
\varrho(\omega_{1,2}) U \varrho(\omega_{1,2}) \varrho(\alpha_{1,2}(s)) \varrho(\omega_{1,2}^{-1}) U^{-1} \varrho(\omega_{1,2}^{-1}) &= \varrho(\omega_{1,2}) U \varrho(y_{1,2}(-s)) U^{-1} \varrho(\omega_{1,2}^{-1}) \\
&= \varrho(\omega_{1,2}) \varrho(y_{1,3}(s)) \varrho(\omega_{1,2}^{-1}) = \varrho(y_{2,3}(-s)) \\
\varrho(\omega_{1,2}) U \varrho(\omega_{1,2}) \varrho(y_{2,3}(1)) \varrho(\omega_{1,2}^{-1}) U^{-1} \varrho(\omega_{1,2}^{-1}) &= \varrho(\omega_{1,2}) U \varrho(y_{1,3}(-1)) U^{-1} \varrho(\omega_{1,2}^{-1}) \\
&= \varrho(\omega_{1,2}) \varrho(y_{1,2}(1)) \varrho(\omega_{1,2}^{-1}) = \varrho(\alpha_{1,2}(-1)) \\
\varrho(\omega_{1,2}) U \varrho(\omega_{1,2}) \varrho(\omega_{2,3}^2) \varrho(\omega_{1,2}^{-1}) U^{-1} \varrho(\omega_{1,2}^{-1}) &= \varrho(\omega_{1,2}) U \varrho(\omega_{1,3}^2) U^{-1} \varrho(\omega_{1,2}^{-1}) = \varrho(\omega_{1,2}^2)
\end{aligned}$$

ce qui permet d'écrire

$$A' = \varrho(y_{2,3}(-s)) \alpha_{1,2}(-1) \omega_{1,2}^2.$$

En utilisant les mêmes relations on voit que

$$\begin{aligned}
B' &= U \varrho(y_{1,2}(-s) y_{1,3}(1)) U^{-1} U \varrho(\omega_{1,2}) U \varrho(\omega_{1,2}^{-1}) U^{-1} U \varrho(y_{1,2}(-s) y_{1,3}(1)) U^{-1} \\
&= \varrho(y_{1,3}(s) y_{1,2}(-1)) U \varrho(\omega_{1,2}) U \varrho(\omega_{1,2}^{-1}) U^{-1} \varrho(y_{1,3}(-s) y_{1,3}(1))
\end{aligned}$$

et en utilisant à nouveau (18) (iii) il vient

$$\begin{aligned}
B' &= \varrho(y_{1,3}(s) y_{1,2}(-1) \omega_{1,2} y_{1,3}(s) y_{1,2}(-1)) \\
&= \varrho(y_{2,3}(-s) y_{1,2}(-1) \omega_{1,2} y_{1,2}(-1))
\end{aligned}$$

et il reste à vérifier que l'on a dans $\tilde{S}\tilde{L}_2(\mathbf{R})$

$$\alpha(-1) \omega^2 = y(-1) \omega y(-1)$$

ce qui est immédiat.

$$(b) \ p = \omega_{1,2} y_{2,3}(t), \quad t \neq 0.$$

En utilisant la relation (17) du lemme 4 on se ramène à vérifier la relation $A=B$ avec

$$\begin{aligned}
A &= U \varrho(\omega_{1,2} y_{2,3}(t)) U \\
B &= \varrho(\alpha_{1,2}(1/t)) U \varrho(\omega_{1,2} \omega_{2,3}^2(-1/t) \omega_{2,3}^2 y_{2,3}(-1/t)).
\end{aligned}$$

Comme $\omega_{1,2} y_{2,3}(t) \omega_{1,2}^{-1} = y_{1,3}(t)$ on trouve que

$$A = \varrho(y_{1,2}(t)) U \varrho(\omega_{1,2}) U$$

mais on a

$$\begin{aligned} \mathfrak{b}_{2,3}(-1/t) &= \mathfrak{b}_{2,3}(1/t) \omega_{2,3}^{-(1+\varepsilon(t))} \\ \mathfrak{b}_{2,3}(1/t) \mathfrak{y}_{2,3}(-1/t) &= \mathfrak{y}_{2,3}(-t) \mathfrak{b}_{2,3}(1/t) \end{aligned}$$

et il vient alors

$$B = \varrho(\alpha_{1,2}(1/t)) U \varrho(\omega_{1,2} \omega_{2,3}^{1-\varepsilon(t)} \mathfrak{y}_{2,3}(-t) \mathfrak{b}_{2,3}(1/t))$$

de plus

$$\omega_{1,2} \omega_{2,3}^{1-\varepsilon(t)} \mathfrak{y}_{2,3}(-t) \mathfrak{b}_{2,3}(1/t) \omega_{1,2}^{-1} \in \mathcal{Q}$$

et son image par l'automorphisme ' est

$$\omega_{1,2}^{1-\varepsilon(t)} \mathfrak{y}_{1,2}(-t) \mathfrak{b}_{1,2}(1/t).$$

La condition $A=B$ s'écrit alors

$$U \varrho(\omega_{1,2}) U = \varrho(\mathfrak{y}_{1,2}(-t) \alpha_{1,2}(1/t) \mathfrak{y}_{1,2}(-t) \mathfrak{b}_{1,2}(1/t) \omega_{1,2}^{1-\varepsilon(t)}) U \varrho(\omega_{1,2})$$

or en utilisant les relations (8) et (10) on voit que

$$\mathfrak{y}(-t) \alpha(1/t) \mathfrak{y}(-t) \mathfrak{b}(1/t) = \omega_-(-t) \mathfrak{b}(1/t) = \omega^{\varepsilon(t)}$$

et on se ramène donc à la condition (18) (iii).

Q.E.D.

II. Préquantification des orbites de dimension minimale, parmi celles non triviales, dans la représentation (co)-adjointe de $\tilde{SL}_3(\mathbf{R})$

1. Description des orbites

Comme nous identifions $sl_3(\mathbf{R})$ à son dual au moyen de la forme bilinéaire invariante non dégénérée

$$(X, Y) \mapsto \text{tr}(XY), \quad \forall X, Y \in sl_3(\mathbf{R})$$

nous ne nous intéressons qu'à la représentation adjointe de $SL_3(\mathbf{R})$.

Les orbites considérées sont de deux types : il y a d'une part une orbite nilpotente et d'autre part une famille d'orbites semi-simples paramétrée par \mathbf{R}^* . Ces orbites sont de dimension 4.

(a) *L'orbite nilpotente.* C'est le fermé \mathcal{O}_0 de $sl_3(\mathbf{R}) - \{0\}$ constitué des matrices de rang 1. Ayant identifié \mathbf{R}^3 avec son dual de la manière habituelle, pour tout couple $(q, p) \in \mathbf{R}^3 \times \mathbf{R}^3$ nous noterons $q \otimes p$ la matrice, dans la base canonique de \mathbf{R}^3 , de l'endomorphisme de \mathbf{R}^3 ($\langle \cdot, \cdot \rangle$ désigne le produit scalaire canonique sur \mathbf{R}^3)

$$x \mapsto \langle x, p \rangle q.$$

Alors \mathcal{O}_0 est exactement l'ensemble des matrices s'écrivant $q \otimes p$ avec $(q, p) \in \Sigma_0$, le sous-ensemble de $\mathbf{R}^3 \times \mathbf{R}^3$ constitué des (q, p) tels que $q \neq 0$, $p \neq 0$ et $\langle q, p \rangle = 0$. On a

$$g(q \otimes p) = \pi(g) q \otimes \pi(g)^{-1} p, \quad \forall g \in \widetilde{SL}_3(\mathbf{R}), \forall q, p \in \mathbf{R}^3 - \{0\},$$

On note m_0 l'application de Σ_0 sur \mathcal{O}_0 définie par $m_0(q, p) = q \otimes p$.

Dans la suite $T_+(\mathbf{P}_2)$ désigne le fibré cotangent à \mathbf{P}_2 , le plan projectif réel, privé de la section nulle. Si $q \in \mathbf{R}^3 - \{0\}$, nous noterons \hat{q} l'image de q par la projection canonique de $\mathbf{R}^3 - \{0\}$ sur \mathbf{P}_2 et, si $x \in \mathbf{R}^3$, $q \in \mathbf{R}^3 - \{0\}$, nous noterons x_q le vecteur tangent au point \hat{q} à \mathbf{P}_2 , image, par la différentielle au point q de la projection canonique de $\mathbf{R}^3 - \{0\}$ sur \mathbf{P}_2 , de x considéré comme vecteur tangent au point q de $\mathbf{R}^3 - \{0\}$.

Alors l'application β de \mathcal{O}_0 à valeurs dans $T_+(\mathbf{P}_2)$ définie par

$$\beta(q \otimes p)(x_q) = \langle x, p \rangle, \quad \forall (q, p) \in \Sigma_0, \forall x \in \mathbf{R}^3.$$

est un isomorphisme de variété.

Le groupe $SL_3(\mathbf{R})$ agit de manière canonique dans $T_+(\mathbf{P}_2)$, son action dans cet espace étant induite par son action dans \mathbf{P}_2 comme groupe de transformations homographiques. L'application β induit, en fait, un isomorphisme de $SL_3(\mathbf{R})$ -espaces homogènes de \mathcal{O}_0 sur $T_+(\mathbf{P}_2)$.

Soit θ_0 la 1-forme canonique sur $T_+(\mathbf{P}_2)$: si x est un vecteur tangent à $T_+(\mathbf{P}_2)$ on a

$$\theta_0(x) = \mathbf{x}(\xi)$$

où \mathbf{x} désigne le pied de x dans $T_+(\mathbf{P}_2)$ et ξ l'image de x par la différentielle au point \mathbf{x} de la projection canonique de $T_+(\mathbf{P}_2)$ sur \mathbf{P}_2 . La 1-forme θ_0 est invariante sous l'action de $SL_3(\mathbf{R})$, et $SL_3(\mathbf{R})$ est un groupe de transformations canoniques pour la structure symplectique induite sur $T_+(\mathbf{P}_2)$ par la deux-forme $\omega_0 = d\theta_0$.

Si $x \in \mathbf{R}^3$ nous noterons x_j , $j=1, 2, 3$ ses coordonnées dans la base canonique (e_1, e_2, e_3) de \mathbf{R}^3 et pour $j=(1, 2, 3)$ nous noterons $\mathcal{O}_{0,j}$ l'ouvert de \mathcal{O}_0 constitué des éléments dont les projections sur \mathbf{P}_2 sont contenues dans l'ouvert affine \mathcal{A}_j dont les éléments sont de la forme \hat{q} avec $q \in \mathbf{R}^3 - \{0\}$ tel que $q_j = 1$. Les coordonnées sur \mathcal{A}_j sont

définies par le difféomorphisme a_j de \mathbf{R}^2 sur \mathcal{A}_j qui au vecteur $(q_k)_{1 \leq k \leq 3, k \neq j}$, de \mathbf{R}^2 fait correspondre le point $a_j(q_k)$ défini par

$$a_j(q_k) = \left(e_j + \sum_{k \neq j} q_k e_k \right).$$

On définit alors un système de coordonnées sur $\mathcal{O}_{0,j}$ en utilisant le difféomorphisme $m_{0,j}$ de $\mathbf{R}^2 \times (\mathbf{R}^2 - \{0\})$ qui à l'élément $((q_k)_{k \neq j}, (p_k)_{k \neq j})$ de $\mathbf{R}^2 \times (\mathbf{R}^2 - \{0\})$ fait correspondre le point $m_{0,j}(q_k, p_k)$ de $\mathcal{O}_{0,j}$ tel que

$$m_{0,j}(q_k, p_k) = \left(\sum_{k \neq j} p_k dq_k \right)_{a_j(q_k)} \quad (20)$$

que l'on peut aussi écrire

$$m_{0,j}(q_k, p_k) = \left(e_j + \sum_{k \neq j} q_k e_k \right) \otimes \left(-\langle p, q \rangle_j e_j + \sum_{k \neq j} p_k e_k \right) \quad (21)$$

avec $\langle p, q \rangle_j = \sum_{k \neq j} p_k q_k$.

Nous noterons (q_k^j, p_k^j) les coordonnées définies sur $\mathcal{O}_{0,j}$ et $\partial/\partial q_k^j, \partial/\partial p_k^j$ les champs de vecteurs qu'elles y déterminent. Dans ce système de coordonnées on a

$$\theta_0|_{\mathcal{O}_{0,j}} = \sum_{k \neq j} p_k^j dq_k^j \quad \text{et} \quad \omega_0|_{\mathcal{O}_{0,j}} = \sum_{k \neq j} dp_k^j \wedge dq_k^j. \quad (22)$$

Pour $j=1, 2, 3$ on note \mathcal{O}_0^j l'ouvert de \mathcal{O}_0 constitué des éléments $q \otimes p$ tels que $q, p \in \mathbf{R}^3 - \{0\}$, $\langle q, p \rangle = 0$, $q \neq e_j$ et $\langle p, e_j \rangle \neq 0$. Alors \mathcal{O}_0^j est contenu dans l'ouvert $\bigcup_{k \neq j} \mathcal{O}_{0,k}$ de \mathcal{O}_0 et les ouverts $\mathcal{O}_{0,k}^j = \mathcal{O}_0^j \cap \mathcal{O}_{0,k}$, $k \neq j$, constituent, avec les applications $m_{0,k}$ un système de cartes sur \mathcal{O}_0^j .

Comme $\pi(P_3)$ est le sous-groupe parabolique maximal de $SL_3(\mathbf{R})$ stabilisant le sous-espace vectoriel $\mathbf{R}e_3$ de \mathbf{R}^3 il est clair que P_3 laisse \mathcal{O}_0^3 stable. Soit $Z_0 = e_1 \otimes e_3$, en fait $Z_0 = X_{1,3}$. Alors $Z_0 \in \mathcal{O}_0^3$, et on note p_0 la projection de $\tilde{SL}_3(\mathbf{R})$ sur \mathcal{O}_0 définie par $p_0(g) = g \cdot Z_0$.

(b) *Les orbites semi-simples.* Ce sont les orbites \mathcal{O}_λ , $\lambda \in \mathbf{R}^*$, où \mathcal{O}_λ est l'orbite de l'élément

$$Z_\lambda = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2\lambda & 0 & 3 \\ 0 & -\lambda & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda \end{pmatrix}.$$

Ces orbites sont des sous-variétés fermées de $sl_3(\mathbf{R})$. On note p_λ la projection de $\tilde{S}\tilde{L}_3(\mathbf{R})$ sur \mathcal{O}_λ telle que $p_\lambda(g) = g \cdot Z_\lambda$.

Pour tout $\lambda \in \mathbf{R}^*$ soit Σ_λ la sous-variété fermée de $\mathbf{R}^3 \times \mathbf{R}^3$ constituée des couples (q, p) avec $\langle p, q \rangle = \lambda$. C'est un espace $\tilde{S}\tilde{L}_3(\mathbf{R})$ -homogène pour l'action définie par

$$g \cdot (q, p) = (\pi(g)q, {}^t\pi(g)^{-1}p), \quad \forall g \in \tilde{S}\tilde{L}_3(\mathbf{R}), \forall (q, p) \in \Sigma_\lambda.$$

Pour tout $(q, p) \in \Sigma_\lambda$ on note $m_\lambda(q, p)$ la matrice, relativement à la base canonique de \mathbf{R}^3 , de l'endomorphisme de \mathbf{R}^3

$$\frac{\lambda}{3} [2U_{(q,p)} - V_{(q,p)}]$$

où $U_{(q,p)}$ (resp. $V_{(q,p)}$) désigne le projecteur de \mathbf{R}^3 parallèlement à $(\mathbf{R}p)^\perp$ (resp. $\mathbf{R}q$) sur $\mathbf{R}q$ (resp. $(\mathbf{R}p)^\perp$). Alors l'application m_λ est une submersion de Σ_λ sur \mathcal{O}_λ qui commute aux différentes actions de $\tilde{S}\tilde{L}_3(\mathbf{R})$. On a $Z_\lambda = m_\lambda(e_1, \lambda e_1 + e_3)$.

Considérons l'action à droite du groupe multiplicatif \mathbf{R}^* dans Σ_λ définie par

$$t \cdot (q, p) = (tq, t^{-1}p), \quad \forall t \in \mathbf{R}^*, \forall (q, p) \in \Sigma_\lambda.$$

Cette action est libre, l'espace quotient de Σ_λ pour cette action est une variété quotient et m_λ induit un isomorphisme de cette variété quotient sur \mathcal{O}_λ . De plus la fibration $m_\lambda: \Sigma_\lambda \rightarrow \mathcal{O}_\lambda$ est localement triviale. Ainsi Σ_λ est un fibré principal au dessus de \mathcal{O}_λ de fibre le groupe multiplicatif \mathbf{R}^* , la fibration étant définie par l'application m_λ . L'action de \mathbf{R}^* et celle de $\tilde{S}\tilde{L}_3(\mathbf{R})$ dans Σ_λ commutent.

On note θ_λ la restriction à Σ_λ de la 1-forme canonique sur $\mathbf{R}^3 \times \mathbf{R}^3$ définie par

$$\theta_{(q,p)}(k, h) = \langle p, k \rangle, \quad \forall (q, p) \in \mathbf{R}^3 \times \mathbf{R}^3, \forall (k, h) \in \mathbf{R}^3 \times \mathbf{R}^3. \quad (23)$$

Alors il existe une unique 2-forme ω_λ sur \mathcal{O}_λ telle que

$$d\theta_\lambda = m_\lambda^*(\omega_\lambda).$$

Cette 2-forme munit \mathcal{O}_λ d'une structure symplectique.

Pour $j=1, 2, 3$ on note $\mathcal{O}_{\lambda,j}$ l'ouvert de \mathcal{O}_λ constitué des points $m_\lambda(q, p)$ avec $(q, p) \in \Sigma_\lambda$ tel que $q_j \neq 0$. L'application $m_{\lambda,j}$ de $\mathbf{R}^2 \times \mathbf{R}^2$ dans $\mathcal{O}_{\lambda,j}$ qui à l'élément $((q)_l, (p)_l)$ de $\mathbf{R}^2 \times \mathbf{R}^2$ fait correspondre le point $m_{\lambda,j}(p_l, q_l)$ de $\mathcal{O}_{\lambda,j}$ défini par

$$m_{\lambda,j}(q_l, p_l) = m_\lambda \left(e_j + \sum_{l \neq j} q_l e_l, (\lambda - \langle p, q \rangle_j) e_j + \sum_{l \neq j} p_l e_l \right)$$

est un difféomorphisme. On note q_i^j, p_i^j les coordonnées ainsi définies sur $\mathcal{O}_{\lambda,j}$ et $\partial/\partial q_i^j, \partial/\partial p_i^j$ les champs de vecteurs qu'elles y déterminent.

L'application $\sigma_{\lambda,j}$ à valeurs dans Σ_λ et définie sur $\mathcal{O}_{\lambda,j}$ par

$$\sigma_{\lambda,j}(m_{\lambda,j}(q_i, p_i)) = \left(e_j + \sum_{l \neq j} q_l e_l, (\lambda - \langle p, q \rangle_j) e_j + \sum_{l \neq j} p_l e_l \right) \quad (24)$$

est une section du fibré principal Σ_λ .

Dans le système de coordonnées (q_i^j, p_i^j) on a

$$\omega_\lambda|_{\mathcal{O}_{\lambda,j}} = \sum_{l \neq j} dp_l^j \wedge dq_l^j. \quad (25)$$

Enfin pour $j=1, 2, 3$ on note \mathcal{O}_λ^j l'ouvert de \mathcal{O}_λ constitué des $m_\lambda(q, p)$ avec $(q, p) \in \Sigma_\lambda$ tel que $q \neq e_j$ et $\langle p, e_j \rangle \neq 0$. Alors \mathcal{O}_λ^j est contenu dans l'ouvert $\bigcup_{k \neq j} \mathcal{O}_{\lambda,k}$ de \mathcal{O}_λ et les ouverts $\mathcal{O}_{\lambda,k}^j = \mathcal{O}_\lambda^j \cap \mathcal{O}_{\lambda,k}$ constituent avec les applications $m_{\lambda,j}$ un atlas sur \mathcal{O}_λ^j . Le parabolique maximal P_3 laisse stable l'ouvert \mathcal{O}_λ^3 , qui contient Z_λ .

2. Préquantification

(a) *Le cas de l'orbite nilpotente.* Le stabilisateur S_0 de Z_0 dans $\widetilde{SL}_3(\mathbf{R})$ est l'image réciproque par π du sous-groupe de $SL_3(\mathbf{R})$ dont les éléments sont

$$\begin{pmatrix} t & u & v \\ 0 & t^{-2} & w \\ 0 & 0 & t \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbf{R}^*, u, v, w \in \mathbf{R}.$$

L'algèbre de Lie \mathfrak{s}_0 de S_0 est l'ensemble des matrices

$$\begin{pmatrix} a & x & y \\ 0 & -2a & z \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}, \quad a, x, y, z \in \mathbf{R}.$$

La composante neutre \hat{S}_0 est isomorphe, via π , au sous-groupe exponentiel de $SL_3(\mathbf{R})$ dont les éléments sont

$$\begin{pmatrix} t & u & v \\ 0 & t^{-2} & w \\ 0 & 0 & t \end{pmatrix}, \quad t > 0, u, v, w \in \mathbf{R}.$$

En fait S_0 est le produit semi-direct du sous-groupe de $\tilde{S}\tilde{L}_3(\mathbf{R})$ engendré par $\omega_{1,3}^2$ et isomorphe à $\mathbf{Z}/4\mathbf{Z}$ et de \hat{S}_0 .

La restriction à \mathfrak{s}_0 de la forme linéaire $X \mapsto \text{tr}(Z_0 X)$ est nulle. Ainsi l'orbite \mathcal{O}_0 est une orbite entière. Il y a quatre caractères de S_0 dont la différentielle est nulle; ce sont $\chi_{1,0}$, $\chi_{-1,0}$, $\bar{\chi}_0$ et $\bar{\bar{\chi}}_0$ et ils sont déterminés par

$$\chi_{1,0}(\omega_{1,3}^2) = 1, \quad \chi_{-1,0}(\omega_{1,3}^2) = -1, \quad \bar{\chi}_0(\omega_{1,3}^2) = -i, \quad \bar{\bar{\chi}}_0(\omega_{1,3}^2) = i. \quad (26)$$

On note \hat{S}_0 leur ensemble. Le caractère $\chi_{1,0}$ est trivial et seuls les caractères $\chi_{\varepsilon,0}$, $\varepsilon = \pm 1$ descendent à $\pi(S_0)$.

A tout élément $\chi \in \hat{S}_0$ on sait associer de manière canonique un fibré en droite hermitien avec connexion, noté L_χ et défini par

$$L_\chi = \tilde{S}\tilde{L}_3(\mathbf{R}) \times_\chi \mathbf{C}.$$

Le fibré principal associé à L_χ est

$$L_\chi^* = \tilde{S}\tilde{L}_3(\mathbf{R}) \times_\chi \mathbf{C}^*.$$

Nous noterons p^χ la projection canonique de $\tilde{S}\tilde{L}_3(\mathbf{R}) \times \mathbf{C}^*$ sur L_χ^* . Si $X \in \mathfrak{sl}_3(\mathbf{R})$ et $a \in \mathbf{C}$ nous noterons (X, a) le champ de vecteurs sur $\tilde{S}\tilde{L}_3(\mathbf{R}) \times \mathbf{C}^*$ défini par

$$(X, a)_{(\mathfrak{g}, z)} = \frac{d}{dt} (\exp(-tX)\mathfrak{g}, e^{-2i\pi t a} z)|_{t=0}, \quad \forall \mathfrak{g} \in \tilde{S}\tilde{L}_3(\mathbf{R}), \forall z \in \mathbf{C}^*.$$

Alors il existe un unique champ de vecteurs noté $p_*^\chi(X, a)$ sur L_χ^* tel que

$$p_*^\chi(X, a)_{p^\chi(\mathfrak{g}, z)} = dp_{(\mathfrak{g}, z)}^\chi((X, a)_{(\mathfrak{g}, z)}), \quad \forall \mathfrak{g} \in \tilde{S}\tilde{L}_3(\mathbf{R}), \forall z \in \mathbf{C}^*.$$

La 1-forme connexion θ_χ sur L_χ^* est définie par

$$\theta_\chi(p_*^\chi(X, a))_{p^\chi(\mathfrak{g}, z)} = -\text{tr}(Z_0 \text{Ad } \mathfrak{g}^{-1} X) - a, \quad \forall X \in \mathfrak{sl}_3(\mathbf{R}), \forall a \in \mathbf{C}, \forall \mathfrak{g} \in \tilde{S}\tilde{L}_3(\mathbf{R}), \forall z \in \mathbf{C}^*. \quad (27)$$

Pour tout ceci voir [1] chap. III.

LEMME 6. Si p_χ désigne la projection canonique de L_χ^* sur \mathcal{O}_0 on a pour tout $X \in \mathfrak{sl}_3(\mathbf{R})$, $\mathfrak{g} \in \tilde{S}\tilde{L}_3(\mathbf{R})$, $z \in \mathbf{C}^*$,

$$\theta_\chi(p_*^\chi(X, 0))_{p^\chi(\mathfrak{g}, z)} = \theta_{0_{p_0(\mathfrak{g})}} \left[dp_{(\mathfrak{g}, z)}^\chi(p_*^\chi(X, 0))_{p^\chi(\mathfrak{g}, z)} \right] = \theta_{0_{p_0(\mathfrak{g})}}(dp_{0(\mathfrak{g})}(X \cdot \mathfrak{g})). \quad (28)$$

Démonstration. Considérons le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} \widetilde{SL}_3(\mathbf{R}) \times \mathbf{C}^* & \xrightarrow{p^x} & L_x^* \\ \downarrow & & \downarrow p_x \\ \widetilde{SL}_3(\mathbf{R}) & \xrightarrow{p_0} & \mathcal{O}_0 \end{array}$$

où la première flèche verticale désigne la première projection. Il est clair que

$$dp_x(p_*^x(X, 0))_{p^x(g, z)} = dp_0(-X \cdot g), \quad \forall X \in sl_3(\mathbf{R}), \forall g \in \widetilde{SL}_3(\mathbf{R}), \forall z \in \mathbf{C}^*.$$

Ainsi l'application de $sl_3(\mathbf{R})$ dans $T_{p_0(g)}(\mathcal{O}_0)$ ⁽¹⁾ définie par

$$X \mapsto dp_x(p_*^x(X, 0))_{p^x(g, z)}$$

est une surjection ne dépendant que de $p_0(g)$. D'autre part la condition $dp_0(X \cdot g) = 0$ est équivalente à $\text{Ad } g^{-1} X \in \mathfrak{s}_0$; comme pour tout $X \in \mathfrak{s}_0$, $\text{tr}(Z_0 X) = 0$ on voit, en utilisant (27) qu'il existe une (unique) 1-forme θ'_0 sur \mathcal{O}_0 telle que

$$\theta_x(p_*^x(X, 0))_{p^x(g, z)} = \theta'_{0, p_0(g)} \left[dp_x(p_*^x(X, 0))_{p^x(g, z)} \right].$$

Cette 1-forme est $\widetilde{SL}_3(\mathbf{R})$ -invariante comme le montre un calcul facile. Comme la 1-forme θ_0 est elle-même $\widetilde{SL}_3(\mathbf{R})$ -invariante pour montrer que $\theta_0 = \theta'_0$ il suffit de montrer qu'elles coïncident en Z_0 .

Soit $X \in sl_3(\mathbf{R})$, $X = (x_{kl})_{1 \leq k, l \leq 3}$, alors

$$\theta_x(p_*^x(X, 0))_{p^x(e, z)} = -x_{31}.$$

D'autre part

$$\begin{aligned} dp_0(-X) &= (\sum x_{1l} e_l) \otimes e_3 + e_1 \otimes (\sum x_{3l} e_l) \\ &= dm_{0,1} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -x_{21} & x_{32} \\ -x_{31} & x_{33} - x_{11} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

et grâce à la formule (22) on trouve

(1) Si V est une variété et $x \in V$, $T_x(V)$ désigne l'espace tangent en x à V .

$$\theta_0(dp_0)(-X) = -x_{31}. \quad \text{Q.E.D.}$$

COROLLAIRE. La forme courbure de L_χ , $\chi \in \hat{S}_0$ n'est autre que ω_0 ; ainsi ω_0 est la deux-forme canonique sur \mathcal{O}_0 , en particulier on a

$$\omega_0(dp_0(X), dp_0(Y)) = \text{tr}(Z_0[X, Y]), \quad \forall X, \forall Y \in sl_3(\mathbf{R}).$$

Nous noterons Γ_χ l'espace des sections de classe C^∞ du fibré L_χ . Si \mathcal{U} est un ouvert de \mathcal{O}_0 nous noterons $\Gamma_\chi|_{\mathcal{U}}$ l'espace des sections de classe C^∞ au dessus de \mathcal{U} . Si $s \in \Gamma_\chi|_{\mathcal{U}}$ il existe une unique fonction f_s de classe C^∞ définie sur $p_0^{-1}(\mathcal{U})$ telle que

$$s(p_0(\mathfrak{g})) = p^x(\mathfrak{g}, f_s(\mathfrak{g})), \quad \forall \mathfrak{g} \in p_0^{-1}(\mathcal{U}) \quad (29)$$

de plus f_s vérifie la condition de covariance

$$f_s(\mathfrak{g}\mathfrak{b}) = \chi(\mathfrak{b}^{-1})f_s(\mathfrak{g}), \quad \forall \mathfrak{g} \in p_0^{-1}(\mathcal{U}), \forall \mathfrak{b} \in S_0. \quad (30)$$

Réciproquement la donnée d'une fonction définie sur $p_0^{-1}(\mathcal{U})$ et vérifiant la condition (30) détermine à l'aide de la formule (29) un élément de $\Gamma_\chi|_{\mathcal{U}}$.

Soit ∇_χ la connexion sur L_χ associée à la 1-forme connexion θ_χ ; c'est une application de l'espace $D(\mathcal{O}_0)$ des champs de vecteurs sur \mathcal{O}_0 à valeurs dans $\text{Hom}_{\mathbf{C}}(\Gamma_\chi)$ telle que

$$\begin{aligned} \nabla_{\chi f\xi} &= f\nabla_{\chi\xi}, \quad \forall \xi \in D(\mathcal{O}_0), \quad \forall f \in C^\infty(\mathcal{O}_0) \\ \nabla_{\chi\xi}(fs) &= f\nabla_{\chi\xi}(s) + \xi \cdot fs, \quad \forall \xi \in D(\mathcal{O}_0), \quad \forall f \in C^\infty(\mathcal{O}_0), \quad \forall s \in \Gamma_\chi \end{aligned}$$

($C^\infty(\mathcal{O}_0)$ désigne l'espace des fonctions de classe C^∞ définies sur \mathcal{O}_0) et elle est uniquement déterminée par la condition

$$\nabla_{\chi\xi}(s)(m) = 2i\pi\theta_\chi(ds_m(\xi_m))s(m), \quad \forall s \in \Gamma_\chi, \quad \forall \xi \in D(\mathcal{O}_0), \quad \forall m \in \mathcal{O}_0 \text{ tel que } s(m) \neq 0. \quad (31)$$

LEMME 7. Soient $\xi \in D(\mathcal{O}_0)$, $m \in \mathcal{O}_0$, $\mathfrak{g} \in \tilde{S}L_3(\mathbf{R})$ et $X \in sl_3(\mathbf{R})$ tels que $p_0(\mathfrak{g})=m$ et $dp_0(-X \cdot \mathfrak{g})=\xi_m$, alors pour toute section s de L_χ définie dans un voisinage de m et vérifiant $s(m) \neq 0$ on a

$$\nabla_{\chi\xi}(s)(m) = 2i\pi \left[\theta_0(\xi)_m + \frac{df_{s_\mathfrak{g}}(-X \cdot \mathfrak{g})}{2i\pi f_s(\mathfrak{g})} \right] s(m). \quad (32)$$

Démonstration. Considérons le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc}
 \rho_0^{-1}(\mathcal{U}) & \xrightarrow{F_s} & \widetilde{SL}_3(\mathbf{R}) \times \mathbf{C} \\
 \downarrow \rho_0 & & \downarrow \rho^\chi \\
 \mathcal{U} & \xrightarrow{s} & L_\chi
 \end{array}$$

où \mathcal{U} est l'ouvert de définition de s et F_s l'application de $\rho_0^{-1}(\mathcal{U})$ dans $\widetilde{SL}_3(\mathbf{R}) \times \mathbf{C}$ définie par

$$F_s(\mathfrak{g}) = (\mathfrak{g}, f_s(\mathfrak{g})), \quad \forall \mathfrak{g} \in \rho_0^{-1}(\mathcal{U}).$$

On a alors les relations

$$ds_m(\xi_m) = ds_m(d\rho_0(-X \cdot \mathfrak{g})) = d\rho_{(\mathfrak{g}, f_s(\mathfrak{g}))}^\chi(dF_{s_s}(-X \cdot \mathfrak{g}))$$

mais

$$dF_{s_s}(-X \cdot \mathfrak{g}) = \left(X, -\frac{df_{s_s}(-X \cdot \mathfrak{g})}{2i\pi f_s(\mathfrak{g})} \right)_{(\mathfrak{g}, f_s(\mathfrak{g}))}$$

et on trouve

$$ds_m(\xi_m) = \rho_{\star}^\chi \left(X, -\frac{df_{s_s}(-X \cdot \mathfrak{g})}{2i\pi f_s(\mathfrak{g})} \right)_{\rho^\chi(\mathfrak{g}, f_s(\mathfrak{g}))}$$

La formule (32) est alors conséquence immédiate de (27), du lemme 6 (28) et de (31). Q.E.D.

(b) *Le cas des orbites semi-simples.* Le stabilisateur S_λ de Z_λ dans $\widetilde{SL}_3(\mathbf{R})$ est l'image réciproque par π du sous-groupe de $SL_3(\mathbf{R})$ dont les éléments sont

$$\begin{pmatrix} t & -\lambda^{-1}c & \lambda^{-1}(t-d) \\ 0 & a & b \\ 0 & c & d \end{pmatrix}, \quad a, b, c, d, t \in \mathbf{R} \text{ tels que } t(ad-bc) = 1.$$

L'algèbre de Lie \mathfrak{s}_λ de S_λ est l'ensemble des matrices

$$\begin{pmatrix} \tau & -\lambda^{-1}\gamma & \lambda^{-1}(\tau-\delta) \\ 0 & \alpha & \beta \\ 0 & \gamma & \delta \end{pmatrix}, \quad \alpha, \beta, \gamma, \delta, \tau \in \mathbf{R} \text{ tels que } \alpha + \delta + \tau = 0.$$

et on a

$$\operatorname{tr}(Z_\lambda X) = \lambda\tau, \quad \forall X \in \mathfrak{s}_\lambda \text{ avec } X = \begin{pmatrix} \tau & -\lambda^{-1}\gamma & \lambda^{-1}(\tau-\delta) \\ 0 & a & \beta \\ 0 & \gamma & \delta \end{pmatrix}.$$

Ainsi le noyau \mathfrak{s}'_λ de la restriction à \mathfrak{s}_λ de la forme linéaire $X \mapsto \operatorname{tr}(XZ_\lambda)$ est une sous-algèbre de Lie de $sl_3(\mathbf{R})$ isomorphe à $sl_2(\mathbf{R})$. Le sous-groupe analytique de $\widetilde{SL}_3(\mathbf{R})$ d'algèbre de Lie \mathfrak{s}'_λ est isomorphe à $\widetilde{SL}_2(\mathbf{R})$ et il contient donc l'élément σ . On voit alors que pour tout élément χ de \hat{S}_λ , l'ensemble des caractères de S_λ dont la différentielle est la restriction à \mathfrak{s}_λ de la forme linéaire $X \mapsto 2i\pi \operatorname{tr}(Z_\lambda X)$, on a $\chi(\sigma)=1$, et tout élément de \hat{S}_λ induit en fait un caractère de $\pi(S_\lambda)$. Ainsi tous les objets que nous allons définir à partir des orbites \mathcal{O}_λ , $\lambda \neq 0$ seront en fait définis pour le groupe $SL_3(\mathbf{R})$.

Les éléments de \hat{S}_λ sont les $\chi_{\varepsilon, \lambda}$, $\varepsilon = \pm 1$ définis par

$$\left. \begin{array}{l} \chi_{1, \lambda}(g) = |t|^{2i\pi\lambda} \\ \chi_{-1, \lambda}(g) = \varepsilon(t) |t|^{2i\pi\lambda} \end{array} \right\} \forall g \in S_\lambda \text{ tel que } \pi(g) = \begin{pmatrix} t & -\lambda^{-1}c & \lambda^{-1}(t-d) \\ 0 & a & b \\ 0 & c & d \end{pmatrix}. \quad (33)$$

Comme dans la partie (a) de ce paragraphe, on définit pour $\chi \in \hat{S}_\lambda$ le fibré $\widetilde{SL}_3(\mathbf{R})$ -homogène L_χ , avec connexion ∇_χ et 1-forme connexion θ_χ etc ...

Soit η le caractère de S_λ à valeurs dans \mathbf{R}^* défini par

$$\eta(g) = t, \quad \forall g \in S_\lambda \text{ tel que } \pi(g) = \begin{pmatrix} t & -\lambda^{-1}c & \lambda^{-1}(t-d) \\ 0 & a & b \\ 0 & c & d \end{pmatrix}.$$

alors si $\chi \in \hat{S}_\lambda$ on note χ' l'unique caractère unitaire de \mathbf{R}^* tel que $\chi = \chi' \circ \eta$, et on considère le fibré au-dessus de \mathcal{O}_λ

$$L'_\chi = \Sigma_\lambda \times_{\chi'} \mathbf{C}.$$

On note p'^x la projection canonique de $\Sigma_\lambda \times \mathbf{C}$ sur L'_χ . Il est facile de vérifier que l'application Φ_χ de L'_χ dans L_χ définie par

$$\Phi_\chi(p'^x(p'_\lambda(g), z)) = p^x(g, z), \quad \forall g \in \widetilde{SL}_3(\mathbf{R}), \forall z \in \mathbf{C},$$

où p'_λ est la projection de $\widetilde{SL}_3(\mathbf{R})$ sur Σ_λ définie par $p'_\lambda(g) = g \cdot (e_1, \lambda e_1 + e_3)$, est un isomorphisme de fibrés $\widetilde{SL}_3(\mathbf{R})$ -homogènes.

LEMME 8. Pour tout $X \in sl_3(\mathbf{R})$, $g \in \widetilde{SL}_3(\mathbf{R})$, $z \in \mathbf{C}^*$ on a

$$\theta_\chi(p'_\lambda(X, 0))_{p^x(g, z)} = \theta_\lambda(p'_\lambda(-X \cdot g)) \quad (34)$$

Démonstration. Considérons le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} \tilde{S}\tilde{L}_3(\mathbf{R}) \times \mathbf{C}^* & \xrightarrow{p^x} & L_\chi^* \\ \downarrow \Phi_\lambda & & \nearrow p'^x \\ \Sigma_\lambda \times \mathbf{C}^* & & \end{array}$$

où Φ_λ est l'application définie par

$$\Phi_\lambda(g, z) = (p'_\lambda(g), z), \quad \forall g \in \tilde{S}\tilde{L}_3(\mathbf{R}), \quad \forall z \in \mathbf{C}^*.$$

Alors on a

$$p_*^x(X, 0)_{p^x(g, z)} = dp'^x_{\Phi_\lambda(g, z)}(d\Phi_{\lambda(g, z)}(X, 0)_{(g, z)})$$

de plus on a, si pr_1 désigne la première projection de $\Sigma_\lambda \times \mathbf{C}^*$ sur Σ_λ

$$dpr_{1\Phi_\lambda(g, z)} d\Phi_{\lambda(g, z)}(X, 0)_{(g, z)} = dp'_\lambda(-X \cdot g).$$

Comme l'application $dp'^x_{\Phi_\lambda(g, z)}$ induit un isomorphisme de l'espace tangent au point $\Phi_\lambda(g, z)$ à $\Sigma_\lambda \times \{z\}$ sur l'espace tangent au point $p'^x \Phi_\lambda(g, z)$ à L_χ^* on voit que le vecteur $p_*^x(X, 0)_{p^x(g, z)}$ est uniquement déterminé par $dp'_\lambda(-X \cdot g)$. De plus l'expression $\theta_\chi(p_*^x(X, 0))_{p^x(g, z)}$ est indépendante de $z \in \mathbf{C}^*$. Il existe donc une 1-forme θ'_λ définie sur Σ_λ telle que

$$\theta_\chi(p_*^x(X, 0))_{p^x(g, z)} = \theta'_\lambda(dp'_\lambda(-X \cdot g)).$$

Cette 1-forme est clairement $\tilde{S}\tilde{L}_3(\mathbf{R})$ -invariante et pour montrer (34) il suffit donc de montrer que θ_λ et θ'_λ coïncident au point $(e_1, \lambda e_1 + e_3) = p'_\lambda(e)$.

Soit $X \in sl_3(\mathbf{R})$ $X = (x_{kl})_{1 \leq k, l \leq 3}$, alors, d'après la formule (27)

$$\theta_\chi(p_*^x(X, 0))_{p^x(e, z)} = -(\lambda x_{11} + x_{31}).$$

D'autre part

$$dp'_\lambda(-X) = (-\sum x_{1l} e_l, \sum (x_{1l} + x_{3l}) e_l)$$

et grâce à la formule (23) et à la définition de θ_λ on a

$$\theta_\lambda(dp'_\lambda(-X)) = (-\lambda x_{11} + x_{31}).$$

Q.E.D.

COROLLAIRE. La forme courbure de L_χ , $\chi \in \hat{S}_\lambda$ n'est autre que ω_λ ; ainsi ω_λ est la forme canonique sur \mathcal{O}_λ et en particulier on a

$$\omega_\lambda(dp_\lambda(X), dp_\lambda(Y)) = \text{tr}(Z_\lambda[X, Y]), \quad \forall X, \forall Y \in sl_3(\mathbf{R}).$$

Soient \mathcal{U} un ouvert de \mathcal{O}_λ et $s \in \Gamma_\chi|_{\mathcal{U}}$ alors on note f'_s la fonction sur $m_\lambda^{-1}(\mathcal{U})$ définie par

$$f'_s(p'_\lambda(g)) = f_s(g), \quad \forall g \in p_\lambda^{-1}(\mathcal{U}). \quad (35)$$

Cette fonction existe parce que le stabilisateur de $(e_1, \lambda e_1 + e_3)$ dans $\widetilde{SL}_3(\mathbf{R})$ est $\text{Ker } \eta$. La fonction f'_s vérifie la condition de covariance

$$f'_s(t \cdot m) = \chi'(t^{-1}) f'_s(m), \quad \forall t \in \mathbf{R}^*, \forall m \in \Sigma_\lambda. \quad (36)$$

Et l'application $s \mapsto f'_s$ définit une bijection de $\Gamma_\chi|_{\mathcal{U}}$ sur l'espace des fonctions de classe C^∞ sur $m_\lambda^{-1}(\mathcal{U})$ vérifiant la relation de covariance (36). Le résultat suivant se démontre de manière analogue au lemme 7.

LEMME 9. Soient $\xi \in D(\mathcal{O}_\lambda)$, $m \in \mathcal{O}_\lambda$, $n \in \Sigma_\lambda$ et $\zeta \in T_n(\Sigma_\lambda)$ tels que $m_\lambda(n) = m$ et $dm_\lambda(\zeta) = \xi_m$ alors pour toute section s de L_χ définie dans un voisinage de m et vérifiant $s(m) \neq 0$ on a

$$\nabla_{\chi\xi}(s)(m) = 2i\pi \left[\theta_{\lambda_n}(\zeta) + \frac{df'_{s_n}(\zeta)}{2i\pi f'_s(n)} \right] s(m). \quad (37)$$

III. Quantification et représentations de P_3

1. Polarisation

Se donner une polarisation \mathcal{P} sur une variété symplectique M c'est se donner en chaque point $m \in M$ un sous-espace lagrangien \mathcal{P}_m du complexifié de l'espace tangent en m à M vérifiant les conditions suivantes : si $D(\mathcal{P})$ désigne le sous-espace des champs de vecteurs ξ sur M tels que $\forall m \in M$, $\xi_m \in \mathcal{P}_m$, on doit avoir

- (i) $\mathcal{P}_m = \{\xi_m, \xi \in D(\mathcal{P})\}$, $\forall m \in M$
- (ii) $[\xi, \eta] \in D(\mathcal{P})$, $\forall \xi, \forall \eta \in D(\mathcal{P})$.

Il est alors aisé de vérifier que les orbites du sous-groupe H_0 de $\widetilde{SL}_3(\mathbf{R})$ dont les éléments sont $y_{1,3}(t)y_{2,3}(s)$ $s, t \in \mathbf{R}$ constituent un feuilletage de \mathcal{O}_λ^3 , $\lambda \in \mathbf{R}$ par des sous-

variétés lagrangiennes simplement connexes. En effet H_0 est un groupe commutatif agissant librement dans \mathcal{O}_λ^3 .

On note \mathcal{P}_λ la polarisation de \mathcal{O}_λ^3 ainsi définie. Il est clair que cette polarisation est invariante par P_3 , i.e. que

$$\mathfrak{g} \cdot \mathcal{P}_{\lambda_m} = \mathcal{P}_{\lambda_{\mathfrak{g}m}}, \quad \forall \mathfrak{g} \in P_3, \forall m \in \mathcal{O}_\lambda^3$$

puisque H_0 est un sous-groupe invariant de P_3 . Un calcul facile montre alors que pour tout $m \in \mathcal{O}_{\lambda,1}^3$ (resp. $\mathcal{O}_{\lambda,2}^3$) une base de \mathcal{P}_{λ_m} est

$$(\partial/\partial q_3^1, \partial/\partial p_2^1)_m \text{ (resp. } (\partial/\partial q_3^2, \partial/\partial p_1^2)_m).$$

On note X_λ^3 la sous-variété fermée de \mathcal{O}_λ^3 constituée des points $m_\lambda(q, p)$ avec $(q, p) \in \Sigma_\lambda$ tel que $\langle p - \lambda(q/\langle q, q \rangle), e_l \rangle = 0$, $l=1, 2$. Chaque feuille intégrale de la polarisation rencontre X_λ en un point et un seul; pour tout $m \in \mathcal{O}_\lambda^3$ il existe un unique élément $\pi_\lambda^3(m)$ de X_λ^3 qui soit dans l'orbite de m sous H_0 . Si $m = m_\lambda(q, p)$ avec $(q, p) \in \Sigma_\lambda$ alors

$$\pi_\lambda^3(m) = \mathfrak{y}_{1,3}(s_{(q,p)}) \mathfrak{y}_{2,3}(t_{(q,p)}) m$$

avec

$$s_{(q,p)} = p_3^{-1} \left(p_1 - \lambda \frac{q_1}{q_1^2 + q_2^2} \right), \quad t_{(q,p)} = p_3^{-1} \left(p_2 - \lambda \frac{q_2}{q_1^2 + q_2^2} \right).$$

On pose $X_{\lambda,j}^3 = X_\lambda^3 \cap \mathcal{O}_{\lambda,j}^3$, $j=1, 2$; les $X_{\lambda,j}^3$ sont des ouverts de cartes de X_λ^3 , les coordonnées étant définies par

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{R} \times \mathbf{R}^* & \xrightarrow{x_{\lambda,j}^3} & X_{\lambda,j}^3 \\ (q, p) & \longmapsto & m_{\lambda,j} \left(q, 0, \lambda \frac{q}{1+q^2}, p \right) \end{array}$$

et on a $x_{\lambda,1}^3(q_2, p_3) = x_{\lambda,2}^3(q_1, p_3')$ si et seulement si $q_1 = 1/q_2$ et $p_3' = q_2 p_3$. Il est alors facile de voir que l'application π_λ^3 qui est une submersion induit un isomorphisme de variétés entre $\mathcal{O}_\lambda^3/\mathcal{P}_\lambda$ et X_λ^3 .

2. Espace de représentation

Nous noterons pour $\chi \in \hat{S}_\lambda$, $\lambda \in \mathbf{R}$, $\Gamma_\chi^{\mathcal{P}_\lambda}$ le sous-espace de $\Gamma_\chi|_{\mathcal{O}_\lambda^3}$ dont les éléments sont les sections s vérifiant

$$\nabla_{X\xi} s = 0, \quad \forall \xi \in D(\mathcal{P}_\lambda). \quad (38)$$

Soit $B^{\mathcal{P}_\lambda}$ le fibré principal de fibre $GL_2(\mathbb{C})$, fibré des bases de la polarisation \mathcal{P}_λ et soit $L_{\lambda, 1/2}$ le fibré en droite

$$L_{\lambda, 1/2} = B^{\mathcal{P}_\lambda} \times_{|\det|^{1/2}} \mathbb{C}$$

où $|\det|^{1/2}$ désigne le caractère de $GL_2(\mathbb{C})$, $g \mapsto |\det g|^{1/2}$. On note $\Gamma_{\lambda, 1/2}$ l'espace des sections de ce fibré, que l'on appelle aussi $1/2$ - \mathcal{P}_λ -densités. Se donner une $1/2$ - \mathcal{P}_λ -densité c'est se donner une application ν définie sur $B^{\mathcal{P}_\lambda}$ à valeurs dans \mathbb{C} et vérifiant la relation de covariance

$$\nu(bg) = |\det g|^{-1/2} \nu(b), \quad \forall b \in B^{\mathcal{P}_\lambda}, \forall g \in GL_2(\mathbb{C}).$$

On dit que la $1/2$ - \mathcal{P}_λ -densité ν est \mathcal{P}_λ -covariante si pour tout ouvert \mathcal{U} de \mathcal{O}_λ^3 et toute section b de $B^{\mathcal{P}_\lambda}$ définie sur \mathcal{U} et constituée de champs de vecteurs localement hamiltoniens sur \mathcal{U} la fonction $\nu \circ b$ est constante le long des feuilles intégrales de \mathcal{P}_λ . On note $\Gamma_{1/2}^{\mathcal{P}_\lambda}$ le sous-espace de $\Gamma_{\lambda, 1/2}$ constitué des sections \mathcal{P}_λ -covariantes.

Tout élément $\nu \in \Gamma_{1/2}^{\mathcal{P}_\lambda}|_{\mathcal{O}_{\lambda,j}^3}$, $j=1, 2$ s'écrit sous la forme

$$\nu = f \nu_j^{\mathcal{P}_\lambda}$$

avec f une fonction sur $\mathcal{O}_{\lambda,j}^3$ constante le long des feuilles intégrales de \mathcal{P}_λ et $\nu_j^{\mathcal{P}_\lambda}$ la $1/2$ - \mathcal{P}_λ -densité définie sur $\mathcal{O}_{\lambda,j}^3$ par

$$\nu_j^{\mathcal{P}_\lambda} \left(\frac{\partial}{\partial q_j^3}, \frac{\partial}{\partial p_k^j} \right) = 1, \quad k \neq j \text{ et } k \neq 3.$$

Nous noterons $\Gamma_{\lambda, 1/2}^{\mathcal{P}_\lambda}$ l'espace des sections du fibré $L_\lambda \otimes L_{\lambda, 1/2}$ qui s'écrivent sous la forme $s\nu$ avec $s \in \Gamma_\lambda^{\mathcal{P}_\lambda}$ et $\nu \in \Gamma_{1/2}^{\mathcal{P}_\lambda}$.

Soient B_λ^{3*} le $GL_2(\mathbb{C})$ -fibré principal des bases du fibré cotangent de la variété X_λ^3 , et Γ_λ^3 l'espace des sections du fibré

$$B_\lambda^{3*} \times_{|\det|} \mathbb{C}.$$

Un élément de Γ_λ^3 est ce que l'on appelle une densité sur X_λ^3 , et se donner une densité sur X_λ^3 c'est se donner une fonction ν définie sur B_λ^{3*} et vérifiant

$$\nu(bg) = |\det g|^{-1} \nu(b), \quad \forall b \in B_\lambda^{3*}, \forall g \in GL_2(\mathbb{C}).$$

Soient $\psi_i, i=1, 2$ deux éléments de $\Gamma'_{\chi, 1/2}{}^{\mathcal{P}_\lambda}$ tels que $\psi_i = s_i \nu_i$ avec $s_i \in \Gamma'_\chi{}^{\mathcal{P}_\lambda}$ et $\nu_i \in \Gamma'_{1/2}{}^{\mathcal{P}_\lambda}, i=1, 2$. Considérons alors $b \in B_\lambda^{3*}, m \in \mathcal{O}_\lambda^3$ tel que $\pi_\lambda^3(m)$ soit le pied de b, ξ_1, ξ_2 deux vecteurs de $T_m(\mathcal{O}_\lambda^3)$ tels que $(d\pi_\lambda^3(\xi_1), d\pi_\lambda^3(\xi_2))$ soit la base duale de b et qu'il existe deux vecteurs ζ_1, ζ_2 de $P_{\lambda, m}$ tels que $(\xi_1, \xi_2, \zeta_1, \zeta_2)$ soit une base symplectique de $T_m(\mathcal{O}_\lambda^3)$, alors le nombre

$$(s_1(m), s_2(m))_\chi \nu_1(\zeta_1, \zeta_2) \overline{\nu_2(\zeta_1, \zeta_2)}$$

$((,)_\chi)$ désigne la structure hermitienne du fibré L_χ ne dépend que de b et si on le note $((\psi_1, \psi_2)) (b)$ alors $((\psi_1, \psi_2))$ est une densité sur X_λ^3 , et l'application à valeurs dans Γ_λ^3 et définie sur $\Gamma'_{\chi, 1/2}{}^{\mathcal{P}_\lambda} \times \Gamma'_{\chi, 1/2}{}^{\mathcal{P}_\lambda}$ par $(\psi_1, \psi_2) \mapsto ((\psi_1, \psi_2))$ est sesquilinéaire et elle vérifie que pour tout $\psi \in \Gamma'_{\chi, 1/2}{}^{\mathcal{P}_\lambda}, ((\psi, \psi)) \geq 0$.

On note $\Gamma_{\chi, 1/2}{}^{\mathcal{P}_\lambda}$ le sous-espace de $\Gamma'_{\chi, 1/2}{}^{\mathcal{P}_\lambda}$ constitué des sections ψ telles que

$$\int_{X_\lambda^3} ((\psi, \psi)) < +\infty.$$

Alors $\Gamma_{\chi, 1/2}{}^{\mathcal{P}_\lambda}$ est un espace préhilbertien pour le produit scalaire

$$\langle \psi_1, \psi_2 \rangle = \int_{X_\lambda^3} ((\psi_1, \psi_2)).$$

Nous noterons $\mathcal{H}_{\chi, 1/2}{}^{\mathcal{P}_\lambda}$ le complété de $\Gamma_{\chi, 1/2}{}^{\mathcal{P}_\lambda}$ pour ce produit scalaire. Pour tout ce qui précède voir [7] pp. 230–240 et aussi [16].

Comme P_3 laisse invariante toutes les constructions que nous avons faites il est clair que son action dans l'espace $\Gamma_\chi|_{\mathcal{O}_\lambda^3} \otimes \Gamma_{\lambda, 1/2}$ laisse invariant le sous-espace $\Gamma_{\chi, 1/2}{}^{\mathcal{P}_\lambda}$ et que la représentation de P_3 ainsi définie est continue et unitaire.

3. Formules pour les représentations de P_3

(a) Le cas $\lambda=0$. Soit \mathcal{V}^3 le sous-ensemble de $\widetilde{SL}_3(\mathbf{R})$ dont les éléments sont

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ x & t & 0 \\ y & z & t^{-1} \end{pmatrix} \omega_{2,3}^k, \quad x, y, z \in \mathbf{R}, t > 0, k \in \{0, 2\}$$

(on a identifié les éléments de $\exp(b)$ avec ceux de $\pi(\exp(b))$). Alors l'application σ^3 à valeurs dans \mathcal{V}^3 et définie sur $\mathcal{O}_{0,1}^3$ par

$$\sigma^3\left(m_{0,1}\begin{pmatrix} q_2 & p_2 \\ p_3 & p_3 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ q_2 & |p_3| & 0 \\ q_3 & -\varepsilon(p_3)p_2 & |p_3|^{-1} \end{pmatrix} \omega_{2,3}^{1-\varepsilon(p_3)}$$

est une section au-dessus de $\mathcal{O}_{0,1}^3$ de la projection p_0 , et c'est un difféomorphisme de $\mathcal{O}_{0,1}^3$ sur \mathcal{V}^3 .

Soient $\chi \in \hat{\mathcal{S}}_0$ et \mathcal{U} un ouvert de \mathcal{O}_0 ; si $s \in \Gamma_\chi|_{\mathcal{U}}$ on note $[s]^3$ la fonction définie sur le sous-ensemble de $\mathbf{R}^2 \times \mathbf{R}^2$, $m_{0,1}^{-1}(\mathcal{O}_{0,1}^3 \cap \mathcal{U})$, par

$$[s]^3(q_2, q_3, p_2, p_3) = f_s\left(\sigma^3 m_{0,1}\begin{pmatrix} q_2 & p_2 \\ q_3 & p_3 \end{pmatrix}\right). \quad (39)$$

Grâce au lemme 7 on voit que $s \in \Gamma_\chi^{\mathcal{P}_0}$ si et seulement si

$$[s]^3(q_2, q_3, p_2, p_3) = e^{-2i\pi q_3 p_3} [s]^3(q_2, 0, 0, p_3), \quad \forall \begin{pmatrix} q_2 & p_2 \\ q_3 & p_3 \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^2 \times \mathbf{R}^2 \text{ avec } p_3 \neq 0. \quad (40)$$

Si ψ est un élément de $\Gamma_{\chi, 1/2}^{\mathcal{P}_0}$ alors il existe une unique section $s_\psi^{\mathcal{P}_0} \in \Gamma_\chi^{\mathcal{P}_0}|_{\mathcal{O}_{0,1}^3}$ telle que

$$\psi|_{\mathcal{O}_{0,1}^3} = s_\psi^{\mathcal{P}_0} \nu_1^{\mathcal{P}_0}$$

On définit alors la fonction $\mathcal{F}_{\mathcal{P}_0}^\chi(\psi): \mathbf{R} \times \mathbf{R}^* \rightarrow \mathbf{C}$ en posant

$$\mathcal{F}_{\mathcal{P}_0}^\chi(\psi)(q, p) = [s_\psi^{\mathcal{P}_0}]^3(q, 0, 0, p) \quad (41)$$

alors il est facile de voir que pour tout $\psi_1, \psi_2 \in \Gamma_{\chi, 1/2}^{\mathcal{P}_0}$

$$((\psi_1, \psi_2))((dq, dp)_{x_0, 1(q,p)}) = \mathcal{F}_{\mathcal{P}_0}^\chi(\psi_1)(q, p) \overline{\mathcal{F}_{\mathcal{P}_0}^\chi(\psi_2)(q, p)}$$

et comme le complémentaire de $X_0 \cap \mathcal{O}_{0,1}^3$ est une sous-variété de codimension 1 de X_0 on a pour tout $\psi_1, \psi_2 \in \Gamma_{\chi, 1/2}^{\mathcal{P}_0}$

$$\langle \psi_1, \psi_2 \rangle = \int_{X_0 \cap \mathcal{O}_{0,1}^3} ((\psi_1, \psi_2)) = \int_{\mathbf{R} \times \mathbf{R}} \mathcal{F}_{\mathcal{P}_0}^\chi(\psi_1)(q, p) \overline{\mathcal{F}_{\mathcal{P}_0}^\chi(\psi_2)(q, p)} dq dp.$$

Ceci montre que l'application $\mathcal{F}_{\mathcal{P}_0}^\chi$ induit une isométrie de $\mathcal{H}_{\chi, 1/2}^{\mathcal{P}_0}$ dans l'espace $L^2(\mathbf{R}^2)$ des fonctions de carré sommable sur \mathbf{R}^2 pour la mesure de Lebesgue. Or il est clair que le sous-espace de $L^2(\mathbf{R}^2)$ image de cette application contient le sous-espace $\mathcal{D}(\mathbf{R} \times \mathbf{R}^*)$ des fonctions de classe C^∞ et à support compact; ainsi l'application $\mathcal{F}_{\mathcal{P}_0}^\chi$ est un isomorphisme d'espace de Hilbert entre $\mathcal{H}_{\chi, 1/2}^{\mathcal{P}_0}$ et $L^2(\mathbf{R}^2)$.

Pour tout $\chi \in \hat{S}_0$ nous noterons ϱ_χ la représentation de P_3 dans l'espace $\mathcal{H}_{\chi, 1/2}^0 \cong L^2(\mathbf{R}^2)$. La proposition suivante en donne l'expression pour les éléments d'un système de générateurs de P_3 .

PROPOSITION 1. On a pour tout $f \in L^2(\mathbf{R}^2)$ et pour presque tout $(x, y) \in \mathbf{R}^2$,

- (a) $\varrho_\chi(y_{1,2}(s)y_{1,3}(t))f(x, y) = e^{2inty}f(x-s, y), \quad \forall s, t \in \mathbf{R}$
- (b) $\varrho_\chi(b_{1,2}(t))f(x, y) = t^{1/2}f(t^2x, t^{-1}y), \quad \forall t > 0$
- (c) $\varrho_\chi(b_{2,3}(t))f(x, y) = t^{-1}f(t^{-1}x, t^{-1}y), \quad \forall t > 0$
- (d) $\varrho_\chi(\omega_{1,2}^2)f(x, y) = \chi(\omega_{1,3}^2)f(x, -y)$
- (e) $\varrho_\chi(\omega_{2,3}^2)f(x, y) = \chi(\sigma^{(1+\varepsilon(y))/2})f(-x, -y)$
- (f) $\varrho_\chi(y_{2,3}(t))f(x, y) = e^{2intxy}f(x, y), \quad \forall t \in \mathbf{R}$
- (g) $\varrho_\chi(\alpha_{1,2}(t))f(x, y) = \chi(\omega_{1,3}^{\varepsilon(1-tx)-1} \sigma^{(1+\varepsilon(t))(1-\varepsilon(1-tx))/4}) |1-tx|^{-1/2} \cdot f(x/(1-tx), y(1-tx)),$
 $\forall t \in \mathbf{R}$
- (h) $\varrho_\chi(\omega_{1,2})f(x, y) = \chi(\omega_{1,3}^{1+\varepsilon(x)}) |x|^{-1/2} f(-1/x, -xy).$

Démonstration. La proposition résulte immédiatement des relations suivantes :

- (a) $y_{1,2}(-s)y_{2,3}(-t) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ x & |y| & 0 \\ 0 & 0 & |y|^{-1} \end{pmatrix} \omega_{2,3}^{1-\varepsilon(y)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ x-s & |y| & 0 \\ -t & 0 & |y|^{-1} \end{pmatrix} \omega_{2,3}^{1-\varepsilon(y)}$
 $y_{1,2}(-s)y_{2,3}(-t) \left(\frac{\partial}{\partial q_3^1}, \frac{\partial}{\partial p_2^1} \right)_{(m)} = \left(\frac{\partial}{\partial q_3^1}, \frac{\partial}{\partial p_2^1} \right)_{(y_{1,2}(-s)y_{2,3}(-t) \cdot m)}$
- (b) $b_{1,2}(t^{-1}) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ x & |y| & 0 \\ 0 & 0 & |y|^{-1} \end{pmatrix} \omega_{2,3}^{1-\varepsilon(y)} \in \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ t^2x & t^{-1}|y| & 0 \\ 0 & 0 & t|y|^{-1} \end{pmatrix} \omega_{2,3}^{1-\varepsilon(t^{-1}y)} \hat{S}_0$
 $b_{1,2}(t^{-1}) \left(\frac{\partial}{\partial q_3^1}, \frac{\partial}{\partial p_2^1} \right)_{(m)} = \left(\frac{\partial}{\partial q_3^1}, \frac{\partial}{\partial p_2^1} \right)_{(b_{1,2}(t^{-1}) \cdot m)} \begin{pmatrix} t & 0 \\ 0 & t^{-2} \end{pmatrix}.$
- (c) $b_{2,3}(t^{-1}) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ x & |y| & 0 \\ 0 & 0 & |y|^{-1} \end{pmatrix} \omega_{2,3}^{1-\varepsilon(y)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ t^{-1}x & t^{-1}|y| & 0 \\ 0 & 0 & t|y|^{-1} \end{pmatrix} \omega_{2,3}^{1-\varepsilon(t^{-1}y)}$
 $b_{2,3}(t^{-1}) \left(\frac{\partial}{\partial q_3^1}, \frac{\partial}{\partial p_2^1} \right)_{(m)} = \left(\frac{\partial}{\partial q_3^1}, \frac{\partial}{\partial p_2^1} \right)_{(b_{2,3}(t^{-1}) \cdot m)} \begin{pmatrix} t & 0 \\ 0 & t \end{pmatrix}.$

$$\begin{aligned}
\text{(d)} \quad & \omega_{1,2}^{-2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ x & |y| & 0 \\ 0 & 0 & |y|^{-1} \end{pmatrix} \omega_{2,3}^{1-\varepsilon(y)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ x & |y| & 0 \\ 0 & 0 & |y|^{-1} \end{pmatrix} \omega_{2,3}^{1+\varepsilon(y)} \omega_{1,3}^{-2} \\
& \omega_{1,2}^{-2} \left(\frac{\partial}{\partial q_3^1}, \frac{\partial}{\partial p_2^1} \right)_{(m)} = \left(\frac{\partial}{\partial q_3^1}, \frac{\partial}{\partial p_2^1} \right)_{(\omega_{1,2}^{-2} \cdot m)}. \\
\text{(e)} \quad & \omega_{2,3}^{-2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ x & |y| & 0 \\ 0 & 0 & |y|^{-1} \end{pmatrix} \omega_{2,3}^{1-\varepsilon(y)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -x & |y| & 0 \\ 0 & 0 & |y|^{-1} \end{pmatrix} \omega_{2,3}^{1+\varepsilon(y)} \sigma^{(1+\varepsilon(y))/2} \\
& \omega_{2,3}^{-2} \left(\frac{\partial}{\partial q_3^1}, \frac{\partial}{\partial p_2^1} \right)_{(m)} = \left(\frac{\partial}{\partial q_3^1}, \frac{\partial}{\partial p_2^1} \right)_{(\omega_{2,3}^{-2} \cdot m)}. \\
\text{(f)} \quad & y_{2,3}(-t) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ x & |y| & 0 \\ 0 & 0 & |y|^{-1} \end{pmatrix} \omega_{2,3}^{1-\varepsilon(y)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ x & |y| & 0 \\ -tx & -t|y| & |y|^{-1} \end{pmatrix} \omega_{2,3}^{1-\varepsilon(y)} \\
& y_{2,3}(-t) \left(\frac{\partial}{\partial q_3^1}, \frac{\partial}{\partial p_2^1} \right)_{(m)} = \left(\frac{\partial}{\partial q_3^1}, \frac{\partial}{\partial p_2^1} \right)_{(y_{2,3}(-t) \cdot m)}. \\
\text{(g)} \quad & \alpha_{1,2}(-t) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ x & |y| & 0 \\ 0 & 0 & |y|^{-1} \end{pmatrix} \omega_{2,3}^{1-\varepsilon(y)} = \alpha_{1,2}(-t) y_{1,2}(x) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & |y| & 0 \\ 0 & 0 & |y|^{-1} \end{pmatrix} \omega_{2,3}^{1-\varepsilon(y)}.
\end{aligned}$$

Nous devons donc décomposer dans $\tilde{SL}_2(\mathbf{R})$, $\alpha_{1,2}(-t)y_{1,2}(x)$. Le calcul dans $SL_2(\mathbf{R})$ montre que

$$\begin{aligned}
\alpha(-t)y(x) &= \left(\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ x & 1-tx \end{pmatrix}, \left(1+z \frac{x}{1-tx} \right)^{1/2} \right), \left(\begin{pmatrix} 1-tx & 0 \\ 0 & (1-tx)^{-1} \end{pmatrix}, u|1-tx|^{-1/2} \right) \right. \\
& \quad \left. \times \left(\begin{pmatrix} 1 & -t/(1-tx) \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, 1 \right) \right)
\end{aligned}$$

où u est tel que $u^2 = \varepsilon(1-tx)$.

Le second membre de cette égalité s'écrit

$$\left(\begin{pmatrix} 1-tx & -t \\ x & 1 \end{pmatrix}, \Phi \right)$$

avec $\Phi(z) = u[\varepsilon(1-tx)(1+zx)]^{1/2}$, $\forall z \in \mathbf{P}$.

D'autre part on a

$$\alpha(-t)y(x) = \left(\begin{pmatrix} 1-tx & -t \\ x & 1 \end{pmatrix}, (1+zx)^{1/2} \right).$$

Si $1-tx > 0$ alors $u=1$. Si $1-tx < 0$ alors $tx > 0$ et si $t > 0$, comme $0 < \text{Arg} z < \pi$ et $0 < \text{Arg}(1+zx) < \pi$ on a $\text{Arg}((1+zx)\varepsilon(1-tx)) = -\pi + \text{Arg}(1+zx)$ et on trouve $u=i$; si $t < 0$ de la même façon on voit que $u=-i$.

On peut donc écrire

$$u = i^{\varepsilon(t)(1-\varepsilon(1-tx))/2}$$

et d'après le lemme 1 (6) et la formule (8) on a

$$\left(\begin{pmatrix} 1-tx & 0 \\ 0 & (1-tx)^{-1} \end{pmatrix}, u|1-tx|^{-1/2} \right) = \mathfrak{h}(|1-tx|) \omega^{-\varepsilon(t)(1-\varepsilon(1-tx))}.$$

Il vient alors

$$\alpha(-t) y(x) = y \left(\frac{x}{1-tx} \right) \mathfrak{h}(|1-tx|) \omega^{\varepsilon(1-tx)-1} \sigma^{[1-\varepsilon(t)][1-\varepsilon(1-tx)]/4} \alpha \left(-\frac{t}{1-tx} \right)$$

d'où l'on tire

$$\begin{aligned} & \alpha_{1,2}(-t) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ x & |y| & 0 \\ 0 & 0 & |y|^{-1} \end{pmatrix} \omega_{2,3}^{1-\varepsilon(y)} \\ &= y_{1,2} \left(\frac{x}{1-tx} \right) \mathfrak{h}_{1,2}(|1-tx|) \omega_{1,2}^{\varepsilon(1-tx)-1} \sigma^{[1-\varepsilon(t)][1-\varepsilon(1-tx)]/4} \alpha_{1,2} \left(-\frac{t}{1-tx} \right) \mathfrak{h}_{2,3}(|y|) \omega_{2,3}^{1-\varepsilon(y)} \end{aligned}$$

comme $\mathfrak{h}_{1,2}(t) \mathfrak{h}_{2,3}(t^{-1}) \in \mathring{S}_0 \forall t > 0$, il vient

$$\begin{aligned} & \alpha_{1,2}(-t) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ x & |y| & 0 \\ 0 & 0 & |y|^{-1} \end{pmatrix} \omega_{2,3}^{1-\varepsilon(y)} \\ & \in \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ x/(1-tx) & |y(1-tx)| & 0 \\ 0 & 0 & |y(1-tx)|^{-1} \end{pmatrix} \omega_{1,2}^{\varepsilon(1-tx)-1} \omega_{2,3}^{1-\varepsilon(y)} \sigma^{[1-\varepsilon(t)][1-\varepsilon(1-tx)]/4} \mathring{S}_0. \end{aligned}$$

Mais dans SU_2 on a

$$\begin{aligned} \omega_{1,2}^{\varepsilon(1-tx)-1} \omega_{2,3}^{1-\varepsilon(y)} \omega_{1,2}^{1-\varepsilon(1-tx)} &= \omega_{2,3}^{(1-\varepsilon(y))\varepsilon(1-tx)} \\ \omega_{1,2}^{\varepsilon(1-tx)-1} &= \omega_{2,3}^{1-\varepsilon(1-tx)} \omega_{1,3}^{\varepsilon(1-tx)-1} \end{aligned}$$

d'où l'on tire

$$\alpha_{1,2}(-t) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ x & |y| & 0 \\ 0 & 0 & |y|^{-1} \end{pmatrix} \omega_{2,3}^{1-\varepsilon(y)}$$

$$\in \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ x/(1-tx) & |y(1-tx)| & 0 \\ 0 & 0 & |y(1-tx)|^{-1} \end{pmatrix} \omega_{2,3}^{(1-\varepsilon(y)(1-tx))} \omega_{1,3}^{1-\varepsilon(1-tx)} \sigma^{[1+\varepsilon(t)][1-\varepsilon(1-tx)]/4} \mathcal{S}_0.$$

Enfin, pour

$$m = p_0 \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ x & |y| & 0 \\ 0 & 0 & |y|^{-1} \end{pmatrix} \omega_{2,3}^{1-\varepsilon(y)} \right),$$

on a

$$\alpha_{1,2}(-t) \left(\frac{\partial}{\partial q_3^1}, \frac{\partial}{\partial p_2^1} \right)_{(m)} = \left(\frac{\partial}{\partial q_3^1}, \frac{\partial}{\partial p_2^1} \right)_{(\alpha_{1,2}(-t) \cdot m)} \begin{pmatrix} (1-tx)^{-1} & 0 \\ -ty(1-tx) & (1-tx)^2 \end{pmatrix}.$$

$$(h) \quad \omega_{1,2}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ x & |y| & 0 \\ 0 & 0 & |y|^{-1} \end{pmatrix} \omega_{2,3}^{1-\varepsilon(y)} = \omega_{1,2}^{-1} \mathcal{Y}_{1,2}(x) \mathcal{B}_{2,3}(|y|) \omega_{2,3}^{1-\varepsilon(y)}.$$

Mais dans $\widetilde{S\mathcal{L}}_2(\mathbf{R})$ on a

$$\omega^{-1} \mathcal{Y}(x) = \left(\begin{pmatrix} -x & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \Phi \right) \quad \text{avec} \quad \Phi(z) = \left(\frac{z}{xz+1} \right)^{1/2} (xz+1)^{1/2}$$

pour calculer Φ remarquons que $\forall t > 0$

$$\Phi(i) = t^{-1/2} \Phi(ti) = \left(\frac{i}{txi+1} \right)^{1/2} (txi+1)^{1/2}$$

d'où l'on tire

$$\Phi(i) = \lim_{t \rightarrow 0} \left(\frac{i}{txi+1} \right)^{1/2} (txi+1)^{1/2} = e^{i\pi/4}$$

et donc $\Phi(z) = (z)^{1/2}$, $\forall z \in \mathbf{P}$.

D'autre part on peut écrire

$$\left(\begin{pmatrix} -x & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, (z)^{1/2} \right) = \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -x^{-1} & 1 \end{pmatrix}, (-zx^{-1}+1)^{1/2} \right) \left(\begin{pmatrix} |x| & 0 \\ 0 & |x|^{-1} \end{pmatrix}, |x|^{-1/2} \right)$$

$$\times \left(\begin{pmatrix} -\varepsilon(x) & 0 \\ 0 & -\varepsilon(x) \end{pmatrix}, u \right) \left(\begin{pmatrix} 1 & x^{-1} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, 1 \right)$$

avec $u^2 = -\varepsilon(x)$, et le second membre de cette égalité s'écrit

$$\left(\begin{pmatrix} -x & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \Psi \right) \text{ avec } \Psi(z) = u(-\varepsilon(x)z)^{1/2}.$$

On a donc $u=i$ si $x>0$, $u=1$ si $x<0$; d'où l'on tire (lemme 1 (6) et formule (8))

$$\omega^{-1}y(x) = y(-1/x) \beta(|x|) \omega^{-(1+\varepsilon(x))} \alpha(1/x) \quad (43)$$

et alors, grâce aux mêmes calculs que précédemment il vient

$$\omega_{1,2}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ x & |y| & 0 \\ 0 & 0 & |y|^{-1} \end{pmatrix} \omega_{2,3}^{1-\varepsilon(y)} \in \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1/x & |xy| & 0 \\ 0 & 0 & |xy|^{-1} \end{pmatrix} \omega_{2,3}^{1+\varepsilon(yx)} \omega_{1,3}^{-(1+\varepsilon(x))} \mathcal{S}_0.$$

Enfin, pour

$$m = p_0 \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ x & |y| & 0 \\ 0 & 0 & |y|^{-1} \end{pmatrix} \omega_{2,3}^{1-\varepsilon(y)} \right)$$

on a

$$\omega_{1,2}^{-1} \left(\frac{\partial}{\partial q_3^1}, \frac{\partial}{\partial p_2^1} \right)_{(m)} = \left(\frac{\partial}{\partial q_3^1}, \frac{\partial}{\partial p_2^1} \right)_{(\omega_{1,2}^{-1} \cdot m)} \begin{pmatrix} -1/x & 0 \\ xy & x^2 \end{pmatrix}. \quad \text{Q.E.D.}$$

(b) *Le cas $\lambda \neq 0$.* Soient $\chi \in \hat{S}_\lambda$ et \mathcal{U} un ouvert de \mathcal{O}_λ ; si $s \in \Gamma_\chi|_{\mathcal{U}}$ on note $[s]$ la fonction définie sur le sous-ensemble de $\mathbf{R}^2 \times \mathbf{R}^2$, $m_{\lambda,1}^{-1}(\mathcal{O}_{\lambda,1} \cap \mathcal{U})$ par

$$[s](q_2, q_3, p_2, p_3) = f'_s \left(\sigma_{\lambda,1} m_{\lambda,1} \begin{pmatrix} q_2 & p_2 \\ q_3 & p_3 \end{pmatrix} \right).$$

Grâce au lemme 9 on voit que $s \in \Gamma_\chi^{\mathcal{P}_\lambda}$ si et seulement si

$$[s](q_2, q_3, p_2, p_3) = e^{-2i\pi q_3 p_3} [s] \left(q_2, 0, \lambda \frac{q_2^2}{1+q_2^2}, p_3 \right). \quad (44)$$

Si $\psi \in \Gamma_{\chi,1/2}^{\mathcal{P}_\lambda}$ alors il existe une unique section $s_\psi^{\mathcal{P}_\lambda} \in \Gamma_{\chi|\mathcal{O}_{\lambda,1}}^{\mathcal{P}_\lambda}$ telle que

$$\psi|_{\mathcal{O}_{\lambda,1}^{\mathcal{P}_\lambda}} = s_\psi^{\mathcal{P}_\lambda} \nu_1^{\mathcal{P}_\lambda}.$$

On définit alors la fonction $\mathcal{J}_{\mathcal{P}_\lambda}^\chi(\psi) : \mathbf{R} \times \mathbf{R}^* \rightarrow \mathbf{C}$ en posant

$$\mathcal{J}_{\mathcal{P}_\lambda}^\chi(\psi)(q, p) = [s_\psi^{\mathcal{P}_\lambda}] \left(q, 0, \lambda \frac{q}{1+q^2}, p \right) \quad (45)$$

alors il est facile de voir que pour tout $\psi_1, \psi_2 \in \Gamma_{\chi, 1/2}^{\mathcal{P}_\lambda}$

$$((\psi_1, \psi_2))(dq, dp)_{x_\lambda, 1(q, p)} = \mathcal{F}_{\mathcal{P}_\lambda}^\chi(\psi_1)(q, p) \overline{\mathcal{F}_{\mathcal{P}_\lambda}^\chi(\psi_2)(q, p)}$$

et de la même façon que précédemment on démontre que l'application $\mathcal{F}_{\mathcal{P}_\lambda}^\chi$ induit une isométrie de l'espace $\mathcal{H}_{\chi, 1/2}^{\mathcal{P}_\lambda}$ sur $L^2(\mathbf{R}^2)$.

Si $\varepsilon = \pm 1$ nous noterons $\varrho_{\varepsilon, \lambda}$ la représentation de P_3 dans l'espace $\mathcal{H}_{\chi_{\varepsilon, \lambda}, 1/2}^{\mathcal{P}_\lambda} \cong L^2(\mathbf{R}^2)$. La proposition suivante en donne l'expression sur les éléments d'un système de générateurs de P_3 . Sa démonstration se ramène au calcul de l'action de ces éléments de $SL_3(\mathbf{R})$ dans Σ_λ .

PROPOSITION 2. *On a pour tout $f \in L^2(\mathbf{R}^2)$ et pour presque tout $(x, y) \in \mathbf{R}^2$,*

- (a) $\varrho_{\varepsilon, \lambda}(y_{1,2}(s)y_{1,3}(t))f(x, y) = e^{2i\pi\varepsilon sy}f(x-s, y), \quad \forall s, \forall t \in \mathbf{R}$
- (b) $\varrho_{\varepsilon, \lambda}(b_{1,2}(t))f(x, y) = \chi'_{\varepsilon, \lambda}(t)|t|^{1/2}f(t^2x, t^{-1}y), \quad \forall t \in \mathbf{R}^*$
- (c) $\varrho_{\varepsilon, \lambda}(b_{2,3}(t))f(x, y) = |t|^{-1}f(t^{-1}x, t^{-1}y), \quad \forall t \in \mathbf{R}^* \quad (46)$
- (d) $\varrho_{\varepsilon, \lambda}(y_{2,3}(t))f(x, y) = e^{2i\pi\varepsilon txy}f(x, y), \quad \forall t \in \mathbf{R}$
- (e) $\varrho_{\varepsilon, \lambda}(x_{1,2}(t))f(x, y) = \chi'_{\varepsilon, \lambda}(1-tx)^{-1}|1-tx|^{-1/2}f(x/(1-tx), y(1-tx)), \quad \forall t \in \mathbf{R}$
- (f) $\varrho_{\varepsilon, \lambda}(w_{1,2})f(x, y) = \chi'_{\varepsilon, \lambda}(-x^{-1})|x|^{-1/2}f(-1/x, -xy).$

On remarquera que lorsqu'on fait $\lambda=0$ dans les formules (46) on retrouve les formules (42) pour $\chi = \chi_{\varepsilon, 0}$. Désormais nous noterons $\varrho_{\varepsilon, 0}$ la représentation ϱ_χ pour $\chi = \chi_{\varepsilon, 0}$, $\varepsilon = \pm 1$. Nous noterons aussi $\tilde{\varrho}_0$ (resp. $\tilde{\varrho}_0^-$) la représentation $\varrho_{\tilde{\chi}_0}$ (resp. $\varrho_{\tilde{\chi}_0^-}$).

IV. Noyaux de Blattner-Kostant-Sternberg

1. Une nouvelle polarisation et un autre espace de représentation

L'élément $\omega_{2,3}$ de $\tilde{SL}_3(\mathbf{R})$ transforme l'ouvert \mathcal{O}_λ^3 en l'ouvert \mathcal{O}_λ^2 et la polarisation \mathcal{P}_λ , définie sur \mathcal{O}_λ^3 , en une polarisation \mathcal{Q}_λ , définie sur \mathcal{O}_λ^2 . En tout point m de $\mathcal{O}_{\lambda,1}^2$ (resp. $\mathcal{O}_{\lambda,3}^2$) le système de vecteurs $(\partial/\partial q_2^1, \partial/\partial p_3^1)_{(m)}$ (resp. $(\partial/\partial q_2^3, \partial/\partial p_1^3)_{(m)}$) constitue une base de $\mathcal{Q}_{\lambda, m}$.

La sous-variété fermée $X_\lambda^2 = \omega_{2,3}X_\lambda^3$ de \mathcal{O}_λ^2 constituée des points $m_\lambda(q, p)$ avec $(q, p) \in \Sigma_\lambda$ tel que $\langle p - \lambda(q/\langle q, q \rangle), e_l \rangle = 0$ pour $l=1, 3$ rencontre chaque feuille intégrale de \mathcal{Q}_λ en un point et un seul, et, si on note pour tout point $m \in \mathcal{O}_\lambda^2$, $\pi_\lambda^2(m)$, l'unique point

de X_λ^2 qui soit dans la feuille intégrale de \mathcal{Q}_λ passant par m , alors l'application π_λ^2 induit un isomorphisme de variétés entre $\mathcal{O}_\lambda^2/\mathcal{Q}_\lambda$ et X_λ^2 .

Les $X_{\lambda,j}^2 = X_\lambda^2 \cap \mathcal{O}_{\lambda,j}^2$, $j=1, 3$ sont des ouverts de carte pour X_λ^2 , les coordonnées étant définies par

$$\begin{aligned} \mathbf{R} \times \mathbf{R}^* &\xrightarrow{x_{\lambda,j}^2} X_{\lambda,j}^2 \\ (q, p) &\mapsto m_{\lambda,j} \left(0, q, p, \frac{\lambda q}{1+q^2} \right). \end{aligned}$$

Pour $j=1, 3$ on note $v_j^{\mathcal{Q}_\lambda}$ la $\frac{1}{2}$ - \mathcal{Q}_λ -densité \mathcal{Q}_λ -covariante définie sur l'ouvert $\mathcal{O}_{\lambda,j}^2$ par

$$v_j^{\mathcal{Q}_\lambda}(\partial/\partial q_2^j, \partial/\partial p_k^j) = 1, \quad k \neq j, k \neq 2.$$

De la même façon que dans III, § 2, pour tout $\chi \in \widehat{S}_\lambda$ nous définissons l'espace de représentation $\mathcal{H}_{\chi,1/2}^{\mathcal{Q}_\lambda}$. Nous allons voir que ces espaces sont encore isomorphes à $L^2(\mathbf{R}^2)$.

(a) Le cas $\lambda=0$. Soit \mathcal{V}^2 le sous-ensemble de $\widetilde{SL}_3(\mathbf{R})$ formé des éléments

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ x & t^{-1} & z \\ y & 0 & t \end{pmatrix} \omega_{2,3}^k, \quad x, y, z \in \mathbf{R}, t > 0, k \in \{1, 3\}$$

(on a identifié les éléments de $\exp(\omega_{2,3} \mathfrak{h}\omega_{2,3}^{-1})$ avec leur projection dans $SL_3(\mathbf{R})$). Alors l'application σ^2 à valeurs dans \mathcal{V}^2 et définie sur $\mathcal{O}_{0,1}^2$ par

$$\sigma^2 \left(m_{0,1} \begin{pmatrix} q_2 & p_2 \\ q_3 & p_3 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ q_2 & |p_2|^{-1} & -\varepsilon(p_2)p_3 \\ q_3 & 0 & |p_2| \end{pmatrix} \omega_{2,3}^{2-\varepsilon(p_2)}$$

est une section au dessus de $\mathcal{O}_{0,1}^2$ de la projection p_0 ; c'est donc un difféomorphisme de $\mathcal{O}_{0,1}^2$ sur \mathcal{V}^2 .

Soient $\chi \in \widehat{S}_0$ et \mathcal{U} un ouvert de \mathcal{O}_0 ; si $s \in \Gamma_\chi|_{\mathcal{U}}$ on note $[s]^2$ la fonction définie sur le sous-ensemble de $\mathbf{R}^2 \times \mathbf{R}^2$, $m_{0,1}^{-1}(\mathcal{O}_{0,1}^2 \cap \mathcal{U})$, par

$$[s]^2(q_2, q_3, p_2, p_3) = f_s \left(\sigma^2 m_{0,1} \begin{pmatrix} q_2 & p_2 \\ q_3 & p_3 \end{pmatrix} \right). \quad (47)$$

En utilisant le lemme 7, on voit que $s \in \Gamma_\chi^{\mathcal{Q}_0}$ si et seulement si

$$[s]^2(q_2, q_3, p_2, p_3) = e^{-2i\pi q_2 p_2} [s]^2(0, q_3, p_2, 0), \quad \forall \begin{pmatrix} q_2 & p_2 \\ q_3 & p_3 \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^2 \times \mathbf{R}^2 \text{ avec } p_2 \neq 0. \quad (48)$$

Et si ψ est un élément de $\Gamma_{\chi, 1/2}^{\mathcal{O}_0}$ alors il existe une unique section $s_\psi^{\mathcal{O}_0} \in \Gamma_{\chi | \mathcal{O}_{0,1}^2}$ telle que

$$\psi|_{\mathcal{O}_{0,1}^2} = s_\psi^{\mathcal{O}_0} \nu_1^{\mathcal{O}_0}.$$

On définit alors la fonction $\mathcal{J}_{\mathcal{O}_0}^\chi(\psi) : \mathbf{R} \times \mathbf{R}^* \rightarrow \mathbf{C}$ en posant

$$\mathcal{J}_{\mathcal{O}_0}^\chi(\psi)(q, p) = [s_\psi^{\mathcal{O}_0}]^2(0, q, p, 0). \quad (49)$$

De la même façon que dans III § 3, on voit que l'application $\mathcal{J}_{\mathcal{O}_0}^\chi$ induit un isomorphisme d'espace de Hilbert entre $\mathcal{H}_{\chi, 1/2}^{\mathcal{O}_0}$ et $L^2(\mathbf{R}^2)$.

Si x et y sont deux nombres réels, (x, y) désigne leur symbole de Hilbert : $(x, y) = -1$ si x et y sont tous deux négatifs, $(x, y) = 1$ sinon. On a alors le résultat suivant :

LEMME 10. Soient $\chi \in \hat{S}_0$, \mathcal{U} un ouvert de \mathcal{O}_0 et $s \in \Gamma_\chi |_{\mathcal{U}}$. Alors pour tout

$$\begin{pmatrix} q_2 & p_2 \\ q_3 & p_3 \end{pmatrix} \in m_{0,1}^{-1}(\mathcal{O}_{0,1}^2 \cap \mathcal{O}_{0,1}^3 \cap \mathcal{U})$$

on a

$$\begin{aligned} [s]^3(q_2, q_3, p_2, p_3) &= (-p_3, p_2) [s]^2(q_2, q_3, p_2, p_3) \quad \text{si } \chi = \tilde{\chi}_0 \text{ ou } \chi = \tilde{\tilde{\chi}}_0 \\ [s]^3(q_2, q_3, p_2, p_3) &= [s]^2(q_2, q_3, p_2, p_3) \quad \text{sinon.} \end{aligned} \quad (50)$$

Démonstration. Pour tout $m \in \mathcal{O}_{0,1}^3 \cap \mathcal{O}_{0,1}^2 \cap \mathcal{U}$ posons $\delta(m) = \sigma^2(m)^{-1} \sigma^3(m)$. Alors $\delta(m) \in S_0$ et, d'après la définition de $[s]^2$ et $[s]^3$ (formules (39) et (47)), on a

$$[s]^3(m_{0,1}^{-1}(m)) = \chi(\delta(m))^{-1} [s]^2(m_{0,1}^{-1}(m))$$

Il nous faut donc calculer $\delta(m)$ lorsque

$$m = m_{0,1} \begin{pmatrix} q_2 & p_2 \\ q_3 & p_3 \end{pmatrix} \quad \text{avec } \begin{pmatrix} q_2 & p_2 \\ q_3 & p_3 \end{pmatrix} \in m_{0,1}^{-1}(\mathcal{O}_{0,1}^3 \cap \mathcal{O}_{0,1}^2)$$

c'est-à-dire avec $p_2 p_3 \neq 0$.

Dans ces conditions on a

$$\delta(m) = \omega_{2,3}^{\varepsilon(p_2)-2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\varepsilon(p_2) \langle p, q \rangle_1 & |p_2| & \varepsilon(p_2) p_3 \\ -q_3 |p_2|^{-1} & 0 & |p_2|^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ q_2 & |p_3| & 0 \\ q_3 & -\varepsilon(p_3) p_2 & |p_3|^{-1} \end{pmatrix} \omega_{2,3}^{1-\varepsilon(p_3)}$$

$$\begin{aligned}
 &= \omega_{2,3}^{\varepsilon(p_2)-2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\varepsilon(p_2) \langle p, q \rangle_1 & |p_2| & 0 \\ -q_3 |p_2|^{-1} & 0 & |p_2|^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ q_2 + p_2^{-1} p_3 q_3 & |p_3| & 0 \\ q_3 & 0 & |p_3|^{-1} \end{pmatrix} \\
 &\quad \times \alpha_{2,3}(1/p_2 p_3) \eta_{2,3}(-p_2 p_3) \omega_{2,3}^{1-\varepsilon(p_3)}
 \end{aligned}$$

et en effectuant il vient

$$\delta(m) = \omega_{2,3}^{-1+\varepsilon(p_2)-\varepsilon(p_3)} \beta_{2,3}(|p_2 p_3|) \alpha_{2,3}(1/p_2 p_3) \eta_{2,3}(-p_2 p_3)$$

que l'on peut écrire, compte-tenu de la définition de $\omega(t)$ et de la formule (8)

$$\delta(m) = \omega_{2,3}^{\varepsilon(p_2)-\varepsilon(p_3)-\varepsilon(p_2 p_3)} \beta_{2,3}(p_2 p_3) \omega_{2,3}(1/p_2 p_3) \alpha_{2,3}(-1/p_2 p_3).$$

En utilisant la définition de $\beta(t)$ et la formule (8) il vient

$$\beta(t) \omega(1/t) = \omega^{2\varepsilon(t)-1}, \quad \forall t \in \mathbf{R} - \{0\},$$

et en reportant dans $\delta(m)$ on trouve

$$\delta(m) = \sigma^{[1+\varepsilon(p_3)][1-\varepsilon(p_2)]/4} \alpha_{2,3}(-1/p_2 p_3). \quad \text{Q.E.D.}$$

Si $\chi = \chi_{\varepsilon,0}$, $\varepsilon = \pm 1$ et $s \in \Gamma_\chi | \mathcal{U}$, avec \mathcal{U} ouvert de \mathcal{O}_0 , on pose $[s] = [s]^2 = [s]^3$.

(b) *Le cas $\lambda \neq 0$.* Ici les choses sont plus simples. Soit $\chi \in \hat{S}_\lambda$, si $\psi \in \Gamma_{\chi, 1/2}^{\mathfrak{Q}_\lambda}$ on note $s_\psi^{\mathfrak{Q}_\lambda}$ l'unique élément de $\Gamma_{\chi | \mathcal{O}_{\lambda,1}^{\mathfrak{Q}_\lambda}}$ tel que

$$\psi|_{\mathcal{O}_{\lambda,1}^{\mathfrak{Q}_\lambda}} = s_\psi^{\mathfrak{Q}_\lambda} \nu_1^{\mathfrak{Q}_\lambda}$$

et on définit la fonction $\mathcal{F}_{\mathfrak{Q}_\lambda}^\chi(\psi) : \mathbf{R} \times \mathbf{R}^* \rightarrow \mathbf{C}$ en posant

$$\mathcal{F}_{\mathfrak{Q}_\lambda}^\chi(\psi)(q, p) = [s_\psi^{\mathfrak{Q}_\lambda}](0, q, p, 0). \quad (51)$$

Alors l'application $\mathcal{F}_{\mathfrak{Q}_\lambda}^\chi$ se prolonge en une isométrie de l'espace $\mathcal{H}_{\chi, 1/2}^{\mathfrak{Q}_\lambda}$ sur l'espace $L^2(\mathbf{R}^2)$.

2. Dualité entre les espaces $\mathcal{H}_{\chi, 1/2}^{\mathfrak{Q}_\lambda}$ et $\mathcal{H}_{\chi, 1/2}^{\mathfrak{Q}_\lambda}$

Soit φ (resp. ψ) un élément de $\Gamma_{\chi, 1/2}^{\mathfrak{Q}_\lambda}$ (resp. $\Gamma_{\chi, 1/2}^{\mathfrak{Q}_\lambda}$); écrivons alors $\varphi = s\nu$ (resp. $\psi = t\eta$) avec $s \in \Gamma_\chi^{\mathfrak{Q}_\lambda}$ (resp. $t \in \Gamma_\chi^{\mathfrak{Q}_\lambda}$) et $\nu \in \Gamma_{1/2}^{\mathfrak{Q}_\lambda}$ (resp. $\eta \in \Gamma_{1/2}^{\mathfrak{Q}_\lambda}$). Soient $m \in \mathcal{O}_\lambda^3 \cap \mathcal{O}_\lambda^2$ et (ξ_1, ξ_2) (resp.

(ξ_1, ξ_2) une base de \mathcal{P}_{λ_m} (resp. \mathcal{Q}_{λ_m}) telle que $(\xi_1, \xi_2, \zeta_1, \zeta_2)$ soit une base symplectique de $T_m(\mathcal{O}_\lambda)$. Alors le nombre $(s(m), t(m))_\chi \nu(\xi_1, \xi_2) \overline{\eta(\xi_1, \xi_2)}$ ne dépend que du choix de φ , ψ et m , et si on le note $\langle\langle \varphi, \psi \rangle\rangle_{\chi, \lambda}(m)$, l'application $m \mapsto \langle\langle \varphi, \psi \rangle\rangle_{\chi, \lambda}(m)$ est une fonction de classe C^∞ sur l'ouvert $\mathcal{O}_\lambda^3 \cap \mathcal{O}_\lambda^2$. On pose alors,

$$\langle \varphi, \psi \rangle_{\chi, \lambda} = \int_{\mathcal{O}_\lambda^3 \cap \mathcal{O}_\lambda^2} \langle\langle \varphi, \psi \rangle\rangle_{\chi, \lambda} \omega_\lambda \wedge \omega_\lambda.$$

On définit ainsi, du moins formellement, une dualité sesquilinéaire entre les espaces $\Gamma_{\chi, 1/2}^{\mathcal{P}_\lambda}$ et $\Gamma_{\chi, 1/2}^{\mathcal{Q}_\lambda}$. On note encore $\langle , \rangle_{\chi, \lambda}$ le produit scalaire hermitien défini sur $\mathcal{D}(\mathbf{R} \times \mathbf{R}^*)$ par

$$\langle f, g \rangle_{\chi, \lambda} = \langle (\mathcal{F}_{\mathcal{P}_\lambda}^\chi)^{-1}(f), (\mathcal{F}_{\mathcal{Q}_\lambda}^\chi)^{-1}(g) \rangle_{\chi, \lambda}.$$

Il est clair, par définition de $\mathcal{F}_{\mathcal{P}_\lambda}^\chi$ et $\mathcal{F}_{\mathcal{Q}_\lambda}^\chi$, que pour tout $f, g \in \mathcal{D}(\mathbf{R} \times \mathbf{R}^*)$ la fonction $\langle\langle (\mathcal{F}_{\mathcal{P}_\lambda}^\chi)^{-1}(f), (\mathcal{F}_{\mathcal{Q}_\lambda}^\chi)^{-1}(g) \rangle\rangle$ vérifie

$$\left| \langle\langle (\mathcal{F}_{\mathcal{P}_\lambda}^\chi)^{-1}(f), (\mathcal{F}_{\mathcal{Q}_\lambda}^\chi)^{-1}(g) \rangle\rangle \left(m_{0,1} \begin{pmatrix} q_2 & p_2 \\ q_3 & p_3 \end{pmatrix} \right) \right| \leq |f(q_2, p_3)| |g(q_3, p_2)|,$$

$$\forall (q_2, p_3), (q_3, p_2) \in \mathbf{R} \times \mathbf{R}^*.$$

Ainsi la dualité $\langle , \rangle_{\chi, \lambda}$ induit un opérateur $\mathcal{F}_{\chi, \mathcal{Q}_\lambda}^{\mathcal{P}_\lambda}$ à valeurs dans $\mathcal{D}'(\mathbf{R} \times \mathbf{R}^*)$ l'espace des distributions sur $\mathbf{R} \times \mathbf{R}^*$ et défini sur $\mathcal{D}(\mathbf{R} \times \mathbf{R}^*)$ par

$$\langle f, \mathcal{F}_{\chi, \mathcal{Q}_\lambda}^{\mathcal{P}_\lambda}(g) \rangle = \langle f, g \rangle_{\chi, \lambda}, \quad \forall f, \forall g \in \mathcal{D}(\mathbf{R} \times \mathbf{R}^*)$$

où \langle , \rangle désigne la dualité sesquilinéaire canonique entre $\mathcal{D}(\mathbf{R} \times \mathbf{R}^*)$ et $\mathcal{D}'(\mathbf{R} \times \mathbf{R}^*)$.

PROPOSITION 3. Si $\lambda=0$ et $\chi=\bar{\chi}_0$ ou $\chi=\bar{\bar{\chi}}_0$ on a

$$\mathcal{F}_{\chi, \mathcal{Q}_0}^{\mathcal{P}_0}(g)(x, y) = \int (-y, \zeta) e^{2i\pi(y\xi - x\zeta)} g(\xi, \zeta) d\xi d\zeta, \quad \forall g \in \mathcal{D}(\mathbf{R} \times \mathbf{R}^*), \forall (x, y) \in \mathbf{R} \times \mathbf{R}^*. \quad (52)$$

Si $\lambda \in \mathbf{R}$, $\varepsilon = \pm 1$ et $\chi = \chi_{\varepsilon, \lambda}$ on a

$$\mathcal{F}_{\chi, \mathcal{Q}_\lambda}^{\mathcal{P}_\lambda}(g)(x, y) = \int e^{2i\pi(y\xi - x\zeta)} g(\xi, \zeta) d\xi d\zeta, \quad \forall g \in \mathcal{D}(\mathbf{R} \times \mathbf{R}^*), \forall (x, y) \in \mathbf{R} \times \mathbf{R}^*. \quad (53)$$

Démonstration. Ceci résulte immédiatement des formules suivantes (cf. lemme 10). Si $\lambda=0$ et $\chi=\bar{\chi}_0$ ou $\chi=\bar{\bar{\chi}}_0$ on a pour tout $f, g \in \mathcal{D}(\mathbf{R} \times \mathbf{R}^*)$

$$\begin{aligned} & \langle \langle (\mathcal{F}_{\mathcal{P}_0}^\chi)^{-1}(f), (\mathcal{F}_{\mathcal{Q}_0}^\chi)^{-1}(g) \rangle \rangle \left(m_{0,1} \begin{pmatrix} q_2 & p_2 \\ q_3 & p_3 \end{pmatrix} \right) \\ & = (-p_2, p_3) e^{-2i\pi(q_3 p_3 - q_2 p_2)} f(q_2, p_3) \overline{g(q_3, p_2)}, \quad \forall (q_2, p_3), \forall (q_3, p_2) \in \mathbf{R} \times \mathbf{R}^*. \end{aligned}$$

Dans le second cas on a pour tout $f, g \in \mathcal{D}(\mathbf{R} \times \mathbf{R}^*)$

$$\begin{aligned} & \langle \langle (\mathcal{F}_{\mathcal{P}_\lambda}^\chi)^{-1}(f), (\mathcal{F}_{\mathcal{Q}_\lambda}^\chi)^{-1}(g) \rangle \rangle \left(m_{0,1} \begin{pmatrix} q_2 & p_2 \\ q_3 & p_3 \end{pmatrix} \right) \\ & = e^{-2i\pi(q_3 p_3 - q_2 p_2)} f(q_2, p_3) \overline{g(q_3, p_2)}, \quad \forall (q_2, p_3), \forall (q_3, p_2) \in \mathbf{R} \times \mathbf{R}^*. \quad \text{Q.E.D.} \end{aligned}$$

On voit donc qu'il existe des opérateurs \mathcal{F} et $\tilde{\mathcal{F}}$ définis sur $\mathcal{D}(\mathbf{R} \times \mathbf{R}^*)$ tels que $\tilde{\mathcal{F}} = \mathcal{F}_{\chi, \mathcal{Q}_\lambda}^{\mathcal{P}_\lambda}$ si $\lambda=0$ $\chi = \tilde{\chi}_0$ ou $\chi = \tilde{\chi}_0$ et $\mathcal{F} = \mathcal{F}_{\chi, \mathcal{P}_\lambda}^{\mathcal{Q}_\lambda}$ sinon. On a

$$\mathcal{F}f(x, y) = \int e^{2i\pi(y\xi - x\zeta)} f(\xi, \zeta) d\xi d\zeta \quad (54)$$

$$\tilde{\mathcal{F}}f(x, y) = \int (-y, \zeta) e^{2i\pi(y\xi - x\zeta)} f(\xi, \zeta) d\xi d\zeta. \quad (55)$$

PROPOSITION 4. *Les opérateurs \mathcal{F} et $\tilde{\mathcal{F}}$ se prolongent, de manière unique, en des opérateurs unitaires de $L^2(\mathbf{R}^2)$.*

Démonstration. Pour \mathcal{F} c'est clair, puisque c'est une transformation de Fourier.

Pour ce qui concerne $\tilde{\mathcal{F}}$ on peut écrire $\tilde{\mathcal{F}} = \mathcal{F}_2 \circ \mathcal{M} \circ \mathcal{F}_1$ avec

$$\mathcal{F}_1 f(x, y) = \int e^{2i\pi y \xi} f(\xi, x) d\xi$$

$$\mathcal{F}_2 f(x, y) = \int e^{-2i\pi x \zeta} f(\zeta, y) d\zeta$$

$$\mathcal{M}f(x, y) = (-y, x) f(x, y)$$

et il est clair que ces opérateurs induisent des opérateurs unitaires dans $L^2(\mathbf{R}^2)$. Q.E.D.

3. Un opérateur unitaire pour représenter $\omega_{2,3}$

Comme $\omega_{2,3}$ transforme la polarisation \mathcal{P}_λ en la polarisation \mathcal{Q}_λ pour tout $\lambda \in \mathbf{R}$, il est clair que pour tout $\lambda \in \mathbf{R}$ et tout $\chi \in \hat{S}_\lambda$, $\omega_{2,3}$ induit par transport de structure une

isométrie $\tau_{\omega_{2,3}}^\chi$ de $\mathcal{H}_{\chi, 1/2}^{\mathcal{P}_\lambda}$ sur $\mathcal{H}_{\chi, 1/2}^{\mathcal{Q}_\lambda}$: si $\varphi \in \Gamma_{\chi, 1/2}^{\mathcal{P}_\lambda}$ s'écrit $\varphi = s\nu$ avec $s \in \Gamma_{\chi}^{\mathcal{P}_\lambda}$ et $\nu \in \Gamma_{1/2}^{\mathcal{P}_\lambda}$ alors $\tau_{\omega_{2,3}}^\chi \varphi = \psi$ s'écrit $\psi = t\eta$ avec $t \in \Gamma_{\chi}^{\mathcal{Q}_\lambda}$, $\eta \in \Gamma_{1/2}^{\mathcal{Q}_\lambda}$ donnés par

$$t = \omega_{2,3} \cdot s$$

$$\eta(b) = \nu(\omega_{2,3}^{-1} \cdot b), \quad \forall b \in B^{\mathcal{Q}_\lambda}.$$

Cet opérateur induit une isométrie de $L^2(\mathbf{R}^2)$ encore notée $\tau_{\omega_{2,3}}^\chi$.

$$\text{Si } \lambda=0 \text{ et } \chi=\bar{\chi}_0 \text{ ou } \chi_0 \text{ on pose } \varrho_\chi(\omega_{2,3}) = \mathcal{F}_{\chi, \mathcal{Q}_0}^{\mathcal{P}_0} \circ \tau_{\omega_{2,3}}^\chi.$$

$$\text{Si } \lambda \in \mathbf{R}, \varepsilon = \pm 1 \text{ et } \chi = \chi_{\varepsilon, \lambda} \text{ on pose } \varrho_{\varepsilon, \lambda}(\omega_{2,3}) = \mathcal{F}_{\chi_{\varepsilon, \lambda}, \mathcal{Q}_\lambda}^{\mathcal{P}_\lambda} \circ \tau_{\omega_{2,3}}^{\chi_{\varepsilon, \lambda}}.$$

On définit alors les opérateurs unitaires de $L^2(\mathbf{R}^2)$ notés U et \tilde{U} par

$$Uf(x, y) = \int e^{-2i\pi(x\xi + y\zeta)} f(\xi, \zeta) d\xi d\zeta \quad (56)$$

$$\tilde{U}f(x, y) = \int (-y, \zeta) e^{-2i\pi(x\xi + y\zeta)} f(\xi, \zeta) d\xi d\zeta. \quad (57)$$

PROPOSITION 5. Si $\lambda=0$ et $\chi=\bar{\chi}_0$ ou $\bar{\chi}_0$ on a

$$\varrho_\chi(\omega_{2,3}) = \tilde{U}.$$

Sinon, pour tout $\lambda \in \mathbf{R}$ et $\varepsilon = \pm 1$ on a

$$\varrho_{\varepsilon, \lambda}(\omega_{2,3}) = U.$$

Démonstration. Il suffit de montrer que pour tout $f \in L^2(\mathbf{R}^2)$, $\forall \lambda \in \mathbf{R}$, $\forall \chi \in \hat{S}_\lambda$

$$\tau_{\omega_{2,3}}^\chi (f)(x, y) = f(-x, y).$$

Mais ceci résulte immédiatement du fait que d'une part pour tout $\lambda \in \mathbf{R}$,

$$\omega_{2,3}^{-1} \cdot m_{\lambda, 1} \begin{pmatrix} q_2 & p_2 \\ q_3 & p_3 \end{pmatrix} = m_{\lambda, 1} \begin{pmatrix} -q_3 & -p_3 \\ q_2 & p_2 \end{pmatrix}, \quad \text{pour tout } \begin{pmatrix} q_2 & p_2 \\ q_3 & p_3 \end{pmatrix} \in m_{\lambda, 1}^{-1}(\mathcal{O}_{\lambda, 1}^2)$$

et donc que

$$\omega_{2,3}^{-1} \cdot \left(\frac{\partial}{\partial q_2}, \frac{\partial}{\partial p_3} \right)_{(m)} = \left(\frac{\partial}{\partial q_3}, \frac{\partial}{\partial p_2} \right)_{(\omega_{2,3}^{-1} \cdot m)} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \forall m \in \mathcal{O}_{\lambda, 1}^2$$

et que d'autre part pour tout

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} q_2 & p_2 \\ q_3 & p_3 \end{pmatrix} &\in m_{0,1}^{-1}(\mathcal{O}_{0,1}^2), \\ \omega_{2,3}^{-1} \sigma^2 \left(m_{0,1} \begin{pmatrix} q_2 & p_2 \\ q_3 & p_3 \end{pmatrix} \right) &= \omega_{2,3}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ q_2 & |p_2|^{-1} & -\varepsilon(p_2)p_3 \\ q_3 & 0 & |p_2| \end{pmatrix} \omega_{2,3}^{2-\varepsilon(p_2)} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -q_3 & |p_2| & 0 \\ q_2 & \varepsilon(p_2)p_3 & |p_2|^{-1} \end{pmatrix} \omega_{2,3}^{1-\varepsilon(p_2)} \\ &= \sigma^3 \left(m_{0,1} \begin{pmatrix} -q_3 & -p_3 \\ q_2 & p_2 \end{pmatrix} \right). \end{aligned} \quad \text{Q.E.D.}$$

V. Un autre point de vue sur la question — Irréductibilité et unicité du prolongement de certaines représentations de P_3 à $\tilde{SL}_3(\mathbf{R})$

1. Représentations unitaires irréductibles de sous-groupes paraboliques de $\tilde{SL}_3(\mathbf{R})$

Pour tout $\lambda \in \mathbf{R}$ et pour $j=1,3$ on note $f_{j,\lambda}$ la restriction à \mathfrak{p}_j de la forme linéaire $X \mapsto \text{tr}(Z_\lambda X)$. Alors le stabilisateur de $f_{j,\lambda}$ dans P_j n'est autre que $S_{j,\lambda} = P_j \cap S_\lambda$ et la forme linéaire $f_{j,\lambda}$ admet la polarisation résoluble, indépendante de λ , $\mathfrak{h}_j = \mathfrak{s}_{j,\lambda} \oplus \mathfrak{h}_{0,j}$ où $\mathfrak{s}_{j,\lambda} = \mathfrak{p}_j \cap \mathfrak{s}_\lambda$ est l'algèbre de Lie de $S_{j,\lambda}$ et $\mathfrak{h}_{0,j}$ est la sous-algèbre de Lie de \mathfrak{p}_j , $\mathbf{R}Y_{1,3} \oplus \mathbf{R}Y_{2,j}$. On pose $H_j = S_{j,\lambda} \exp \mathfrak{h}_{0,j}$, alors H_j est un sous-groupe de P_j d'algèbre de Lie \mathfrak{h}_j , produit semi-direct du sous-groupe de P_j engendré par $\omega_{1,3}^2$ et isomorphe à $\mathbf{Z}/4\mathbf{Z}$, par sa composante neutre \hat{H}_j . On note $\hat{H}_{j,\lambda}$ l'ensemble des caractères unitaires de H_j dont la différentielle est la restriction à \mathfrak{h}_j de la forme linéaire $2i\pi f_{j,\lambda}$. Alors ces caractères sont au nombre de quatre et on les appelle $\chi_{\varepsilon,\lambda}^j$, $\varepsilon = \pm 1$, $\tilde{\chi}_\lambda^j$ et $\bar{\chi}_\lambda^j$, et ils sont déterminés par

$$\chi_{\varepsilon,\lambda}^j(\omega_{1,3}^2) = \varepsilon, \quad \tilde{\chi}_\lambda^j(\omega_{1,3}^2) = -i \quad \text{et} \quad \bar{\chi}_\lambda^j(\omega_{1,3}^2) = i.$$

D'autre part tout élément de \hat{H}_1 (resp. \hat{H}_3) s'écrit sous la forme

$$\begin{pmatrix} t & 0 & 0 \\ v & t^{-2} & b \\ u & 0 & t \end{pmatrix} \quad \left(\text{resp.} \begin{pmatrix} t & b & 0 \\ 0 & t^{-2} & 0 \\ u & v & t \end{pmatrix} \right) \quad \text{avec } t > 0$$

et on a pour tout $\chi \in \hat{H}_{1,\lambda}$ (resp. $\hat{H}_{3,\lambda}$)

$$\chi \begin{pmatrix} t & 0 & 0 \\ v & t^{-2} & b \\ u & 0 & t \end{pmatrix} = e^{2i\pi u t^{2i\pi\lambda}} \quad \left(\text{resp. } \chi \begin{pmatrix} t & b & 0 \\ 0 & t^{-2} & 0 \\ u & v & t \end{pmatrix} = e^{2i\pi u t^{2i\pi\lambda}} \right).$$

Pour tout $\lambda \in \mathbf{R}$, $j=1, 3$ et $\chi \in \hat{H}_{j,\lambda}$ on note $\varrho_{j,\chi}$ la représentation induite de H_j à P_j , du caractère χ de H_j .

Soit $\mathcal{H}_{j,\chi}^\infty$ l'espace des fonctions φ de classe C^∞ sur P_j et vérifiant la condition de covariance

$$\varphi(\rho u) = \chi(u^{-1}) \Delta_{H_j, P_j}(u)^{1/2} \varphi(\rho), \quad \forall \rho \in P_j, \forall u \in H_j \quad (58)$$

et telles que

$$\oint_{P_j/H_j} |\varphi(\rho)|^2 d\dot{\rho} < +\infty$$

où Δ_{H_j, P_j} désigne la fonction module de H_j relativement à P_j et où $d\dot{\rho}$ désigne une forme linéaire positive P_j -invariante (déterminée à un scalaire positif près) définie sur l'espace des fonctions ψ continues sur P_j à support compact modulo H_j et vérifiant la condition de covariance

$$\psi(\rho u) = \Delta_{H_j, P_j}(u) \psi(\rho), \quad \forall \rho \in P_j, \forall u \in H_j.$$

Alors $\mathcal{H}_{j,\chi}^\infty$ muni du produit scalaire

$$\langle \varphi, \psi \rangle_{j,\chi} = \int_{P_j/H_j} \varphi(\rho) \overline{\psi(\rho)} d\dot{\rho}, \quad \forall \varphi, \forall \psi \in \mathcal{H}_{j,\chi}^\infty$$

est un espace préhilbertien, et on note $\mathcal{H}_{j,\chi}$ son complété. C'est l'espace de la représentation $\varrho_{j,\chi}$, laquelle est donnée par la formule

$$\varrho_{j,\chi}(\rho_0) \varphi(\rho) = \varphi(\rho_0^{-1} \rho), \quad \forall \rho, \forall \rho_0 \in P_j, \forall \varphi \in \mathcal{H}_{j,\chi}.$$

Soit pour $j=1, 3$, τ_j l'application à valeurs dans $P_1 \cap P_3 = B$ et définie sur $\mathbf{R} \times \mathbf{R}^*$ par

$$\tau_1(x, y) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & |y| & 0 \\ 0 & \varepsilon(y)x & |y|^{-1} \end{pmatrix} \omega_{2,3}^{1-\varepsilon(y)}$$

$$\tau_3(x, y) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ x & |y| & 0 \\ 0 & 0 & |y|^{-1} \end{pmatrix} \omega_{2,3}^{1-\varepsilon(y)}.$$

Pour $j=1,3$ et tout $\varphi \in \mathcal{H}_{j,\chi}$ on définit la fonction $\mathcal{J}_{j,\chi}(\varphi)$ sur $\mathbf{R} \times \mathbf{R}^*$ et à valeurs dans \mathbf{C} , en posant

$$\mathcal{J}_{1,\chi}(\varphi)(x,y) = \varphi(\tau_1(x,y)), \quad \mathcal{J}_{3,\chi}(\varphi)(x,y) = y^{-1}\varphi(\tau_3(x,y)). \quad (59)$$

LEMME 11. Pour tout $\lambda \in \mathbf{R}$, $\chi \in \hat{H}_{j,\lambda}$ ($j=1,3$), l'application $\mathcal{J}_{j,\chi}$ est une isométrie de $\mathcal{H}_{j,\chi}$ sur $L^2(\mathbf{R}^2)$.

Démonstration. Le lemme est une conséquence immédiate

— du fait que $\tau_f(\mathbf{R} \times \mathbf{R}^*)H_j$ est un ouvert de P_j dont le complémentaire est une sous-variété de codimension 1.

— des lemmes 1.3.1 et 1.3.2 et de la formule (22) de chap. V de [1] compte-tenu des formules suivantes

$$d\tau_{1(x,y)} \left(\alpha \frac{\partial}{\partial x} + \beta \frac{\partial}{\partial y} \right) = \tau_{1(x,y)} [(\alpha y - \beta x) Y_{2,3} + \beta y^{-1} H_{2,3}],$$

$$\forall (x,y) \in \mathbf{R} \times \mathbf{R}^*, \forall (\alpha, \beta) \in \mathbf{R}^2$$

$$d\tau_{3(x,y)} \left(\alpha \frac{\partial}{\partial x} + \beta \frac{\partial}{\partial y} \right) = \tau_{2(x,y)} [\alpha y^{-1} Y_{1,2} + \beta y^{-1} H_{2,3}], \quad \forall (x,y) \in \mathbf{R} \times \mathbf{R}^*, \forall (\alpha, \beta) \in \mathbf{R}^2.$$

Q.E.D.

Ainsi pour tout $\lambda \in \mathbf{R}$, $j=1,3$ et $\chi \in \hat{H}_{j,\lambda}$, la représentation $\varrho_{j,\chi}$ induit via $\mathcal{J}_{j,\chi}$ une représentation unitaire de P_j dans $L^2(\mathbf{R}^2)$, représentation que l'on note encore $\varrho_{j,\chi}$. Des calculs analogues à ceux menés dans la démonstration de la proposition 1 conduisent au résultat suivant :

PROPOSITION 6. Soient $\lambda \in \mathbf{R}$ et $\chi \in \hat{H}_{3,\lambda}$. Alors on a pour tout $f \in L^2(\mathbf{R}^2)$,

- (a) $\varrho_{3,\chi}(\mathbf{y}_{1,2}(s)\mathbf{y}_{1,3}(t))f(x,y) = e^{2i\pi n y} f(x-s,y), \quad \forall s, t \in \mathbf{R}$
- (b) $\varrho_{3,\chi}(\mathbf{b}_{1,2}(t))f(x,y) = t^{1/2+2i\pi\lambda} f(t^2x, t^{-1}y), \quad \forall t > 0$
- (c) $\varrho_{3,\chi}(\mathbf{b}_{2,3}(t))f(x,y) = t^{-1} f(t^{-1}x, t^{-1}y), \quad \forall t > 0$
- (d) $\varrho_{3,\chi}(\omega_{1,2}^2)f(x,y) = \chi(\omega_{1,3}^2) f(x,-y) \quad (60)$
- (e) $\varrho_{3,\chi}(\omega_{2,3}^2)f(x,y) = \chi(\sigma^{(1+\varepsilon(y))/2}) f(-x,-y)$
- (f) $\varrho_{3,\chi}(\mathbf{y}_{2,3}(t))f(x,y) = e^{2i\pi t x y} f(x,y), \quad \forall t \in \mathbf{R}$
- (g) $\varrho_{3,\chi}(\alpha_{1,2}(t))f(x,y) = \chi(\omega_{1,3}^{\varepsilon(1-tx)-1} \sigma^{[1+\varepsilon(t)][1-\varepsilon(1-tx)]/4}) |1-tx|^{-1/2-2i\pi\lambda} \\ \times f(x/(1-tx), y(1-tx)), \quad \forall t \in \mathbf{R}$
- (h) $\varrho_{3,\chi}(\omega_{1,2})f(x,y) = \chi(\omega_{1,3}^{1+\varepsilon(x)}) |x|^{-1/2-2i\pi\lambda} f(-1/x, -xy).$

En particulier pour tout $\lambda \in \mathbf{R}$ et $\varepsilon = \pm 1$, les représentations $\varrho_{3, \chi_{\varepsilon, \lambda}}$ et $\varrho_{\varepsilon, \lambda}$ sont égales. Il en est de même des représentations $\varrho_{3, \tilde{\chi}_0}$ (resp. $\varrho_{3, \tilde{\chi}_0}$) et $\tilde{\varrho}_0$ (resp. $\tilde{\varrho}_0$).

Des représentations $\varrho_{1, \chi}$ pour $\chi \in \hat{H}_{1, \lambda}$, $\lambda \in \mathbf{R}$ nous aurons besoin de connaître peu :

LEMME 12. Si $\chi = \chi_{\varepsilon, \lambda}$ avec $\varepsilon = \pm 1$ on a

$$\varrho_{1, \chi}(\omega_{2, 3}) f(x, y) = f(y, -x), \quad \forall f \in L^2(\mathbf{R}^2). \quad (61)$$

Si $\chi = \tilde{\chi}_\lambda$ ou $\chi = \tilde{\tilde{\chi}}_\lambda$ on a

$$\varrho_{1, \chi}(\omega_{2, 3}) f(x, y) = (-y, -x) f(y, -x), \quad \forall f \in L^2(\mathbf{R}^2). \quad (62)$$

Démonstration. Ces formules résultent de l'égalité suivante :

$$\omega_{2, 3}^{-1} \tau_1(x, y) = \omega_{2, 3}^{-1} y_{2, 3}(x/y) b_{2, 3}(|y|) \omega_{2, 3}^{1-\varepsilon(y)}$$

que l'on peut réécrire, en utilisant la formule (43) de la démonstration de la proposition 1

$$\begin{aligned} \omega_{2, 3}^{-1} \tau_1(x, y) &= y_{2, 3}(-y/x) b_{2, 3}(|x/y|) \omega_{2, 3}^{-(1+\varepsilon(xy))} \alpha_{2, 3}(y/x) b_{2, 3}(|y|) \omega_{2, 3}^{1-\varepsilon(y)} \\ &= y_{2, 3}(-y/x) b_{2, 3}(|x|) \omega_{2, 3}^{1+\varepsilon(x)} \sigma^{[1+\varepsilon(y)][1+\varepsilon(x)]/4} \alpha_{2, 3}(1/xy) \\ &= \tau_1(y, -x) \sigma^{[1+\varepsilon(y)][1+\varepsilon(x)]/4} \alpha_{2, 3}(1/xy). \end{aligned} \quad \text{Q.E.D.}$$

2. Représentations de B , opérateurs d'entrelacement et construction d'un opérateur unitaire pour représenter $\omega_{2, 3}$

Soit, pour $\lambda \in \mathbf{R}$, f'_λ la restriction à la sous-algèbre \mathfrak{b} de la forme linéaire $X \mapsto \text{tr}(XZ_\lambda)$. Alors le stabilisateur de f'_λ dans B n'est autre que $B \cap S_\lambda$, et, comme il ne dépend pas de $\lambda \in \mathbf{R}$, on le note S' . En fait S' est l'ensemble des éléments de $S\tilde{L}_3(\mathbf{R})$ dont la projection dans $SL_3(\mathbf{R})$ est de la forme

$$\begin{pmatrix} t & 0 & 0 \\ 0 & t^{-2} & 0 \\ 0 & 0 & t \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbf{R}^*.$$

Pour $j=1, 3$, $\mathfrak{h}'_j = \mathfrak{h}_j \cap \mathfrak{b}$ est une polarisation réelle de \mathfrak{b} au point f'_λ , vérifiant la condition de Pukanszky $H'_j \cdot f'_\lambda = f'_\lambda + \mathfrak{h}'_j^\perp$ où $H'_j = H_j \cap B = S' \exp \mathfrak{h}_{0, j}$. Pour tout $\chi \in \hat{H}_{j, \lambda}$ on note χ' la restriction de χ à H'_j . On voit alors facilement que, si $\hat{H}'_{j, \lambda}$ désigne l'ensemble des

caractères de H'_j dont la différentielle est $2i\pi f'_\lambda|_{\mathfrak{h}'_j}$, l'application $\chi \rightarrow \chi'$ est une bijection de $\hat{H}_{j,\lambda}$ sur $\hat{H}'_{j,\lambda}$. Enfin pour $\lambda \in \mathbf{R}$ et $\chi \in \hat{H}_{j,\lambda}$, $\varrho'_{j,\chi}$ désigne la restriction à B de la représentation $\varrho_{j,\chi}$ de P_j . Comme B/H'_j est un ouvert de P_j/H_j dont le complémentaire est une sous-variété de codimension 1, il est clair que l'on a $\varrho'_{j,\chi} = \text{Ind}_{H'_j}^B \chi'$.

PROPOSITION 7. Soit $j=1$ ou 3 . Alors les représentations $\varrho'_{j,\chi}$, $\chi \in \hat{H}_{j,\lambda}$ sont irréductibles et deux à deux inéquivalentes.

Démonstration. Le sous-groupe $\exp \mathfrak{h}_{0,j}$ de B est un sous-groupe distingué, et si η_j désigne le caractère de $\exp \mathfrak{h}_{0,j}$ dont la différentielle est la restriction de la forme linéaire $2i\pi f'_0$ à $\mathfrak{z}_{0,j}$ le stabilisateur de η_j dans B n'est autre que H'_j et les $\hat{H}'_{j,\lambda}$, $\lambda \in \mathbf{R}$ sont des ensembles, deux à deux disjoints, de caractères de H'_j prolongeant η_j . Il suffit alors d'appliquer la méthode des petits groupes de Mackey à B et au sous-groupe $\exp \mathfrak{h}_{0,j}$. Q.E.D.

Maintenant nous allons voir que pour $\lambda \in \mathbf{R}$ et $\chi_j \in \hat{H}_{j,\lambda}$, $j=1,3$, tels que $\chi_1|_{S'} = \chi_3|_{S'}$, fixés, les représentations ϱ'_{1,χ_1} , ϱ'_{3,χ_3} sont équivalentes. Pour $\lambda \in \mathbf{R}$, $\chi \in \hat{H}_{j,\lambda}$ l'espace de la représentation $\text{Ind}_{H'_j}^B \chi'$ n'est autre que l'espace $\mathcal{H}'_{j,\chi}$ des restrictions à B des éléments de $\mathcal{H}_{j,\chi}$, et si pour tout $\varphi \in \mathcal{H}'_{j,\chi}$ on note $\mathcal{I}'_{j,\chi}(\varphi)$ la fonction de deux variables définie par la formule (59), l'application $\mathcal{I}'_{j,\chi}$ est une isométrie de $\mathcal{H}'_{j,\chi}$ sur $L^2(\mathbf{R}^2)$.

Il est clair que sur l'espace homogène $H'_1/H'_1 \cap H'_3$ il y a une mesure H'_1 -invariante, $d\dot{u}$, telle que pour toute fonction f définie sur H'_1 et invariante à droite pour $H'_1 \cap H'_3$ on ait

$$\int_{H'_1/H'_1 \cap H'_3} f(u) d\dot{u} = \int_{\mathbf{R}} f(y_{1,2}(t)) dt$$

Soient donc $\lambda \in \mathbf{R}$ et $\chi_j \in \hat{H}_{j,\lambda}$ tels que $\chi_1|_{S'} = \chi_3|_{S'}$. En utilisant le paragraphe 3 de [3], on voit que pour toute fonction $\varphi \in \mathcal{H}'_{3,\chi_3}$ et tout $g \in B$ la fonction définie sur H'_1 par

$$u \mapsto \varphi(gu) \chi_1(u) \Delta_{H'_1, B}(u)^{-1/2}$$

est $H'_1 \cap H'_3$ -invariante à droite et que, si on pose

$$\mathcal{C}_{\chi_1, \chi_3}(\varphi)(g) = \int_{H'_1/H'_1 \cap H'_3} \varphi(gu) \chi_1(u) \Delta_{H'_1, B}(u)^{-1/2} d\dot{u} \tag{63}$$

l'opérateur $\mathcal{C}_{\chi_1, \chi_3}$, pourvu que cela ait un sens (par exemple : l'intégrale (63) converge

lorsque φ est C^∞ et à support compact modulo H'_3 et dans ce cas $\mathcal{C}_{\chi_1, \chi_3}(\varphi)$ est un élément de \mathcal{H}'_{1, χ_1} isométrique à φ) définit un opérateur d'entrelacement entre les représentations ϱ_{3, χ_3} et ϱ_{1, χ_1} .

Lorsque l'opérateur $\mathcal{C}_{\chi_1, \chi_3}$ est défini, il induit via les opérateurs \mathcal{F}'_{j, χ_j} un opérateur de $L^2(\mathbf{R}^2)$ encore noté $\mathcal{C}_{\chi_1, \chi_3}$.

PROPOSITION 8. Soient $\lambda \in \mathbf{R}$ et $\chi_j \in \hat{H}_{j, \lambda}$ tels que $\chi_1|_{S'} = \chi_3|_{S'}$. Alors on a pour tout $f \in L^2(\mathbf{R}^2)$,

$$\mathcal{C}_{\chi_1, \chi_3}(f)(x, y) = \int e^{-2i\pi x \xi} f(\xi, y) d\xi. \quad (64)$$

Démonstration. On a pour tout $(x, y) \in \mathbf{R}^2$ et tout $t \in \mathbf{R}$

$$\tau_1(x, y) \mathbf{y}_{1,2}(t) = \tau_3(ty, y) \mathbf{y}_{1,3}(txy) \mathbf{y}_{2,3}(xy)$$

et ainsi, pour tout $f \in \mathcal{D}(\mathbf{R}^2)$ on a

$$\mathcal{F}'_{3, \chi_3}(f)(\tau_1(x, y) \mathbf{y}_{1,2}(t)) = y e^{-2i\pi txy} f(ty, y)$$

et alors,

$$\begin{aligned} \mathcal{C}_{\chi_1, \chi_3}(f)(x, y) &= \int \mathcal{F}'_{3, \chi_3}(f)(\tau_1(x, y) \mathbf{y}_{1,2}(t)) \chi_1(\mathbf{y}_{1,2}(t)) \Delta_{H'_1, B}(\mathbf{y}_{1,2}(t))^{-1/2} dt \\ &= \int y e^{-2i\pi txy} f(ty, y) dt = \int e^{-2i\pi x \xi} f(\xi, y) d\xi. \end{aligned} \quad \text{Q.E.D.}$$

COROLLAIRE. Sous les mêmes hypothèses les représentations ϱ'_{1, χ_1} et ϱ'_{3, χ_3} sont équivalentes.

Pour tout $\lambda \in \mathbf{R}$ et tout $\chi \in \hat{H}_{3, \lambda}$ il existe un unique caractère $\chi_1 \in \hat{H}_{1, \lambda}$ tel que $\chi|_{S'} = \chi_1|_{S'}$. On définit alors l'opérateur unitaire $\varrho_{3, \chi}(\omega_{2,3})$ de $L^2(\mathbf{R}^2)$ en posant

$$\varrho_{3, \chi}(\omega_{2,3}) = \mathcal{C}_{\chi_1, \chi}^{-1} \circ \varrho_{1, \chi_1}(\omega_{2,3}) \circ \mathcal{C}_{\chi_1, \chi}. \quad (65)$$

En utilisant le lemme 12 et les formules (64) et (65) on voit facilement que l'on a

PROPOSITION 9. Soient $\lambda \in \mathbf{R}$ et $\chi \in \hat{H}_{3, \lambda}$ alors on a

$$\begin{aligned} \varrho_{3, \chi}(\omega_{2,3}) &= U \quad \text{si } \chi = \chi_{\varepsilon, \lambda}, \quad \varepsilon = \pm 1 \\ \varrho_{3, \chi}(\omega_{2,3}) &= \tilde{U} \quad \text{si } \chi = \tilde{\chi}_\lambda, \quad \text{ou } \chi = \bar{\tilde{\chi}}_\lambda. \end{aligned}$$

En particulier on a

$$\begin{aligned} \varrho_{3,\chi_{\varepsilon,\lambda}}(\omega_{2,3}) &= \varrho_{\varepsilon,\lambda}(\omega_{2,3}), \quad \forall \lambda \in \mathbf{R}, \varepsilon = \pm 1 \\ \varrho_{\tilde{\chi}_\lambda}(\omega_{2,3}) &= \tilde{\varrho}_0(\omega_{2,3}), \quad \varrho_{\tilde{\chi}_\lambda}(\omega_{2,3}) = \tilde{\varrho}_0(\omega_{2,3}), \quad \forall \lambda \in \mathbf{R}. \end{aligned}$$

Ainsi lorsque les deux méthodes envisagées pour construire un opérateur unitaire représentant l'élément $\omega_{2,3}$ s'appliquent, elles donnent le même résultat.

Remarque. Par construction de l'opérateur $\varrho_{3,\chi}(\omega_{2,3})$ il est clair que ce dernier vérifie les relations de commutation 18 (i) et (ii) relativement à la représentation $\varrho_{3,\chi}$ de P_3 : en effet ces relations se situent toutes dans le groupe P_1 .

3. Unicité du prolongement

PROPOSITION 10. Soient $\lambda \in \mathbf{R}$ et $\chi \in \hat{H}_{3,\lambda}$, alors la restriction de la représentation $\varrho_{3,\chi}$ au groupe Q est irréductible.

Démonstration. Soient \mathfrak{q} l'algèbre de Lie de Q et g_λ la forme linéaire sur \mathfrak{q} restriction de la forme linéaire $X \rightarrow \text{tr}(XZ'_\lambda)$ où Z'_λ est la matrice de $sl_3(\mathbf{R})$ $Z'_\lambda = Z_\lambda + X_{1,2}$; on a

$$g_\lambda(X) = u + v + \lambda a \quad \text{si } X = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ u & b-a & 0 \\ v & 0 & -b \end{pmatrix} \in \mathfrak{q}.$$

Alors le noyau de π est le stabilisateur de g_λ dans Q , la sous-algèbre de \mathfrak{q} , $\mathfrak{h} = \mathfrak{h}_3 \cap \mathfrak{q}$ est une polarisation relativement à g_λ , qui vérifie la condition de Pukanszky lorsqu'on se restreint à la composante neutre \dot{Q} de Q , et, si on note $\hat{\chi}$ la restriction de χ à $\exp \mathfrak{h}$, la différentielle de $\hat{\chi}$ n'est autre que la restriction de la forme linéaire $2i\pi g_\lambda$ à \mathfrak{h} . Ainsi la représentation de \dot{Q} , $\hat{\varrho}_\chi = \text{Ind}_{\exp \mathfrak{h}}^{\dot{Q}} \hat{\chi}$, est irréductible.

Si on pose $H = H_3 \cap Q$, alors H est un sous-groupe de Q engendré par $\omega_{1,3}^2$ et $\exp \mathfrak{h}$, et on a aussi $Q/H \approx B/H'_3$; ainsi on peut écrire

$$\varrho_{3,\chi|_Q} = \text{Ind}_H^Q \chi|_H.$$

Enfin le stabilisateur de $\hat{\varrho}_\chi$ dans Q est le sous-groupe Q^0 de Q engendré par $\omega_{1,3}^2$ et \dot{Q} , qui contient H , et si on note ϱ_χ^0 la représentation $\varrho_\chi^0 = \text{Ind}_H^{Q^0} \chi|_H$ alors $\varrho_\chi^0|_{\dot{Q}} = \hat{\varrho}_\chi$ et de plus

$$\varrho_{3,\chi|_Q} = \text{Ind}_{Q^0}^Q \varrho_\chi^0.$$

La méthode des petits groupes de Mackey appliquée à \hat{Q} et Q permet de conclure. Q.E.D.

COROLLAIRE. *Pour tout $\lambda \in \mathbf{R}$ et tout $\chi \in \hat{H}_{3,\lambda}$ il existe au plus une représentation de $\tilde{SL}_3(\mathbf{R})$ prolongeant la représentation $\varrho_{3,\chi}$ de P_3 .*

Démonstration. Une telle représentation est entièrement déterminée par l'opérateur $\varrho_{3,\chi}(\omega_{2,3})$. Les conditions de commutation (18) (i) du lemme 5 déterminent cet opérateur à un scalaire multiplicatif près, à cause de l'irréductibilité de la représentation $\varrho_{3,\chi|_Q}$. L'unicité résulte alors de la condition (18) (iii). Q.E.D.

Pour alléger, dans la suite nous écrirons P au lieu de P_3 et $\bar{\varrho}_\lambda$ (resp. $\bar{\varrho}_\lambda$) au lieu de $\varrho_{3,\bar{\chi}_\lambda}$ (resp. $\varrho_{3,\bar{\chi}_\lambda}$).

VI. Etude du prolongement des représentations $\varrho_{\varepsilon,\lambda}$ à $SL_3(\mathbf{R})$

1. Polarisation invariante et représentations induites à partir d'un caractère d'un parabolique maximal

La forme linéaire sur $sl_3(\mathbf{R})$, $X \mapsto \text{tr } Z_\lambda X$, admet deux polarisations réelles dont l'une d'entre elles est la sous-algèbre parabolique maximale

$$\mathfrak{p}_+ = \mathfrak{b}_+ \oplus \mathbf{R}Y_{2,3}$$

et si P_+ désigne le sous-groupe parabolique maximal de $\tilde{SL}_3(\mathbf{R})$ d'algèbre de Lie \mathfrak{p}_+ , P_+ est le sous-groupe engendré par S_λ et $\exp \mathfrak{p}_+$. Enfin les caractères de P_+ dont la différentielle est la restriction à \mathfrak{p}_+ de la forme linéaire $X \mapsto 2i\pi \text{Tr } XZ_\lambda$ sont au nombre de deux; ce sont les caractères $\chi_{\varepsilon,\lambda}$, $\varepsilon = \pm 1$ définis par

$$\left. \begin{aligned} \chi_{1,\lambda}(\mathfrak{p}) &= |t|^{2i\pi\lambda} \\ \chi_{-1,\lambda}(\mathfrak{p}) &= \varepsilon(t) |t|^{2i\pi\lambda} \end{aligned} \right\} \text{ pour tout } \mathfrak{p} \in P_+ \text{ tel que } \pi(\mathfrak{p}) = \begin{pmatrix} t & u & v \\ 0 & a & b \\ 0 & c & d \end{pmatrix}. \quad (66)$$

On définit alors pour tout $\lambda \in \mathbf{R}$ deux représentations de $SL_3(\mathbf{R})$

$$\varrho'_{\varepsilon,\lambda} = \text{Ind}_{P_+}^{\tilde{SL}_3(\mathbf{R})} \chi_{\varepsilon,\lambda}, \quad \varepsilon = \pm 1.$$

Il est intéressant de donner l'interprétation de la construction de ces représentations en terme de quantification géométrique. La polarisation \mathfrak{p}_+ , induit sur l'orbite \mathcal{O}_λ une polarisation invariante \mathcal{F}_λ définie par

$$\mathcal{F}_{\lambda, z_\lambda} = \left\{ \left. \frac{d}{dt} g(\exp tX) \cdot Z_\lambda \right|_{t=0} ; X \in \mathfrak{p}_+ \right\}, \quad \forall g \in \widetilde{SL}_3(\mathbf{R}).$$

En fait en tout point $m \in \mathcal{O}_{\lambda, j}$ le système de vecteurs tangents $(\partial/\partial p_i)_{i \neq j}$ constitue une base de $\mathcal{F}_{\lambda, m}$. On définit alors pour tout $\chi \in \widehat{S}_\lambda$ l'espace $\mathcal{H}_{\chi, 1/2}^{\mathcal{F}_\lambda}$; cet espace est non nul si et seulement si $\chi = \chi_{\varepsilon, \lambda}$ avec $\varepsilon = \pm 1$. Comme l'espace quotient $\mathcal{O}_\lambda/\mathcal{F}_\lambda$ est isomorphe à \mathbf{P}_2 il n'est pas difficile de voir que $\mathcal{H}_{\chi, 1/2}^{\mathcal{F}_\lambda}$ est isomorphe à l'espace $L^2(\mathbf{P}_2, d\mu)$ où $d\mu$ est une mesure $SO_3(\mathbf{R})$ -invariante bien déterminée. Mais il est plus intéressant pour nous de réaliser l'espace $\mathcal{H}_{\chi, 1/2}^{\mathcal{F}_\lambda}$ comme l'espace $L^2(\mathbf{R}^2)$.

On note $\nu_{\mathcal{F}_\lambda}$ la $\frac{1}{2}$ - \mathcal{F}_λ -densité \mathcal{F}_λ -covariante et définie sur $\mathcal{O}_{1, \lambda}$ par

$$\nu_{\mathcal{F}_\lambda} \left(\frac{\partial}{\partial p_2}, \frac{\partial}{\partial p_3} \right) = 1.$$

Si s est une section du fibré L_χ , alors $s \in \Gamma_\chi^{\mathcal{F}_\lambda}$ si et seulement si la fonction $[s]$ (cf. III § 3,b et IV § 1,a) vérifie la condition

$$\frac{\partial}{\partial p_2^1} [s] = \frac{\partial}{\partial p_3^1} [s] = 0. \quad (67)$$

Alors pour tout $\psi \in \Gamma_{\chi, 1/2}^{\mathcal{F}_\lambda}$ on définit la fonction de deux variables $\mathcal{J}_{\mathcal{F}_\lambda}^\chi(\psi)$ en posant

$$\mathcal{J}_{\mathcal{F}_\lambda}^\chi(\psi)(q_2, q_3) = [s_\psi^{\mathcal{F}_\lambda}](q_2, q_3, p_2, p_3) \quad (68)$$

où $s_\psi^{\mathcal{F}_\lambda}$ est l'unique élément de $\Gamma_{\chi|_{\mathcal{O}_{\lambda, 1}}}^{\mathcal{F}_\lambda}$ tel que

$$\psi|_{\mathcal{O}_{\lambda, 1}} = s_\psi^{\mathcal{F}_\lambda} \nu_{\mathcal{F}_\lambda}. \quad (69)$$

Alors on voit sans peine que l'application $\mathcal{J}_{\mathcal{F}_\lambda}^\chi$ induit une isométrie de $\mathcal{H}_{\chi, 1/2}^{\mathcal{F}_\lambda}$ sur $L^2(\mathbf{R}^2)$, ceci pour $\chi = \chi_{\varepsilon, \lambda}$, $\varepsilon = \pm 1$, $\lambda \in \mathbf{R}$.

Des calculs faciles montrent que l'on a le résultat suivant :

PROPOSITION 11. *La représentation $\varrho'_{\varepsilon, \lambda}$, $\varepsilon = \pm 1$, $\lambda \in \mathbf{R}$ est déterminée par les relations suivantes valables pour tout $f \in L^2(\mathbf{R}^2)$:*

- (a) $\varrho'_{\varepsilon, \lambda}(y_{1,2}(t)) f(x, y) = f(x-t, y), \quad \forall t \in \mathbf{R}$
- (b) $\varrho'_{\varepsilon, \lambda}(y_{2,3}(t)) f(x, y) = f(x, y-xt), \quad \forall t \in \mathbf{R}$
- (c) $\varrho'_{\varepsilon, \lambda}(x_{1,2}(t)) f(x, y) = \chi'_{\varepsilon, \lambda}(1-tx) |1-tx|^{-3/2} f\left(\frac{x}{1-tx}, \frac{y}{1-tx}\right), \quad \forall t \in \mathbf{R} \quad (70)$

$$(d) \varrho'_{\varepsilon, \lambda}(\mathfrak{b}_{2,3}(t)) f(x, y) = f(t^{-1}x, ty), \quad \forall t \in \mathbf{R}^*$$

$$(e) \varrho'_{\varepsilon, \lambda}(\mathfrak{w}_{2,3}) f(x, y) = f(-y, x).$$

2. Dualité et opérateur d'entrelacement

Les polarisations \mathcal{P}_λ et \mathcal{F}_λ ne sont pas transverses, mais elles sont telles qu'en tout point $m \in \mathcal{O}_{\lambda,1}^3$ $\mathcal{P}_{\lambda_m} \cap \mathcal{F}_{\lambda_m} = \mathbf{R}(\partial/\partial p_1)$. Ainsi l'espace quotient $Y_\lambda = \mathcal{O}_{\lambda,1}^3 / \mathcal{P}_\lambda \cap \mathcal{F}_\lambda$ existe et il est isomorphe à la sous-variété de $\mathcal{O}_{\lambda,1}^3$ constituée des points

$$m_{\lambda,1} \begin{pmatrix} q_2 & 0 \\ q_3 & p_3 \end{pmatrix},$$

la projection canonique $\pi_\lambda: \mathcal{O}_{\lambda,1}^3 \rightarrow Y_\lambda$ étant déterminée par

$$\pi_\lambda \left(m_{\lambda,1} \begin{pmatrix} q_2 & p_2 \\ q_3 & p_3 \end{pmatrix} \right) = m_{\lambda,1} \begin{pmatrix} q_2 & 0 \\ q_3 & p_3 \end{pmatrix}.$$

Soient $\varphi \in \Gamma_{\chi, 1/2}^{\mathcal{P}_\lambda}$ et $\psi \in \Gamma_{\chi, 1/2}^{\mathcal{F}_\lambda}$. Choisissons $m \in \mathcal{O}_{\lambda,1}^3$ et $(\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4)$ une base symplectique $T_m(\mathcal{O}_{\lambda,1}^3)$ telle que (ξ_1, ξ_2) (resp. ξ_1, ξ_3) soit une base de \mathcal{P}_λ (resp. \mathcal{F}_λ) et soit b la base duale dans $T_{\pi_\lambda(m)}^*(Y_\lambda)$ de la base de $T_{\pi_\lambda(m)}(Y_\lambda)$ constituée des vecteurs tangents $(d\pi_{\lambda_m}(\xi_2), d\pi_{\lambda_m}(\xi_3), d\pi_{\lambda_m}(\xi_4))$. Alors le nombre

$$(s_\varphi^{\mathcal{P}_\lambda}(m), s_\psi^{\mathcal{F}_\lambda}(m))_{\chi, \mathcal{P}_\lambda, \mathcal{F}_\lambda}(\xi_1, \xi_2) \overline{v_{\mathcal{F}_\lambda}(\xi_1, \xi_3)}$$

ne dépend que de b , et, si on le note $\langle \langle \varphi, \psi \rangle \rangle_{\chi, \mathcal{P}_\lambda, \mathcal{F}_\lambda}(b)$, la fonction $\langle \langle \varphi, \psi \rangle \rangle_{\chi, \mathcal{P}_\lambda, \mathcal{F}_\lambda}$, définit une densité sur Y_λ qui dépend sesquilinéairement de φ et ψ . On note alors $\langle , \rangle_{\chi, \mathcal{P}_\lambda, \mathcal{F}_\lambda}$ la dualité définie sur $\mathcal{H}_{\chi, 1/2}^{\mathcal{P}_\lambda} \times \mathcal{H}_{\chi, 1/2}^{\mathcal{F}_\lambda}$ par

$$\langle \varphi, \psi \rangle_{\chi, \mathcal{P}_\lambda, \mathcal{F}_\lambda} = \int_{Y_\lambda} \langle \langle \varphi, \psi \rangle \rangle_{\chi, \mathcal{P}_\lambda, \mathcal{F}_\lambda} \quad (71)$$

et on note aussi $\langle , \rangle_{\chi, \mathcal{P}_\lambda, \mathcal{F}_\lambda}$ la dualité qu'elle induit sur l'espace $L^2(\mathbf{R}^2)$. Soit $\mathcal{I}_{\chi, \mathcal{F}_\lambda}^{\mathcal{P}_\lambda}$ l'opérateur de $L^2(\mathbf{R}^2)$ (formellement) défini par

$$\langle f, \mathcal{I}_{\chi, \mathcal{F}_\lambda}^{\mathcal{P}_\lambda}(g) \rangle = \langle f, g \rangle_{\chi, \mathcal{P}_\lambda, \mathcal{F}_\lambda}, \quad \forall f, g \in L^2(\mathbf{R}^2).$$

LEMME 13. L'opérateur $\mathcal{I}_{\chi, \mathcal{F}_\lambda}^{\mathcal{P}_\lambda}$ est bien défini et il est donné par la formule

$$\mathcal{F}_{\chi, \mathcal{F}_\lambda}^{\mathcal{P}_\lambda}(g)(x, y) = \int e^{2i\pi y \zeta} g(x, \zeta) d\zeta, \quad \forall g \in L^2(\mathbf{R}^2). \quad (72)$$

Démonstration. En tout point $m \in \mathcal{O}_{\lambda, 1}^3$, $(\partial/\partial p_2^1, \partial/\partial p_3^1)_m$ (resp. $(\partial/\partial q_3^1, \partial/\partial p_2^1)_m$) est une base de \mathcal{F}_λ (resp. \mathcal{P}_λ) et la base duale de la base $d\pi_{\lambda, m}(\partial/\partial p_3^1, \partial/\partial q_3^1, \partial/\partial p_2^1)$ n'est autre que (dp_3, dq_3, dq_2) (Y_λ s'identifie à $\mathbf{R}^2 \times \mathbf{R}^*$ via l'application de $\mathbf{R}^2 \times \mathbf{R}^*$ sur Y_λ),

$$(q_2, q_3, p_3) \mapsto m_{0,1} \begin{pmatrix} q_2 & 0 \\ q_3 & p_3 \end{pmatrix}.$$

Le lemme est alors conséquence immédiate de la formule valable pour tout $f, g \in \mathcal{D}(\mathbf{R}^2)$,

$$\langle \langle (\mathcal{F}_{\mathcal{P}_\lambda}^\chi)^{-1}(f), (\mathcal{F}_{\mathcal{P}_\lambda}^\chi)^{-1}(g) \rangle \rangle_{\chi, \mathcal{P}_\lambda, \mathcal{F}_\lambda}(dq_2, dq_3, dp_3)_{(m)} = e^{-2i\pi q_3 p_3} f(q_2, p_3) \overline{g(q_2, q_3)}.$$

Q.E.D.

On a alors le résultat suivant :

PROPOSITION 12. *Pour tout $\lambda \in \mathbf{R}$ et $\varepsilon = \pm 1$ la représentation $\varrho_{\varepsilon, \lambda}$ de P se prolonge de manière unique à $\tilde{SL}_3(\mathbf{R})$, le prolongement étant déterminé par*

$$\varrho_{\varepsilon, \lambda}(\omega_{2,3}) = U.$$

De plus l'opérateur $\mathcal{F}_{\chi_{\varepsilon, \lambda}, \mathcal{F}_\lambda}^{\mathcal{P}_\lambda}$ entrelace les représentations $\varrho'_{\varepsilon, \lambda}$ et $\varrho_{\varepsilon, \lambda}$.

Démonstration. C'est une conséquence immédiate des formules suivantes valables pour tout $\chi = \chi_{\varepsilon, \lambda}$, $\lambda \in \mathbf{R}$, $\varepsilon = \pm 1$:

$$\mathcal{F}_{\chi, \mathcal{F}_\lambda}^{\mathcal{P}_\lambda} \varrho'_\chi(g) = \varrho_\chi(g) \mathcal{F}_{\chi, \mathcal{F}_\lambda}^{\mathcal{P}_\lambda}$$

où g parcourt le système de générateurs de $\tilde{SL}_3(\mathbf{R})$ constitué de l'élément $\omega_{2,3}$ et des éléments

$$y_{1,2}(t), x_{1,2}(t), y_{2,3}(t), t \in \mathbf{R}, \quad h_{2,3}(t), t \in \mathbf{R}^*$$

qui engendrent P . La démonstration de ces formules se ramène à des calculs triviaux. Q.E.D.

En résumé, nous avons associé à chaque orbite \mathcal{O}_λ , $\lambda \in \mathbf{R}$ deux représentations unitaires irréductibles $\varrho_{\varepsilon, \lambda}$, $\varepsilon = \pm 1$ de $SL_3(\mathbf{R})$ chacune respectivement équivalente à la représentation induite à partir du caractère $\chi_{\varepsilon, \lambda}$ du parabolique maximal P_+ . Les représentations $\varrho_{\varepsilon, \lambda}$, $\lambda \in \mathbf{R}$, $\varepsilon = \pm 1$ sont deux à deux inéquivalentes. Enfin elles sont

réalisées dans l'espace $L^2(\mathbf{R}^2)$ et déterminées par les formules, valables pour tout $f \in L^2(\mathbf{R}^2)$

$$\left. \begin{aligned} \varrho_{\varepsilon, \lambda}(\mathbf{y}_{1,2}(t)) f(x, y) &= f(x-t, y), \quad \forall t \in \mathbf{R} \\ \varrho_{\varepsilon, \lambda}(\omega_{1,2}) f(x, y) &= \chi'_{\varepsilon, \lambda}(-x^{-1}) |x|^{-1/2} f(-1/x, -xy) \\ \varrho_{\varepsilon, \lambda}(\mathbf{y}_{2,3}(t)) f(x, y) &= e^{2i\pi txy} f(x, y), \quad \forall t \in \mathbf{R} \\ \varrho_{\varepsilon, \lambda}(\omega_{2,3}) f(x, y) &= \int e^{-2i\pi(x\xi + y\zeta)} f(\xi, \zeta) d\xi d\zeta. \end{aligned} \right\} \quad (73)$$

VII. La représentation $\tilde{\varrho}$

Ce chapitre est consacré à la démonstration du résultat suivant :

THEOREME 1. (i) *Il n'existe pas de représentation de $\tilde{S}\tilde{L}_3(\mathbf{R})$ prolongeant l'une quelconque des représentations de P , $\tilde{\varrho}_\lambda$, $\lambda \in \mathbf{R}$ ou $\tilde{\varrho}_\lambda$, $\lambda \in \mathbf{R}^*$.*

(ii) *Il existe une unique représentation de $\tilde{S}\tilde{L}_3(\mathbf{R})$ prolongeant la représentation $\tilde{\varrho} (= \tilde{\varrho}_0)$ de P . Cette représentation, encore notée $\tilde{\varrho}$, est unitaire et irréductible. Elle est réalisée dans $L^2(\mathbf{R}^2)$ et elle est déterminée par les formules suivantes*

$$\left. \begin{aligned} \text{(a)} \quad \tilde{\varrho}(\mathbf{y}_{1,2}(t)) f(x, y) &= f(x-t, y), \quad \forall t \in \mathbf{R} \\ \text{(b)} \quad \tilde{\varrho}(\omega_{1,2}(t)) f(x, y) &= i^{-\varepsilon(t)(1-\varepsilon(1-tx))/2} |1-tx|^{-1/2} f\left(\frac{x}{1-tx}, y(1-tx)\right), \quad \forall t \in \mathbf{R} \\ \text{(c)} \quad \tilde{\varrho}(\mathbf{y}_{2,3}(t)) f(x, y) &= e^{2i\pi txy} f(x, y), \quad \forall t \in \mathbf{R} \\ \text{(d)} \quad \tilde{\varrho}(\omega_{2,3}) f(x, y) &= \int (-y, \zeta) e^{-2i\pi(x\xi + y\zeta)} f(\xi, \zeta) d\xi d\zeta. \end{aligned} \right\} \quad (74)$$

1. Préliminaires

Pour tout nombre complexe τ on définit les fonctions de la variable réelle x , x_+^τ et x_-^τ en posant

$$\begin{aligned} x_+^\tau &= x^\tau, \quad \forall x > 0, \quad x_+^\tau = 0, \quad \forall x \leq 0 \\ x_-^\tau &= 0, \quad \forall x \geq 0, \quad x_-^\tau = |x|^\tau, \quad \forall x < 0. \end{aligned}$$

Si $\text{Re } \tau > -1$ ces fonctions sont localement intégrables et elles définissent des distributions tempérées que l'on note de la même façon.

On considère aussi les fonctions de la variable réelle x , $(x+i0)^{-1/2}$ et $(x-i0)^{-1/2}$ définies par

$$(x+i0)^{-1/2} = \lim_{t \rightarrow +0} (x+it)^{-1/2}$$

$$(x-i0)^{-1/2} = \lim_{t \rightarrow +0} (x-it)^{-1/2}.$$

Il est immédiat que

$$(x+i0)^{-1/2} = x_+^{-1/2} - ix_-^{-1/2} \quad \text{et} \quad (x-i0)^{-1/2} = x_+^{-1/2} + ix_-^{-1/2}.$$

Si $f \in L^2(\mathbf{R})$ on notera \hat{f} sa transformée de Fourier définie par

$$\hat{f}(x) = \int e^{2i\pi x\xi} f(\xi) d\xi.$$

On notera $f \mapsto f^\vee$ l'application réciproque de la transformée de Fourier sur \mathbf{R} . Dans la suite \mathcal{S} désigne l'espace des fonctions de Schwartz sur la droite réelle, \mathcal{S}' l'espace des distributions tempérées sur \mathbf{R} et \mathcal{S}_- (resp. \mathcal{S}_+) le sous-espace des éléments de \mathcal{S} dont le support est contenu dans $]-\infty, 0[$ (resp. $]0, +\infty[$).

Pour tout élément $T \in \mathcal{S}'$ nous noterons \hat{T} sa transformée de Fourier, i.e. la distribution de \mathcal{S}' définie par

$$\hat{T}(f) = T(\hat{f}), \quad \forall f \in \mathcal{S}.$$

Pour tout $\lambda \in \mathbf{R}$ on note T_λ et \tilde{T}_λ les fonctions à valeurs dans \mathcal{S}' et définies sur \mathbf{R} par

$$\langle T_\lambda(y), f \rangle = \int e^{-2i\pi y\xi^{-1}} (\xi-i0)^{-1/2} |\xi|^{2i\pi\lambda} \hat{f}(\xi) d\xi, \quad \forall y \in \mathbf{R}, \forall f \in \mathcal{S}$$

$$\langle \tilde{T}_\lambda(y), f \rangle = \int e^{-2i\pi y\xi^{-1}} (\xi+i0)^{-1/2} |\xi|^{2i\pi\lambda} \hat{f}(\xi) d\xi, \quad \forall y \in \mathbf{R}, \forall f \in \mathcal{S}.$$

LEMME 14. *Supposons que T soit l'une des fonctions T_λ ou \tilde{T}_λ . Si pour tout $f \in \mathcal{S}_- * \mathcal{S}_-$ la fonction $y \mapsto \langle T(y), f \rangle$ s'annule pour presque tout $y < 0$ alors $T = T_0$.*

Démonstration. Comme $\mathcal{S}_- * \mathcal{S}_-$ est dense dans le sous-espace fermé \mathcal{S}_- de \mathcal{S} et que l'application $y \mapsto T(y)$ est une application continue de \mathbf{R} à valeurs dans \mathcal{S}' , l'hypothèse entraîne que la distribution $T(0)$ s'annule sur \mathcal{S}_- , i.e. que le support de $T(0)$ est contenu dans $[0, +\infty[$. On se ramène donc à montrer que parmi les distribu-

tions $[(\xi-i0)^{-1/2}|\xi|^{2i\pi\lambda}]^\wedge$ et $[(\xi+i0)^{-1/2}|\xi|^{2i\pi\lambda}]^\wedge$, $\lambda \in \mathbf{R}$, seule la distribution $[(\xi-i0)^{-1/2}]^\wedge$ a son support contenu dans $[0, +\infty[$.

Or on a

$$\begin{aligned}(\xi-i0)^{-1/2}|\xi|^{2i\pi\lambda} &= \xi_+^{-1/2+2i\pi\lambda} + i\xi_-^{-1/2+2i\pi\lambda} \\ (\xi+i0)^{-1/2}|\xi|^{2i\pi\lambda} &= \xi_+^{-1/2+2i\pi\lambda} - i\xi_-^{-1/2+2i\pi\lambda}.\end{aligned}$$

En utilisant [6], table des transformées de Fourier p. 358 formules (21) et (24), on voit que

$$\begin{aligned}T_\lambda(0) &= 2 \frac{e^{i(\pi/4)} \Gamma(1/2+2i\pi\lambda)}{(2\pi)^{1/2+2i\pi\lambda}} [\operatorname{ch}(\pi^2\lambda) x_+^{-(1/2+2i\pi\lambda)} - i \operatorname{sh}(\pi^2\lambda) x_-^{-(1/2+2i\pi\lambda)}] \\ \bar{T}_\lambda(0) &= -2 \frac{e^{i(\pi/4)} \Gamma(1/2+2i\pi\lambda)}{(2\pi)^{1/2+2i\pi\lambda}} [\operatorname{sh}(\pi^2\lambda) x_+^{-(1/2+2i\pi\lambda)} + i \operatorname{ch}(\pi^2\lambda) x_-^{-(1/2+2i\pi\lambda)}]\end{aligned}$$

où Γ désigne la fonction gamma usuelle.

Q.E.D.

2. Démonstration du théorème

Pour tout couple d'éléments $g, h \in \mathcal{S}$ nous noterons $g \otimes h$ l'élément de $\mathcal{S}(\mathbf{R}^2)$, l'espace des fonctions de Schwartz sur \mathbf{R}^2 , défini par

$$g \otimes h(x, y) = g(x)h(y), \quad \forall x, y \in \mathbf{R}.$$

Pour tout $\lambda \in \mathbf{R}$ on pose

$$\begin{aligned}A_\lambda &= \tilde{U} \tilde{\varrho}_\lambda(\omega_{1,2}) \tilde{U}, \quad B_\lambda = \tilde{\varrho}_\lambda(\omega_{1,2}) \tilde{U} \tilde{\varrho}_\lambda(\omega_{1,2}) \\ \bar{A}_\lambda &= \tilde{U} \tilde{\varrho}_\lambda(\omega_{1,2}) \tilde{U}, \quad \bar{B}_\lambda = \tilde{\varrho}_\lambda(\omega_{1,2}) \tilde{U} \tilde{\varrho}_\lambda(\omega_{1,2}).\end{aligned}$$

Alors la première partie du théorème 1 est conséquence du résultat suivant :

LEMME 15. (i) Pour tout $\lambda \in \mathbf{R}$ (resp. $\lambda \in \mathbf{R}^*$) il existe $f \in \mathcal{S}(\mathbf{R}^2)$, x et $y < 0$ tels que

$$\bar{A}_\lambda f(x, y) = \bar{B}_\lambda f(x, y) \neq 0 \quad (\text{resp. } A_\lambda f(x, y) = B_\lambda f(x, y) \neq 0).$$

(ii) Pour tout $\lambda \in \mathbf{R}$ (resp. $\lambda \in \mathbf{R}^*$) il existe $f \in \mathcal{S}(\mathbf{R}^2)$ telle que

$$\bar{A}_\lambda f \neq \bar{B}_\lambda f \quad (\text{resp. } A_\lambda f \neq B_\lambda f).$$

(iii) On a pour tout $g, h \in \mathcal{S}$ tels que \hat{g} et h appartiennent à $\mathcal{S}_+ \cup \mathcal{S}_-$

$$A_0(g \otimes h) = B_0(g \otimes h).$$

Démonstration du théorème 1 (i). Soit ϱ une représentation de P comme dans la partie (i) du théorème 1. Supposons qu'elle se prolonge en une représentation, encore notée ϱ , de $\tilde{S}\tilde{L}_3(\mathbf{R})$. Alors en utilisant la remarque de la fin du § 2 de V, ainsi que la proposition 10, on voit qu'il existe un nombre complexe z de module 1 tel que $\varrho(\omega_{2,3}) = z\tilde{U}$; mais la partie (i) du lemme 15 montre que $z=1$ et la partie (ii) de ce même lemme montre que l'opérateur \tilde{U} ne vérifie pas la condition de commutation (18) (iii) relativement à ϱ . Q.E.D.

Démonstration du lemme 15. Comme pour tout $f \in L^1(\mathbf{R}^2)$, $\varrho(\omega_{1,2})f \in L^1(\mathbf{R}^2)$ pour toute représentation ϱ de P considérée dans l'énoncé du théorème 1, il est clair que toutes les intégrales que nous allons écrire dans cette démonstration seront absolument convergentes.

On a pour tout $f \in L^2(\mathbf{R}^2)$,

$$\begin{aligned}\hat{\varrho}_\lambda(\omega_{1,2}) f(x, y) &= i^{-(1+\varepsilon(x))/2} |x|^{-(1/2+2i\pi\lambda)} f(-1/x, -xy) \\ \bar{\varrho}_\lambda(\omega_{1,2}) f(x, y) &= i^{(1+\varepsilon(x))/2} |x|^{-(1/2+2i\pi\lambda)} f(-1/x, -xy)\end{aligned}$$

et si $f = g \otimes h$ avec $g, h \in \mathcal{S}$ tels que \hat{g} et $h \in \mathcal{S}_+ \cup \mathcal{S}_-$ on a

$$A_\lambda f(x, y) = \int (-y, \zeta) e^{-2i\pi(x\zeta + y\xi)} i^{-(1+\varepsilon(\xi))/2} |\xi|^{-(1/2+2i\pi\lambda)} \hat{g}(\xi\zeta) \left[\int (\xi\zeta, v) e^{2i\pi v \xi^{-1}} h(v) dv \right] d\xi d\zeta$$

qui, après les changements successifs de variable $\zeta \mapsto \zeta\xi^{-1}$ et $\xi \mapsto \xi^{-1}$ s'écrit

$$A_\lambda f(x, y) = \int (-y, \zeta\xi) e^{-2i\pi(x\xi\zeta + y\xi^{-1})} i^{-(1+\varepsilon(\xi))/2} |\xi|^{-1/2+2i\pi\lambda} \hat{g}(\zeta) \left[\int (\zeta, v) e^{2i\pi v \xi} h(v) dv \right] d\xi d\zeta$$

et aussi

$$B_\lambda f(x, y) = i^{-(1+\varepsilon(x))/2} |x|^{-(1/2+2i\pi\lambda)} \int (xy, \zeta) e^{2i\pi(\zeta/x + xy\xi)} i^{-(1+\varepsilon(\xi))/2} |\xi|^{-(1/2+2i\pi\lambda)} g(-1/\xi) h(-\xi\zeta) d\xi d\zeta$$

qui après les changements de variables successifs $\zeta \mapsto -\xi^{-1}\zeta$ et $\xi \mapsto -x^{-1}\xi^{-1}$ s'écrit

$$B_\lambda f(x, y) = i^{-(1+\varepsilon(x))/2} \int (xy, x\xi\zeta) e^{2i\pi(\zeta\xi - y\xi^{-1})} i^{-(1+\varepsilon(\xi))/2} |\xi|^{-1/2+2i\pi\lambda} g(x\xi) h(\zeta) d\xi d\zeta.$$

Il est clair que l'on a aussi

$$\bar{A}_\lambda f(x, y) = \int (-y, \zeta\xi) e^{-2i\pi(x\xi\zeta + y\xi^{-1})} i^{(1+\varepsilon(\xi))/2} |\xi|^{-1/2+2i\pi\lambda} \hat{g}(\zeta) \left[\int (\zeta, v) e^{2i\pi v \xi} h(v) dv \right] d\xi d\zeta$$

$$\bar{B}_\lambda f(x, y) = i^{(1+\varepsilon(x))/2} \int (xy, x\xi\xi) e^{2i\pi(\zeta\xi - y\xi^{-1})} i^{(1-\varepsilon(x\xi))/2} |\xi|^{-1/2+2i\pi\lambda} g(x\xi) h(\zeta) d\xi d\zeta.$$

Lorsque $y < 0$ on peut écrire

$$A_\lambda f(x, y) = \int e^{-2i\pi(x\xi\xi + y\xi^{-1})} i^{-(1+\varepsilon(\xi))/2} |\xi|^{-1/2+2i\pi\lambda} \hat{g}(\zeta) \left[\int (\zeta, v) e^{2i\pi v\xi} h(v) dv \right] d\xi d\zeta$$

$$\bar{A}_\lambda f(x, y) = \int e^{-2i\pi(x\xi\xi + y\xi^{-1})} i^{(1+\varepsilon(\xi))/2} |\xi|^{-1/2+2i\pi\lambda} \hat{g}(\zeta) \left[\int (\zeta, v) e^{2i\pi v\xi} h(v) dv \right] d\xi d\zeta$$

$$B_\lambda f(x, y) = i^{-(1+\varepsilon(x))/2} \int (-x, x\xi\xi) i^{-(1-\varepsilon(x\xi))/2} e^{2i\pi(\zeta\xi - y\xi^{-1})} |\xi|^{-1/2+2i\pi\lambda} g(x\xi) h(\zeta) d\xi d\zeta$$

$$\bar{B}_\lambda f(x, y) = i^{(1+\varepsilon(x))/2} \int (-x, x\xi\xi) i^{(1-\varepsilon(x\xi))/2} e^{2i\pi(\zeta\xi - y\xi^{-1})} |\xi|^{-1/2+2i\pi\lambda} g(x\xi) h(\zeta) d\xi d\zeta.$$

Lorsque le support de h est contenu dans $]0, +\infty[$ on a

$$A_\lambda f(x, y) = \int e^{-2i\pi y\xi^{-1}} i^{-(1+\varepsilon(\xi))/2} |\xi|^{-1/2+2i\pi\lambda} g(x\xi) \hat{h}(\xi) d\xi$$

$$\bar{A}_\lambda f(x, y) = \int e^{-2i\pi y\xi^{-1}} i^{(1+\varepsilon(\xi))/2} |\xi|^{-1/2+2i\pi\lambda} g(x\xi) \hat{h}(\xi) d\xi$$

$$B_\lambda f(x, y) = i^{-(1+\varepsilon(x))/2} \int (-x, x\xi) i^{-(1-\varepsilon(x\xi))/2} e^{-2i\pi y\xi^{-1}} |\xi|^{-1/2+2i\pi\lambda} g(x\xi) \hat{h}(\xi) d\xi$$

$$\bar{B}_\lambda f(x, y) = i^{(1+\varepsilon(x))/2} \int (-x, x\xi) i^{(1-\varepsilon(x\xi))/2} e^{-2i\pi y\xi^{-1}} |\xi|^{-1/2+2i\pi\lambda} g(x\xi) \hat{h}(\xi) d\xi$$

mais un calcul facile prouve que l'on a

$$i^{-(1+\varepsilon(x))/2} i^{-(1-\varepsilon(x\xi))/2} (-x, x\xi) = i^{-(1+\varepsilon(\xi))/2}$$

ce qui démontre les égalités :

$$A_\lambda f(x, y) = B_\lambda f(x, y), \quad \forall x, y \in \mathbf{R}, y < 0$$

$$\bar{A}_\lambda f(x, y) = \bar{B}_\lambda f(x, y), \quad \forall x, y \in \mathbf{R}, y < 0.$$

Lorsque le support de h est contenu dans $]-\infty, 0]$ on a

$$A_\lambda f(x, y) = \int e^{-2i\pi(x\xi\zeta + y\xi^{-1})} i^{-(1+\varepsilon(\xi))/2} |\xi|^{-1/2+2i\pi\lambda} \varepsilon(\zeta) \hat{g}(\zeta) \hat{h}(\xi) d\xi d\zeta$$

$$\bar{A}_\lambda f(x, y) = \int e^{-2i\pi(x\xi\zeta + y\xi^{-1})} i^{(1+\varepsilon(\xi))/2} |\xi|^{-1/2+2i\pi\lambda} \varepsilon(\zeta) \hat{g}(\zeta) \hat{h}(\xi) d\xi d\zeta$$

et comme

$$i^{-(1+\varepsilon(x))/2}(-x, -x\xi) i^{-(1-\varepsilon(x\xi))/2} = -\varepsilon(x) i^{-(1+\varepsilon(\xi))/2},$$

il vient

$$B_\lambda f(x, y) = -\varepsilon(x) \int e^{-2i\pi y\xi^{-1}} i^{-(1+\varepsilon(\xi))/2} |\xi|^{-1/2+2i\pi\lambda} g(x\xi) \hat{h}(\xi) d\xi$$

$$\bar{B}_\lambda f(x, y) = -\varepsilon(x) \int e^{-2i\pi y\xi^{-1}} i^{(1+\varepsilon(\xi))/2} |\xi|^{-1/2+2i\pi\lambda} g(x\xi) \hat{h}(\xi) d\xi.$$

Il faut regarder ce qui se passe suivant la position du support de \hat{g} : s'il est contenu dans $]0, +\infty[$ on a les égalités

$$A_\lambda f(x, y) = -\varepsilon(x) B_\lambda f(x, y)$$

$$\bar{A}_\lambda f(x, y) = -\varepsilon(x) \bar{B}_\lambda f(x, y).$$

Si la condition $A_\lambda = B_\lambda$ (resp. $\bar{A}_\lambda = \bar{B}_\lambda$) est vérifiée on doit donc avoir pour tout $x, y \in \mathbf{R}$, $x > 0$, $y < 0$ et tout $g, h \in \mathcal{S}$ tels que $\hat{g} \in \mathcal{S}_+$ et $h \in \mathcal{S}_-$

$$\int e^{-2i\pi y\xi^{-1}} i^{-(1+\varepsilon(\xi))/2} |\xi|^{-1/2+2i\pi\lambda} g(x\xi) \hat{h}(\xi) d\xi = 0$$

$$\left(\text{resp. } \int e^{-2i\pi y\xi^{-1}} i^{(1+\varepsilon(\xi))/2} |\xi|^{-1/2+2i\pi\lambda} g(x\xi) \hat{h}(\xi) d\xi = 0 \right).$$

Comme on a

$$i^{-(1+\varepsilon(\xi))/2} |\xi|^{-1/2} = -i(\xi - i0)^{-1/2}$$

il est facile de voir que l'on se ramène à la condition

$$\langle T_\lambda(y), \Phi \rangle = 0 \text{ (resp. } \langle \bar{T}_\lambda(y), \Phi \rangle = 0), \quad \forall \Phi \in \mathcal{S}_- * \mathcal{S}_-, \quad \forall y < 0$$

et que l'on a les relations :

$$\lim_{x \rightarrow -0} A_\lambda f(x, y) = g(0) \langle T_\lambda(y), h \rangle, \quad \forall h \in \mathcal{S}_-, \forall y < 0$$

$$\lim_{x \rightarrow -0} \tilde{A}_\lambda f(x, y) = g(0) \langle \tilde{T}_\lambda(y), h \rangle, \quad \forall h \in \mathcal{S}_-, \forall y < 0.$$

ce qui, compte-tenu du lemme 14, montre les assertions (i) et (ii) du lemme 15.

Intéressons nous au cas qui n'est pas envisagé dans (i) et (ii). Pour montrer que l'on a $A_0 f(x, y) = B_0 f(x, y)$ pour tout $y < 0$ il nous faut voir que pour tout $x > 0$

$$A_0 f(x, y) = -i \int e^{-2i\pi y \xi^{-1}} (\xi - i0)^{-1/2} g(x\xi) \hat{h}(\xi) d\xi = 0. \quad (75)$$

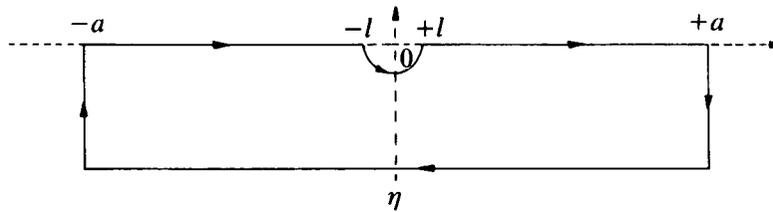
Comme la fonction $\xi \mapsto g(x\xi) \hat{h}(\xi)$ est la transformée de Fourier d'un élément de \mathcal{S}_- , on voit que la fonction

$$F(\xi) = e^{-2i\pi y \xi^{-1}} g(x\xi) \hat{h}(\xi)$$

se prolonge en une fonction F holomorphe dans le domaine $\{z \in \mathbb{C}^*, \text{Im } z < 0\}$, continue sur son adhérence dans \mathbb{C}^* , et vérifiant que

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \exists C_n > 0 \quad \exists z \in \mathbb{C}^* \quad \text{Im } z \leq 0 \quad |F(z)| \leq C_n (1 + |\text{Re } z|)^{-n}.$$

En intégrant la fonction $z^{-1/2} F(z)$ sur le parcours suivant



et en faisant tendre l vers 0 et a vers $+\infty$ on trouve

$$A_0 f(x, y) = -i \int_{\text{Im } z = \eta} z^{-1/2} F(z) dz, \quad \forall \eta < 0$$

et en faisant tendre η vers $-\infty$ on trouve $A_0 f(x, y) = 0$.

Lorsque le support de \hat{g} est contenu dans $]-\infty, 0[$ on a l'égalité

$$A_0 f(x, y) = \varepsilon(x) B_0 f(x, y)$$

et on doit montrer que

$$\int e^{-2i\pi y \xi^{-1}} (\xi - i0)^{-1/2} g(x\xi) \hat{h}(\xi) d\xi = 0$$

dès que $x < 0$: la démonstration est exactement la même que pour (75) parce que le fait que \hat{g} appartienne à \mathcal{S}_- au lieu de \mathcal{S}_+ est compensé par le fait que x est négatif au lieu d'être positif.

Il nous reste à examiner le cas où $y > 0$. Dans ces conditions il vient

$$A_0 f(x, y) = \int \varepsilon(\xi \zeta) e^{-2i\pi(x\xi\zeta + y\xi^{-1})} i^{-(1+\varepsilon(\xi))/2} |\xi|^{-1/2} \hat{g}(\zeta) \left[\int (\zeta, v) e^{2i\pi\xi v} h(v) dv \right] d\xi d\zeta$$

$$B_0 f(x, y) = i^{-(1+\varepsilon(x))/2} \int (x, x\xi\zeta) e^{2i\pi(\xi\zeta - y\xi^{-1})} i^{-(1-\varepsilon(x\xi))/2} |\xi|^{-1/2} g(x\xi) h(\zeta) d\xi d\zeta.$$

Lorsque le support de h est contenu dans $]0, +\infty[$ il vient

$$A_0 f(x, y) = \int \varepsilon(\xi \zeta) e^{-2i\pi(x\xi\zeta + y\xi^{-1})} i^{-(1+\varepsilon(\xi))/2} |\xi|^{-1/2} \hat{g}(\zeta) \hat{h}(\xi) d\xi d\zeta$$

$$B_0 f(x, y) = \varepsilon(x) \int e^{-2i\pi y \xi^{-1}} \varepsilon(\xi) i^{-(1+\varepsilon(\xi))/2} |\xi|^{-1/2} g(x\xi) \hat{h}(\xi) d\xi d\zeta$$

et comme précédemment on se ramène à montrer que

$$\int e^{-2i\pi y \xi^{-1}} (\xi + i0)^{-1/2} g(x\xi) \hat{h}(\xi) d\xi = 0$$

pour tout $x < 0$ (resp. $x > 0$) lorsque $\hat{g} \in \mathcal{S}_+$ (resp. $\hat{g} \in \mathcal{S}_-$).

Lorsque le support de h est contenu dans $]-\infty, 0[$ il vient

$$A_0 f(x, y) = \int \varepsilon(\xi) e^{-2i\pi y \xi^{-1}} i^{-(1+\varepsilon(\xi))/2} |\xi|^{-1/2} g(x\xi) \hat{h}(\xi) d\xi$$

$$B_0 f(x, y) = i^{-(1+\varepsilon(x))/2} \int (x, -x\xi) e^{-2i\pi y \xi^{-1}} i^{-(1-\varepsilon(x\xi))/2} |\xi|^{-1/2} g(x\xi) \hat{h}(\xi) d\xi.$$

Alors l'égalité $A_0 f(x, y) = B_0 f(x, y)$, $\forall x, \forall y > 0$ est conséquence du fait que

$$i^{-(1+\varepsilon(x))/2} i^{-(1-\varepsilon(x\xi))/2} (x, -x\xi) = \varepsilon(\xi) i^{-(1+\varepsilon(\xi))/2}.$$

Ceci achève la démonstration du lemme 15.

Q.E.D.

COROLLAIRE. *L'opérateur \tilde{U} vérifie la relation (18) (iii) relativement à la représentation $\tilde{\varrho}$.*

Démonstration. Ceci résulte immédiatement de l'assertion (iii) du lemme 15 et du fait que le sous-espace de $L^2(\mathbf{R}^2)$ engendré par les $g \otimes h$ avec $\hat{g}, h \in \mathcal{S}_+ \cup \mathcal{S}_-$ est dense dans $L^2(\mathbf{R}^2)$. Q.E.D.

Compte-tenu de la remarque en fin du § 2 de V et du corollaire du lemme 15 on voit que le théorème 1 est démontré. Q.E.D.

VIII. SU_2 -type minimal

1. Décomposition de l'action d'un tore

Des calculs du même type que ceux de la démonstration de la proposition 1 montrent que l'on a le résultat suivant :

LEMME 16. *Soit ϱ une des représentations $\varrho_{\varepsilon, \lambda}$, $\varepsilon = \pm 1$, $\lambda \in \mathbf{R}$, ou $\tilde{\varrho}$. Alors pour tout $\theta \in]-\pi, \pi[$ et tout $f \in L^2(\mathbf{R}^2)$ on a*

$$\varrho(\exp \theta W_{1,2}) f(x, y) = \mu_{\varrho}(\theta, x) |\cos \theta - x \sin \theta|^{-1/2} f\left(\frac{\sin \theta + x \cos \theta}{\cos \theta - x \sin \theta}, y(\cos \theta - x \sin \theta)\right) \quad (76)$$

avec

$$\left. \begin{aligned} \mu_{\varrho_{1, \lambda}}(\theta, x) &= |\cos \theta - x \sin \theta|^{-2i\pi\lambda} \\ \mu_{\varrho_{-1, \lambda}}(\theta, x) &= \varepsilon (\cos \theta - x \sin \theta) |\cos \theta - x \sin \theta|^{-2i\pi\lambda} \\ \mu_{\tilde{\varrho}}(\theta, x) &= i^{-\varepsilon(\theta)(1 - \varepsilon(\cos \theta - x \sin \theta))/2} \end{aligned} \right\} \quad (77)$$

Pour tout $k \in \mathbf{Z}$ on note $L^2(\mathbf{R}^2)_\varrho^k$ le sous-espace de $L^2(\mathbf{R}^2)$ constitué des fonctions f vérifiant

$$\varrho(\exp \theta W_{1,2}) f = e^{ik\theta/2} f, \quad \forall \theta \in \mathbf{R}.$$

Il est clair que pour $\varrho \in \{\varrho_{\varepsilon, \lambda}\}_{\varepsilon = \pm 1, \lambda \in \mathbf{R}}$ (resp. $\varrho = \tilde{\varrho}$), $L^2(\mathbf{R}^2)_\varrho^k = 0$ si k est impair (resp. pair).

PROPOSITION 13. *Les espaces $L^2(\mathbf{R}^2)_\varrho^k$ sont caractérisés comme suit :*

(i) *Pour tout $\lambda \in \mathbf{R}$, $k \in \mathbf{Z}$, $L^2(\mathbf{R}^2)_{\varrho_{1, \lambda}}^{2k}$ est l'ensemble des fonctions f telles qu'il existe un élément $\varphi \in L^2(\mathbf{R})$ de même parité que k avec*

$$f(x, y) = (1+x^2)^{-(1/4+i\pi\lambda)} e^{ik \operatorname{Arctg} x} \varphi(y(1+x^2)^{1/2}). \tag{78}$$

(ii) Pour tout $\lambda \in \mathbf{R}$, $k \in \mathbf{Z}$, $L^2(\mathbf{R}^2)_{\varrho_{-1,\lambda}}^{2k}$ est constitué des fonctions f telles qu'il existe un élément $\varphi \in L^2(\mathbf{R})$ de parité opposée à celle de k avec

$$f(x, y) = (1+x^2)^{-(1/4+i\pi\lambda)} e^{ik \operatorname{Arctg} x} \varphi(y(1+x^2)^{1/2}). \tag{79}$$

(iii) Pour tout $k \in \mathbf{Z}$, $L^2(\mathbf{R}^2)_{\varrho}^{2k-1}$ est constitué des fonctions f telles qu'il existe un élément $\varphi \in L^2(\mathbf{R})$ de même parité que k avec

$$f(x, y) = (1+x^2)^{-1/4} e^{i(k-1/2) \operatorname{Arctg} x} \varphi(y(1+x^2)^{1/2}). \tag{80}$$

Démonstration. Dire que $f \in L^2(\mathbf{R}^2)_{\varrho}^k$ revient à dire que

$$\langle f, \varrho(\exp(-\theta W_{1,2}))g \rangle = e^{ik\theta/2} \langle f, g \rangle, \quad \forall \theta \in]-\pi, \pi[, \forall g \in \mathcal{D}(\mathbf{R}^2)$$

ce qui entraîne que f doit vérifier

$$\left. \frac{d}{d\theta} \langle f, \varrho(\exp(-\theta W_{1,2}))g \rangle \right|_{\theta=0} = i \frac{k}{2} \langle f, g \rangle, \quad \forall g \in \mathcal{D}(\mathbf{R}^2) \tag{81}$$

or un calcul facile montre que

$$\left. \frac{d}{d\theta} \langle f, \varrho(\exp(-\theta W_{1,2}))g \rangle \right|_{\theta=0} = \langle f, Dg \rangle$$

où D est l'opérateur différentiel défini par

$$Dg(x, y) = -x \left(\frac{1}{2} + 2i\pi\lambda \right) g(x, y) - (1+x^2) \frac{\partial g}{\partial x}(x, y) + xy \frac{\partial g}{\partial y}(x, y).$$

Comme $\varrho(\exp(-\theta W_{1,2}))$ est un groupe à un paramètre d'opérateurs unitaires on a $D = -D^*$, et dire qu'une fonction $f \in L^2(\mathbf{R}^2)$ vérifie (81) revient à dire qu'elle est solution distribution de l'équation différentielle

$$Df = -i \frac{k}{2} f$$

qui s'écrit

$$Xf = \left[x \left(\frac{1}{2} + 2i\pi\lambda \right) - i \frac{k}{2} \right] f \tag{82}$$

où X est le champ de vecteurs

$$X = -(1+x^2) \frac{\partial}{\partial x} + xy \frac{\partial}{\partial y}.$$

Nous devons donc étudier l'espace $\mathcal{D}'_{k,\lambda}$ des distributions sur \mathbf{R}^2 solutions de (82) :

$$L^2(\mathbf{R}^2)_\varrho^k \subset L^2(\mathbf{R}^2) \cap \mathcal{D}'_{k,\lambda}.$$

La fonction

$$f_{k,\lambda}(x, y) = (1+x^2)^{-(1/4+i\pi\lambda)} e^{(ik/2) \operatorname{Arctg} x}$$

est une solution particulière de (82) qui ne s'annule jamais. Ainsi $\mathcal{D}'_{k,\lambda}$ est l'ensemble des distributions $f_{k,\lambda} T$ avec T distribution vérifiant

$$XT = 0. \quad (83)$$

Considérons alors l'automorphisme A de $\mathcal{D}(\mathbf{R}^2)$ défini par

$$Af(x, y) = (1+x^2)^{1/2} f(x, y(1+x^2)^{1/2}), \quad \forall f \in \mathcal{D}(\mathbf{R}^2).$$

Comme on a

$$A^{-1}X^*A = \frac{\partial}{\partial x}$$

il est clair que la distribution T est solution de (83) si et seulement si la distribution $S = A^*T$ est solution de

$$\frac{\partial S}{\partial x} = 0.$$

On voit donc que $\mathcal{D}'_{k,\lambda}$ est l'ensemble des distributions $f_{k,\lambda} T$ avec $T \in \mathcal{D}'$ telle qu'il existe une distribution $u \in \mathcal{D}'(\mathbf{R})$ avec

$$\langle T, f \rangle = \left\langle u, \int (1+x^2)^{-1/2} f(x, y(1+x^2)^{-1/2}) dx \right\rangle, \quad \forall f \in \mathcal{D}(\mathbf{R}^2).$$

Si $f_{k,\lambda} T \in L^2(\mathbf{R}^2) \cap \mathcal{D}'_{k,\lambda}$, on voit que $T \in L^1_{\text{loc}}(\mathbf{R}^2)$ ainsi que $S = A^*T$, ce qui assure que $u \in L^1_{\text{loc}}(\mathbf{R})$. Il est alors clair que tout élément $f \in L^2(\mathbf{R}^2) \cap \mathcal{D}'_{k,\lambda}$ s'écrit

$$f(x, y) = (1+x^2)^{-(1/4+i\pi\lambda)} e^{(ik/2) \operatorname{Arctg} x} \varphi(y(1+x^2)^{1/2})$$

avec $\varphi \in L^2(\mathbf{R})$. Un calcul facile, quoique fastidieux, montre maintenant que les espaces $L^2(\mathbf{R}^2)_\varrho^k$ sont bien ceux caractérisés par les relations (78), (79) et (80). Q.E.D.

2. Calcul des SU_2 -types minimaux

On note τ_1 la représentation triviale de SU_2 .

PROPOSITION 14. *Pour tout $\lambda \in \mathbf{R}$ la représentation $\varrho_{1,\lambda}$ admet τ_1 comme SU_2 type minimal, le sous-espace des éléments SU_2 -invariants étant engendré par la fonction de norme 1 :*

$$f_{1,\lambda}(x, y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} (1+x^2)^{-(1/4+i\pi\lambda)} \varphi_{1,\lambda}(y(1+x^2)^{1/2}) \quad (84)$$

avec

$$\varphi_{1,\lambda}(y) = \int e^{-2i\pi y \xi} (1+\xi^2)^{-(3/4+i\pi\lambda)} d\xi. \quad (85)$$

Démonstration. Il suffit de montrer que $L^2(\mathbf{R}^2)$ contient une fonction SU_2 -invariante. Une telle fonction est dans $L^2(\mathbf{R}^2)_{\varrho_{1,\lambda}}^0$ et elle s'écrit donc sous la forme

$$f_{1,\lambda}(x, y) = (1+x^2)^{-(1/4+i\pi\lambda)} \varphi_{1,\lambda}(y(1+x^2)^{1/2})$$

avec $\varphi_{1,\lambda} \in L^2(\mathbf{R})$ et paire. Comme les éléments $\exp(\theta W_{1,2})$, $\theta \in]-\pi, \pi[$ et $\omega_{2,3}$ constituent un système de générateurs du groupe SU_2 , pour écrire qu'une telle fonction est SU_2 -invariante il suffit d'écrire que $Uf_{1,\lambda} = f_{1,\lambda}$. Formellement il vient

$$\begin{aligned} Uf_{1,\lambda}(x, y) &= \int e^{-2i\pi(x\xi+y\xi)} (1+\xi^2)^{-(1/4+i\pi\lambda)} \varphi_{1,\lambda}(\xi(1+\xi^2)^{1/2}) d\xi d\xi \\ &= \int e^{-2i\pi y \xi} (1+\xi^2)^{-(3/4+i\pi\lambda)} \varphi_{1,\lambda}^\vee(x(1+\xi^2)^{-1/2}) d\xi \end{aligned}$$

et en faisant $x=0$ dans l'égalité $Uf_{1,\lambda} = f_{1,\lambda}$ on trouve, à une constante multiplicative près

$$\varphi_{1,\lambda}(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int e^{-2i\pi y \xi} (1+\xi^2)^{-(3/4+i\pi\lambda)} d\xi.$$

Il reste à vérifier qu'avec ce choix de $\varphi_{1,\lambda}$, on a bien $Uf_{1,\lambda} = f_{1,\lambda}$. Comme la fonction $\xi \mapsto (1+\xi^2)^{-(3/4+i\pi\lambda)}$ est de classe C^∞ et que toutes ses dérivées sont dans $L^1(\mathbf{R})$ la fonction $\varphi_{1,\lambda}$ est à décroissance rapide et on peut écrire

$$\begin{aligned} Uf_{1,\lambda}(x, y) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int e^{-2i\pi y \xi} (1+\xi^2)^{-(3/4+i\pi\lambda)} \varphi_{1,\lambda}^\vee(x(1+\xi^2)^{-1/2}) d\xi \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int e^{-2i\pi y \xi} (1+x^2+\xi^2)^{-(3/4+i\pi\lambda)} d\xi \end{aligned}$$

et en effectuant le changement de variable $\xi \rightarrow \xi(1+x^2)^{1/2}$ on trouve le résultat cherché. On vérifie sans peine que $f_{1,\lambda}$ est normée. Q.E.D.

On note τ_{-1} la représentation unitaire irréductible de dimension 3 de SU_2 : c'est celle induite par la représentation canonique de $SO_3(\mathbf{R})$ dans \mathbf{C}^3 . Dans la base canonique (e_1, e_2, e_3) de \mathbf{C}^3 on a

$$\tau_{-1}(\exp \theta W_{1,2}) = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta & 0 \\ -\sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\tau_{-1}(\omega_{2,3}^2) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \tau_{-1}(\omega_{2,3}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

PROPOSITION 15. *Pour tout $\lambda \in \mathbf{R}$ la représentation $\varrho_{-1,\lambda}$ admet τ_{-1} comme SU_2 -type minimal et le sous-espace de $L^2(\mathbf{R}^2)$ associé admet une base orthonormée constituée des fonctions*

$$\left. \begin{aligned} f_{+,-1,\lambda}(x, y) &= (1+x^2)^{-(1/4+i\pi\lambda)} e^{i \operatorname{Arctg} x} \psi_\lambda(y(1+x^2)^{1/2}) \\ f_{-,-1,\lambda}(x, y) &= (1+x^2)^{-(1/4+i\pi\lambda)} e^{-i \operatorname{Arctg} x} \psi_\lambda(y(1+x^2)^{1/2}) \\ f_{-1,\lambda}(x, y) &= (1+x^2)^{-(1/4+i\pi\lambda)} \varphi_{-1,\lambda}(y(1+x^2)^{1/2}) \end{aligned} \right\} \quad (86)$$

avec

$$\left. \begin{aligned} \psi_\lambda(y) &= \frac{1}{2} \sqrt{\frac{3}{\pi}} \int e^{-2i\pi y \xi} (1+\xi^2)^{-(5/4+i\pi\lambda)} d\xi \\ \varphi_{-1,\lambda}(y) &= -\sqrt{\frac{3}{2\pi}} \int e^{-2i\pi y \xi} (1+\xi^2)^{-(5/4+i\pi\lambda)} \xi d\xi. \end{aligned} \right\} \quad (87)$$

Démonstration. Comme pour toute fonction $f \in L^2(\mathbf{R}^2)_{\varrho_{-1,\lambda}}^0$ on a

$$\varrho_{-1,\lambda}(\omega_{2,3}^2) f = -f$$

la représentation $\varrho_{-1,\lambda}$ ne saurait contenir le SU_2 -type trivial; de plus puisque $\varrho_{-1,\lambda}$ est une représentation de $SL_3(\mathbf{R})$ elle ne saurait contenir le SU_2 -type de dimension 2. Pour montrer que τ_{-1} est le SU_2 -type minimal de $\varrho_{-1,\lambda}$ il suffit d'exhiber un tel SU_2 -type, et pour cela il suffit de trouver trois fonctions

$$f_{+,-1,\lambda} \in L^2(\mathbf{R}^2)_{\varrho_{-1,\lambda}}^2, \quad f_{-,-1,\lambda} \in L^2(\mathbf{R}^2)_{\varrho_{-1,\lambda}}^{-2}, \quad f_{-1,\lambda} \in L^2(\mathbf{R}^2)_{\varrho_{-1,\lambda}}^0$$

telles que, si on pose

$$e_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} (f_{+,-1,\lambda} + f_{-,-1,\lambda}), \quad e_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} (f_{+,-1,\lambda} - f_{-,-1,\lambda}), \quad e_3 = f_{-1,\lambda}$$

on ait

$$(a) Ue_1 = e_1, \quad (b) Ue_2 = -e_3, \quad (c) Ue_3 = e_2. \quad (88)$$

Ecrivons

$$f_{\pm, -1, \lambda}(x, y) = (1+x^2)^{-(1/4+i\pi\lambda)} e^{\pm i \operatorname{Arctg} x} \psi_{\pm\lambda}(y(1+x^2)^{1/2}), \quad \psi_{\pm\lambda} \in L^2(\mathbf{R}) \text{ paire}$$

$$f_{-1, \lambda}(x, y) = (1+x^2)^{-(1/4+i\pi\lambda)} \varphi_{-1, \lambda}(y(1+x^2)^{1/2}), \quad \varphi_{-1, \lambda} \in L^2(\mathbf{R}) \text{ impaire.}$$

Comme $\varphi_{-1, \lambda}$ est impaire les conditions (88) (b) et (c) sont équivalentes et il suffit donc de vérifier (88) (a) et (b). De plus en utilisant le fait que l'on doit avoir

$$\varrho_{-1, \lambda}(\omega_{2,3}^2) e_1 = e_1, \quad \varrho_{-1, \lambda}(\omega_{2,3}^2) e_2 = -e_2$$

on voit que $\psi_{+\lambda} = \psi_{-\lambda} = \psi_{\lambda}$. Comme on a

$$e^{i \operatorname{Arctg} x} = (1+x^2)^{-1/2} (1+ix), \quad \forall x \in \mathbf{R}$$

les relations (88) (a) et (b) s'écrivent formellement

$$\int e^{-2i\pi(y\xi+x\xi)} (1+\xi^2)^{-(3/4+i\pi\lambda)} \psi_{\lambda}(\xi(1+\xi^2)^{1/2}) d\xi d\xi = (1+x^2)^{-(3/4+i\pi\lambda)} \psi_{\lambda}(y(1+x^2)^{1/2})$$

$$\sqrt{2} \int e^{-2i\pi(y\xi+x\xi)} (1+\xi^2)^{-(3/4+i\pi\lambda)} \xi \psi_{\lambda}(\xi(1+\xi^2)^{1/2}) d\xi d\xi = -(1+x^2)^{-(1/4+i\pi\lambda)} \varphi_{-1, \lambda}(y(1+x^2)^{1/2})$$

et, en faisant $x=0$, il vient, à une constante multiplicative près :

$$\begin{aligned} \psi_{\lambda}(y) &= \int e^{-2i\pi y \xi} (1+\xi^2)^{-(5/4+i\pi\lambda)} d\xi \\ \varphi_{-1, \lambda}(y) &= - \int e^{-2i\pi y \xi} (1+\xi^2)^{-(5/4+i\pi\lambda)} \xi d\xi \end{aligned}$$

Il reste maintenant à vérifier les relations (88) (a) et (b), ce qui se fait à l'aide de calculs faciles et analogues à ceux de la proposition 14. Q.E.D.

On note $\bar{\tau}$ la représentation canonique de SU_2 dans \mathbf{C}^2 .

PROPOSITION 16. *La représentation $\bar{\varrho}$ admet $\bar{\tau}$ comme SU_2 -type minimal et le sous-espace de $L^2(\mathbf{R}^2)$ associé admet une base orthonormée constituée des fonctions*

$$\begin{aligned} f_1(x, y) &= \sqrt{2} \varepsilon(y) e^{-2\pi|y|(1+x^2)^{1/2}} (1+x^2)^{-1/4} e^{(i/2) \operatorname{Arctg} x} \\ f_{-1}(x, y) &= i\sqrt{2} e^{-2\pi|y|(1+x^2)^{1/2}} (1+x^2)^{-1/4} e^{-(i/2) \operatorname{Arctg} x}. \end{aligned} \quad (89)$$

Démonstration. A l'aide du même raisonnement que précédemment on voit qu'il suffit d'exhiber deux fonctions $f_1 \in L^2(\mathbf{R}^2)_0^1$, $f_{-1} \in L^2(\mathbf{R}^2)_0^{-1}$ vérifiant

$$\tilde{U}f_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(f_1 - if_{-1}), \quad \tilde{U}f_{-1} = \frac{1}{\sqrt{2}}(-if_1 + f_{-1}). \quad (90)$$

Ecrivons

$$\begin{aligned} f_1(x, y) &= (1+x^2)^{-1/4} e^{(i/2)\text{Arctg } x} \varepsilon(y) g_1(y(1+x^2)^{1/2}), \quad g_1 \in L^2(\mathbf{R}) \text{ paire} \\ f_{-1}(x, y) &= i(1+x^2)^{-1/4} e^{-(i/2)\text{Arctg } x} g_{-1}(y(1+x^2)^{1/2}), \quad g_{-1} \in L^2(\mathbf{R}) \text{ paire.} \end{aligned}$$

Si f_1 et f_{-1} répondent à la question elles doivent vérifier

$$\varrho(\omega_{2,3}^2) f_1 = -if_{-1} \quad \text{et} \quad \varrho(\omega_{2,3}^2) f_{-1} = if_1$$

ce qui entraîne que $g_{-1} = g_1 = g$. Les relations (90) s'écrivent alors

$$\begin{aligned} &\int (-y, \xi) e^{-2i\pi(x\xi+y\xi)} (1+\xi^2)^{-1/4} e^{(i/2)\text{Arctg } \xi} \varepsilon(\xi) g(\xi(1+\xi^2)^{1/2}) d\xi d\xi \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} (1+x^2)^{-1/4} [\varepsilon(y) e^{(i/2)\text{Arctg } x} + e^{-(i/2)\text{Arctg } x}] g(y(1+x^2)^{1/2}) \end{aligned} \quad (91)$$

et

$$\begin{aligned} &\int (-y, \xi) e^{-2i\pi(x\xi+y\xi)} (1+\xi^2)^{-1/4} e^{-(i/2)\text{Arctg } \xi} g(\xi(1+\xi^2)^{1/2}) d\xi d\xi \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} (1+x^2)^{-1/4} [e^{-(i/2)\text{Arctg } x} - \varepsilon(y) e^{(i/2)\text{Arctg } x}] g(y(1+x^2)^{1/2}). \end{aligned} \quad (92)$$

En faisant $x=0$ et $y>0$ dans la relation (91) il vient

$$g(y) = \int e^{-2i\pi y \xi} \frac{(1+i\xi)^{1/2}}{1+\xi^2} d\xi$$

ceci à une constante multiplicative près. Un calcul classique de résidus montre que l'on a (ne pas oublier que g est paire)

$$g(y) = \sqrt{2} \pi e^{-2\pi|y|}, \quad \forall y \in \mathbf{R}.$$

Il reste donc à montrer que les fonctions (89) vérifient les relations (91) et (92). Ces relations sont équivalentes, comme on peut le voir en changeant y en $-y$ dans (91) et en utilisant la relation

$$(y, \zeta) = \varepsilon(\zeta) (-y, \zeta).$$

Il suffit donc de vérifier (91). Lorsque $y > 0$ le premier membre de (91) s'écrit

$$\tilde{U}f_1(x, y) = \int e^{-2i\pi(x\zeta(1+\xi^2)^{-1/2} + y\xi)} \frac{(1+i\xi)^{1/2}}{1+\xi^2} e^{-2\pi|\zeta|} d\xi d\zeta$$

or on a

$$\int e^{-2i\pi u\zeta} e^{-2\pi|\zeta|} d\zeta = \frac{1}{\pi(u^2+1)}, \quad \forall u \in \mathbf{R}$$

il vient donc

$$\tilde{U}f_1(x, y) = \frac{1}{\pi} \int e^{-2i\pi y\xi} \frac{(1+i\xi)^{1/2}}{1+x^2+\xi^2} d\xi.$$

Lorsque $y < 0$ en utilisant la relation

$$\int e^{-2i\pi u\zeta} \varepsilon(\zeta) e^{-2\pi|\zeta|} d\zeta = \frac{-iu}{\pi(1+u^2)}$$

on trouve que

$$\tilde{U}f_1(x, y) = -\frac{ix}{\pi} \int e^{-2i\pi y\xi} \frac{(1-i\xi)^{-1/2}}{1+x^2+\xi^2} d\xi.$$

Dans les deux cas un calcul de résidus conduit au résultat cherché. Q.E.D.

IX. Paramètres de Langlands et opérateur d'entrelacement avec la série principale pour les représentations $\rho_{e,\lambda}$ et $\tilde{\rho}$

1. Généralités sur les séries principales

Pour tout $\Lambda \in \mathfrak{a}_{\mathbf{C}}^*$ on note $\alpha \mapsto \alpha^\Lambda$ le caractère de A qu'il définit. Soit \hat{M} le dual unitaire de M ; \hat{M} contient 5 éléments, les caractères $\delta_{\varepsilon_1, \varepsilon_2}$, $\varepsilon_i = \pm 1$, $1 \leq i \leq 2$ déterminés par

$$\delta_{\varepsilon_1, \varepsilon_2}(\omega_{1,2}^2) = \varepsilon_1, \quad \delta_{\varepsilon_1, \varepsilon_2}(\omega_{2,3}^2) = \varepsilon_2$$

et une représentation de dimension deux δ qui n'est autre que la restriction de $\tilde{\tau}$ à M .

Si $\delta \in \hat{M}$ et $\Lambda \in \mathfrak{a}_{\mathbf{C}}^*$ on note $V_{\delta, \Lambda}$ l'espace des fonctions f de classe C^∞ sur $\widetilde{SL}_3(\mathbf{R})$ et à valeurs dans E_δ , l'espace de δ , et vérifiant

$$f(gman) = \alpha^{-(\Lambda+\gamma)} \delta(m^{-1}) f(g), \quad \forall g \in \widetilde{SL}_3(\mathbf{R}), \forall m \in M, \forall a \in A, \forall n \in N_+$$

et on désigne par $r_{\delta, \Lambda}$ la représentation de $\tilde{S}\tilde{L}_3(\mathbf{R})$ dans cet espace définie par les translations à gauche. Cette représentation est continue lorsqu'on munit $V_{\delta, \Lambda}$ de la structure préhilbertienne définie par

$$\langle f, g \rangle = \int_{SU_2} f(k) \overline{g(k)} dk, \quad \forall f, g \in V_{\delta, \Lambda}$$

où dk est la mesure de Haar normalisée sur SU_2 .

Les $V_{\delta, \Lambda}$ admettent un caractère infinitésimal déterminé par Λ .

Notons α_+^* le sous-ensemble de α_C^* formé des Λ vérifiant $\operatorname{Re} \Lambda(H_{1,2}) > 0$ et $\operatorname{Re} \Lambda(H_{2,3}) > 0$. Alors les $V_{\delta, \Lambda}$ pour $\Lambda \in \alpha_+^*$ admettent un unique quotient irréductible que l'on note $J_{\delta, \Lambda}$ et les $J_{\delta, \Lambda}$ pour $\delta \in \hat{M}$ et $\Lambda \in \alpha_+^*$ sont deux à deux inéquivalents.

On note W le groupe de Weyl de $sl_3(\mathbf{R})$ relativement à α ; c'est le quotient de M' , le normalisateur de M dans SU_2 , par M . Le groupe M' est engendré par $\omega_{1,2}$ et $\omega_{2,3}$. Le groupe M' agit dans \hat{M} , l'ensemble des représentations unitaires irréductibles de M : si δ est une telle représentation réalisée dans l'espace E_δ et si $\omega \in M'$ on note $\omega \cdot \delta$ la représentation de M dans l'espace E_δ telle que

$$\omega \cdot \delta(m) = \delta(\omega^{-1}m\omega), \quad \forall m \in M.$$

Cette action de M' induit une action du groupe de Weyl dans \hat{M} : si $\delta \in \hat{M}$ et si $\omega \in W$ on note $\omega \cdot \delta$ le translaté de δ par ω . On remarquera que l'action de M' décrite ci-dessus, induit une action de W dans l'ensemble des représentations de dimension 1 de M .

De plus M' normalise α , et on obtient ainsi une action de W dans α^* ; si $\Lambda \in \alpha^*$ et $\omega \in W$ on note $\omega\Lambda$ le translaté de Λ par ω . L'élément $\omega_{k,l}$ de M' induit dans α^* la symétrie par rapport à la racine $\alpha_{k,l}$, $1 \leq k < l \leq 3$.

Si ω_0 désigne l'élément de plus grande longueur de W , en l'occurrence $\omega_0 = \omega_{1,3}$, pour tout $\delta \in \hat{M}$ et tout $\Lambda \in \alpha_+^*$, le $\tilde{S}\tilde{L}_3(\mathbf{R})$ -module $V_{\omega_0\delta, \omega_0\Lambda}$ admet un unique sous-module irréductible, lequel est isomorphe à $J_{\delta, \Lambda}$.

Si le $\tilde{S}\tilde{L}_3(\mathbf{R})$ -module $J_{\delta, \Lambda}$ est unitarisable, c'est-à-dire infinitésimalement équivalent à une représentation unitaire de $\tilde{S}\tilde{L}_3(\mathbf{R})$, alors il existe un élément $\omega \in W_\delta$, le stabilisateur de $\delta \in \hat{M}$ dans W , tel que $\omega\Lambda = -\bar{\Lambda}$. En particulier les $J_{\delta, \Lambda}$ unitarisables sont tels que $\delta \in \{\delta_{1,1}, \delta_{-1,-1}, \delta\}$. Enfin si ϱ est une représentation irréductible admissible de $\tilde{S}\tilde{L}_3(\mathbf{R})$ dont le caractère infinitésimal est déterminé par $\Lambda \in \alpha_+^*$ et admettant τ_0 (resp. $\tau_{-1}, \bar{\tau}$) comme SU_2 -type minimal, elle est infinitésimalement équivalente à un

$J_{\delta, \Lambda}$ avec $\Lambda \in \alpha_+^*$ et $\delta = \delta_{1,1}$ (resp. $\delta \in \{\delta_{\varepsilon_1, \varepsilon_2}$ avec $\varepsilon_1 \neq 1$ ou $\varepsilon_2 \neq 1\}$, $\delta = \delta$). Pour tout ce qui précède voir [2], chap. IV, et [12].

Pour $\omega \in W$ on note $\Delta(\omega)$, l'ensemble des racines $\alpha \in \Delta_+$ telles que $\omega\alpha \in \Delta_+$ et on pose $N_\omega = N_+ \cap \omega N \omega^{-1}$. Enfin on note $S(\omega)$ le sous-ensemble de α_C^* constitué des formes linéaires Λ vérifiant $\text{Re } \Lambda(H_{\alpha_{k,l}}) > 0$ pour tout k, l tel que $\alpha_{k,l} \in \Delta(\omega)$. Alors pour tout $\delta \in \hat{M}, \Lambda \in \alpha_C^*$ et $f \in V_{\delta, \Lambda}$ on pose

$$A_{\omega, \delta, \Lambda}^- f(g) = \int_{N_\omega} f(gu\omega) du, \quad \forall g \in \tilde{S}\tilde{L}_3(\mathbf{R}) \tag{93}$$

où $\bar{\omega}$ est un représentant de ω dans M' et du est une mesure de Haar sur N_ω . On a le résultat suivant (voir [14]) :

PROPOSITION 17. *Soit $\omega \in W$, alors pour tout $\Lambda \in S(\omega)$ l'intégrale (93) est absolument convergente pour tout $f \in V_{\delta, \Lambda}$ et tout $g \in \tilde{S}\tilde{L}_3(\mathbf{R})$ et l'application $f \mapsto A_{\omega, \delta, \Lambda}^- f$ est un homomorphisme de $\tilde{S}\tilde{L}_3(\mathbf{R})$ -module de $V_{\delta, \Lambda}$ dans $V_{\bar{\omega}\delta, \omega\Lambda}$.*

On rappelle que l'application

$$\begin{aligned} N \times M \times A \times N_+ &\rightarrow \tilde{S}\tilde{L}_3(\mathbf{R}) \\ (n, m, a, n^+) &\mapsto nman_+ \end{aligned}$$

est un difféomorphisme de la variété $N \times M \times A \times N_+$ sur un ouvert de $\tilde{S}\tilde{L}_3(\mathbf{R})$ dont le complémentaire est réunion d'un nombre fini de sous-variétés de codimension au moins 1. D'autre part \mathbf{R}^3 et N sont difféomorphes via l'application n définie par

$$n(x, y, z) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ x & 1 & 0 \\ y & z & 1 \end{pmatrix}$$

et l'image par cette application de la mesure de Lebesgue de \mathbf{R}^3 est une mesure de Haar sur N .

Pour tout $(x, y, z) \in \mathbf{R}^3$ on a la décomposition d'Iwasawa

$$n(x, y, z) = k(x, y, z) a(x, y, z) n_+(x, y, z)$$

avec $k(x, y, z) \in SU_2, n_+(x, y, z) \in N_+$ et $a(x, y, z) \in A$ tel que

$$a(x, y, z) = b_{1,2}(s) b_{2,3}(t) \quad \text{ou } s = (1+x^2+y^2)^{1/2}, t = (1+z^2+(zx-y)^2)^{1/2}. \tag{94}$$

Soient $\delta \in \hat{M}$, $\Lambda \in \alpha_{\mathbb{C}}^*$, alors l'application qui à l'élément f de $V_{\delta, \Lambda}$ fait correspondre la fonction ψ_f de trois variables à valeurs dans E_{δ} définie par

$$\psi_f(x, y, z) = f(n(x, y, z))$$

est une injection de $V_{\delta, \Lambda}$ dans $C^{\infty}(\mathbb{R}^3) \otimes E_{\delta}$. Ecrivons $\Lambda = a\omega_{1,2} + b\omega_{2,3}$ avec $a, b \in \mathbb{C}$, où $\omega_{1,2}$ et $\omega_{2,3}$ sont les poids fondamentaux associés aux racines $\alpha_{1,2}$ et $\alpha_{2,3}$. Alors il existe une constante positive c_{Λ} telle que l'application $f \mapsto \psi_f$ induise une isométrie de $V_{\delta, \Lambda}$ sur son image $\mathcal{E}_{\delta, \Lambda}$ lorsque ce dernier espace est muni de la structure préhilbertienne définie par

$$\langle \varphi, \psi \rangle = \int_{\mathbb{R}^3} \varphi \bar{\psi} dm_{\Lambda}, \quad \forall \varphi, \psi \in \mathcal{E}_{\delta, \Lambda}$$

où dm_{Λ} est la mesure sur \mathbb{R}^3

$$dm_{\Lambda} = c_{\Lambda} (1+x^2+y^2)^{\operatorname{Re} a} (1+z^2+(zx-y)^2)^{\operatorname{Re} b} dx dy dz.$$

Désormais nous identifierons les espaces préhilbertiens $V_{\delta, \Lambda}$ et $\mathcal{E}_{\delta, \Lambda}$. Les espaces $\mathcal{E}_{\delta, \Lambda}$ sont donc munis d'une structure de $\tilde{S}\tilde{L}_3(\mathbb{R})$ module et on note encore $r_{\delta, \Lambda}$ la représentation de $\tilde{S}\tilde{L}_3(\mathbb{R})$ associée. De même on dispose dans les conditions de la proposition 17 d'opérateurs d'entrelacement encore notés $A_{\omega, \delta, \Lambda}^-$ entre $\mathcal{E}_{\delta, \Lambda}$ et $\mathcal{E}_{\omega\delta, \omega\Lambda}$.

On a le résultat suivant qui résulte de calculs faciles.

PROPOSITION 18. Soient $\Lambda = a\omega_{1,2} + b\omega_{2,3} \in \alpha_{\mathbb{C}}^*$ et $\delta \in \hat{M}$. La représentation $r_{\delta, \Lambda}$ est déterminée par les formules suivantes :

- (a) $r_{\delta, \Lambda}(y_{1,2}(s) y_{1,3}(t)) f(x, y, z) = f(x-s, y-t, z), \quad \forall t \in \mathbb{R}$
- (b) $r_{\delta, \Lambda}(y_{2,3}(t)) f(x, y, z) = f(x, y-tx, z-t), \quad \forall t \in \mathbb{R}$
- (c) $r_{\delta, \Lambda}(b_{1,2}(t)) f(x, y, z) = t^{a+1} f(t^2x, ty, t^{-1}z), \quad \forall t > 0$
- (d) $r_{\delta, \Lambda}(b_{2,3}(t)) f(x, y, z) = t^{b+1} f(t^{-1}x, ty, t^2z), \quad \forall t > 0$ (95)
- (e) $r_{\delta, \Lambda}(x_{1,2}(t)) f(x, y, z) = |1-tx|^{-(a+1)} \delta(\omega_{1,2}^{\varepsilon(t)[1-\varepsilon(1-tx)])} \times f\left(\frac{x}{1-tx}, \frac{y}{1-tx}, z(1-tx)\right), \quad \forall t \in \mathbb{R}$
- (f) $r_{\delta, \Lambda}(\omega_{2,3}) f(x, y, z) = |z|^{-(b+1)} \delta(\omega_{2,3}^{1+\varepsilon(z)}) f(-y, x, -1/z), \quad \text{où } f \in \mathcal{E}_{\delta, \Lambda}.$

Les vecteurs de $\mathcal{E}_{\delta, \Lambda}$ sont les vecteurs C^∞ pour la représentation $r_{\delta, \Lambda}$ dont on note $r_{\delta, \Lambda}^\infty$ la représentation dérivée dans cet espace. D'autre part soit $r'_{\delta, \Lambda}$ la représentation du groupe AN dans l'espace $C^\infty(\mathbf{R}^3) \otimes E_\delta$ définie par les formules (95) (a), (b), (c), (d). Il est clair que si on munit $C^\infty(\mathbf{R}^3) \otimes E_\delta$ de la topologie usuelle, i.e. celle de la convergence uniforme des fonctions et de toutes leurs dérivées sur tout compact, la représentation $r'_{\delta, \Lambda}$ est une représentation continue dans l'espace de Fréchet $C^\infty(\mathbf{R}^3) \otimes E_\delta$, telle que tout vecteur de cet espace soit un vecteur C^∞ . Il n'est pas difficile de voir que $\mathcal{E}_{\delta, \Lambda}$ est un sous-espace stable par cette représentation et que la représentation de $\mathfrak{U}(\mathfrak{a} \oplus \mathfrak{n})$, l'algèbre enveloppante de $\mathfrak{a} \oplus \mathfrak{n}$, induite par la restriction à $\mathcal{E}_{\delta, \Lambda}$ de la représentation dérivée de $r'_{\delta, \Lambda}$ n'est autre que $r_{\delta, \Lambda}^\infty|_{\mathfrak{U}(\mathfrak{a} \oplus \mathfrak{n})}$.

2. Vecteurs C^∞ pour certaines représentations de AN

On remarquera que les représentations $\varrho_{1, \lambda}$ et $\varrho_{-1, \lambda}$ ont même restriction à AN que l'on note ϱ_λ , $\lambda \in \mathbf{R}$. On a aussi $\tilde{\varrho}|_{AN} = \varrho_0$, avec ces notations.

PROPOSITION 19. *Les vecteurs C^∞ de la représentation ϱ_λ , $\lambda \in \mathbf{R}$ sont les éléments $f \in L^2(\mathbf{R}^2)$ tels que*

$$x^\alpha y^{\beta+\delta} \partial_x^\gamma \partial_y^\delta f \in L^2(\mathbf{R}^2), \quad \forall \alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbf{N} \quad \text{avec } \alpha \leq \beta + \gamma. \quad (96)$$

De plus la représentation ϱ_λ^∞ , dérivée de la représentation $\varrho_\lambda|_{AN}$, est déterminée par les formules suivantes :

$$\left. \begin{aligned} \varrho_\lambda^\infty(Y_{1,2}) &= -\partial_x, & \varrho_\lambda^\infty(Y_{1,3}) &= 2i\pi y \\ \varrho_\lambda^\infty(Y_{2,3}) &= 2i\pi xy, & \varrho_\lambda^\infty(H_{2,3}) &= -1 - x\partial_x - y\partial_y \\ \varrho_\lambda^\infty(H_{1,2}) &= \left(\frac{1}{2} + 2i\pi\lambda\right) + 2x\partial_x - y\partial_y. \end{aligned} \right\} \quad (97)$$

Démonstration. Il est clair que les formules (97) définissent les générateurs infinitésimaux de la représentation ϱ_λ voir les formules (46) (resp. (42)). De plus il est aisé de vérifier que l'algèbre d'opérateurs engendrée par les opérateurs (97) est celle constituée des combinaisons linéaires finies des opérateurs (96). Q.E.D.

On note \mathcal{S}_0 l'espace des fonctions $f \in L^1_{\text{loc}}(\mathbf{R}^2)$ et vérifiant que pour tout $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbf{N}$ avec $\alpha \leq \beta + \gamma$ et pour tout $N \in \mathbf{N}$

$$\nu_{\alpha, \beta, \gamma, \delta}^N(f) = \sup_{(x, y) \in \mathbf{R}^2} \text{ess} [(1+x^2)^{1/4} (1+y^2(1+x^2))^N |x^\alpha y^{\beta+\delta} \partial_x^\gamma \partial_y^\delta f(x, y)|] < +\infty.$$

Muni de la topologie induite par les semi-normes $v_{\alpha,\beta,\gamma,\delta}^N$, $\alpha, \beta, \gamma, \delta, N \in \mathbb{N}$, \mathcal{S}_0 est un espace de Fréchet dont les éléments sont des fonctions de classe C^∞ sur l'ouvert de \mathbb{R}^2 constitué des couples (x, y) avec $y \neq 0$.

Nous aurons besoin du résultat suivant :

LEMME 17. Soient G un groupe de Lie connexe, \mathfrak{g} son algèbre de Lie, X_1, \dots, X_n une base de \mathfrak{g} et ϱ une représentation de G par des opérateurs continus dans un espace de Fréchet F . Pour que la représentation ϱ soit continue il faut et il suffit que pour tout $v \in F$ et tout $1 \leq k \leq n$ l'application

$$t \mapsto \varrho(\exp tX_k)v$$

soit continue au point 0.

Démonstration. Pour montrer que ϱ est une représentation continue il suffit de montrer, puisque G est localement compact et que F est un Fréchet, que pour tout $v \in F$ l'application de G dans F , $g \mapsto \varrho(g)v$ est continue en l'élément neutre de G : voir [18] I, 4.1.1, p. 219.

Mais pour la même raison, pour tout $1 \leq k \leq n$ l'application de $\mathbb{R} \times F$ dans F $(t, v) \mapsto \varrho(\exp tX_k) \cdot v$ est continue.

Comme l'application définie sur \mathbb{R}^n et à valeurs dans G par

$$(t_1, \dots, t_n) \mapsto \exp(t_n X_n) \dots \exp(t_1 X_1)$$

induit un difféomorphisme d'un voisinage de 0 de \mathbb{R}^n sur un voisinage de l'élément neutre de G , on se ramène à montrer que l'application

$$(t_1, \dots, t_n) \mapsto \varrho(\exp(t_n X_n)) \varrho(\exp t_{n-1} X_{n-1}) \dots \varrho(\exp t_1 X_1) \cdot v$$

est continue au point 0 de \mathbb{R}^n .

Or on peut écrire

$$\begin{aligned} & \varrho(\exp t_n X_n) \dots \varrho(\exp t_1 X_1) v - v \\ &= \varrho(\exp t_n X_n) [\varrho(\exp t_{n-1} X_{n-1}) \dots \varrho(\exp t_1 X_1) v - v] + \varrho(\exp t_n X_n) v - v. \end{aligned}$$

On achève le raisonnement par une récurrence en supposant que le résultat est vrai pour l'application de \mathbb{R}^{n-1} dans F définie par

$$(t_1, \dots, t_{n-1}) \mapsto \varrho(\exp t_{n-1} X_{n-1}) \dots \varrho(\exp t_1 X_1) v$$

et en utilisant le fait que l'application de $\mathbf{R} \times F$ dans F $(t, v) \mapsto \varrho(\exp tX_1)v$ est continue. Q.E.D.

Il résulte immédiatement de la proposition 4.4.1.7, [18] I que l'on a le résultat suivant :

LEMME 18. *Soient G un groupe de Lie, ϱ une représentation continue de G dans un espace de Fréchet F telle que, si ϱ^∞ désigne la représentation dérivée de ϱ dans le sous-espace F^∞ des vecteurs de C^∞ de F , pour tout $u \in \mathfrak{U}(\mathfrak{g})$, l'algèbre enveloppante de l'algèbre de Lie \mathfrak{g} , de G , l'opérateur $\varrho^\infty(u)$ soit un opérateur continu de F^∞ pour la topologie induite par F . Alors on a $F^\infty = F$.*

PROPOSITION 20. *Pour tout $\lambda \in \mathbf{R}$ l'espace \mathcal{S}_0 est un sous-espace stable de $L^2(\mathbf{R}^2)$ pour la représentation ϱ_λ . La restriction de ϱ_λ à \mathcal{S}_0 est une représentation continue du groupe AN dans \mathcal{S}_0 telle que $\mathcal{S}_0^\infty = \mathcal{S}_0$.*

Démonstration. Il suffit de montrer que \mathcal{S}_0 est un sous-espace de $L^2(\mathbf{R}^2)$ stable par ϱ_λ et que la restriction de ϱ_λ à \mathcal{S}_0 est continue : en effet comme la topologie de \mathcal{S}_0 est plus forte que celle induite par celle de $L^2(\mathbf{R}^2)$, la représentation dérivée de la restriction de ϱ_λ à \mathcal{S}_0 sera définie par les mêmes formules que la représentation ϱ_λ^∞ . Or l'image de $\mathfrak{U}(\mathfrak{a} \oplus \mathfrak{n})$ par ϱ_λ^∞ est l'algèbre des opérateurs combinaisons linéaires finies des opérateurs (96) qui sont manifestement continus pour la topologie de \mathcal{S}_0 . Il suffit alors d'appliquer le lemme 18.

Montrons donc que \mathcal{S}_0 est stable par ϱ_λ et que la restriction de ϱ_λ à \mathcal{S}_0 est continue.

On a les inégalités suivantes :

$$\nu_{\alpha, \beta, \gamma, \delta}^N(\varrho_\lambda(y_{1,2}(t)f)) \leq M_N(t) \sum_{l=0}^{\alpha} C_\alpha^l |t|^l \nu_{\alpha-l, \beta, \gamma, \delta}^N(f), \quad \forall t \in \mathbf{R}$$

avec

$$M_N(t) = \sup_{(x,y) \in \mathbf{R}} \left[\frac{1+x^2}{1+(x-t)^2} \right]^{1/4} \left[\frac{1+y^2(1+x^2)}{1+y^2(1+(x-t)^2)} \right]^N = \left(\frac{(t^2+4)^{1/2} + |t|}{(t^2+4)^{1/2} - |t|} \right)^N$$

$$\nu_{\alpha, \beta, \gamma, \delta}^N(\varrho_\lambda(y_{1,3}(t)f)) \leq \sum_{l=0}^{\delta} C_\delta^l |2\pi t|^l \nu_{\alpha, \beta, \gamma, \delta-l}^N(f), \quad \forall t \in \mathbf{R}$$

$$\nu_{\alpha, \beta, \gamma, \delta}^N(\varrho_\lambda(y_{2,3}(t)f)) \leq \sum_{l=0}^{\delta} \sum_{m=0}^{\gamma} \sum_{p=0}^m C_\gamma^m C_\delta^l C_m^p \frac{l!}{p!} |2\pi t|^{\gamma+l-m} \nu_{\alpha+l-p, \beta+\gamma+l-m, m-p, \delta-l}^N(f), \quad \forall t \in \mathbf{R}$$

$$\nu_{\alpha,\beta,\gamma,\delta}^N(\varrho_\lambda(\mathfrak{h}_{1,2}(t)f)) \leq e^{K|\log t|} \nu_{\alpha,\beta,\gamma,\delta}^N(f), \quad \forall t > 0$$

$$\nu_{\alpha,\beta,\gamma,\delta}^N(\varrho_\lambda(\mathfrak{h}_{2,3}(t)f)) \leq e^{K|\log t|} \nu_{\alpha,\beta,\gamma,\delta}^N(f), \quad \forall t > 0$$

avec K une constante bien choisie.

Ceci montre que \mathcal{S}_0 est stable par ϱ_λ et que AN est représenté dans \mathcal{S}_0 par des opérateurs continus.

Il reste à montrer que pour tout $f \in \mathcal{S}_0$ et tout X un des éléments $Y_{1,2}, Y_{1,3}, Y_{2,3}, H_{1,2}, H_{2,3}$, qui constituent une base de $\mathfrak{a} \oplus \mathfrak{n}$, l'application $t \mapsto \varrho_\lambda(\exp tX)f$ est continue en $t=0$.

Or, il est clair sur les formules définissant ϱ_λ que l'on a $\forall f \in \mathcal{S}_0$,

$$(\varrho_\lambda(\exp tX)f - f)(x, y) = t \int_0^1 \varrho_\lambda^\infty(X) \varrho_\lambda(\exp utX) f(x, y) du, \quad \forall (x, y) \in \mathbf{R}^2, y \neq 0$$

et que l'on peut dériver cette intégrale sous le signe somme autant de fois que l'on veut.

Mais la topologie de \mathcal{S}_0 peut être définie par les semi-normes

$$\nu_D^N(f) = \sup_{(x,y) \in \mathbf{R}^2} \text{ess} [(1+x^2)^{1/4} (1+y^2(1+x^2))^N |Df(x, y)|]$$

où D est un opérateur de $\varrho_\lambda^\infty(\mathfrak{U}(\mathfrak{a} \oplus \mathfrak{n}))$. Soient donc $D \in \varrho_\lambda^\infty(\mathfrak{U}(\mathfrak{a} \oplus \mathfrak{n}))$ et $N \in \mathbf{N}$ on a

$$\nu_D^N(\varrho_\lambda(\exp tX)f - f) \leq |t| \int_0^1 \nu_{D\varrho_\lambda^\infty(X)}^N(\varrho_\lambda(\exp utX)f) du$$

et la continuité de l'application $t \mapsto \varrho_\lambda(\exp tX)f$ au point 0 résulte de majorations établies au début de la démonstration. Q.E.D.

LEMME 19. *Les vecteurs SU_2 -finis des représentations $\varrho_{\varepsilon,\lambda}$, $\lambda \in \mathbf{R}$, $\varepsilon = \pm 1$ et $\bar{\varrho}$ sont contenus dans \mathcal{S}_0 .*

Démonstration. L'espace des vecteurs SU_2 -finis étant engendré comme $\mathfrak{U}(\mathfrak{a} \oplus \mathfrak{n})$ module par les vecteurs du SU_2 -type minimal il suffit de voir que le résultat est vrai pour ces vecteurs.

Or ces vecteurs sont de la forme

$$f(x, y) = (1+x^2)^{-(1/4+i\pi\lambda)} e^{(ik/2)\text{Arctg } x} \varphi(y(1+x^2)^{1/2})$$

où $k \in \mathbf{Z}$, $\varphi \in L_{\text{loc}}^1(\mathbf{R})$ et est telle que pour tout $\alpha \in \mathbf{N}$ la fonction $y^\alpha \varphi^{(\alpha)}$ soit à décroissance rapide et de classe C^∞ sur l'ouvert \mathbf{R}^* .

Il est facile de voir que pour de telles fonctions f on a pour tout $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbf{N}$ avec $\alpha \leq \beta + \gamma$

$$x^\alpha y^{\beta+\delta} \partial_x^\gamma \partial_y^\delta f(x, y) = x^\alpha y^\beta e^{(ik/2) \text{Arctg } x} \sum_{l=0}^{\gamma} (1+x^2)^{1/2-(\gamma+1/4+i\pi\lambda)} T_l(x) y^{l+\delta} \varphi^{(l+\delta)}(y(1+x^2)^{1/2})$$

où, pour $0 \leq l \leq \gamma$, T_l est un polynôme de degré strictement inférieur à γ .

Si on écrit $T_l(x) = \sum_{k=0}^{\gamma-1} c_{k,l} x^k$, $0 \leq l \leq \gamma$, il vient

$$v_{\alpha, \beta, \gamma, \delta}^N(f) \leq \sum_{k=0}^{\gamma-1} \sum_{l=0}^{\gamma} |c_{k,l}| \times \sup_{(x,y) \in \mathbf{R}^2} [(1+x^2)^{-\gamma} |x^{\alpha+k}| |y^\beta| (1+y^2(1+x^2)^N) |y|^{\delta+l} (1+x^2)^{(\delta+l)/2} |\varphi^{(l+\delta)}(y(1+x^2)^{1/2})|]$$

nombre qui est fini puisque pour tout $\alpha \in \mathbf{N}$ la fonction $y^\alpha \varphi^{(\alpha)}$ est à décroissance rapide. Q.E.D.

3. Détermination des paramètres de Langlands des représentations $\varrho_{\varepsilon, \lambda}$

Pour $\lambda \in \mathbf{R}$ et $\varepsilon = \pm 1$ on appelle $\mathcal{H}_{\varepsilon, \lambda}$ l'espace des fonctions f définies sur $\widetilde{SL}_3(\mathbf{R})$ à valeurs dans \mathbf{C} vérifiant

$$f(gp) = |t|^{-(3/2+2i\pi\lambda)} f(g), \quad \text{si } \varepsilon = 1, \quad f(gp) = \varepsilon(t) |t|^{-(3/2+2i\pi\lambda)} f(g), \quad \text{si } \varepsilon = -1$$

$$\forall g \in \widetilde{SL}_3(\mathbf{R}), \forall p \in P_+ \text{ tel que } \pi(p) = \begin{pmatrix} t & u & v \\ 0 & a & b \\ 0 & c & d \end{pmatrix}$$

et de carré sommable pour une mesure quasi-invariante sur l'espace quotient $\widetilde{SL}_3(\mathbf{R})/P_+$. Alors $\varrho'_{\varepsilon, \lambda} = \text{Ind}_{P_+}^{\widetilde{SL}_3(\mathbf{R})} \chi_{\varepsilon, \lambda}$ est la représentation de $\widetilde{SL}_3(\mathbf{R})$ dans $\mathcal{H}_{\varepsilon, \lambda}$ définie par les translations à gauche.

Il ressort de la proposition 12, chap. VI que l'application $\mathcal{H}_{\varepsilon, \lambda}$ de $L^2(\mathbf{R}^2)$ dans $\mathcal{H}_{\varepsilon, \lambda}$ telle que pour tout $f \in L^2(\mathbf{R}^2)$, $\mathcal{H}_{\varepsilon, \lambda} f$ soit l'unique élément de $\mathcal{H}_{\varepsilon, \lambda}$ vérifiant

$$\mathcal{H}_{\varepsilon, \lambda} f(n(x, y, 0)) = \int e^{-2i\pi y \zeta} f(x, \zeta) d\zeta$$

est, pour un choix convenable de la mesure quasi-invariante sur $\widetilde{SL}_3(\mathbf{R})/P_+$, une isométrie entre ces espaces entretenant $\varrho_{\varepsilon, \lambda}$ et $\varrho'_{\varepsilon, \lambda}$.

D'autre part si on note $\mathcal{H}_{\varepsilon, \lambda}^\infty$ le sous-espace de $\mathcal{H}_{\varepsilon, \lambda}$ constitué des fonctions de

classe C^∞ il est facile de vérifier que $\mathcal{H}_{\varepsilon,\lambda}^\infty$ est un sous-espace de $V_{\delta_{\varepsilon,1},\Lambda_\lambda}$ avec

$$\Lambda_\lambda = 2i\pi\lambda\omega_{1,2} - \frac{1}{2}a_{2,3} = \left(2i\pi\lambda + \frac{1}{2}\right)\omega_{1,2} - \omega_{2,3}. \quad (98)$$

On note $\varrho_{\varepsilon,\lambda}^\infty$ la représentation dérivée de $\varrho_{\varepsilon,\lambda}$ dans l'espace des vecteurs SU_2 -finis de cette représentation. Alors l'intégrale, encore notée $\mathcal{H}_{\varepsilon,\lambda}$

$$\mathcal{H}_{\varepsilon,\lambda} f(x, y, z) = \int e^{-2i\pi y \xi} f(x, \xi) d\xi$$

est absolument convergente pour tout vecteur f , SU_2 -fini de $L^2(\mathbf{R}^2)$ (l'espace \mathcal{S}_0 est contenu dans $L^1(\mathbf{R}^2)$) et elle définit une injection $\mathcal{H}_{\varepsilon,\lambda}$ de l'espace des vecteurs SU_2 -finis de $L^2(\mathbf{R}^2)$ pour la représentation $\varrho_{\varepsilon,\lambda}$, dans l'espace $\mathcal{E}_{\delta_{\varepsilon,1},\Lambda_\lambda} = V_{\delta_{\varepsilon,1},\Lambda_\lambda}$, qui entrelace les représentations $\varrho_{\varepsilon,\lambda}^\infty$ et $r_{\delta_{\varepsilon,1},\Lambda_\lambda}^\infty$.

Nous sommes maintenant en mesure de déterminer les paramètres de Langlands de la représentation $\varrho_{\varepsilon,\lambda}$, c'est-à-dire de trouver les éléments $\delta \in \hat{M}$ et $\Lambda \in \alpha_+^*$ tels qu'elle soit infinitésimalement équivalente à $J_{\delta,\Lambda}$.

THEOREME 2. (i) *Pour tout $\lambda \in \mathbf{R}$ et $\varepsilon = \pm 1$ la représentation $\varrho_{\varepsilon,\lambda}$ est infinitésimalement équivalente à $J_{\delta(\varepsilon),\mu(\lambda)}$ avec*

$$\delta(\varepsilon) = \delta_{\varepsilon,\varepsilon} \quad \text{et} \quad \mu(\lambda) = +\frac{1}{2}\gamma + 2i\pi\lambda(\omega_{2,3} - \omega_{1,2}).$$

(ii) *L'intégrale*

$$I_{1,\lambda} f(x, y, z) = \int |u|^{-1/2+2i\pi\lambda} e^{2i\pi(zu-y)v} f(x-u, v) du dv \quad (99)$$

$$\left(\text{resp. } I_{-1,\lambda} f(x, y, z) = \int |u|^{-1/2+2i\pi\lambda} \varepsilon(u) e^{2i\pi(zu-y)v} f(x-u, v) du dv \right)$$

est absolument convergente pour tout f appartenant à l'espace des vecteurs SU_2 -finis de la représentation $\varrho_{1,\lambda}$ (resp. $\varrho_{-1,\lambda}$) et l'application $I_{\varepsilon,\lambda}$ induit un homomorphisme injectif de $\mathfrak{U}(\mathfrak{sl}_3(\mathbf{R}))$ -modules de l'espace des vecteurs SU_2 -finis de la représentation $\varrho_{\varepsilon,\lambda}$ dans l'espace $\mathcal{E}_{\delta(\varepsilon),\omega_{1,3}\mu(\lambda)}$.

Démonstration. Soient $\lambda \in \mathbf{R}$ et $\varepsilon = \pm 1$. Il est facile de voir que $\omega_{1,2} \delta_{\varepsilon,1} = \delta_{\varepsilon,\varepsilon}$ et que

$$\omega_{1,2} \Lambda_\lambda = -\frac{1}{2}\gamma + 2i\pi\lambda(\omega_{2,3} - \omega_{1,2}) = \omega_{1,3} \left(\frac{1}{2}\gamma + 2i\pi\lambda(\omega_{2,3} - \omega_{1,2}) \right).$$

D'autre part Λ_λ vérifie les conditions de la proposition 17 pour que l'opérateur $A_{\omega_{1,2}, \delta_{\varepsilon,1}, \Lambda_\lambda}$ soit défini. Compte-tenu des propriétés des $\widetilde{SL}_3(\mathbf{R})$ -modules $V_{\delta, \Lambda}$ énoncées dans le paragraphe 1, la première assertion du théorème sera prouvée si l'on montre que la restriction de l'opérateur $A_{\omega_{1,2}, \delta_{\varepsilon,1}, \Lambda_\lambda}$ à $\mathcal{H}_{\varepsilon, \lambda}^\infty$ est non nulle. Un calcul facile montre alors que cet opérateur est donné par

$$A_{\omega_{1,2}, \delta_{1,1}, \Lambda_\lambda} f(x, y, z) = \int |u|^{-1/2+2i\pi\lambda} f(x+u, y+zu, z) du$$

$$A_{\omega_{1,2}, \delta_{-1,1}, \Lambda_\lambda} f(x, y, z) = - \int \varepsilon(u) |u|^{-1/2+2i\pi\lambda} f(x+u, y+zu, z) du$$

ceci pour tout $f \in \mathcal{E}_{\delta_{\varepsilon,1}, \Lambda_\lambda}$.

Or on a

$$\mathcal{H}_{1,\lambda}(f_{1,\lambda})(x, y, z) = (1+x^2+y^2)^{-(3/4+i\pi\lambda)}$$

$$\mathcal{H}_{-1,\lambda}(f_{-1,\lambda})(x, y, z) = -y(1+x^2+y^2)^{-(5/4+i\pi\lambda)}$$

et un calcul long mais standard conduit au résultat (s et t sont définis par (94))

$$A_{\omega_{1,2}, \delta_{1,1}, \Lambda_\lambda} \circ \mathcal{H}_{1,\lambda}(f_{1,\lambda})(x, y, z) = \frac{\Gamma(1/2)\Gamma(1/4+i\pi\lambda)}{\Gamma(3/4+i\pi\lambda)} s^{-1/2+2i\pi\lambda} t^{-1/2-2i\pi\lambda}$$

$$A_{\omega_{1,2}, \delta_{-1,1}, \Lambda_\lambda} \circ \mathcal{H}_{-1,\lambda}(f_{-1,\lambda})(x, y, z) = \frac{\Gamma(1/2)\Gamma(3/4+i\pi\lambda)}{\Gamma(5/4+i\pi\lambda)} (z-xy+x^2z) s^{-3/2+2i\pi\lambda} t^{-3/2-2i\pi\lambda}$$

Ceci montre la première assertion du théorème. Il est immédiat que l'on a les relations formelles $A_{\omega_{1,2}, \delta_{\varepsilon,1}, \Lambda_\lambda} \circ \mathcal{H}_{\varepsilon, \lambda} = I_{\varepsilon, \lambda}$. La deuxième assertion résulte alors du fait que les intégrales (99) sont absolument convergentes pour tout $f \in \mathcal{S}_0$, et du lemme 19. Q.E.D.

4. Détermination des paramètres de Langlands pour la représentation $\tilde{\rho}$

Soit ρ une représentation admissible de $\widetilde{SL}_3(\mathbf{R})$ dans un espace de Hilbert \mathcal{H}_ρ ; on note \mathcal{H}_ρ^0 le sous-espace de \mathcal{H}_ρ formé des vecteurs SU_2 -finis. Si $v_1, v_2 \in \mathcal{H}_\rho$ on note c_{v_1, v_2} le coefficient de ρ qu'ils définissent :

$$c_{v_1, v_2}(\mathfrak{g}) = \langle \rho(\mathfrak{g}) v_1, v_2 \rangle, \quad \forall \mathfrak{g} \in \widetilde{SL}_3(\mathbf{R}).$$

On note L_+ le sous-ensemble de α^* formé des combinaisons linéaires à coeffi-

cients entiers positifs des racines positives. On note α_+ la chambre de Weyl positive associée à Δ_+ . Pour tout $\eta > 0$ on pose

$$\alpha_{+, \eta} = \{H \in \alpha / \alpha(H) > \eta, \quad \forall \alpha \in \Delta_+\}$$

Sur $\alpha_{\mathbb{C}}^*$ on considère la relation d'ordre \leq définie par

$$\lambda \leq \mu \Leftrightarrow \mu - \lambda \in L_+.$$

On a alors le résultat suivant dû à Wallach et dont une version moins complète avait déjà été obtenue par Harish-Chandra (cf. [2], ch. IV).

THEOREME 3. *Il existe un nombre fini d'éléments de $\alpha_{\mathbb{C}}^*$, deux à deux non comparables pour la relation \leq , notés μ_1, \dots, μ_l et pour tout $1 \leq i \leq l$ et tout $\mu \in L_+$ il existe une fonction $p_{i, \mu}$ à valeurs dans \mathbb{C} définie sur $\alpha \times \mathcal{H}_0^0 \times \mathcal{H}_0^0$ tels que*

(i) $p_{i, 0} \neq 0$ pour $1 \leq i \leq l$.

(ii) Pour tout $v_1, v_2 \in \mathcal{H}_0^0$ la fonction $p_{i, \mu}(\cdot, v_1, v_2)$ est une fonction polynômiale sur α .

(iii) L'application à valeurs dans l'espace des fonctions polynômes sur α et définie sur $\mathcal{H}_0^0 \times \mathcal{H}_0^0$ par $(v_1, v_2) \mapsto p_{i, \mu}(\cdot, v_1, v_2)$ est sesquilinéaire.

(iv) Pour tout $H \in \alpha_+$ et tout $v_1, v_2 \in \mathcal{H}_0^0$ on a

$$c_{v_1, v_2}(\exp H) = \sum_{i=1}^l e^{(\mu_i - \gamma)(H)} \sum_{\mu \in L_+} p_{i, \mu}(H, v_1, v_2) e^{-\mu(H)}$$

la série étant uniformément et absolument convergente dans $\alpha_{+, \eta}$ pour tout $\eta > 0$.

On appelle ensemble des exposants de ρ et on note $\mathcal{E}(\rho)$ l'ensemble des $\mu_i - \mu$, $\mu \in L_+$, $1 \leq i \leq l$ tels que $p_{i, \mu}$ soit non nul. On note $\mathcal{E}_0(\rho)$ l'ensemble des éléments de $\mathcal{E}(\rho)$ minimaux pour la relation \leq :

$$\mathcal{E}_0(\rho) = \{\mu_1, \dots, \mu_l\}.$$

On a alors le résultat suivant :

LEMME 20. *Soient $\lambda \in \alpha_{\mathbb{C}}^*$, $v_1, v_2 \in \mathcal{H}_0^0$ tels que pour tout $H \in \alpha_+$*

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} e^{t(\gamma - \lambda)(H)} c_{v_1, v_2}(\exp tH)$$

existe et soit non nulle. Alors $\lambda \in \mathcal{E}(\rho)$.

Démonstration. En utilisant le théorème 3 on voit qu'il existe des éléments $\lambda_1, \dots, \lambda_l$ de $\mathcal{E}(\rho)$ deux à deux non comparables pour \leq et pour tout $1 \leq i \leq l$ et tout $\mu \in L_+$ une fonction polynôme sur α , $p_{i,\mu}$, tels que

- (i) $p_{i,0} \neq 0, \quad 1 \leq i \leq l$
- (ii) $e^{t(\gamma-\lambda)(H)} c_{v_1, v_2}(\exp tH) = \sum_{i=1}^l e^{t(\lambda_i-\lambda)(H)} \sum_{\mu \in L_+} p_{i,\mu}(tH) e^{-t\mu(H)}, \quad \forall t > 0, \forall H \in \alpha_+.$

Pour $H \in \alpha_+$ fixé la série est absolument et uniformément convergente par rapport à t sur tout intervalle $] \eta, +\infty[$ avec $\eta > 0$. Alors sous les hypothèses du lemme et en utilisant le lemme 22 démontré en fin de paragraphe, on voit que pour tout $H \in \alpha_+$, il existe $i, 1 \leq i \leq l$, tel que $(\lambda_i - \lambda)(H) = 0$; autrement dit α_+ est contenu dans la réunion des noyaux des formes linéaires $\lambda_i - \lambda$ et ceci n'est possible que s'il existe $i, 1 \leq i \leq l$ avec $\lambda_i = \lambda$. Q.E.D.

Maintenant supposons que la représentation ρ soit irréductible et notons λ_ρ l'élément de $\alpha_{\mathbb{C}}^*$ définissant son caractère infinitésimal. Soit Θ_ρ le caractère de la représentation ρ ; c'est une distribution localement L^1 sur $\tilde{S}\tilde{L}_3(\mathbf{R})$ et analytique sur l'ouvert des éléments réguliers de $\tilde{S}\tilde{L}_3(\mathbf{R})$. Soit α' le sous-ensemble de α formé des $H \in \alpha$ tels que $\alpha(H) \neq 0$ pour toute racine α et soit D le dénominateur de Weyl défini sur MA par

$$D(m\mathfrak{b}) = \det(1 - \text{Ad}(m\mathfrak{b}))|_{\mathfrak{n}_+}, \quad \forall m \in M, \forall \mathfrak{b} \in A.$$

Alors pour tout $m \in M$ il existe une famille de nombres $d_{\omega, m}$, $\omega \in W$ tels que

$$D\Theta_\rho(m \exp H) = \sum_{\omega \in W} d_{\omega, m} e^{\omega \lambda_\rho(H)}, \quad \forall m \in M, \forall H \in \alpha'.$$

Le résultat suivant n'est autre que le théorème 1 de [8] réécrit dans la situation qui nous intéresse.

PROPOSITION 21. *Si ρ est une représentation irréductible admissible de $\tilde{S}\tilde{L}_3(\mathbf{R})$ alors $\mathcal{E}_0(\rho)$ est le sous-ensemble des éléments maximaux, pour la relation d'ordre \leq sur $\alpha_{\mathbb{C}}^*$, de l'ensemble des $\omega \lambda_\rho$ pour $\omega \in W$.*

Nous sommes maintenant en mesure de déterminer les paramètres de Langlands de la représentation $\tilde{\rho}$. Commençons par le résultat suivant :

LEMME 21. *La représentation $\tilde{\rho}$ admet $\frac{1}{2}\gamma$ comme exposant.*

Démonstration. Soit $H \in \alpha_+$, alors on a $H = \alpha H_{1,2} + \beta H_{2,3}$ avec $2\alpha - \beta > 0$ et $-\alpha + 2\beta > 0$ et aussi $\frac{1}{2}\gamma(H) = \frac{1}{2}(\alpha + \beta)$. De plus pour tout $f \in L^2(\mathbf{R}^2)$

$$\bar{\varrho}(\exp(\log t) H) f(x, y) = t^{(\alpha-2\beta)/2} f(t^{2\alpha-\beta} x, t^{-(\alpha+\beta)} y), \quad \forall t > 0.$$

et il vient, en utilisant les formules (89)

$$\begin{aligned} e^{(1/2)(\log t)\gamma(H)} c_{f_1, f_1}(\exp(\log t) H) &= 2 \int (t^{2\beta-4\alpha} + x^2)^{-1/4} (1+x^2)^{-3/4} \\ &\times e^{(i/2)\text{Arctg } t^{2\alpha-\beta} x} e^{-(i/2)\text{Arctg } x} \exp\left(-2\pi|y| t^{\alpha-2\beta} \left(\frac{t^{2\beta-4\alpha} + x^2}{1+x^2}\right)^{1/2}\right) e^{-2\pi|y|} dx dy \end{aligned}$$

et on trouve, en passant à la limite sous le signe somme,

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} e^{(1/2)(\log t)\gamma(H)} c_{f_1, f_1}(\exp(\log t) H) = \frac{2}{\pi} (1-i) \int_0^{+\infty} x^{1/2} (1+x^2)^{-1} (1+(1+x^2)^{1/2})^{-1/2} dx$$

qui est un nombre non nul.

Q.E.D.

THEOREME 4. La représentation $\bar{\varrho}$ est infinitésimalement équivalente à $J_{\delta, \gamma/2}$.

Démonstration. En utilisant le lemme 21 et la proposition 21 on voit que le caractère infinitésimal de la représentation $\bar{\varrho}$ est déterminé par un élément $\lambda_{\bar{\varrho}}$ se trouvant dans $\frac{1}{2}\gamma + L_+$, autrement dit on peut écrire

$$\lambda_{\bar{\varrho}} = \frac{1}{2}\gamma + p\alpha_{1,2} + q\alpha_{2,3}, \quad \text{avec } p, q \in \mathbf{N}.$$

D'autre part comme les éléments de $\frac{1}{2}\gamma + L^+$ sont réguliers, $\bar{\varrho}$ est infinitésimalement équivalente à la représentation $J_{\delta, \omega\lambda_{\bar{\varrho}}}$ où ω est l'unique élément de W tel que $\omega\lambda_{\bar{\varrho}} \in \alpha_+^*$ (voir § 1 de ce chapitre). Et en utilisant le théorème 5.2 du chapitre IV de [2] on voit que $\lambda_{\bar{\varrho}}$ est dans l'enveloppe convexe des $\omega\gamma$, $\omega \in W$. Un calcul facile montre que ceci n'est possible que si $p=q=0$.

Q.E.D.

Voici le résultat utilisé dans la démonstration du lemme 20.

LEMME 22. Soient $\lambda_1, \dots, \lambda_l$ des nombres complexes deux à deux distincts, μ_1, \dots, μ_n des nombres réels strictement positifs et, pour tout $1 \leq k \leq l$ et tout $m \in \mathbf{N}^n$, un polynôme en une variable $p_{k,m}$ tels que $p_{k,0} \neq 0$ et que la série

$$f(t) = \sum_{k=1}^l e^{i\lambda_k} \left(\sum_{m \in \mathbf{N}^n} p_{k,m}(t) e^{-t\langle m, \mu \rangle} \right),$$

où on a posé pour tout $m \in \mathbf{N}^n$ s'écrivant $m = (m_1, \dots, m_n)$, $\langle m, \mu \rangle = \sum_{k=1}^l m_k \mu_k$, soit uniformément et absolument convergente sur tout intervalle $]\eta, +\infty[$ avec $\eta > 0$.

Si $\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t)$ existe et est non nulle alors on a

(i) $\forall k, 1 \leq k \leq l, \operatorname{Re} \lambda_k < 0$ ou, $\lambda_k = 0$ et $p_{k,0}$ est constant.

(ii) $\exists k, 1 \leq k \leq l, \operatorname{Re} \lambda_k = 0$.

Démonstration. D'après le lemme 7.2 chapitre IV de [2] on sait que si pour tout $1 \leq k \leq l, \operatorname{Re} \lambda_k < 0$, alors $\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t) = 0$. On peut donc supposer que les nombres λ_k vérifient $\operatorname{Re} \lambda_1 \geq \operatorname{Re} \lambda_2 \geq \dots \geq \operatorname{Re} \lambda_l \geq 0$. Montrons dans un premier temps que $\operatorname{Re} \lambda_1 = \dots = \operatorname{Re} \lambda_l = 0$. Supposons donc que $\operatorname{Re} \lambda_1 > 0$. Alors écrivant

$$f(t) = e^{t\lambda_1} \left(\sum_{k=1}^l e^{t(\lambda_k - \lambda_1)} \left(\sum_{m \in \mathbf{N}^n} p_{k,m}(t) e^{-t\langle m, \mu \rangle} \right) \right)$$

on voit que

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^l e^{t(\lambda_k - \lambda_1)} \left(\sum_{m \in \mathbf{N}^n} p_{k,m}(t) e^{-t\langle m, \mu \rangle} \right) = 0.$$

En utilisant encore le lemme 7.2, chapitre IV de [2], mais pour la réciproque, on trouve que pour tout $1 \leq k \leq l, \operatorname{Re}(\lambda_k - \lambda_1) < 0$, ce qui est impossible.

On peut donc écrire

$$f(t) = \sum_{k=1}^l e^{i\nu_k t} [p_{k,0}(t) + \psi_k(t)]$$

avec $\nu_1, \dots, \nu_l \in \mathbf{R}$ deux à deux distincts et $\lim_{t \rightarrow 0} \psi_k(t) = 0$. Ainsi, si on pose

$$g(t) = \sum_{k=1}^l e^{i\nu_k t} p_{k,0}(t)$$

il existe un nombre $c \neq 0$ tel que $\lim_{t \rightarrow +\infty} g(t) = c$. Écrivons alors $p_{k,0}(t) = \sum_{q \geq 0} a_{q,k} t^q$ et soit q_0 le plus grand des entiers q tels qu'il existe un k avec $1 \leq k \leq l$ tel que $a_{q,k} \neq 0$.

On a alors

$$g(t) = t^{q_0} (g_0(t) + h(t))$$

avec $\lim_{t \rightarrow +\infty} h(t) = 0$ et

$$g_0(t) = \sum_{k=1}^l a_{q_0,k} e^{i\nu_k t}.$$

Or d'après le lemme A.3.2.1 de [18] II on a

$$\limsup_{t \rightarrow +\infty} |g_0(t)| \geq \left(\sum_{k=1}^l |a_{q_0, k}|^2 \right)^{1/2} > 0 \quad (100)$$

ce qui montre que $q_0=0$. Ainsi les polynômes $p_{k,0}$ sont tous constants et si on pose $a_k=p_{k,0}$ on a pour tout k , $a_k \neq 0$ et de plus

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^l a_k e^{iv_k t} = c$$

ce qui n'est possible en vertu de (100) appliqué à $g_0(t)-c$ que si $l=1$, $v_1=0$ et $a_1=c$. Q.E.D.

5. Opérateur d'entrelacement entre $\tilde{\rho}$ et $\mathcal{E}_{\delta, -\gamma/2}$

PROPOSITION 22. *Le SU_2 -type minimal de $\mathcal{E}_{\delta, -\gamma/2}$ est engendré par les fonctions à valeurs dans \mathbf{C}^2 (l'espace de la représentation δ de M) :*

$$\begin{aligned} F_1(x, y, z) &= s^{-1/2} t^{-1/2} \begin{pmatrix} -b(x, y, z) \\ a(x, y, z) \end{pmatrix} \\ F_{-1}(x, y, z) &= s^{-1/2} t^{-1/2} \begin{pmatrix} \tilde{a}(x, y, z) \\ \tilde{b}(x, y, z) \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (101)$$

où a, b sont les fonctions C^∞ sur \mathbf{R}^3 uniquement déterminées par

$$\begin{aligned} a^2(x, y, z) &= \frac{1}{2} s^{-1} t^{-2} [yt + i(xy - z(1+x^2))] [y - xz + iz] \\ a(x, y, z) b(x, y, z) &= \frac{1}{2} t^{-1} (y - xz + iz) \\ a(0, 0, 0) &= 1 \end{aligned} \quad (102)$$

où s et t sont définis par (94).

Démonstration. On a pour tout $(x, y, z) \in \mathbf{R}^3$

$$n(x, y, z) = \hat{k}(x, y, z) \begin{pmatrix} s & u & v \\ 0 & s^{-1}t & w \\ 0 & 0 & t^{-1} \end{pmatrix} \quad (103)$$

avec s et t définis par les relations (94), u, v, w déterminés par

$$u = (x+yz)s^{-1}, \quad v = ys^{-1}, \quad w = (z(1+x^2)-xy)s^{-1}t^{-1}. \quad (104)$$

et $k(x, y, z) \in SU_2$. En utilisant le théorème de réciprocity de Frobenius on voit que l'on peut prendre, si on désigne par (e_1, e_2) la base canonique de \mathbf{C}^2

$$F_1(x, y, z) = s^{-1/2}t^{-1/2}k^{-1}(x, y, z)e_2$$

$$F_{-1}(x, y, z) = s^{-1/2}t^{-1/2}k^{-1}(x, y, z)e_1.$$

Il nous reste donc à voir que l'on a

$$k(x, y, z) = \begin{pmatrix} a(x, y, z) & b(x, y, z) \\ -\bar{b}(x, y, z) & \bar{a}(x, y, z) \end{pmatrix}$$

avec a et b vérifiant les relations (102).

Soit $k \in SU_2$, écrivons $k = \begin{pmatrix} a & b \\ -\bar{b} & \bar{a} \end{pmatrix}$ avec

$$a = \cos \frac{\theta}{2} e^{i(\varphi+\psi)/2}, \quad b = \sin \frac{\theta}{2} e^{i(\varphi-\psi)/2}, \quad 0 \leq \theta \leq \pi, \quad \varphi, \psi \in \mathbf{R}.$$

En utilisant (1) il n'est pas difficile de voir que l'on a

$$\pi(k) = \begin{pmatrix} * & * & -\sin \theta \cos \varphi \\ * & * & -\sin \theta \sin \varphi \\ \sin \theta \cos \psi & -\sin \theta \sin \psi & \cos \theta \end{pmatrix}$$

et lorsque $k = k(x, y, z)$ en utilisant (103) et (104) on voit sans peine que

$$\sin \theta \cos \psi = ys^{-1}, \quad \sin \theta \cos \varphi = (y-xz)t^{-1}, \quad \cos \theta = t^{-1}$$

$$\sin \theta \sin \psi = [xy-z(1+x^2)]s^{-1}t^{-1}, \quad \sin \theta \sin \varphi = zt^{-1}$$

formules qui modulo (105) conduisent rapidement au résultat.

Q.E.D.

On définit la fonction J de \mathbf{R}^2 dans \mathbf{C}^2 en posant

$$J(u, v) = \begin{pmatrix} i^{(1-\varepsilon(u))/2} \\ -i^{\varepsilon(u)-1/2} \varepsilon(v) \end{pmatrix}, \quad \forall u, v \in \mathbf{R}^2$$

et pour toute fonction f de \mathbf{R}^2 dans \mathbf{C} on pose

$$\tilde{f}(x, y, z) = -\frac{e^{i(\pi/4)}}{2} \int |u|^{-1/2} J(u, v) e^{2i\pi(zu-y)v} f(x-u, v) du dv.$$

PROPOSITION 23. Pour tout $f \in \mathcal{S}_0$ l'intégrale $\tilde{I}f(x, y, z)$ est absolument convergente pour tout $(x, y, z) \in \mathbf{R}^3$ et elle définit un élément $\tilde{I}f$ de $C^\infty(\mathbf{R}^3) \otimes \mathbf{C}^2$. Alors l'application $f \mapsto \tilde{I}f$ est un opérateur continu de \mathcal{S}_0 dans $C^\infty(\mathbf{R}^3) \otimes \mathbf{C}^2$ qui entrelace les représentations $\tilde{\varrho}|_{AN}$ restreinte à \mathcal{S}_0 et $r'_{\delta, -\gamma/2}$.

Démonstration. Pour tout $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbf{N}$ et tout $f \in \mathcal{S}_0$ on a formellement

$$\partial_x^\alpha \partial_y^\beta \partial_z^\gamma \tilde{I}f(x, y, z) = -\frac{e^{i(\pi/4)}}{2} (-1)^\beta (2i\pi)^{\beta+\gamma} \int |u|^{-1/2} e^{2i\pi(zu-y)v} u^\gamma v^{\beta+\gamma} \partial_u^\alpha f(x-u, v) du dv.$$

Pour montrer que la fonction $\tilde{I}f$ est de classe C^∞ , il suffit de montrer que la fonction apparaissant dans l'intégrale est majorée par une fonction intégrable indépendante de x, y, z pour (x, y, z) parcourant un compact quelconque de \mathbf{R}^3 . Mais ceci résulte immédiatement du fait que pour tout $\alpha, \beta, \gamma, N \in \mathbf{N}$

$$|u|^\gamma |v|^{\beta+\gamma} |\partial_u^\alpha f(x-u, v)| \leq M_N(x) (1+u^2)^{-1/4} (1+v^2(1+u^2))^{-N} \sum_{l=0}^{\gamma} C_\gamma^l |x|^l v_{l, \beta+\gamma, \alpha, 0}^N(f).$$

De plus on a

$$|\partial_x^\alpha \partial_y^\beta \partial_z^\gamma \tilde{I}f(x, y, z)| \leq M_N(x) \sum_{l=0}^{\gamma} C_\gamma^l |x|^l v_{l, \beta+\gamma, \alpha, 0}^N(f) \int |u|^{-1/2} (1+u^2)^{-1/4} (1+v^2(1+u^2))^{-N} du dv$$

ce qui montre que \tilde{I} est un opérateur continu de \mathcal{S}_0 dans $C^\infty(\mathbf{R}^3) \otimes \mathbf{C}^2$.

Enfin le fait que \tilde{I} est un opérateur d'entrelacement est immédiat. Q.E.D.

THEOREME 5. L'opérateur \tilde{I} induit un homomorphisme injectif de $\mathfrak{U}(sl_3(\mathbf{R}))$ -module de l'espace des vecteurs SU_2 -finis de la représentation $\tilde{\varrho}$ dans $\mathcal{E}_{\delta, -\gamma/2}$.

Démonstration. Supposons que nous ayons montré que \tilde{I} entrelace les SU_2 -types minimaux de $\tilde{\varrho}$ et de $\mathcal{E}_{\delta, -\gamma/2}$. Alors d'après les propositions 20 et 23 et le lemme 19, pour tout f élément du SU_2 -type minimal de $\tilde{\varrho}$ et pour tout $u \in \mathfrak{U}(\mathfrak{a} \oplus \mathfrak{n})$ on a

$$\tilde{I}(\tilde{\varrho}^\infty(u)f) = r'_{\delta, -\gamma/2}(u) \tilde{I}f$$

mais comme $\tilde{I}f \in \mathcal{E}_{\delta, -\gamma/2}$ on a

$$r'_{\delta, -\gamma/2}(u) \tilde{I}f = r_{\delta, -\gamma/2}^\infty(u) \tilde{I}f, \quad \forall u \in \mathfrak{U}(\mathfrak{a} \oplus \mathfrak{n}).$$

Ceci montre donc que \tilde{I} induit un homomorphisme de $\mathfrak{U}(\mathfrak{a} \oplus \mathfrak{n})$ -module de l'espace des vecteurs SU_2 -finis de $\tilde{\varrho}$ dans $\mathcal{E}_{\delta, -\gamma/2}$ qui entrelace les SU_2 -type minimaux de ces $\mathfrak{U}(sl_3(\mathbf{R}))$ -modules.

D'autre part on sait qu'il existe un unique (à un scalaire multiplicatif près) $\mathfrak{U}(sl_3(\mathbf{R}))$ -homomorphisme non trivial de l'espace des vecteurs SU_2 -finis de $\tilde{\mathcal{G}}$ dans $\mathcal{E}_{\delta, -\gamma/2}$ et que cet homomorphisme est injectif. Comme $\mathfrak{U}(sl_3(\mathbf{R})) = \mathfrak{U}(\mathfrak{a} \oplus \mathfrak{n}) \mathfrak{U}(su_2)$, on voit que \tilde{I} est un tel homomorphisme.

Il nous reste donc à voir que \tilde{I} entrelace les SU_2 -types minimaux et pour cela il suffit de voir que

$$\tilde{I}f_1 = F_1 \quad \text{et} \quad \tilde{I}f_{-1} = F_{-1}.$$

En utilisant le fait que

$$f_{-1}(x, y) = i\varepsilon(y) \overline{f_1(x, y)}$$

on voit aisément que si

$$\tilde{I}f_1 = s^{-1/2}t^{-1/2} \begin{pmatrix} -b_0 \\ a_0 \end{pmatrix}$$

alors

$$\tilde{I}f_{-1} = s^{-1/2}t^{-1/2} \begin{pmatrix} \tilde{a}_0 \\ \tilde{b}_0 \end{pmatrix}.$$

Il suffit donc de calculer $\tilde{I}f_1$ et le calcul montre que

$$\begin{aligned} & s^{-1/2}t^{-1/2}b_0(x, y, z) \\ &= -\frac{ie^{i(\pi/4)}}{\pi\sqrt{2}} \int (u-i0)^{-1/2} (1-i(x-u))^{-1/2} \frac{zu-y}{1+x^2+y^2-2u(x+yz)+u^2(1+z^2)} du \end{aligned}$$

et un calcul de résidu dans le demi-plan $\text{Im } u < 0$ conduit à

$$b_0(x, y, z) = -\frac{ie^{i(\pi/4)}}{\sqrt{2}} s^{1/2}t^{-1/2} (x+yz-it)^{-1/2} (1+z^2+t+iz(y-xz))^{-1/2} ((zx-y)-itz).$$

Le calcul de a_0 se conduit de manière analogue; dans un premier temps on trouve

$$s^{-1/2}t^{-1/2}a_0(x, y, z) = \frac{e^{i(\pi/4)}}{\pi\sqrt{2}} \int (u+i0)^{-1/2} \frac{(1+i(x-u))^{1/2}}{1+x^2+y^2-2u(x+yz)+u^2(1+z^2)} du$$

et à l'aide d'un calcul de résidu dans le demi-plan $\text{Im } u > 0$ on voit que

$$a_0(x, y, z) = \frac{e^{i(\pi/4)}}{\sqrt{2}} s^{1/2}t^{-1/2} (x+yz+it)^{-1/2} (1+z^2+t+iz(xz-y))^{1/2}.$$

Il ne reste plus qu'à vérifier que les fonctions a_0 et b_0 satisfont aux conditions (102), ce qui n'est pas bien difficile Q.E.D.

Bibliographie

- [1] BERNAT, P. ET AL., *Représentations des groupes de Lie résolubles*. Monographies de la S.M.F. (Dunod, Paris 1972).
- [2] BOREL, A. & WALLACH, N., *Continuous cohomology, discrete subgroups and representations of reductive groups*. Annals of Mathematics Studies. Princeton University Press (1980).
- [3] FUJIWARA, H., Certains opérateurs d'entrelacement pour des groupes de Lie résolubles et leurs applications. *Mem. of the Faculty of Science, Kyushu University, Series A, Math.*, Volume XXXVI N° 1 1982, 13–72.
- [4] FUJIWARA, H., LION, G. & MAGNERON, B., Opérateurs d'entrelacement et calcul d'obstruction sur des groupes de Lie résolubles. *Lecture Notes in Math.* 880. Springer Verlag, Berlin New-York (1981).
- [5] GROSS, K., The dual of a parabolic subgroup and a degenerate principal series of $Sp(n, \mathbb{C})$. *Amer. J. Math.*, 93 (1971), 359–428.
- [6] GUELFAND, I. M. & CHILOV, G. E., *Les distributions*. Dunod, Paris (1962).
- [7] GUILLEMIN, V. & STERNBERG, S., *Geometric asymptotics*. Math. Surveys, 14. A.M.S. Providence, Rhode Island (1977).
- [8] HECHT, H., On characters and asymptotics of representations of a real reductive Lie group. *Math. Ann.*, 242 (1979), 103–126.
- [9] HOWE, R., *On a notion of rank for unitary representations of the classical groups*. C.I.M.E., Cortona (1980).
- [10] JOSEPH, D. W., Representations of the algebra of $SL_3(\mathbb{R})$ with $j=2$. Preprint (1969).
- [11] KASHIWARA, M. & VERGNE, M., On the Segal-Shale-Weil representations and harmonic polynomials. *Invent. Math.*, 44 (1978), 1–47.
- [12] KNAPP, A. & ZUCKERMAN, G., *Classification theorems for representations of semi-simple Lie groups*. Lecture Notes in Math., 587. Springer Verlag, Berlin, New York (1977).
- [13] RAWNSLEY, J. & STERNBERG, S., On representations associated to the minimal nilpotent coadjoint orbit of $SL_3(\mathbb{R})$. *Amer. J. Math.*, 104 (1982), 1153–1189.
- [14] SCHIFFMANN, G., Intégrales d'entrelacement et fonctions de Whittaker. *Bull. Soc. Math. France*, 99 (1971), 3–72.
- [15] ŠIJAČKI, S., The unitary irreducible representations of $\widetilde{SL}_3(\mathbb{R})$. *J. Math. Phys.*, 16 (1975), 298–311.
- [16] ŚNIATYCKI, J., *Geometric quantization and quantum mechanics*. Applied Mathematical Sciences, 30. Springer Verlag, New York, Heidelberg, Berlin (1980).
- [17] SPEH, B., The unitary dual of $GL(3, \mathbb{R})$ and $GL(4, \mathbb{R})$. Preprint (1979).
- [18] WARNER, G., *Harmonic analysis on semi-simple Lie groups I et II*. Springer Verlag, Berlin, Heidelberg, New York (1972).
- [19] WEIL, A., Sur certains groupes d'opérateurs unitaires. *Acta Math.*, 111 (1965), 143–211.
- [20] WOLF, J. A., *Representations associated to minimal coadjoint orbits*. Lecture Notes in Math., 676. Springer Verlag, Berlin, New York (1978).

Reçu le 2 juillet, 1981