BRIEFE VON K. WEIERSTRASS AN L. KOENIGSBERGER.

Berlin, 22. Oktober 1864.

Geehrter Freund!

Ich habe nach Ihrer Abreise die Untersuchung, unter welcher Bedingung ein Integral von der Form

$$\int \frac{A + Bx}{\sqrt{R(x)}}\, dx,$$

$$(\text{wo } R(x) = A_n(x-a_0)\ldots(x-a_n))$$

auf ein elliptisches zurückführbar ist, wieder aufgenommen und teile Ihnen, da Sie sich für den Gegenstand interessieren, das Resultat mit.

Eine ϑ Funktion mit den Argumenten v_1, v_2 und den Moduln τ_{11}, τ_{12}, τ_{22} wird auf die allgemeinste Weise in eine andere mit den Argumenten v_1', v_2' und den Moduln τ_{11}', τ_{12}', τ_{22}' folgendermaßen transformiert:

Es sei

$$\begin{aligned}
w_{11} &= \alpha_1 + \alpha_3\tau_{11} + \alpha_4\tau_{12}, & w_{21} &= \alpha_2 + \alpha_3\tau_{21} + \alpha_4\tau_{22},\\
w_{11}' &= \beta_1 + \beta_3\tau_{11} + \beta_4\tau_{12}, & w_{21}' &= \beta_2 + \beta_3\tau_{21} + \beta_4\tau_{22},\\
w_{12} &= \gamma_1 + \gamma_3\tau_{11} + \gamma_4\tau_{12}, & w_{22} &= \gamma_2 + \gamma_3\tau_{21} + \gamma_4\tau_{22},\\
w_{12}' &= \delta_1 + \delta_3\tau_{11} + \delta_4\tau_{12}, & w_{22}' &= \delta_2 + \delta_3\tau_{21} + \delta_4\tau_{22},
\end{aligned}$$

wo α_1, α_2 usw. ganze Zahlen bedeuten, die den nachstehenden Bedingungsgleichungen, in denen n eine ganze positive Zahl bezeichnet, genügen müssen:

$$\begin{aligned}
\alpha_1\beta_3 + \alpha_2\beta_4 - \alpha_3\beta_1 - \alpha_4\beta_2 &= n,\\
\alpha_1\gamma_3 + \alpha_2\gamma_4 - \alpha_3\gamma_1 - \alpha_4\gamma_2 &= 0,\\
\beta_1\gamma_3 + \beta_2\gamma_4 - \beta_3\gamma_1 - \beta_4\gamma_2 &= 0,\\
\alpha_1\delta_3 + \alpha_2\delta_4 - \alpha_3\delta_1 - \alpha_4\delta_2 &= 0,\\
\gamma_1\delta_3 + \gamma_2\delta_4 - \gamma_3\delta_1 - \gamma_4\delta_2 &= n.
\end{aligned}$$

Dann ist

$$v_1' = n\,\frac{w_{22}v_1 - w_{12}v_2}{w_{11}w_{22} - w_{12}w_{21}}, \qquad v_2' = n\,\frac{w_{11}v_2 - w_{21}v_1}{w_{11}w_{22} - w_{12}w_{21}},$$

$$\tau_{11}' = \frac{w_{22}w_{11}' - w_{12}w_{21}'}{w_{11}w_{22} - w_{12}w_{21}},$$

$$\tau_{12}' = \tau_{21}' = \frac{w_{11}w_{21}' - w_{21}w_{11}'}{w_{11}w_{22} - w_{12}w_{21}} = \frac{w_{22}w_{12}' - w_{12}w_{22}'}{w_{11}w_{22} - w_{12}w_{21}},$$

$$\tau_{22}' = \frac{w_{11}w_{22}' - w_{21}w_{12}'}{w_{11}w_{22} - w_{21}w_{12}}.$$

Wenn nun die Gleichung

$$\frac{w_{11}'}{w_{11}} = \frac{w_{21}'}{w_{21}}$$

besteht, so wird $\tau_{12}' = 0$, und es ist demgemäß jede der Funktionen

$$\vartheta(v_1',\ v_2' \mid \tau_{11}',\ \tau_{12}',\ \tau_{22}')$$

das Produkt zweier elliptischen ϑ, und es können dann die Konstanten A, B (auf zweierlei Art) so bestimmt werden, daß

$$\int \frac{(A + Bx)\,dx}{\sqrt{R(x)}} = \int \frac{d\xi}{\sqrt{R(\xi)}}$$

wird, wo $R(\xi)$ vom dritten Grade und ξ, $\sqrt{R(\xi)}$ rational durch x, $\sqrt{R(x)}$ ausdrückbar sind.

Umgekehrt muß zwischen den Größen τ_{11}, τ_{12}, τ_{22} eine Gleichung von der angegebenen Form stattfinden, wenn sich das Integral

$$\int \frac{A + Bx}{\sqrt{R(x)}}\,dx$$

in der in Rede stehenden Weise in ein elliptisches soll transformieren lassen. (Nach einem Abelschen Satze — Précis, § 1, Theorem 2 — genügt es aber, Transformationen dieser Art zu betrachten.)

Die Bedingung $\tau_{12}' = 0$ hat nun zur Folge, daß

$$\vartheta(0,\ 0 \mid \tau_{11}'\tau_{12}'\tau_{22}')_{14} = 0.$$

Man kann aber

$$\frac{\vartheta(0,\ 0 \mid \tau_{11}'\tau_{12}'\tau_{22}')_{14}}{\vartheta(0,\ 0 \mid \tau_{11}'\tau_{12}'\tau_{22}')_{5}}$$

algebraisch durch die Größen

$$\frac{\vartheta(0,\ 0 \mid \tau_{11}\tau_{12}\tau_{22})_\lambda}{\vartheta(0,\ 0 \mid \tau_{11}\tau_{12}\tau_{22})_5} \qquad \begin{array}{l}(\text{wo } \lambda = 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4 \\ \qquad\quad 0,\ 1 \text{ usw.})\end{array}$$

ausdrücken und so die algebraische Gleichung unter den Größen $a_0, \ldots, a_4$ erhalten, welche der transzendenten $\tau'_{12} = 0$ entspricht.

Beispielsweise sei

$$\begin{array}{ll} w_{11} = 2, & w_{21} = 1, \\ w'_{11} = \tau_{11}, & w'_{21} = \tau_{21}, \\ w_{12} = 0, & w_{22} = 1, \\ w'_{12} = -\tau_{11} + 2\tau_{12}, & w'_{22} = -\tau_{21} + 2\tau_{22}, \end{array}$$

dann sind die obigen Bedingungen erfüllt, und man erhält:

$$n = 2, \qquad v'_1 = v_1 \qquad v'_2 = 2v_2 - v_1$$

$$\tau'_{11} = \tfrac{1}{2}\tau_{11}, \quad \tau'_{12} = \tau_{12} - \tfrac{1}{2}\tau_{11}, \quad \tau'_{22} = 2\tau_{22} - 2\tau_{12} + \tfrac{1}{2}\tau_{11}.$$

Nun findet sich zunächst

$$\vartheta(v'_1,\ v'_2 \mid \tau'_{11},\ \tau'_{12},\ \tau'_{22})_{14} = -\vartheta(v_1,\ 2v_2 \mid \tfrac{1}{2}\tau_{11},\ \tau_{12},\ 2\tau_{22}).$$

Diese Gleichung ergibt sich, wenn man in der Reihe für die erste Funktion statt der Summationsbuchstaben ν_1, ν_2 beziehentlich

$$\nu_1 + \nu_2,\ \nu_2$$

setzt. Sondert man dann in der Reihe für die zweite Funktion (03) die Glieder mit ungeraden ν_1 von denen mit geradem, so erhält man

$$\begin{aligned}\vartheta(v'_1,\ v'_2 \mid \tau'_{11},\ \tau'_{12},\ \tau'_{22})_{14} = {} & \vartheta(2v_1,\ 2v_2 \mid 2\tau_{11},\ 2\tau_{12},\ 2\tau_{22})_{23} \\ & -\vartheta(2v_1,\ 2v_2 \mid 2\tau_{11},\ 2\tau_{12},\ 2\tau_{22})_4.\end{aligned}$$

Nimmt man jetzt

$$\tau_{12} = \tfrac{1}{2}\tau_{11}$$

an, so wird $\tau'_{12} = 0$, und es muß also — in den Bezeichnungen Ihrer Abhandlung —

$$D_{23} = D_4$$

sein. Aber

$$\begin{aligned} 4D_{23}^2 &= \vartheta_5^2 + \vartheta_0^2 - \vartheta_{12}^2 - \vartheta_{34}^2, \\ 4D_4^2 &= \vartheta_5^2 - \vartheta_0^2 + \vartheta_{12}^2 - \vartheta_{34}^2, \end{aligned}$$

folglich

$$\vartheta_0^2 = \vartheta_{12}^2,$$

$$\left(\frac{\vartheta_{12}}{\vartheta_0}\right)^2 = 1;$$

da nun

$$\frac{\vartheta_{12}}{\vartheta_5} = \sqrt[4]{\left\{\frac{a_0 - a_1 \,.\, a_1 - a_4 \,.\, a_2 - a_3}{a_0 - a_2 \,.\, a_1 - a_3 \,.\, a_2 - a_4}\right\}},$$

$$\frac{\vartheta_0}{\vartheta_5} = \sqrt[4]{\left\{\frac{a_0 - a_1 \,.\, a_0 - a_3}{a_0 - a_2 \,.\, a_0 - a_4}\right\}}$$ [1]

ist, so ergibt sich

$$\frac{(a_0 - a_4)(a_1 - a_4)(a_2 - a_3)}{(a_0 - a_3)(a_1 - a_3)(a_2 - a_4)} = 1$$

oder

$$(a_1 - a_2)(a_0 - a_2) = (a_1 - a_3)(a_2 - a_4)$$

als die algebraische Gleichung, welche der transzendenten $\tau_{12} = \frac{1}{2}\tau_{11}$ entspricht.

In dem von Jacobi behandelten Falle ist

$$a_0 = \frac{1}{\varkappa\lambda},\ a_1 = 1,\ a_2 = 0,\ a_3 = -\frac{1}{\varkappa},\ a_4 = -\frac{1}{\lambda}$$

Die vorstehende Bedingungsgleichung ist also erfüllt.

Weiter kann ich diesen Gegenstand für den Augenblick nicht verfolgen; es wird aber das Vorstehende genügen, um Ihnen die Überzeugung zu geben, daß sich das fragliche Problem auf dem von mir eingeschlagenen Wege überhaupt angreifen läßt und daß es jedenfalls mit der allgemeinen Transformationstheorie der Abelschen Transzendenten auf das innigste zusammenhängt. Eine tiefere Ergründung der letzteren wird also wohl unumgänglich vorausgehen müssen.

Mit freundlichstem Gruße

Ihr ergebenster

WEIERSTRASS.

---

[1] Ich bemerke hierbei, daß in den Formeln Ihres § 1 statt $R'(a_{2\alpha})$, $R'(a_{2\alpha-1})$ stehen muß

$$\frac{R'(a_{2\alpha})}{A_0},\ \frac{R'(a_{2\alpha-1})}{A_0}.$$

Berlin, 26. März 1867.

Verehrter Herr Kollege!

Indem ich Ihnen die beikommende kleine Abhandlung übersende, habe ich zugleich um Entschuldigung zu bitten, daß ich Ihr letztes Schreiben, mit dem Sie Ihre neueste Arbeit mir überschickten, erst in dem Augenblick beantworte, wo ich diese bereits gedruckt vor mir sehe.

Die genannte Abhandlung hat mich der großen Einfachheit der von Ihnen entwickelten Modular-Gleichungen wegen sehr interessiert. Sie deuten in Ihrem Schreiben zwar an, daß Sie jetzt die Transformationstheorie eine Zeitlang wollen ruhen lassen. Wollen Sie aber nicht doch wenigstens für $n = 5$ die Modular-Gleichungen noch vollständig zu entwickeln versuchen, — wobei Sie sich, wenn die Ausarbeitung Sie zu lange aufhalten sollte, vorläufig auf die Veröffentlichung der Endresultate beschränken könnten?

— —

Berlin, 25. Oktober 1870.

Verehrter Freund und Kollege!

— —

An der Universität werden wir den Einfluß der kriegerischen Zeit wahrscheinlich sehr stark verspüren. Ich habe heute meine Vorlesung über elliptische Funktionen vor 20 Zuhörern begonnen, während vor zwei Jahren deren 50 vorhanden waren. Kummer und Kronecker wollen deswegen auch erst nach dem 1. November anfangen. Umso schwerer trifft es uns, daß der — bis jetzt — unbeugsame Wille des hohen Senats uns nicht einmal den Ersatz gönnen mag, der uns aus Ihren Händen in der Person Ihres bisherigen weiblichen Zuhörers geboten wird, und — mit den richtigen Gewichts-Koeffizienten versehen — vielleicht ein recht wertvoller sein möchte. Sie würden mich übrigens verpflichten, wenn Sie mir über diese Dame und deren Befähigung zu tieferen mathematischen Studien Ihre Ansicht mitteilen wollten. Dies würde mir um so mehr erwünscht sein, als in der nächsten Senatssitzung — heute über 8 Tage — das Gesuch derselben um Zulassung zu den mathematischen Vorlesungen nochmals zur Sprache kommen wird und ich dies Gesuch befürworten würde, wenn ich, auf Ihr Urteil mich stützend, meine Überzeugung dahin aussprechen könnte, daß die Dame wirklichen wissenschaftlichen Beruf habe. Wie sie mir sagt, hat sie mehrere Semester bei Ihnen Vorlesungen gehört, namentlich auch elliptische Funktionen, und möchte nun gern weiter gehen. Könnte ich erwarten. daß sie dazu befähigt sei, wäre sie z. B. imstande, wenn ich ihr Ausarbeitungen über hyperelliptische

Funktionen gäbe, mit meiner Unterstützung sich darin zurechtzufinden, so würde ich gern bereit sein, ihre Bestrebungen auf alle Weise zu fördern. Sie werden es aber begreiflich finden, daß ich nicht gern etwas anfangen möchte, was sich vielleicht nicht durchführen läßt.

Daß die Persönlichkeit der Dame die erforderlichen Garantien bietet, — ein Punkt, auf den es bei der Verhandlung im Senat ebenfalls ankommen wird —, darf ich, da sie längere Zeit an Ihrer Universität studiert hat, wohl voraussetzen. Doch würde mir eine ausdrückliche Versicherung hierüber gleichfalls willkommen sein, da man sich hier in eine so ungewöhnliche Erscheinung, daß eine junge Dame Mathematik studieren will und sich nicht scheut, ein Lokal, wie unser Auditorium 17 es ist, zu betreten, gar nicht recht finden kann.

Mit freundlichstem Gruß

der Ihrige

Weierstrass.

Berlin, Potsdamer Straße 40, 10. Februar 1876.

Verehrter Freund und Kollege![1]

Die Frage, welche Sie in Ihrem freundlichen Briefe vom 2. d. M. an mich gerichtet haben, werden Sie durch die beigelegte Notiz, — welche ich gelegentlich mir zurückstellen zu wollen bitte —, insofern beantwortet finden, als darin erstens bewiesen wird, daß die Funktion

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b^n \cos(a^n \pi x),$$

wenn a eine beliebige ganze Zahl, größer als 1, und b zwischen $\frac{1}{a}$ und 1 enthalten ist, für keinen Wert von x einen bestimmten endlichen Differential-Koeffizienten besitzt und zweitens in jedem Intervalle unendlich viele Werte von x, für die $f(x)$ ein Maximum oder Minimum ist, nachgewiesen werden.

Es gilt dies übrigens auch noch, wenn $b < 1$, $ab = 1$, sowie auch, wenn a keine ganze Zahl ist, unter den Bedingungen

$$a > 1, \quad 1 > b \geqq \frac{1}{a},$$

doch ist der Beweis dann etwas weitläufig, und besitze ich keine Aufzeichnung davon. Allgemeiner noch kann man behaupten, daß die Reihe

[1] Zu diesem Briefe vergl. den Brief an P. du Bois-Reymond vom 15. Dezember 1874.

$$\sum_{n=0}^{\infty} b_n \cos(a_n x + c_n)\pi,$$

wo die a_n, b_n positive, die c_n beliebige reelle Konstanten bezeichnen, eine nicht differenzierbare Funktion darstellt, wenn folgende Bedingungen erfüllt sind:

Die Reihen

$$b_0 + b_1 + b_2 + \cdots,$$

$$\frac{1}{a_0} + \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots$$

sind konvergent, die Reihe

$$a_0 b_0 + a_1 b_1 + \cdots$$

aber divergent.

Ich bemerke noch, daß ich in der von P. du Bois-Reymond mitgeteilten Notiz die Bedingung

$$ab > 1 + \frac{3}{2}\pi$$

deshalb angenommen habe, um ein Beispiel einer Funktion zu geben, von der sich nachweisen läßt, daß sie an keiner Stelle einen bestimmten Differentialquotienten besitzt. Näherten sich nämlich die Quotienten

$$\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}, \quad \frac{f(x_0-h)-f(x_0)}{-h},$$

wenn h beständig positiv bleibend unendlich klein wird, beide der Grenze $+\infty$ oder beide der Grenze $-\infty$, so kann man sagen, daß $f(x)$ an der Stelle $x = x_0$ zwar keinen endlichen, aber doch einen bestimmten Differentialquotienten besitze. Die von mir a. a. O. angegebene Funktion ist aber so beschaffen, daß für keinen Wert von x_0 jene beiden Quotienten derselben Grenze sich nähern.

Gestatten Sie mir bei dieser Gelegenheit einen Punkt zu berühren, wo ich mich anscheinend nicht in Übereinstimmung mit Ihnen befinde.

Nach der Bemerkung auf S. 13 Ihrer „Vorlesungen" nehmen auch Sie an, daß eine eindeutig definierte und kontinuierliche Funktion $f(x)$, wenn sie in einem endlichen Intervalle Maxima und Minima nur in endlicher Anzahl besitzt, in diesem Intervall überall, mit Ausnahme einzelner Stellen, einen bestimmten endlichen Differentialquotienten habe.

Hier kommt es nun zunächst darauf an, daß wir uns darauf verständigen, was unter „einzelnen Stellen" zu verstehen ist. Wenn ich mich daran halte, wie der ausgesprochene Satz bisher von den Mathematikern ausdrücklich oder stillschweigend aufgefaßt worden ist, so ist gemeint, daß in jedem Intervalle, in welchem $f(x)$ weder ein Maximum oder Minimum besitzt, eine stetige Folge solcher Werte von x, die nicht zu jenen Ausnahmestellen gehören, existiere, womit nicht ausgeschlossen ist, daß bei den Ausnahmestellen auch eine unendlich große Anzahl vorhanden sein könne.

So verstanden würde der in Rede stehende Satz aber etwas Unrichtiges aussprechen, indem man mit Leichtigkeit Funktionen definieren kann, welche keine Maxima oder Minima besitzen und doch in jedem Intervalle unendlich viele Stellen, in denen sie nicht differenzierbar sind, darbieten. Eine bemerkenswerte Funktion dieser Art ist z. B. die folgende.

Es sei

$$\varphi(x) = x\left\{1 + \tfrac{1}{2}\sin\left(\tfrac{1}{2}\log(x^2)\right)\right\},$$

so ist $\varphi(x)$ eine Funktion, welche, wenn x stetig wachsend das Intervall

$$-\infty \cdots + \infty$$

durchläuft, ebenfalls stetig wachsend von $-\infty$ in $+\infty$ übergeht. Dieselbe hat an der Stelle $x = 0$ keinen bestimmten Differentialquotienten, während an jeder anderen ein solcher existiert. Nimmt man nun zwei Reihen positiver Größen an, die erste

$$a_1,\ a_2,\ a_3,\ \ldots$$

ganz willkürlich, die andere

$$b_0,\ b_1,\ b_2,\ b_3,\ \ldots$$

so, daß

$$b_0 + b_1 + b_2 + \cdots$$

einen endlichen Wert hat, und setzt man

$$f(x) = b_0\,\varphi(x) + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty} b_n\left(\varphi(x - a_n) + \varphi(x + a_n)\right),$$

so ist $f(x)$ eine stetige Funktion, die kein Maximum und kein Minimum besitzt und an den Stellen

$$0,\ \pm a_1,\ \pm a_2,\ \ldots$$

keine bestimmten Differentialquotienten hat, indem sich zeigen läßt, daß für jeden bestimmten Wert von n der Quotient

$$\frac{f(\pm a_n + h) - f(\pm a_n)}{h}$$

und ebenso

$$\frac{f(\pm a_n - h) - f(\pm a_n)}{-h}$$

zwischen zwei angebbaren von h unabhängigen Grenzen schwankt, wie nahe auch h der Null kommen möge.

Nun kann man aber die Reihe der Größen $a_1, a_2, \ldots$ auf mannigfaltige Weise so bestimmen, daß in jedem beliebigen Intervalle unendlich viele derselben liegen. So hat z. B. Cantor gezeigt, daß sich eine solche Reihe bilden läßt, die jede algebraische Zahl, und zwar eine jede nur einmal, enthält.

Es existieren also stetige Funktionen von x, welche, ohne ein Maximum oder Minimum zu besitzen, keinen Differentialquotienten haben, wenn ihr Argument Wurzel irgend einer algebraischen Gleichung mit rationalen Koeffizienten ist.

Für eine solche Funktion gilt also der in Rede stehende Satz nicht in dem von mir angenommenen Sinne.

Nun gebe ich zwar gern zu, daß man auch die Gesamtheit aller algebraischen Zahlen als „einzelne Stellen“ im Gebiete der reellen Größen auffassen kann, insofern sie durch eine bestimmte Definition von den übrigen geschieden werden können. Indessen werden Sie mit mir darin übereinstimmen, daß auf eine derartige Funktion, so wie überhaupt auf jede, welche in jedem Intervalle Stellen darbietet, wo sie keinen bestimmten Differentialquotienten hat, die Lehren der Differentialrechnung keine Anwendung finden. Deshalb halte ich es für das beste, daß man, ohne sich in eine Diskussion über die Bedeutung des Ausdrucks „einzelne Stellen“ einzulassen, unter einer „differenzierbaren“ Funktion nur eine solche verstehe, welche in jedem Intervalle, für das sie definiert ist, auch eine stetige Folge von Stellen mit bestimmten endlichen Differentialquotienten darbietet.

Mit freundlichstem Gruß und der Bitte, mich auch Ihrer lieben Frau empfehlen zu wollen,

Ihr ergebenster

Weierstrass.

Berlin, 6. Dezember 1877.

Geehrter Kollege!

Obwohl mein Brief vom 4. d. schon lang genug geworden ist, so muß ich ihm doch noch eine Bemerkung hinzufügen[1].

Es ist nicht meine Meinung, daß ein vorgelegtes System von Differentialgleichungen:

---

[1] Es handelt sich hier um die Abhandlung: Koenigsberger: „Über algebraische Beziehungen zwischen Integralen verschiedener Differentialgleichungen“, J. reine angew. Math. 84 (1878), p. 284. Vergl. auch den folgenden Brief vom 10. Dezember 1877.

$$G_\nu\left(x, z_1, \ldots, z_n, \frac{dz_1}{dx}, \cdots, \frac{dz_n}{dx}\right) = 0 \qquad (\nu = 1, \ldots, n), \tag{1}$$

um darauf Ihren Satz anwenden zu können, notwendig auf die angegebene Form

$$\begin{gathered} G(x, z, z_1, \ldots, z_n) = 0 \\ G_0(x, z, \cdots)\frac{dz_\nu}{dx} = G_\nu(x, z, z_1, \cdots, z_n) \qquad (\nu = 1, \ldots, n) \end{gathered} \tag{2}$$

gebracht werden müsse; es ist vielmehr nur notwendig, daß das vorgelegte System vollständig durch ein System von der zweiten Form ersetzt werden könne. Dies ist aber stets der Fall, sobald sich irgend eine rationale Funktion R von

$$x, z_1, \cdots, z_n, \frac{dz_1}{dx}, \cdots, \frac{dz_n}{dx}$$

dergestalt bestimmen läßt, daß sich aus den Gleichungen (1) und der folgenden:

$$R\left(x, z_1, \cdots z_n, \frac{dz_1}{dx}, \cdots, \frac{dz_n}{dx}\right) = z$$

die Ableitungen $\frac{dz_1}{dx}, \cdots, \frac{dz_n}{dx}$ als rationale Funktionen von $x, z_1, \ldots, z_n$ und z erhalten lassen. Steht dies fest, so ist nicht notwendig, diese Ausdrücke der Ableitungen sowie die Gleichung zwischen z und $x, z_1, \ldots, z_n$ wirklich herzustellen; man braucht nur die Gleichung zwischen

$$x, Z_1, \ldots, Z_n \text{ und } Y$$

mit Hilfe der gegebenen Gleichungen auf die Form

$$\overline{G}\left(x, Z_1, \ldots, Z_n, \frac{dZ_1}{dx}, \cdots, \frac{dZ_n}{dx}, Y\right) = 0$$

zu bringen, in der Art, daß Y nicht Wurzel einer Gleichung niedrigeren Grades von derselben Form ist. Dann wird stets unter den in dem Theorem angegebenen Bedingungen für **jede** Wurzel y der Gleichung

$$\overline{G}\left(x, z_1, \cdots, z_n, \frac{dz_1}{dx}, \cdots, \frac{dz_n}{dx}, y\right) = 0$$

die Differentialgleichung

$$G^*\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \cdots, \frac{d^m y}{dx^m}\right) = 0$$

befriedigt werden, wenn dies der Fall ist für

$$z_1 = Z_1, \ldots, z_n = Z_n, \; y = Y.$$

Denn die Gleichung $\overline{G} = 0$ kann unter der gemachten Voraussetzung auf die von mir angenommene Form

$$G(x, Z, Z_1, \ldots, Z_n, Y) = 0$$

gebracht werden. Für den Beweis Ihres Satzes scheint es mir aber vorteilhaft zu sein, das vorgelegte System sich auf die Form (2) gebracht vorzustellen. Die Hauptsache aber ist die genaue Fixierung des Begriffs der Irreduktibilität eines Systems algebraischer Differentialgleichungen, — den so zu fassen, wie ich eben angegeben, mich viele Gründe bestimmen —, und daß der Gleichung für Y eine solche Form gegeben werde, daß der Grad derselben nicht mit Hilfe der gegebenen Gleichung erniedrigt werden kann.

— —

Mit freundlichstem Gruß Ihr

Weierstrass.

Berlin, 10. Dezember 1877.

Mein lieber Herr Kollege!

Es würde mir sehr unangenehm sein, wenn mein Brief an Sie vom 4. d. M. wirklich verloren gegangen sein sollte. Derselbe bestand aus 4½ Bogen desselben Formats wie dieser und ist am 5. frühmorgens, mit der richtigen Anzahl Marken versehen, in den bei meiner Wohnung befindlichen Briefkasten gekommen, sodaß, wenn er abhanden gekommen ist, der Wahrscheinlichkeit nach eher eine Nachlässigkeit am Ankunftsort als am Abgangsort Schuld daran sein dürfte. In der Hoffnung, daß er Ihnen doch noch zu Händen kommen werde, begnüge ich mich einstweilen, aus ihm folgendes zu wiederholen.

— —

Mein Brief bezog sich hauptsächlich auf die erstgenannte Abhandlung [1] von Ihnen, die mein Interesse sehr in Anspruch genommen hat. Der Wunsch, Ihnen recht ausführlich darüber zu schreiben, war hauptsächlich Schuld daran, daß ich Ihre Briefe so lange unbeantwortet gelassen habe. Ich hatte schon vor meiner Ferienreise mir im Kopf Verschiedenes zusammengestellt, was ich Ihnen vorlegen wollte. Auf der Reise aber hatte ich den Zusammenhang verloren, und nach meiner Rückkunft erlaubten es mir andere dringende Arbeiten erst vor kurzem, die Sache wieder aufzunehmen.

Ich habe die Überzeugung gewonnen, daß der in der gedachten Abhandlung entwickelte Hauptsatz im wesentlichen richtig ist und sich bei manchen Unter-

[1] Die oben zitierte Abhandlung.

suchungen sehr brauchbar erweisen wird. Zugleich bin ich aber der Meinung, daß einerseits die Bedingungen, unter denen er gilt, noch genauer, als es von Ihnen geschehen ist, präzisiert werden können, andererseits aber auch seine Tragweite durch die Form, in welcher Sie die Differentialgleichungen aufstellen, unnötigerweise beschränkt worden ist. Darüber enthielt mein Brief ausführliche Auseinandersetzungen, die Ihnen mein Interesse an der Sache bekunden sollten.

Leider habe ich mir für mich durchaus keine Notiz gemacht, und es würde mir nicht ganz leicht sein, das in guter Stimmung rasch Hingeschriebene zu reproduzieren. Ich sehe deshalb dem Resultat Ihrer Nachforschungen nach dem verloren gegangenen Briefe nicht ohne Ungeduld entgegen[1].

— —

In Erwartung einer baldigen Antwort

Ihr

ergebener WEIERSTRASS.

Berlin, 8. November 1878.

Die mir übersandte Abhandlung habe ich *sofort* Herrn Borchardt zugestellt. Derselbe ist aber unmittelbar darauf erkrankt, weshalb Sie wohl noch keine Empfangsbescheinigung, — deren Stelle diese Karte vertreten möge —, erhalten haben. — Daß für die hyperelliptischen Integrale, wenn $\varrho > 2$, eine allgemeine Transformation — bei beliebigen Moduln — unmöglich ist, habe ich daraus bewiesen, daß die Bedingungen, welche die $\vartheta(0, 0, \ldots, 0)_\lambda$ erfüllen müssen, damit die $\vartheta(v_1, \ldots, v_\varrho)_\lambda$ auf hyperelliptische Integrale führen, bei beliebigen $\tau_{\alpha\beta}$ nicht mehr erfüllt sind, wenn man die ϑ Funktionen transformiert. Ich sehe auch, daß dies algebraisch wird nachweisbar sein; *gemacht* ist es wohl noch nicht.

Ihr WEIERSTRASS.

Berlin, 31. Mai 1879.

Mein lieber Freund und Kollege!

— —

In Ihrem ersten Briefe fragten Sie bei mir an, ob hier etwa eine Erinnerungsfeier aus Anlaß des vor 50 Jahren erfolgten Todes Abels in Aussicht genommen sei. Wäre dies der Fall gewesen, so würde ich nicht versäumt haben,

[1] Weierstraß' Brief vom 4. Dezember 1877 ist nie in meine Hände gekommen, — die genannten Nachforschungen in Berlin und Wien blieben resultatlos.

L. Koenigsberger.

Sie davon zu benachrichtigen. Indes ist es bisher nicht Sitte gewesen, schon nach 50 Jahren an dem Todestag eines ausgezeichneten Mannes eine Feier zu veranstalten. In dem in Rede stehenden Falle mußte umsomehr davon abgesehen werden, als dazu die Anregung doch von dem Vaterlande Abels hätte ausgehen müssen. Sorgen Sie aber dafür, daß der hundertjährige Geburtstag Abels und Jacobis würdig begangen werde, — und gedenken Sie dann auch derer, die als die ersten es als ihre Lebensaufgabe betrachtet haben, die Arbeiten dieser Männer fortzusetzen. Das Jubiläum der Fundamenta sollte allerdings auf das würdigste durch eine neue, auf das sorgfältigste revidierte und schön ausgestattete Ausgabe derselben gefeiert werden.

— —

Montreux, 17. März 1886.

Mein lieber Herr Kollege!

Gestern erhielt ich von einem jüngeren Mathematiker eine (nicht gedruckte) Arbeit zugesandt, in der sich u. a. der folgende Satz findet:

„Wenn eine Potenzreihe $\sum\limits_{\nu=0}^{\infty} c_\nu x^\nu$ die Eigenschaft hat, daß sie für jeden rationalen Wert von x eine ebenfalls rationale Zahl darstellt, so ist die Reihe notwendig eine rationale Funktion von x".

Dieser Satz widerspricht dem von mir in meinem letzten Briefe Ihnen mitgeteilten, indem (nach G. Cantor) die Gesamtheit der rationalen Zahlen eine abzählbare Reihe bildet und deshalb die in meinem Briefe vorkommende Zahlenreihe $a_0, a_1, a_2, \ldots$ so gewählt werden kann, daß sie sämtliche rationalen Zahlen umfaßt. Es fehlt jedoch in meiner Mitteilung der strenge Beweis dafür, daß die von mir mit $f(x)$ bezeichnete Funktion nicht immer eine rationale Funktion sei, wie man auch die in ihr vorkommenden willkürlichen Zahlen annehmen möge. Durch eine leichte Modifikation der Bildungsweise der Funktion $f(x)$ kann man aber diesem Mangel abhelfen und zu folgendem Satze gelangen, der vielleicht für Sie einiges Interesse hat:

„Es gibt transzendente ganze Funktionen einer Veränderlichen x von der Beschaffenheit, daß sie, als Potenzreihen von x dargestellt, lauter rationale Koeffizienten besitzen und für jeden algebraischen (reellen oder imaginären) Wert ihres Arguments eine ebenfalls algebraische Zahl darstellen."

Wie G. Cantor (in der Abhandlung, worin gezeigt wird, daß die Gesamtheit der algebraischen Zahlen eine abzählbare Reihe bildet) nachgewiesen hat, läßt sich eine unendliche Reihe von ganzen rationalen Funktionen

$$\varphi_0(x),\ \varphi_1(x),\ \varphi_2(x), \ldots$$

deren Koeffizienten sämtlich ganze Zahlen sind, so herstellen, daß jede (reelle oder imaginäre) algebraische Zahl Wurzel einer der Gleichungen

$$\varphi_0(x) = 0, \ \varphi_1(x) = 0, \ \varphi_2(x) = 0, \ldots$$

ist. Dies vorausgesetzt, setze man (für $n = 0, 1, 2, \ldots, \infty$)

$$f_n(x) = \prod_{\nu=0}^{n} \varphi_\nu(x),$$

bezeichne mit r_n den Grad von $f_n(x)$ und bestimme eine Reihe ganzer Zahlen $m_0, m_1, m_2, \ldots$ mittels der Gleichungen

$$m_0 = 0, \ m_1 = m_0 + r_0 + 1, \ m_2 = m_1 + r_1 + 1, \ldots$$
$$m_{\nu+1} = m_\nu + r_\nu + 1, \cdots$$

Sodann nehme man eine beständig konvergierende Potenzreihe $\sum\limits_{\nu=0}^{\infty} C_\nu x^\nu$ mit lauter positiven Koeffizienten beliebig an und bestimme eine unendliche Reihe rationaler (von Null verschiedener) Zahlen $k_0, k_1, k_2, \ldots$ so, daß — für jeden bestimmten Wert von n — jeder Koeffizient der (nach Potenzen von x entwickelten) Funktion

$$k_n x^{m_n} f_n(x)$$

seinem absoluten Betrage nach kleiner ist als der entsprechende Koeffizient der angenommenen Reihe. Dann läßt sich der Ausdruck

$$f(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} k_n x^{m_n} f_n(x)$$

darstellen als beständig konvergierende Potenzreihe von x mit lauter rationalen Koeffizienten und ist sicher eine transzendente Funktion von x, indem die Koeffizienten von $x^{m_0+r_0}$, $x^{m_1+r_1}$, $x^{m_2+r_2}$, ... sämtlich von Null verschiedene Werte haben. Diese Funktion $f(x)$ hat nun die oben angegebene Beschaffenheit.

Freundlichst grüßend

Ihr ergebenster

Weierstrass.