

La formule de Plancherel pour les groupes algébriques complexes unimodulaires

par

MARTIN ANDLER

*C.N.R.S., Université Paris 7
Paris, France*

Table des matières

1. Introduction. Notations et conventions	1
I. CONSTRUCTION D'UNE FAMILLE DE REPRÉSENTATIONS IRRÉDUCTIBELS	6
2. Description des données	6
3. Un exemple	8
4. Un résultat préliminaire	10
5. Les techniques de réduction	10
6. Indépendance par rapport au choix de la polarisation (cas résoluble)	24
7. Indépendance par rapport au choix de la polarisation (cas général)	29
8. Passage aux G -orbites	38
9. Commutant des représentations	42
10. Construction de représentations irréductibles	46
II. LA FORMULE DE PLANCHEREL	51
11. Formes fortement λ -régulières admissibles	52
12. Les formes fortement λ -régulières sont bien polarisables	57
13. Une structure borélienne sur l'ensemble des paramètres	58
14. L'application $(f, \tau) \rightarrow \pi_{f, \tau}^G$ est borélienne	62
15. Énoncé du théorème de Plancherel	73
16. Démonstration dans le cas réductif	77
17. Démonstration dans le cas général	82
Bibliographie	102

1. Introduction. Notations et conventions

Soit G un groupe de Lie unimodulaire de type I, \hat{G} son dual unitaire, qui est, dans ce cas, muni d'une structure borélienne standard. On sait, depuis Godement (cf. [God],

[Dix 1]), qu'il existe sur G une mesure μ , appelée mesure de Plancherel de G , qui est complètement déterminée une fois fixée la mesure de Haar dg sur G , telle qu'on ait :

$$\forall \varphi \in C_c^\infty(G), \quad \varphi(e) = \int_G \text{tr } \pi(\varphi) d\mu(\pi).$$

Donner la formule de Plancherel pour un groupe ou une famille de groupes consiste à décrire explicitement la mesure μ .

Mais pour ce faire, il faudrait au moins *a priori*, avoir décrit explicitement \hat{G} . Le cas semi-simple montre qu'un tel objectif est, encore aujourd'hui, loin d'être atteint. Mais en ce qui concerne la formule de Plancherel, il n'est pas en fait nécessaire d'avoir décrit tout \hat{G} ; il suffit d'avoir obtenu un ensemble de complémentaire négligeable dans \hat{G} pour la mesure μ .

En pratique, les choses se passent de la manière suivante : on construit un ensemble borélien analytique X , une injection borélienne σ de X dans \hat{G} , et une mesure ν sur X telle qu'on ait la formule :

$$\forall \varphi \in C_c^\infty(G), \quad \varphi(e) = \int_X \text{tr } [\sigma(x)(\varphi)] d\nu(x).$$

Un argument d'unicité (cf. proposition 17) montre qu'à un exemple μ -négligeable près, l'image de ν par σ est μ .

La question de la formule de Plancherel étant complètement réglée depuis les fameux travaux d'Harish Chandra pour les groupes de Lie semi-simples connexes et de centre fini (cf. [H-C 1, 2, 3]), ainsi que par Charbonnel (cf. [Char 1]) pour les groupes de Lie résolubles connexes, ce qui est à l'ordre du jour est de s'attaquer à des groupes de Lie généraux.

C'est un problème bien moins difficile que le présent travail résout, en traitant le cas des groupes algébriques complexes unimodulaires. L'étude des groupes semi-simples montre qu'il est naturel de comprendre d'abord la situation des groupes complexes. L'hypothèse d'algébricité permet d'éviter les problèmes liés au type, à l'action de G sur \hat{N} (N le radical nilpotent de G), ainsi que de nombreuses autres simplifications. D'autre part les méthodes de Pukanszky (cf. [Puk 2]) permettent de penser que, comme pour le cas résoluble, (cf. [Char 1]), la résolution du cas non algébrique se fera par réduction au cas algébrique en considérant une enveloppe algébrique \tilde{G} du groupe de départ. Ce travail traite directement de groupes non connexes : dans les techniques de démonstration, le cas des groupes connexes n'apparaît pas comme un cas à part.

La formule de Plancherel qui est démontrée ici a été conjecturée par M. Duflo (cf. [Duf4], appendice). Sa description utilise la « méthode des orbites » de construction des représentations unitaires irréductibles de G . La démonstration des différents résultats se fait essentiellement en deux temps : (1) réduction, par récurrence sur la dimension, au cas réductif, ce qui utilise la méthode des petits groupes de Mackey dont l'application à la formule de Plancherel a été mise en évidence par A. Kleppner et R. L. Lipsman (cf. [KL 1, 2]); (2) démonstration du résultat dans le cas d'un groupe G réductif, ce qui revient à comparer avec les résultats connus de Harish Chandra (cf. [H-C, 1, 2, 3]).

Décrivons maintenant de manière un peu plus précise le plan et les résultats principaux qui vont être exposés. Le travail est divisé en deux grandes parties. La première est consacrée à la construction des représentations, la deuxième à la formule de Plancherel.

Dans la partie I, G est un groupe de Lie dont l'algèbre de Lie \mathfrak{g} est algébrique. On considère une forme linéaire f sur \mathfrak{g} , et on note $G(f)$ son stabilisateur (pour l'action coadjointe de G sur \mathfrak{g}^*). Une *bonne polarisation* en f est une polarisation réelle, résoluble et vérifiant la condition de Pukanszky. Une forme f est *bien polarisable* s'il existe des bonnes polarisations en f .

Soit $G(f)^0$ la composante neutre de $G(f)$. La forme f est *entière* s'il existe un caractère χ_f de $G(f)^0$ dont la différentielle est $2i\pi f|_{\mathfrak{g}(f)}$. Soit f une forme bien polarisable et admissible, soit $G(f)^1$ un sous-groupe de $G(f)$ contenant $G(f)^0$. On considère l'ensemble $PRP_1(f)$ des bonnes polarisations $G(f)^1$ -stables, et l'ensemble $X(f, G(f)^1)$ des représentations unitaires de $G(f)^1$ dont la restriction à $G(f)^0$ est un multiple de χ_f . Avec la donnée d'un élément η de $PRP_1(f)$ et η de $X(f, G(f)^1)$ on définit (cf. chapitre 2) une représentation $\pi(G, f, G(f)^1, \eta, \eta)$ unitaire de G , qui est une représentation induite.

Un exemple d'un groupe algébrique complexe est donné, au chapitre 3, dans lequel génériquement il n'existe pas de polarisation réelle $G(f)$ -stable. Cet exemple prouve l'intérêt de la construction entreprise ici.

Le chapitre 4 regroupe les techniques de réduction utilisées tout au long de l'article.

Le théorème 1 énonce l'indépendance de la classe de $\pi(G, f, G(f)^1, \eta, \eta)$ par rapport à η . Il est démontré au chapitre 6 lorsque \mathfrak{g} est résoluble, et 7 dans le cas général. On note $\pi(G, f, G(f)^1, \eta)$ la classe des représentations correspondantes. (On convient que l'utilisation de cette notation suppose implicitement que $PRP_1(f)$ est non vide.)

Le théorème 2, démontré au chapitre 8, montre que la classe de représentations obtenues ne dépend que de l'orbite de (f, η) sous l'action naturelle de G , et qu'à *contrario* les représentations $\pi(G, f, G(f)^1, \eta)$ et $\pi(G, f', G(f')^1, \eta')$ pour f et f' dans des G -orbites distinctes sont disjointes.

Dans la suite de la première partie, on suppose que G est un groupe de Lie complexe dont on ne considère que la structure réelle sous-jacente. Dans ces conditions, le théorème 3, démontré au chapitre 9, montre que le commutant de la représentation $\pi(G, f, G(f)^1, \eta)$ est isomorphe à celui de $\text{Ind}_{G(f)^1 \uparrow G(f)} \eta$.

Le théorème 3 permet donc de construire des représentations unitaires irréductibles de G , mais il ne fournit pas de paramétrisation bien canonique de \hat{G} . On suppose dorénavant que f est *très bien polarisable* (notion définie au chapitre 10), et on note $PRPT(f)$ l'ensemble des très bonnes polarisations en f . Soit η et η' dans $PRPT(f)$. On construit au chapitre 10 un opérateur d'entrelacement bijectif $A_{\eta\eta'}^G$ entre $\pi(G, f, G(f)^0, \chi_f, \eta)$ et $\pi(G, f, G(f)^0, \chi_f, \eta')$, canonique en un certain sens. Soit $X_{\text{irr}}(f)$ l'ensemble des représentations unitaires irréductibles de $G(f)$ dont la restriction à $G(f)^0$ est un multiple de χ_f . Supposons G algébrique. Le commutant de $\pi(G, f, G(f)^0, \chi_f, \eta)$ est isomorphe à celui de la représentation $\tau_f = \text{Ind}_{G(f)^0 \uparrow G(f)} \chi_f$, qui est bien connu puisque maintenant $G(f)/G(f)^0$ est fini. Le théorème 4 (chapitre 10) montre l'existence d'une bijection du spectre de $\text{Ind}_{G(f)^0 \uparrow G(f)} \chi_f$ sur celui de $\pi(G, f, G(f)^0, \chi_f, \eta)$ qui commute avec les opérateurs $A_{\eta\eta'}^G$. Soit $\tau \in X_{\text{irr}}(f)$. Le théorème 4 permet d'associer à τ une sous-représentation irréductible bien définie de $\pi(G, f, G(f)^0, \chi_f)$, représentation qu'on note $\pi_{f,\tau}^G$.

Dans [Duf4], M. Duflo a construit, pour un groupe algébrique général, une famille de représentations. Dans le cas d'un groupe algébrique complexe, les données sont les mêmes et la construction de Duflo permet de définir la représentation irréductible $T_{f,\tau}^G$ de G . Le problème se pose naturellement de savoir si les deux constructions coïncident, i.e. si $T_{f,\tau}^G$ et $\pi_{f,\tau}^G$ sont égales. Un résultat récent de Bouaziz [Bou] permet de répondre affirmativement à cette question.

Dans la partie II, G est un groupe algébrique complexe, considéré comme groupe de Lie réel. Soit Z un sous-groupe fermé et connexe du centre de G , χ_λ un caractère unitaire de Z , $2i\pi\lambda$ ($\lambda \in \mathfrak{z}^*$) la différentielle de χ_λ . On considère la sous-variété affine $\mathfrak{g}_\lambda^* = \{f \in \mathfrak{g}^*, f|_{\mathfrak{z}} = \lambda\}$. En adaptant des définitions et résultats de Duflo ([Duf4]), on expose au chapitre 11 la notion de forme fortement λ -régulière. En notant \mathcal{O}_λ l'ensemble des formes fortement λ -régulières, et $\mathcal{O}_\lambda^{\text{ad}}$ l'ensemble des formes fortement λ -régulières et admissibles, l'ensemble $\mathcal{O}_\lambda^{\text{ad}}/G$ est décrit de manière explicite.

Le chapitre 12 démontre que les formes fortement λ -régulières sont bien, et même très bien polarisables, ce qui permet d'associer à tout couple (f, τ) , $f \in \mathcal{O}_\lambda^{\text{ad}}$, $\tau \in X_{\text{irr}}(f)$, une représentation unitaire irréductible $\pi_{f, \tau}^G$ de G .

Soit $\mathcal{P}_\lambda(G)$ l'ensemble des tels couples $(f, \tau) \in \mathcal{O}_\lambda^{\text{ad}} \times X(f)$. Une structure borélienne standard est définie au chapitre 13 (proposition 13) et on montre que l'application associant $\pi_{f, \tau}^G$ au couple (f, τ) est borélienne (théorème 6).

Le chapitre 15 rappelle la construction par M. Duflo, d'une mesure sur $\mathcal{P}_\lambda(G)/G$, et énonce le théorème principal (théorème 7), le théorème de Plancherel. (Le théorème qui est démontré est légèrement différent de celui qui est énoncé au début de cette introduction, dans la mesure où il correspond non à la représentation régulière gauche de G mais à la représentation $\text{Ind}_{Z \uparrow G} \chi_\lambda$.) Les chapitres 16 (dans le cas réductif) et 17 sont consacrés à la démonstration du théorème.

M. Duflo m'a suggéré d'entreprendre ce travail et en a suivi les lents progrès. Je suis heureux de reconnaître ma dette vis-à-vis de J. Y. Charbonnel, G. Lion, J. Rosenberg, Y.-M. Visetti et surtout R. Azencott, L. Clozel, R. Godement et M. Vergne. Je les remercie chaleureusement de l'aide qu'ils m'ont apporté.

Notations et conventions générales. (1) Si G est un groupe topologique, on note G^0 sa composante neutre. Si G est de Lie, on note \mathfrak{g} son algèbre de Lie.

(2) Soit G un groupe de Lie. Il opère sur \mathfrak{g} et \mathfrak{g}^* par la représentation adjointe et la représentation coadjointe respectivement. Si $f \in \mathfrak{g}^*$, on définit une forme alternée B_f

$$B_f(X, Y) = f([X, Y]).$$

Le noyau de B_f coïncide avec l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}(f)$ du stabilisateur $G(f)$ de f dans G . Si V est un espace vectoriel, on note V^f son orthogonal pour B_f . Si α est un idéal, on note indifféremment α^f ou $\mathfrak{g}(v)$ ($v=f|_\alpha$).

(3) Si $f \in \mathfrak{g}^*$, une *polarisation* en f est une sous-algèbre de \mathfrak{g} qui est aussi un sous-espace totalement isotrope maximal pour la forme B_f . (Une telle polarisation s'appelle parfois aussi *polarisation réelle*.) Une polarisation η en f vérifie la condition de Pukanszky si et seulement si, H étant le sous-groupe analytique d'algèbre de Lie η , on a :

$$H \cdot f = f + \eta^\perp.$$

(4) Par passage au quotient, B_f définit une 2-forme sur $\mathfrak{g}/\mathfrak{g}(f)$, et donc une 2-forme G -invariante ω_f sur l'orbite $G \cdot f$. Soit $2s$ la dimension de $G \cdot f$. La $2s$ -forme

$(1/s!) \omega_f \wedge \omega_f \wedge \dots \wedge \omega_f$ est une forme volume G -invariante, appelée *mesure de Liouville* sur l'orbite.

(5) Le choix d'une mesure de Haar dg sur G entraîne celui d'une mesure de Lebesgue $d_{\mathfrak{g}}$ sur \mathfrak{g} , celle qui est définie par la même forme de rang maximum sur \mathfrak{g} . Lorsqu'on a une mesure de Lebesgue d_V sur V , on dira qu'une base \mathcal{B} de V est *univolumique* si la forme volume qui lui est associée définit d_V .

(6) Soit N un sous-groupe distingué de G , et π une représentation de N . On définit une nouvelle représentation de N par la formule :

$${}^g\pi(n) = \pi(g^{-1}ng).$$

L'application $(g, \pi) \rightarrow g\pi$ définit une opération de G sur $\text{Rep } N$, et, par passage au quotient, sur \hat{N} .

(7) Soit K un sous-groupe fermé de G , et T une représentation unitaire de K . Par représentation induite on entendra toujours représentation unitaire induite, notée $\text{Ind}_{K \uparrow G} T$. Son espace est l'adhérence de l'ensemble des fonctions continues sur G à support compact modulo K , à valeurs dans l'espace de T et qui vérifient

$$\varphi(gk) = T(k)^{-1} \Delta(k)^{1/2} \varphi(g)$$

(Δ est la fonction module de G/K) pour la norme L^2 définie par :

$$\|\varphi\|_2 = \int_{G/K} \|\varphi(\dot{g})\|^2 d\dot{g}.$$

I. Construction d'une famille de représentations irréductibles

Dans cette partie, \mathfrak{g} est l'algèbre de Lie d'un groupe algébrique réel, et G est un groupe de Lie d'algèbre de Lie \mathfrak{g} .

2. Description des données

Soit f un élément de \mathfrak{g}^* . On dit que f est *entière* s'il existe un caractère χ_f de $G(f)^0$ de différentielle $2i\pi f|_{\mathfrak{g}(f)}$. On dit que f est *bien polarisable* s'il existe une polarisation résoluble η en f vérifiant la condition de Pukanszky. Cette définition est moins générale que celle qui figure dans [Duf4] : Duflo n'exige pas que la polarisation soit réelle.

Soit f une forme entière et bien polarisable. Soit $G(f)^1$ un sous-groupe de $G(f)$ contenant $G(f)^0$. On note $X(f, G(f)^1)$ l'ensemble des représentations unitaires de

$G(f)^1$ dont la restriction à $G(f)^0$ est un multiple de χ_f , et $PRP_1(f)$ l'ensemble des bonnes polarisations en f qui sont $G(f)^1$ -stables. Lorsque $G(f)^1 = G(f)^0$, toute polarisation étant $G(f)^0$ -stable, on note simplement $PRP(f)$. D'autre part, $X(f, G(f)^0)$ est réduit au seul élément χ_f . Lorsque $G(f)^1 = G(f)$, on notera $PRP_s(f)$ et $X(f)$ les ensembles correspondants, et $X_{\text{irr}}(f)$ l'ensemble des représentations irréductibles dans $X(f)$.

Remarques. (1) Au début de chapitre II on introduira une notion de régularité forte, définie par Duflo, pour les éléments de \mathfrak{g}^* . On montrera au chapitre 12 que toute forme fortement régulière est bien polarisable.

(2) Dans le chapitre 3, est étudié un exemple où, génériquement, il n'existe pas de polarisation résoluble vérifiant la condition de Pukanszky et qui soit $G(f)$ -stable. C'est pourquoi il est intéressant de procéder avec des sous-groupes de $G(f)$.

(3) Contrairement à ce que fait Duflo dans [Duf 4], je ne considère pas de revêtement de $G(f)^0$ pour la notion d'intégrabilité que j'utilise. C'est que dans l'étude des groupes algébriques complexes (partie II), qui est le cas qui nous intéresse en fin de compte, tous les revêtements qu'on pourrait rencontrer se trivialisent. Ceci sera détaillé au chapitre 9.

Le lemme qui suit généralise immédiatement un résultat d'Auslander et Kostant (cf. [AK], [BC]).

LEMME 1. *Soit $\eta \in PRP_1(f)$ et $\eta \in X(f, G(f)^1)$. Soit H le sous-groupe analytique d'algèbre de Lie η . Le sous-groupe $G(f)^1 H$ est fermé, et il existe une représentation $\tilde{\eta}$ unique de $G(f)^1 H$ qui prolonge η et dont la différentielle est $2\pi i f|_{\eta}$.*

Donnons-nous donc une forme f entière et bien polarisable, un sous-groupe $G(f)^1$ de $G(f)$ contenant $G(f)^0$, un élément η de $PRP_1(f)$ et une représentation η dans $X(f, G(f)^1)$. On associe à ces données une représentation unitaire de $G(f)^1 H$, et on peut donc considérer la représentation de G dans $\mathcal{A}(G, f, G(f)^1, \eta, \eta)$:

$$\pi(G, f, G(f)^1, \eta, \eta) = \text{Ind}_{G(f)^1 H \uparrow G} (\tilde{\eta}).$$

(Il s'agit de représentation unitaire induite.)

La première partie de ce travail a pour objet d'étudier les représentations ainsi construites.

3. Un exemple

Soit N le groupe de Heisenberg complexe de dimension 3, et \mathfrak{n} son algèbre de Lie. Soit $A = \mathbb{C}^4$ considéré comme groupe de Lie abélien, et \mathfrak{a} son algèbre de Lie. Soit K le revêtement de $GL(2, \mathbb{C})$ définie par :

$$K = \{(k, c) \in GL(2, \mathbb{C}) \times \mathbb{C}^*, c^2 = \det k\}.$$

On définit le groupe de Lie $G = K \times_s (A \times N)$ par :

- le produit $A \times N$ est direct
- l'action de K sur A est celle de $GL(2, \mathbb{C})$ sur l'espace des polynômes homogènes de degré 3 en deux variables.
- l'action de K sur N est définie par la formule :

$$(k, c) \cdot \exp(v + tE) = \exp\left(\frac{1}{c} k(v) + tE\right)$$

où $v \in V$ un supplémentaire du centre de \mathfrak{n} dans \mathfrak{n} , et E est un générateur de ce centre. On note B la forme bilinéaire sur V telle que $[v, v'] = B(v, v')E$. Soit X, Y, H, I les générateurs habituels de $\mathcal{M}(2, \mathbb{C})$, P, Q, E dans \mathfrak{n} tels que $P, Q \in V$ et $[P, Q] = E$, et enfin P_1, P_2, P_3, P_4 la base de \mathfrak{a} correspondant à $X_1^3, X_1^2 X_2, X_1 X_2^2, X_2^3$.

On identifie \mathfrak{g}^* à $\mathfrak{f}^* \oplus \mathfrak{a}^* \oplus \mathfrak{n}^*$, et on considère l'élément $f = (\varphi, \chi, \psi)$ dans \mathfrak{g}^* . On va montrer que pour un f générique (i.e. dans un ouvert de Zariski), $G(f)$ ne laisse aucune polarisation réelle stable.

La structure des N -orbites dans \mathfrak{n}^* nous permet de supposer que $\psi = \lambda E^*$, $\lambda \neq 0$. Soit $\chi = \alpha_1 P_1^* + \alpha_2 P_2^* + \alpha_3 P_3^* + \alpha_4 P_4^*$. On vérifie que, dès que l'expression

$$36\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \alpha_4 - 24\alpha_2^3 \alpha_4 + 18\alpha_2^2 \alpha_3^2 - 24\alpha_1 \alpha_3^3 - 6\alpha_1^2 \alpha_4^2 = D(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4)$$

est non nulle, le stabilisateur $\mathfrak{g}(f)$ est réduit à $\mathbb{C} \cdot E$. Puisque E est central dans \mathfrak{g} , de telles formes sont régulières, et même évidemment, fortement régulières (cf. chapitre 11).

Calculons $G(f)$. Ecrivons d'abord les formules de la représentation adjointe : Soit $g = ((\gamma, c), P, \exp(v + tE)) \in G$, et $(A_0, P_0, v_0 + t_0 E) \in \mathfrak{g}$. On a :

$$\begin{aligned} \text{ad } g(A_0, P_0, v_0 + t_0 E) = & \left(\gamma A_0 \gamma^{-1}, \gamma \cdot P_0 - \gamma A_0 \gamma^{-1} \cdot P, \frac{1}{c} \gamma(v_0) - \gamma A_0 \gamma^{-1}(v) \right. \\ & \left. + \frac{1}{2} \text{tr } A_0 \cdot v + \left[t_0 + \frac{1}{c} B(v, \gamma v_0) - \frac{1}{2} B(v, \gamma A_0 \gamma^{-1} \cdot v) \right] E \right) \end{aligned}$$

et si $(A, P, v + tE)$ est un élément de \mathfrak{g} , on a

$$\begin{aligned} & [(A, P, v+tE), (A_0, P_0, v_0+t_0E)] \\ & = ([A_1, A_0], A \cdot P_0 - A_0 \cdot P_0, A \cdot v_0 - A_0 \cdot v - \frac{1}{2} \operatorname{tr} A \cdot v_0 - \frac{1}{2} \operatorname{tr} A_0 \cdot v + B(v, v_0) E). \end{aligned}$$

Le fait, pour g , d'appartenir à $G(f)$ se traduit donc par l'égalité :

$$\varphi(\gamma A_0 \gamma^{-1}) + \chi(\gamma P_0 - \gamma A_0 \gamma^{-1} \cdot P) + (t_0 + \frac{1}{c} B(v, \gamma v_0) - \frac{1}{2} B(v, \gamma A_0 \gamma^{-1} \cdot v)) \lambda = \varphi(A_0) + \chi(P_0) + \lambda t_0$$

pour tout triplet (A_0, P_0, v_0+t_0E) . Il vient alors les équations :

$$\begin{cases} v = 0 \\ \varphi(\gamma A_0 \gamma^{-1}) + \chi(\gamma \cdot P_0 - \gamma A_0 \gamma^{-1} P) = \varphi(A_0) + \chi(P_0). \end{cases}$$

Soit (γ, P) un couple solution de cette équation. En faisant $A_0=0$, il vient $\chi(\gamma P_0) = \chi(P_0)$, et donc $\varphi(\gamma A_0 \gamma^{-1}) - \chi(\gamma A_0 \gamma^{-1} P) = \varphi(A_0)$. On a vu que dès que $D(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4) \neq 0$, χ induit une dualité non dégénérée entre \mathfrak{f} et α , ce qui entraîne que P est complètement déterminé par la donnée de γ . En fin de compte on aura complètement calculé $G(f)$ en résolvant $\chi(\gamma P_0) = \chi(P_0)$ pour tout P_0 . Mais pour des raisons de dimension, il est clair que K a une seule orbite régulière dans α^* . On peut donc choisir un χ particulier vérifiant $D(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4) \neq 0$. Prenons $\alpha_2 = \alpha_3 = 1$ et $\alpha_1 = \alpha_4 = 0$. Il vient le système

$$S \begin{cases} db(d-b) = 0 \\ 2bcd + ad^2 - b^2c - 2abd = (ad-bc)^3 \\ -c^2b - 2acd + 2abc + a^2d = (ad-bc)^3 \\ ac(a-c) = 0. \end{cases}$$

Soit

$$\begin{aligned} \Sigma_1 &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \Sigma_2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \Sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \\ R_1 &= \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad R_2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

dans $GL(2, \mathbb{C})$, et ω une racine troisième de l'unité. On vérifie sans peine que les solutions de S sont les matrices M telles que $M = \omega M_1$, $M_1 \in \{I, \Sigma_1, \Sigma_2, \Sigma_3, R_1, R_2\}$.

Le groupe $K(\chi)$ est donc un groupe à 36 éléments qui est une extension non triviale de $\mathcal{S}_3 \times \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ par $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ (\mathcal{S}_3 est le groupe du triangle équilatéral). Enfin $G(f)$ est le produit semi-direct de $K(\chi)$ par le centre Z de N , et donc $G(f)/G(f)^0$ est isomorphe à $K(\chi)$. En particulier ceci fournit un contre exemple à la question posée par Guinzburg ([Gui]) de savoir $G(f)/G(f)^0$ était abélien génériquement.

Montrons maintenant qu'il n'existe pas de polarisation stable sous $G(f)$. (Il s'agit ici d'un sous-espace réel de \mathfrak{g} qui est une polarisation pour la forme $\operatorname{Re}(f)$.) Soit au contraire une telle polarisation η $G(f)$ -stable. Puisque $\eta \cap \mathfrak{n}$ est un sous-espace $G(f)$ -stable de \mathfrak{n} , les seules possibilités sont \mathfrak{n} et CE . La première est évidemment exclue parce que η est isotrope, donc $\eta \cap \mathfrak{n}$ est de dimension réelle 2, ce qui entraîne que la projection de η sur $\mathfrak{f} \oplus \mathfrak{a}$ est de dimension réelle 10. L'intersection de η avec \mathfrak{f} est une sous-algèbre réelle d'une des sous-algèbres complexes engendrées respectivement par I, H, X et I, H, Y . La stabilité par $G(f)$ entraîne qu'il n'y a pas d'autre possibilité que $\{0\}$ ou $CI; \{0\}$ étant exclu pour des raisons de dimension, c'est donc CI , ce qui entraîne que η contient \mathfrak{a} . Mais on sait que $\mathfrak{a}' = \mathfrak{a} + \mathfrak{n}$, donc $\eta \subset \mathfrak{a} + \mathfrak{n}$, ce qui contredit le fait que $\eta \ni I$.

4. Un résultat préliminaire

Je rappelle, pour la commodité de la lecture, un lemme dû à Duflo (cf. [Duf2]).

LEMME 2. *Soit $f \in \mathfrak{g}^*$ et η une polarisation résoluble en f vérifiant la condition de Pukanszky. Soit \tilde{G} un groupe algébrique d'algèbre de Lie \mathfrak{g} , \tilde{H} le sous-groupe analytique de \tilde{G} d'algèbre de Lie η . \tilde{H} est le groupe des points réels d'un groupe algébrique. Soit \tilde{U} le radical unipotent de \tilde{H} , \mathfrak{u} son algèbre de Lie. On a $\eta = \mathfrak{g}(f) + \mathfrak{u}$.*

5. Les méthodes de réduction

Dans ce chapitre, on décrit les résultats permettant de faire les démonstrations par récurrence, ou de se ramener, dans le cas réductif, à des résultats connus.

LEMME 3. *Soit \mathfrak{g} une algèbre de Lie non semi-simple, et Γ un groupe d'automorphismes de \mathfrak{g} . On suppose que le centre de \mathfrak{g} est de dimension 0 ou 1, et qu'il n'existe pas d'idéal abélien non central et Γ -stable. Alors le centre \mathfrak{z} de \mathfrak{g} est de dimension 1 et de deux choses l'une, \mathfrak{g} est produit direct d'une algèbre semi-simple par \mathfrak{z} ou bien le plus grand idéal nilpotent \mathfrak{n} de \mathfrak{g} est une algèbre de Heisenberg.*

Démonstration (adaptée de [Dix2]). Le centre \mathfrak{z}_1 de \mathfrak{n} est un idéal caractéristique, donc inclus dans \mathfrak{z} . Donc $\mathfrak{z} \neq \{0\}$. Supposons $[\mathfrak{n}, \mathfrak{n}]$ de dimension au moins 2. Soit \mathfrak{n}_1 un \mathfrak{n} -idéal de dimension 2 contenant \mathfrak{z} . On a : $[[\mathfrak{n}, \mathfrak{n}], \mathfrak{n}_1] \subset [[\mathfrak{n}, \mathfrak{n}_1], \mathfrak{n}] \subset [\mathfrak{z}, \mathfrak{n}] = 0$. Le centre de $[\mathfrak{n}, \mathfrak{n}]$ contient donc \mathfrak{n}_1 , il est de dimension au moins deux et évidemment Γ -stable ce qui est impossible. Donc $[\mathfrak{n}, \mathfrak{n}]$ est de dimension 0 ou 1.

Si $[n, n] = \{0\}$, n est abélien caractéristique donc égal à \mathfrak{z} , et $\mathfrak{g}/\mathfrak{z}$ est semi-simple. Si $[n, n] = \mathfrak{z}$, n est une algèbre de Heisenberg. \square

PROPOSITION 1. *Soit G un groupe de Lie d'algèbre de Lie \mathfrak{g} , $f \in \mathfrak{g}^*$, Γ un groupe d'automorphismes de \mathfrak{g} laissant f fixe. Un des cas suivants se présente :*

- (i) \mathfrak{g} est semi-simple.
- (ii) (i) est faux, et il existe des idéaux abéliens Γ -stables sur lesquels f s'annule.
- (iii) (i) et (ii) sont faux, et il existe des idéaux abéliens non centraux Γ -stables.
- (iv) (i), (ii), (iii) sont faux, \mathfrak{g} est réductif, son centre \mathfrak{z} est de dimension 1, et $f|_{\mathfrak{z}} \neq 0$.
- (v) (i) à (iv) sont faux; le plus grand idéal nilpotent de \mathfrak{g} est de Heisenberg.

Démonstration. Supposons ni (i), ni (ii). Le centre de \mathfrak{g} est alors de dimension 0 ou 1. Si (iii) n'est pas vérifié, par le lemme 1, on est dans un des cas (iv) ou (v). \square

On fixe maintenant une forme f bien polarisable et entière, un sous-groupe $G(f)^1$ de $G(f)$, une polarisation $\eta \in PRP_1(f)$ et un élément η de $PRP_1(f)$. On va décrire, dans les cas (i) à (v) de la proposition 1 ci-dessus comment les choses se présentent.

Soit G' le groupe $G(f)^1 G^0$, qui a la même algèbre de Lie \mathfrak{g} . Il est clair que $G'(f) = G(f)^1 G^0(f)$ et donc $G'(f)^0 = G(f)^0$. Il est donc cohérent de poser $G'(f)^1 = G(f)^1$, et donc aussi de considérer la représentation $\pi(G', f, G'(f)^1, \eta, \eta)$. Par transitivité de l'induction, on a :

$$\text{LEMME 4. } \pi(G, f, G(f)^1, \eta, \eta) = \text{Ind}_{G(f)^1 G^0 \uparrow G} \pi(G(f)^1 G^0, f, G(f)^1, \eta, \eta).$$

5.1. Le cas réductif connexe. Ici, G est un groupe réductif connexe et il s'agit de comparer les représentations $\pi(G, f, G(f)^1, \eta, \eta)$ avec des représentations déjà connues, en l'occurrence des éléments de la série principale.

(a) *Un peu de structure.* Soit \mathfrak{g}_1 l'algèbre dérivée de \mathfrak{g} , et θ un automorphisme involutif de \mathfrak{g} dont la restriction à \mathfrak{g}_1 est une involution de Cartan de \mathfrak{g}_1 . Soit

$$\begin{aligned} \mathfrak{k} &= \{x, \theta(x) = x\} \\ \mathfrak{p} &= \{x, \theta(x) = -x\} \end{aligned}$$

et K le sous-groupe analytique de G d'algèbre de Lie \mathfrak{k} . Avec nos hypothèses, K n'est pas nécessairement compact. Soit \mathfrak{c} le centre de \mathfrak{g} , $\mathfrak{c}_1 = \mathfrak{c} \cap \mathfrak{k}$, $\mathfrak{c}_2 = \mathfrak{c} \cap \mathfrak{p}$. Notons f_1 la restriction de f à \mathfrak{g}_1 et x_1 l'image de f_1 dans \mathfrak{g}_1 par l'automorphisme de Killing.

LEMME 5. *Les assertions suivantes sont vérifiées :*

- (i) x_1 est un élément semi-simple régulier de \mathfrak{g}_1 .
- (ii) $\mathfrak{g}(f) = \mathfrak{g}_1(f) + \mathfrak{c}$ est une sous-algèbre de Cartan de \mathfrak{g} .
- (iii) \mathfrak{h} est un sous-algèbre de Borel de \mathfrak{g} .
- (iv) \mathfrak{g} est quasi déployée.

La démonstration est classique (cf. [Dix 3], proposition 1.12.18).

Notons $\alpha = \mathfrak{g}(f)$. On peut choisir l'involution de Cartan θ définie plus haut en sorte que α soit θ -stable. Soit R le système de racine du couple $(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}, \alpha_{\mathbb{C}})$. L'existence d'une sous-algèbre de Borel réelle équivaut au fait que R ne contient aucune racine imaginaire pure. Soit $\alpha_{\mathfrak{f}} = \alpha \cap \mathfrak{f}$ et $\alpha_{\mathfrak{p}} = \alpha \cap \mathfrak{p}$. On sait que toutes les racines sont réelles sur $i\alpha_{\mathfrak{f}} + \alpha_{\mathfrak{p}}$. Aucune racine n'étant imaginaire pure, aucune racine ne peut être identiquement nulle sur $\alpha_{\mathfrak{p}}$, donc $\alpha_{\mathfrak{p}}$ est abélienne maximale dans \mathfrak{p} . Soit R^+ le choix de racines positives correspondant à \mathfrak{h} . La décomposition d'Iwasawa s'écrit $\mathfrak{g} = \mathfrak{f} \oplus \alpha_{\mathfrak{p}} \oplus \mathfrak{n}^+$, où $\mathfrak{n}_{\mathbb{C}}^+ = \bigoplus_{\alpha \in R^+} \mathfrak{g}_{\mathbb{C}}^{\alpha}$. Le centralisateur de $\alpha_{\mathfrak{p}}$ dans \mathfrak{f} est $\mathfrak{m} = \alpha_{\mathfrak{f}}$, et on a $\mathfrak{h} = \mathfrak{m} \oplus \alpha_{\mathfrak{p}} \oplus \mathfrak{n}^+$. Notons $A_{\mathfrak{p}} = \exp \alpha_{\mathfrak{p}}$.

LEMME 6. *Soit M le centralisateur de $\alpha_{\mathfrak{p}}$ dans K . On a $G(f) = M \cdot A_{\mathfrak{p}}$.*

La démonstration est standard (cf. [War]).

(b) *La série principale de représentations.* Le paragraphe a pour objet de rappeler les définitions et de fixer les notations.

Soit σ un élément de \hat{M} . Bien que nos hypothèses n'entraînent pas que K est compact, ni donc M , il n'en reste pas moins que les représentations unitaires irréductibles de K et de M sont de dimension finie.

Soit ρ la demi-somme des racines positives de $\alpha_{\mathfrak{p}}$ correspondant au choix d'une décomposition d'Iwasawa $G = KA_{\mathfrak{p}}N$.

Soit $\lambda \in \alpha_{\mathfrak{p}}^*_{\mathbb{C}}$ (i.e. une forme linéaire sur $\alpha_{\mathfrak{p}}$ à valeurs complexes). On considère la représentation $L^{\sigma, \lambda}$ de $MA_{\mathfrak{p}}N$ dans l'espace E_{σ} de σ définie par :

$$L_n^{\sigma, \lambda}(man) = \sigma(m) e^{\lambda}(a)$$

(où par définition $e^{\lambda}(\exp H) = \exp(\lambda(H))$, $H \in \alpha_{\mathfrak{p}}$). On considère l'espace de Hilbert $\mathcal{H}_n^{\sigma, \lambda}$ des fonctions mesurables sur G à valeurs dans E_{σ} qui vérifient presque partout

$$\begin{aligned} \varphi(gman) &= (L_{\sigma, \lambda}(man))^{-1} (e^{\rho}(a))^{-1} \varphi(g) \\ &= \sigma(m)^{-1} e^{-\lambda - \rho}(a) \varphi(g) \end{aligned} \tag{1}$$

et dont la restriction à K est de carré intégrable modulo M . La norme sur $\mathcal{H}^{\sigma, \lambda}$ est

$$\|\varphi\| = \left(\int_{K/M} \|\varphi(\dot{k})\|_{\sigma}^2 d_{K/M} \dot{k} \right)^{1/2} \quad (2)$$

où $\|\cdot\|_{\sigma}$ est la norme sur l'espace de σ et $d_{K/M} \dot{k}$ est la mesure sur K/M .

La représentation $T_{\mathfrak{n}}^{\sigma, \lambda}$ de G est la représentation régulière gauche dans l'espace $\mathcal{H}_{\mathfrak{n}}^{\sigma, \lambda}$. Lorsque e^{λ} est unitaire, i.e. lorsque λ prend des valeurs imaginaires pures, la représentation $T_{\mathfrak{n}}^{\sigma, \lambda}$ est la représentation unitaire induite par $L_{\mathfrak{n}}^{\sigma, \lambda}$, qu'on appelle *série principale unitaire*. Lorsque λ n'est pas imaginaire pure, G opère dans $\mathcal{H}_{\mathfrak{n}}^{\sigma, \lambda}$ par des opérateurs bornés.

Il sera utile de disposer d'une autre réalisation de $T_{\mathfrak{n}}^{\sigma, \lambda}$. Considérons l'espace \mathcal{H}^{σ} des fonctions mesurables ψ sur K à valeurs dans E_{σ} qui vérifient :

$$\psi(km) = \sigma(m)^{-1} \psi(k) \quad (1')$$

et qui sont de carré intégrable pour le produit scalaire défini par (2). Il est immédiat que l'application $\varphi \rightarrow \varphi|_K$ définit une isométrie de $\mathcal{H}_{\mathfrak{n}}^{\sigma, \lambda}$ sur \mathcal{H}^{σ} .

Soit g dans G ; on note $\mathbf{k}(g) \in K$, $\mathbf{H}(g) \in \mathfrak{a}_{\mathfrak{p}}$, $\mathbf{n}(g) \in N$ les éléments tels que, dans la décomposition d'Iwasawa, on ait :

$$g = \mathbf{k}(g) \exp \mathbf{H}(g) \mathbf{n}(g).$$

La représentation $U_{\mathfrak{n}}^{\sigma, \lambda}$ de G dans \mathcal{H}^{σ} équivalente à $T_{\mathfrak{n}}^{\sigma, \lambda}$ est donnée par la formule

$$U_{\mathfrak{n}}^{\sigma, \lambda}(g) \psi(k) = e^{-\langle \lambda + \rho, \mathbf{H}(g^{-1}k) \rangle} \psi(\mathbf{k}(g^{-1}k)).$$

Remarquons pour terminer que toutes ces définitions ont encore un sens lorsque σ n'est pas irréductible, mais une simple représentation unitaire de M . Nous conservons les mêmes notations dans ce cas.

(c) *Comparaison des représentations $\pi(G, f, G(f)^1, \eta, \mathfrak{h})$ et des séries principales unitaires*. Le choix de \mathfrak{h} a déterminé celui d'une décomposition d'Iwasawa $G = KA_{\mathfrak{p}}N$. Le lemme 6, qui montre que $G(f) = MA_{\mathfrak{p}}$, entraîne que $G(f)$ stabilise la polarisation \mathfrak{h} . Soit

$$\sigma(\eta) = \text{Ind}_{G(f)^1 \uparrow G(f)} \eta, \quad \text{et} \quad \lambda(f) = 2i\pi f|_{\mathfrak{a}_{\mathfrak{p}}}.$$

LEMME 7. Soit $M^1 = G(f)^1 \cap M$. On a $G(f)^1 = M^1 A_{\mathfrak{p}}$ et $G(f)^1 H = M^1 A_{\mathfrak{p}} N$. La représentation $\tilde{\eta}$ est donnée par la formule :

$$\tilde{\eta}(m_1 an) = \eta(m_1) e^{\lambda(f)}(a) \quad (m_1 \in A_1, a \in A_p, n \in N)$$

la représentation

$$\text{Ind}_{G(f)^1 H \uparrow G(f) H} \tilde{\eta}$$

est donnée par la formule :

$$\text{Ind}_{G(f)^1 H \uparrow G(f) H} \tilde{\eta}(man) = \sigma(\eta)(m) e^{\lambda(f)}(a) \quad (m \in A, a \in A_p, n \in N).$$

Démonstration. Les deux premières assertions sont immédiates. On vérifie la formule de $\tilde{\eta}$ en utilisant l'unicité de $\tilde{\eta}$ (cf. lemme 1). Pour terminer, il est clair que l'opération de restriction des fonctions sur $MA_p N$ à M définit une isométrie de l'espace de $\tilde{\sigma}$ sur l'espace de $\sigma(\eta)$. Dans ce dernier espace, on a :

$$\begin{aligned} \left[\text{Ind}_{G(f)^1 H \uparrow G(f) H} \tilde{\eta} \right] (man) \varphi(m_0) &= \varphi(n^{-1} a^{-1} m^{-1} m_0) \\ &= \varphi(m^{-1} m_0 a^{-1} n') \\ &= (\sigma(\eta)(m) \varphi)(m_0) e^{\lambda(f)}(a). \end{aligned}$$

La formule coïncide avec celle de $(\sigma(\eta))^\sim$ de la première assertion du lemme. \square

Puisque $G(f)$ stabilise η et que $G(f)$ laisse fixe le caractère χ de $G(f)^0$, il est clair que $\sigma(\eta) \in X(f)$, et on peut donc considérer la représentation $\pi(G, f, G(f), \sigma(\eta), \eta)$.

LEMME 8. *Les représentations $\pi(G, f, G(f)^1, \eta, \eta)$ et $\pi(G, f, G(f), \sigma(\eta), \eta)$ sont équivalentes.*

Démonstration. Cela résulte de la transitivité de l'induction. \square

On peut maintenant conclure l'étude qui précède.

PROPOSITION 2. *La représentation $\pi(G, f, G(f)^1, \eta, \eta)$ est équivalente à la représentation $T_n^{\sigma(\eta), \lambda(f)}$. (On a utilisé la même notation pour $\sigma(\eta)$ et $\sigma(\eta)|_M$.)*

Démonstration. Le lemme 8 montre qu'il suffit de montrer l'équivalence de $T_n^{\sigma(\eta), \lambda(f)}$ et $\pi(G, f, G(f), \sigma(\eta), \eta)$. Mais il est clair que $\sigma(\eta)$ et $L_n^{\sigma(\eta), \lambda(f)}$ coïncident, donc que les représentations induites coïncident. \square

5.2. *Le cas réductif non connexe.* Ici, G est un groupe dont l'algèbre de Lie \mathfrak{g} est réductive. On peut donc en particulier appliquer à G^0 les résultats et les notations du 5.1 (a). D'autre part, en utilisant le lemme 4, on sait que $\pi(G, f, G(f)^1, \eta, \mathfrak{h})$ équivaut à

$$\text{Ind}_{G(f)^1 G^0 \uparrow G} \pi(G(f)^1 G^0, f, G(f)^1, \eta, \mathfrak{h})$$

ce qui permet donc de se ramener à étudier $\pi(G(f)^1 G^0, f, G(f)^1, \eta, \mathfrak{h})$, et on peut donc supposer, pour alléger les notations, que $G = G(f)^1 G^0$.

Soit $G^0(f)^1 = G(f)^1 \cap G^0$. On a évidemment les inclusions $G^0(f)^0 \subset G^0(f)^1 \subset G^0(f)$. Si $\eta_0 = \eta|_{G^0(f)^1}$, on peut donc considérer la représentation de G^0 : $\pi(G^0, f, G^0(f)^1, \eta_0, \mathfrak{h})$ dans l'espace $\mathcal{H}(G^0, f, G^0(f)^1, \eta_0, \mathfrak{h})$.

LEMME 9. *L'application I de $\mathcal{H}(G, f, G(f)^1, \eta, \mathfrak{h})$ dans $\mathcal{H}(G^0, f, G^0(f)^1, \eta_0, \mathfrak{h})$ définie par*

$$\varphi \rightarrow \varphi|_{G^0}$$

est une isométrie qui entrelace les représentations

$$\pi(G, f, G(f)^1, \eta, \mathfrak{h})|_{G^0} \text{ et } \pi(G^0, f, G^0(f)^1, \eta_0, \mathfrak{h}).$$

LEMME 10. *Soit W la représentation de $G(f)^1$ dans $\mathcal{H}(G^0, f, G^0(f)^1, \eta_0, \mathfrak{h})$ définie par la formule*

$$[W(\gamma)\varphi](g) = \eta(\gamma) \delta(\gamma)^{-1/2} \varphi(\gamma^{-1}g\gamma) \quad (\gamma \in G(f)^1, g \in G^0).$$

W est une représentation unitaire et I entrelace les représentations $\pi(G, f, G(f)^1, \eta, \mathfrak{h})|_{G(f)^1}$ et W .

Démonstration. On remarque d'abord que $G(f)^1$ stabilise la représentation η_0 : cela tient à ce que $G(f)^1$ stabilise f , et donc $\eta_0|_H$, et évidemment χ_f , donc $\eta|_{G^0(f)^1} = \eta_0$. Ceci entraîne que $W(\gamma)$ conserve $\mathcal{H}(G^0, f, G^0(f)^1, \eta_0, \mathfrak{h})$, et un calcul facile que $W(\gamma)$ y est unitaire. Que I soit un opérateur d'entrelacement est également immédiat. \square

Il reste à faire une dernière traduction qui correspond à l'identification

$$\pi(G^0, f, G^0(f)^1, \eta_0, \mathfrak{h}) \sim \pi\left(G^0, f, G^0(f), \text{Ind}_{G^0(f)^1 \uparrow G^0(f)} \eta_0, \mathfrak{h}\right)$$

du lemme 4.

Soit $I(\eta)$ la représentation de $G(f)^1$ dans l'espace de la représentation

$$\text{Ind}_{G^0(f)^1 \uparrow G^0(f)} \eta$$

donnée par

$$(I(\eta)(\gamma)\varphi)(x) = \eta(\gamma)\varphi(\gamma^{-1}x\gamma) \quad (\gamma \in G(f)^1, x \in G^0(f)).$$

LEMME 11. *La représentation W de $G(f)^1$ dans $\mathcal{H}(G^0, f, G^0(f)^1, \eta, \mathfrak{h})$ est équivalente à la représentation \bar{W} de $G(f)^1$ dans*

$$\mathcal{H}\left(G^0, f, G^0(f), \text{Ind}_{G^0(f)^1 \uparrow G^0(f)} \eta, \mathfrak{h}\right)$$

donnée par la formule :

$$[W(\gamma)\psi](g) = \delta(\gamma)^{-1/2} I(\eta)(\gamma)\psi(\gamma^{-1}g\gamma).$$

Démonstration. L'opérateur d'entrelacement est l'opérateur donné par l'équivalence canonique entre

$$\text{Ind}_{G^0(f)^1 H \uparrow G^0} \tilde{\eta} \quad \text{et} \quad \text{Ind}_{G^0(f)^1 H \uparrow G} \left(\text{Ind}_{G^0(f)^1 H \uparrow G^0(f)^1 H} \tilde{\eta} \right)$$

compte tenu de l'identification entre les espaces de

$$\text{Ind}_{G^0(f)^1 H \uparrow G^0(f)^1 H} \tilde{\eta} \quad \text{et de} \quad \text{Ind}_{G^0(f)^1 \uparrow G^0(f)} \eta. \quad \square$$

Le bilan des lemmes 4, 5, 6, 7, 8 et de la proposition 1 donne :

PROPOSITION 3. (i) *La représentation $(G, f, G(f)^1, \eta, \mathfrak{h})$ est équivalente à*

$$\text{Ind}_{G(f)^1 G^0 \uparrow G} \pi(G(f)^1 G^0, f, G(f)^1, \eta, \mathfrak{h}).$$

(ii) *La représentation $\pi(G(f)^1 G^0, f, G(f)^1, \eta, \mathfrak{h})$ est équivalente à la représentation de $G(f)^1 G^0$ dans l'espace $\mathcal{H}_\pi^{\sigma(\eta), \lambda(f)}$ dont la restriction à G^0 est la représentation $T_\pi^{\sigma(\eta), \lambda(f)}$ et la restriction à $G(f)^1$ est la représentation \bar{W} donnée par la formule :*

$$(\bar{W}(\gamma)\varphi)(g) = \delta(\gamma)^{-1/2} I(\eta)(\gamma)\varphi(\gamma^{-1}g\gamma).$$

5.3. *Le premier cas de réduction.* Dans ce paragraphe, on suppose qu'il existe un idéal α qui est abélien, $G(f)^1$ -stable, tel que $A = \exp \alpha$ soit un sous-groupe fermé, et tel que $f|_{\alpha} = 0$. Le lemme 4 permet de se ramener au cas où $G = G(f)^1 G^0$. Dans ce cas, A est un sous-groupe invariant fermé de G . D'autre part, la polarisation η contient α , puisque même $\mathfrak{g}(f) \supset \alpha$.

Soit $G_1 = G(f)^1 G^0 / A$, d'algèbre de Lie $\mathfrak{g}_1 = \mathfrak{g} / \alpha$. Soit f_1 la forme obtenue par passage au quotient.

LEMME 12. *Soit α un idéal abélien d'une algèbre de Lie algébrique \mathfrak{g} . Il existe sur \mathfrak{g} une structure d'algèbre de Lie algébrique (éventuellement différente de la première) pour laquelle α est algébrique.*

Démonstration. Soit ρ une injection de \mathfrak{g} dans $\text{End}(V)$ telle que $r(\mathfrak{g})$ soit une sous-algèbre de Lie algébrique de $\text{End}(V)$. Soit \mathfrak{z} le centre \mathfrak{g} , et $\mathfrak{s} = \{z \in \mathfrak{z}, \rho(z) \text{ est semi-simple}\}$. Alors $\rho(\mathfrak{s})$ est algébrique et \mathfrak{g} est isomorphe à $\mathfrak{g}/\mathfrak{s} \times \mathfrak{s}$. Il y a une injection ρ'' de $\mathfrak{g}/\mathfrak{s}$ dans $\text{End}(V'')$ telle que $\rho''(\mathfrak{g}/\mathfrak{s})$ est algébrique. Choisissons une injection ρ''' de \mathfrak{s} dans $\text{End}(V''')$ dont l'image est nilpotente. Considérons $\rho' = \rho'' \times \rho'''$; $\rho'(\mathfrak{z})$ est formé d'éléments nilpotents, donc l'image par ρ' d'un idéal abélien de \mathfrak{g} est formée d'éléments nilpotents, ce qui entraîne que $\rho'(\alpha)$ est algébrique. \square

LEMME 13. (i) *L'algèbre de Lie \mathfrak{g}_1 est algébrique.*

(ii) *On a $G_1(f_1) = G(f)^1 G^0(f) / A$ et $\mathfrak{g}_1(f_1) = \mathfrak{g}(f) / \alpha$.*

(iii) *La forme f_1 est bien polarisable, et le caractère χ_{f_1} se déduit de χ_f par passage au quotient.*

(iv) *La sous-algèbre $\eta_1 = \eta / \alpha$ est dans $\text{PRP}_1(f_1)$, où l'on a posé $G(f)^1 / A = G_1(f_1)^1$.*

(v) *La représentation $\tilde{\eta}_1$ déduite de η par passage au quotient est dans $X(f_1, G_1(f_1)^1)$.*

Démonstration. Le (i) résulte du lemme 12. Les autres assertions sont évidentes. \square

On peut donc considérer la représentation $\pi(G_1, f_1, G_1(f_1)^1, \eta_1, \eta_1)$ de G_1 . Soit p la surjection canonique de $G(f)^1 G^0$ sur G_1 . On conclut le paragraphe facilement.

PROPOSITION 4. (i) *La représentation $\pi(G, f, G(f)^1, \eta, \eta)$ est équivalente à*

$$\text{Ind}_{G(f)^1 G^0 \uparrow G} \pi(G(f)^1 G^0, f, G(f)^1, \eta, \eta).$$

(ii) Les représentations $\pi(G(f)^1 G^0, f, G(f)^1, \eta, \mathfrak{h})$ et $\pi(G_1, f_1, G_1(f_1)_1, \eta_1, \mathfrak{h}_1) \circ p$ sont équivalentes.

5.4. *Le deuxième cas de réduction.* Dans ce paragraphe, on suppose qu'il existe un idéal abélien $G(f)^1$ -stable α . Il est inutile de supposer que $f|_\alpha \neq 0$, mais l'étude dans ce se réduit à celle du paragraphe précédent. Mais on traite les deux cas séparément car on les utilisera dans des situations bien différentes (cf. proposition 1) : il s'agit surtout de bien fixer les notations.

On suppose également que $\mathfrak{h} \supset \alpha$. Soit $m = f|_\alpha$, soit

$$G_1 = G(f)^1 G^0(m) = \{g \in G(f)^1 G^0, \forall X \in \alpha, f(g \cdot X) = f(X)\}.$$

G_1 est un sous-groupe fermé de G , dont nous notons \mathfrak{g}_1 l'algèbre de Lie. Dans cette situation, le résultat du lemme suivant est classique.

- LEMME 14. (i) On a $\mathfrak{g}_1(f_1) = \mathfrak{g}(f) + \alpha$.
(ii) On a $G_1(f_1) = G(f)^1 G^0(f) A$.
(iii) Posons $G_1(f_1)^1 = G(f)^1 A$. Alors $\mathfrak{h} \in PRP_1(f_1)$.

D'après le lemme 12 \mathfrak{g}_1 est une algèbre de Lie algébrique.

LEMME 15. (i) Le caractère χ_f de $G(f)^0$ se prolonge en un unique caractère χ_{f_1} de $G_1(f_1)^0 = G(f)^0 A$ dont la différentielle est $2i\pi f|_{\mathfrak{g}(f) + \alpha}$.

(ii) La représentation η de $G(f)^1$ se prolonge en une unique représentation η_1 de $G_1(f_1)^1$ dont la restriction à $G_1(f_1)^0$ est un multiple de χ_{f_1} .

(iii) Les groupes $G(f)^1 H$ et $G_1(f_1)^1 H$ sont identiques et les représentations $\tilde{\eta}$ et $\tilde{\eta}_1$ obtenues à partir de η et η_1 par la construction du lemme 1 sont égales.

Démonstration. (i) Comme $G(f)^0 A \subset H$, et qu'on sait qu'il existe un caractère de H dont la différentielle est $2i\pi f|_{\mathfrak{h}}$, on obtient χ_{f_1} par restriction.

(ii) L'unicité est immédiate. L'existence résulte de (iii).

(iii) On a $G_1(f_1)^1 H = G(f)^1 H$. Il est clair que $\eta_1 = \tilde{\eta}|_{G_1(f_1)^1}$ est un élément de $X(f_1, G_1(f_1)^1)$. L'unicité de $\tilde{\eta}$ montre enfin que $\tilde{\eta} = \tilde{\eta}_1$. \square

Tout ce qu'on vient de montrer permet de construire la représentation $\pi(G_1, f_1, G_1(f_1)^1, \eta_1, \mathfrak{h})$. La conclusion est immédiate, par transitivité de l'induction.

PROPOSITION 5. On a : $\pi(G, f, G(f)^1, \eta, \mathfrak{h}) \simeq \text{Ind}_{G_1 \uparrow G} \pi(G_1, f_1, G_1(f_1)^1, \eta_1, \mathfrak{h})$.

5.5. *Le troisième cas de réduction.* Dans ce paragraphe, on suppose qu'il existe un idéal nilpotent caractéristique algébrique \mathfrak{n} tel que le sous-groupe $N = \exp \mathfrak{n}$ est fermé et que \mathfrak{h} est \mathfrak{n} -admissible (i.e. $\mathfrak{h} \cap \mathfrak{n}$ est une polarisation pour la restriction ν de f à \mathfrak{n}).

A nouveau, le cas étudié englobe ceux qui ont été étudiés aux §§ 5.3 et 5.4. On a préféré traiter ceux-ci à part parce qu'il aurait été aussi long d'exposer les simplifications qu'entraîne le fait que \mathfrak{n} soit abélien, et, qu'en plus, on aura à faire aux trois situations dans des circonstances différentes (cf. proposition 1).

Soit $\nu = f|_{\mathfrak{n}}$, $G_1 = G(\nu)$, $\mathfrak{g}_1 = \mathfrak{n}^f$ son algèbre de Lie, $f_1 = f|_{\mathfrak{g}_1}$. Le lemme suivant est classique (cf. [Char 2]).

LEMME 16. *On a les propriétés suivantes*

- (i) $\mathfrak{g}_1(f_1) = \mathfrak{g}(f) + \mathfrak{n}(\nu)$
- (ii) $N(\nu) \cdot f = f + (\mathfrak{g}(\nu) + \mathfrak{n})^\perp$
- (iii) $G_1(f_1) = G(f) \cdot N(\nu)$.

Soit $\mathfrak{h}_\mathfrak{n} = \mathfrak{h} \cap \mathfrak{n}$, et $H_\mathfrak{n} = \exp \mathfrak{h}_\mathfrak{n}$. Puisque $\mathfrak{h}_\mathfrak{n}$ est une polarisation en ν , $H_\mathfrak{n}$ contient $N(\nu)$. En restreignant $\tilde{\eta}$ à $N(\nu)$ on obtient un multiple d'un caractère χ_ν de $N(\nu)$ dont la différentielle est $2i\pi\nu|_{\mathfrak{n}(\nu)}$. Il en résulte qu'on peut, par la méthode de Kirillov pour les groupes nilpotents non simplement connexes, associer à ν et $\mathfrak{h}_\mathfrak{n}$ une représentation $\pi(N, \nu, \mathfrak{h}_\mathfrak{n})$, irréductible, et dont la classe ne dépend pas de la polarisation $\mathfrak{h}_\mathfrak{n}$ en ν , ni du choix d'une forme dans la N -orbite de ν .

Soit $g \in G_1$. Les représentations $\pi(N, \nu, \mathfrak{h}_\mathfrak{n})$ et ${}^g\pi(N, \nu, \mathfrak{h}_\mathfrak{n})$ sont, d'après ce qui précède, équivalentes. C'est ainsi qu'apparaît la représentation métaplectique. Nous suivons ici la présentation qu'en fait Lion (cf. [Li 2]). (On peut consulter également, dans le cas d'une algèbre de Heisenberg, [LV].) On construit un opérateur d'entrelacement $W(g)$ explicite, qui est, après des identifications convenables, une transformation de Fourier.

La formule est :

$$(\forall n \in N) (\forall g \in G_1) \quad (\pi(N, \nu, \mathfrak{h}_\mathfrak{n})(g^{-1}ng) = W(g)^{-1}\pi(N, \nu, \mathfrak{h}_\mathfrak{n})(n)W(g)).$$

Le cocycle c de la représentation projective W de G_1 , défini par la formule : $W(g_1)W(g_2) = c(g_1, g_2)W(g_1g_2)$, est donc une application de G_1^2 dans le groupe U des complexes de module 1. On peut calculer explicitement une fonction s de G dans U telle que

$$c^2(g_1, g_2) = \left(\frac{s(g_1)s(g_2)}{s(g_1g_2)} \right)^{-1}$$

où $s(g) \in \{1, -1, i, -i\}$ pour tout g .

Soit $\tilde{G}_1 = \{(g, \varepsilon) \in G_1 \times \mathbb{C}, \varepsilon^2 = s(g)\}$, muni de la loi de groupe $(g, \varepsilon)(g', \varepsilon') = (gg', \varepsilon\varepsilon'c(g, g'))$. L'application $p : (g, \varepsilon) \rightarrow g$ fait de \tilde{G}_1 un revêtement à deux feuillets de G_1 .

Les méthodes générales de Mackey montrent (cf. [Mac]) que \tilde{G}_1 est un groupe de Lie.

On peut définir maintenant la représentation métaplectique \tilde{W} (appelée représentation de Weil lorsque \mathfrak{n} est une algèbre de Heisenberg), de \tilde{G}_1 , qui relève W , définie par :

$$\tilde{W}(g, \varepsilon) = \varepsilon^{-1}W(g).$$

On étend \tilde{W} à $\tilde{G}_1 \times_s N$ par :

$$\tilde{W}((g, \varepsilon), n) = \varepsilon^{-1}W(g)\pi(N, \nu, \eta_n)(n).$$

Sans entrer dans les détails, nous avons besoin de savoir :

- $g \in N(\nu)$, $W(g) = \chi_\nu(g)^{-1}\pi(N, \nu, \eta_n)(g)$ et $s(g) = 1$
- pour $g \in G_1$, g stabilisant η_n , et $\tilde{g} = (g, \varepsilon)$, $[\tilde{W}(\tilde{g})\varphi](n) = \varepsilon\varphi(g^{-1}ng)$ et $c(g, g') = 1$ pour tout g' .

LEMME 17. (i) *L'algèbre de Lie \mathfrak{g}_1 est algébrique.*

(ii) $\tilde{G}_1(f_1)^0 = p^{-1}(G_1(f_1))$ et $\tilde{G}_1(f_1)^0 = p^{-1}(G_1(f_1)^0)$ si ce groupe est connexe et sinon $\tilde{G}_1(f_1)^0$ est d'indice 2 dans $p^{-1}(G_1(f_1)^0)$.

(iii) *Le caractère χ_f se prolonge en un caractère χ_{f_1} de $G_1(f_1)^0$ unique dont la différentielle est $2i\pi f_1|_{\mathfrak{g}_1(f_1)}$. Le caractère χ_{f_1} se relève en un caractère $\tilde{\chi}_{f_1}$ de $p^{-1}(G_1(f_1)^0)$ par la formule*

$$\tilde{\chi}_{f_1}(g, \varepsilon) = \chi_{f_1}(g)\varepsilon.$$

Par restriction éventuelle à $\tilde{G}_1(f_1)^0$, $\tilde{\chi}_{f_1}$ est le caractère de différentielle $2i\pi f_1|_{\mathfrak{g}_1(f_1)}$.

(iv) *La représentation η se prolonge en une représentation η_1 unique $G_1(f_1)^1 = G(f)^1N(\nu)$ qui est dans $X(f_1, G_1, (f_1)^1)$. La représentation η_1 se relève en une représentation $\tilde{\eta}_1$ de $\tilde{G}_1(f_1)^1 = p^{-1}(G_1(f_1)^1)$ par la formule*

$$\tilde{\eta}_1(g, \varepsilon) = \varepsilon\eta_1(g).$$

(v) $\eta \cap \mathfrak{g}_1 = \eta_1$ est une polarisation en f_1 résoluble, $\tilde{G}_1(f_1)^1$ -stable et qui vérifie la condition de Pukanszky.

Démonstration. (i) est vrai puisque \mathfrak{n} est supposée algébrique.

(ii) est évident.

(iii) et (iv). En restreignant la représentation $\tilde{\eta}$ de $G(f)^1H$ à $G(f)^0N(\nu)$ on obtient un multiple du caractère χ_{f_1} . En restreignant $\tilde{\eta}$ à $G(f)^1N(\nu)$ on obtient η_1 . Il reste à montrer que $\tilde{\chi}_{f_1}(g, \varepsilon) = \varepsilon \chi_{f_1}(g)$ est un caractère, ce qui vient de ce que, pour $g, g' \in G_1(f_1)^1$, $c(g, g') = 1$. De même $\tilde{\eta}_1(g, \varepsilon) = \varepsilon \eta_1(g)$ est une représentation.

(v) Puisque $\mathfrak{h} \cap \mathfrak{n}$ est une polarisation pour $f|_{\mathfrak{n}}$, cela entraîne que $\mathfrak{h} \cap \mathfrak{g}_1$ en est une pour f_1 . Montrons que \mathfrak{h}_1 vérifie la condition de Pukanszky.

Soit $h \in H \cap G_1$. On a $h \cdot f \in f + \mathfrak{h}^\perp$ puisque $h \in H$, et $h \cdot f \in f + \mathfrak{n}^\perp$ puisque $h \in G_1$, donc $h \cdot f \in f + (\mathfrak{h} + \mathfrak{n})^\perp$. Réciproquement, $f + (\mathfrak{h} + \mathfrak{n})^\perp \subset (H \cap G_1) \cdot f$: si $\varphi \in f + (\mathfrak{h} + \mathfrak{n})^\perp$, $\varphi \in f + \mathfrak{h}^\perp$, donc $\varphi = h \cdot f$ avec $h \in H$, et $h \in G_1$ puisque $\varphi \in f + \mathfrak{n}^\perp$. Maintenant $f + (\mathfrak{h} + \mathfrak{n})^\perp$ est simplement connexe, et $H \cap G_1 \cap G(f) = H \cap G(f)$ est connexe (lemme 1), $H \cap G_1$ doit être connexe; $H \cap G_1$ est donc le sous-groupe analytique connexe d'algèbre de Lie $\mathfrak{h} \cap \mathfrak{g}_1$. Mais comme $(H \cap G_1) \cdot f$ est fermé, cela entraîne que $\mathfrak{h} \cap \mathfrak{g}_1$ vérifie la condition de Pukanszky. \square

Le lemme permet de définir la représentation $\pi(\tilde{G}_1, f_1, \tilde{G}_1(f_1)^1, \tilde{\eta}_1, \mathfrak{h}_1)$, qu'on étend trivialement au produit semi-direct $G_1 \times_s N$.

LEMME 18. *La représentation $\pi(\tilde{G}_1, f_1, \tilde{G}_1(f_1)^1, \tilde{\eta}_1, \mathfrak{h}_1) \otimes \tilde{W}$ définit par passage au quotient une représentation de $G_1 \cdot N$.*

Démonstration. Il faut calculer les restrictions des deux représentations au noyau K du morphisme canonique de $G_1 \times_s N$ dans $G_1 \cdot N$.

$$K = \{((g, \varepsilon), n), g \in N(\nu), n = g^{-1}\}.$$

On a donc, pour $((n, \varepsilon), n^{-1}) \in K$,

$$\tilde{W}((n, \varepsilon), n^{-1}) = \varepsilon^{-1} W(n) \pi(N, \nu, \mathfrak{h}_n)(n^{-1})$$

$$\tilde{W}((n, \varepsilon), n^{-1}) = \varepsilon^{-1} \chi_{\nu}(n)^{-1}.$$

D'autre part, si $x \in \tilde{G}_1$, $x_0 \in \tilde{G}_1$, $\varphi \in \mathcal{H}(\tilde{G}_1, f_1, \tilde{G}_1(f_1)^1, \tilde{\eta}_1, \mathfrak{h}_1)$:

$$\begin{aligned} [\pi(\tilde{G}_1, f_1, \tilde{G}_1(f_1)^1, \tilde{\eta}_1, \mathfrak{h}_1)(x)] \varphi(x_0) &= \varphi(x^{-1}x_0) = \varphi(x_0 x_0^{-1} x^{-1} x_0) \\ &= \varphi(x_0) [\tilde{\eta}(x_0^{-1} x^{-1} x_0)]^{-1} \end{aligned}$$

Ecrivons $x = (n, \varepsilon)$, $x_0 = (g_0, \varepsilon_0)$. Alors $x_0^{-1} x^{-1} x_0 = (g_0^{-1} n g_0, \varepsilon)$ et $\tilde{\eta}(x_0^{-1} x x_0) = \varepsilon \chi_{\nu}(g_0^{-1} n g_0) =$

$\varepsilon\chi_\nu(n)$ puisque $g_0 \in G_1$. Enfin de compte $\pi(\tilde{G}_1, f_1, \tilde{G}_1(f_1)^1, \tilde{\eta}_1, \eta_1)((n, \varepsilon), n^{-1}) = \varepsilon\chi_\nu(n)$, résultat désiré. \square

PROPOSITION 6. *Les représentations $\pi(G, f, G(f)^1, \eta_1, \eta)$ et*

$$\text{Ind}_{G_1 N \uparrow G} \pi(\tilde{G}_1, f_1, \tilde{G}_1(f_1)^1, \tilde{\eta}_1, \eta_1) \otimes \tilde{W}$$

sont équivalentes.

(Le cas particulier où $G(f)^1 = G(f)$ et η est un caractère se trouve dans [Duf1].)

Démonstration. Par transitivité de l'induction, puisque $G(f)^1 H \subset G_1 \cdot N$, on peut supposer que $G = G_1 \cdot N$. On va exhiber un opérateur d'entrelacement explicite entre les deux représentations.

(a) *Description des espaces.* L'espace $\mathcal{H}(N, \nu, \eta_n)$ est l'espace des fonctions mesurables sur N , vérifiant p.p. $\theta(nh) = \chi_\nu(h)^{-1} \theta(n)$ et de carré intégrable sur $N/N \cap H$. L'espace $\mathcal{H}(G, f, G(f)^1, \eta, \eta)$ est l'espace des fonctions mesurables sur G à valeurs dans E_ν et vérifiant $\varphi(gh) = \tilde{\eta}(h)^{-1} \delta(h)^{1/2} \varphi(g)$ ($g \in G, h \in G(f)^1 H$) (où δ est la fonction module de $G/G(f)^1 H$) et qui sont de carré intégrable modulo $G(f)^1 H$.

L'espace $\mathcal{H}(\tilde{G}_1, f_1, \tilde{G}_1(f_1)^1, \tilde{\eta}_1, \eta_1)$ est l'espace des fonctions mesurables sur \tilde{G}_1 à valeurs dans $\tilde{E}_{\tilde{\eta}}$ vérifiant $\psi(g_1 h_1) = \tilde{\eta}_1(h_1)^{-1} \delta(h_1) \psi(g_1)$ ($g_1 \in \tilde{G}_1, h_1 \in \tilde{G}_1(f_1)^1 \tilde{H}_1$) où δ est le module de $\tilde{G}_1/\tilde{G}_1(f_1)^1 \tilde{H}_1$ et qui sont de carré intégrable modulo $\tilde{G}_1(f_1)^1 \tilde{H}_1$.

(b) *Description d'un opérateur d'entrelacement.* Soit $\theta \in \mathcal{H}(N, \nu, \eta_n)$ et $\psi \in \mathcal{H}(\tilde{G}_1, f_1, \tilde{G}_1(f_1)^1, \tilde{\eta}_1, \eta_1)$. On définit

$$A(\psi, \theta)(p(x)n) = \psi(x) [\tilde{W}(x)^{-1} \theta](n) \quad (x \in \tilde{G}_1, n \in N).$$

La formule a un sens. Soit en effet $x' = xy, n' = p(y)^{-1}n$, avec $y \in \tilde{N}(\nu), y = (p(y), \varepsilon)$. On a alors

$$\begin{aligned} \psi(x') [\tilde{W}(x')^{-1} \theta](n') &= \psi(xy) [\tilde{W}(xy)^{-1} \theta](p(y)^{-1}n) \\ &= \tilde{\eta}_1(y)^{-1} \delta(y)^{1/2} \psi(x) [\tilde{W}(y)^{-1} \tilde{W}(x)^{-1} \theta](p(y)^{-1}n) \\ &= \tilde{\eta}_1(y)^{-1} \delta(y)^{1/2} \psi(x) [\tilde{W}(x)^{-1} \theta](n) \chi_\nu(p(y)) \varepsilon \\ &= \psi(x) [\tilde{W}(x)^{-1} \theta](n). \end{aligned}$$

La fonction $A(\psi, \theta)$ est dans $\mathcal{H}(G, f, G(f)^1, \eta, \eta)$. Soit $\gamma \in G(f)^1, h \in H$. Ecrivons

$h = h_1 h_N$, $h_1 \in H_1$ et $h_N \in \exp(\mathfrak{h} \cap \mathfrak{n})$. Soit $\tilde{\gamma} = (\gamma, \varepsilon) \in \tilde{G}(f)^1$ et $\tilde{h}_1 = (h_1, \varepsilon') \in \tilde{H}_1$. Alors $\tilde{\gamma}\tilde{h}_1 = (\gamma h_1, \varepsilon\varepsilon')$,

$$\begin{aligned} A(\psi, \theta)(p(x) n \gamma h) &= A(\psi, \theta)(p(x) \gamma h_1 (\gamma h_1)^{-1} n (\gamma h_1) h_N) \\ &= A(\psi, \theta)(p(x \tilde{\gamma} h_1) (\gamma \tilde{h}_1)^{-1} n (\gamma h_1) h_N) \\ &= \psi(\tilde{x} \tilde{\gamma} \tilde{h}_1) (\tilde{W}(x \tilde{\gamma} \tilde{h}_1)^{-1} \theta) ((\gamma h_1)^{-1} n \gamma h_1 h_N^1) \\ &= \psi(x \tilde{\gamma} \tilde{h}_1) [\tilde{W}(\gamma \tilde{h}_1)^{-1} \tilde{W}(x)^{-1} \theta] ((\gamma h_1)^{-1} h \gamma h_1 h_N) \\ &= \tilde{\eta}_1 (\tilde{\gamma} \tilde{h}_1)^{-1} \delta(\gamma h_1)^{1/2} \psi(x) \chi_{\nu}(h_N)^{-1} [\tilde{W}(\gamma h_1)^{-1} \tilde{W}(x)^{-1} \theta] ((\gamma h_1)^{-1} n \gamma h_1). \end{aligned}$$

La formule pour $W(\gamma h_1)$ donne :

$$\begin{aligned} A(\psi, \theta)(p(x) n \gamma h) &= \tilde{\eta}_1 (\tilde{\gamma} \tilde{h}_1)^{-1} \chi_{\nu}(h_N)^{-1} \delta(\tilde{\gamma} \tilde{h}_1)^{1/2} \psi(x) [\tilde{W}(x)^{-1} \theta](n) \varepsilon \varepsilon' \\ &= \tilde{\eta}(\gamma h)^{-1} \delta(\gamma h)^{1/2} A(\psi, \theta)(p(x) n). \end{aligned}$$

- A est une isométrie de $\mathcal{H}(\tilde{G}_1, f_1, \tilde{G}_1(f_1)^1, \tilde{\eta}_1, \mathfrak{h}_1) \otimes \mathcal{H}(N, \nu, \mathfrak{h}_n)$ dans $\mathcal{H}(G, f, G(f)^1, \eta, \mathfrak{h})$. On normalise les mesures sur $G/G(f)^1 H$ en sorte que, schématiquement, on ait :

$$\int_{G/G(f)^1 H} = \int_{G/G(f)^1 H N} \int_{G(f)^1 H N / G(f)^1 H}.$$

Comme $G/G(f)^1 H N$ est isomorphe à $G_1/G_1(f_1)^1 H_1$, lui même isomorphe à $\tilde{G}_1/\tilde{G}_1(f_1)^1 \tilde{H}_1$, et $G(f)^1 H N / G(f)^1 H$ est isomorphe à N/H_N , il est facile de vérifier que

$$\int_{G/G(f)^1 H} \|A(\psi, \theta)(g)\|^2 dg = \|\psi\|^2 \|\theta\|^2.$$

- A est un opérateur d'entrelacement. Le calcul est analogue à ceux qu'on a déjà faits.
- L'image de A est partout dense.

Soit ζ une fonction continue à support compact modulo $G(f)^1 H$ dans l'orthogonal de $\text{Im } A$ (il est facile de voir qu'il en existe). On a donc, pour tout couple (ψ, θ) ,

$$\int_{G/G(f)^1 H} (\zeta(g), A(\psi, \theta)(g)) dg = 0.$$

Considérons, pour x fixé dans \tilde{G}_1 , la fonction

$$n \mapsto \zeta(p(x) n) [\tilde{W}(x)^{-1} \theta](n).$$

Comme $\tilde{W}(x)^{-1}$ est donné par une transformation de Fourier, si θ est continue à support compact modulo H_N , cette fonction est continue et intégrable modulo H_N :

$$k_\theta(x) = \int_{N/H_N} \zeta(p(x)n) [\tilde{W}(x)^{-1}\theta](n) dn.$$

La fonction k_θ est continue dans $\mathcal{H}(\tilde{G}_1, f_1, \tilde{G}_1(f_1)^1, \tilde{\eta}_1, \eta_1)$ et on a, par construction, que k_θ est orthogonale à toute fonction continue dans cet espace. Donc $k_\theta=0$ pour tout θ , ce qui prouve que $\zeta=0$.

La proposition est entièrement démontrée. \square

6. Equivalence des représentations pour deux choix de polarisations (cas résoluble)

On traite dans ce chapitre le cas \mathfrak{g} résoluble, dont on se servira pour démontrer le cas général au chapitre suivant (théorème 1).

THÉORÈME 1'. *Soit \mathfrak{a} une algèbre de Lie algébrique et résoluble, et G un groupe de Lie d'algèbre de Lie \mathfrak{g} . Soit f une forme linéaire sur \mathfrak{g} , entière, $G(f)^1$ un sous-groupe de $G(f)$ contenant $G(f)^0$, η une représentation dans $X(f, G(f)^1)$ et η et η' deux bonnes polarisations $G(f)^1$ -stables. Les représentations $\pi(G, f, G(f)^1, \eta, \eta)$ et $\pi(G, f, G(f)^1, \eta, \eta')$ sont équivalentes.*

Dans le cas de groupes connexes, le résultat était déjà connu, au moins pour $G(f)^1=G(f)$ et η un caractère de $G(f)$, depuis [Ber] dans le cas exponentiel et Auslander et Kostant dans le cas résoluble général. L'innovation principale consiste à considérer des groupes non connexes.

La démonstration se fait par récurrence sur la dimension de \mathfrak{g} . Lorsque cette dimension est nulle, il n'y a rien à démontrer. Supposons donc le résultat acquis pour $\dim \mathfrak{g} < n$, et soit \mathfrak{g} de dimension n . On applique la proposition 1, et on est donc amené à distinguer trois cas.

6.1. *Cas (ii) de la proposition 1.* Choisissons un idéal \mathfrak{a} , abélien $G(f)^1$ -stable, sur lequel f est nulle, maximal. Le groupe $A=\exp \mathfrak{a}$ est fermé. On est donc dans les conditions du § 5.3, et on peut donc appliquer la proposition 4. Utilisons les mêmes notations. Par l'hypothèse de récurrence, $\pi(G_1, f_1, G_1(f_1)^1, \eta_1, \eta_1)$ et $\pi(G_1, f_1, G_1(f_1)^1, \eta_1, \eta'_1)$ sont équivalentes. Donc $\pi(G(f)^1 G^0, f, G(f)^1, \eta, \eta)$ et $\pi(G(f)^1 G^0, f, G(f)^1, \eta, \eta')$ le sont aussi, par le (ii) de la proposition, ce qui entraîne, par le (i) de la proposition 4 l'équivalence de $\pi(G, f, G(f)^1, \eta, \eta)$ et $\pi(G, f, G(f)^1, \eta, \eta')$.

6.2. *Cas (iv) de la proposition 5.1.* On suppose qu'il n'existe pas d'idéal abélien $G(f)^1$ -stable sur lequel f s'annule. Soit α un idéal abélien non central $G(f)^1$ -stable. Comme au § 5.4, on considère $\mathfrak{g}_1 = \alpha^f$. Dans ce cas, $\mathfrak{g}_1 \neq \mathfrak{g}$ sans quoi $[\mathfrak{g}, \alpha]$ serait un idéal abélien $G(f)^1$ -stable sur lequel f s'annulerait. Soit $m = f|_{\alpha}, G_1$ le stabilisateur de m dans $G(f)^1 G^0$, et $f_1 = f|_{\mathfrak{g}_1}$.

LEMME 19. (*On ne suppose pas \mathfrak{g} résoluble pour cet énoncé.*) Si $\eta \in PRP_1(f)$, $\eta_1 = \eta \cap \mathfrak{g}_1 + \alpha$ est dans $PRP_1(f)$ et $\eta_1 \subset \mathfrak{g}_1$.

Démonstration. Calculons η_1^f . $\eta_1^f = (\eta \cap \mathfrak{g})^f \cap \alpha^f = \mathfrak{g}_1 \cap \eta + \alpha = \eta_1$. Donc η_1 est une polarisation. Montrons qu'elle vérifie la condition de Pukanszky.

Soit $\eta_0 = \eta \cap \mathfrak{g}_1$, et H_0 le sous-groupe analytique d'algèbre de Lie η_0 . On a $H_1 = H_0 \cdot A$ donc $H_1 \cdot f = H_0 \cdot A \cdot f = H_0(f + \mathfrak{g}_1^\perp)$. Il vient $H_1 \cdot f = H_0 \cdot f + \mathfrak{g}_1^\perp$. De la condition $H \cdot f = f + \eta^\perp$ on déduit $H \cdot m = m + \eta^\perp \cap \alpha^*$, donc que $H/H \cap G(m)$ est simplement connexe. $H \cap G(m)$ est alors connexe, donc $H_0 = H \cap G(m)$. Il en résulte que $H_0 \cdot f = f + (\eta + \alpha)^\perp$, donc $H_1 \cdot f = f + (\eta \cap \mathfrak{g}_1 + \alpha)^\perp$. \square

On choisit un idéal α abélien non central $G(f)^1$ -stable minimal. La démonstration se fait en deux temps : d'abord montrer l'équivalence de $\pi(G, f, G(f)^1, \eta, \eta)$ et $\pi(G, f, G(f)^1, \eta, \eta_1)$, ce qui permet de se ramener à des polarisations contenant α , puis d'appliquer les résultats du § 5.4, notamment la proposition 5.5.

(a) *Equivalence de $\pi(G, f, G(f)^1, \eta, \eta)$ et $\pi(G, f, G(f)^1, \eta, \eta_1)$.* On commence par donner quelques résultats préliminaires.

LEMME 20. On a : $\dim(\alpha/\alpha \cap \eta) = \dim \eta/\eta_0$ et, pour $h_0 \in \eta_0$,

$$\mathrm{tr}_{\eta/\eta_0}(\mathrm{ad} h_0) = \frac{1}{2}(\mathrm{tr}_{\eta+\alpha/\eta}(\mathrm{ad} h_0) - \mathrm{tr}_{\eta+\alpha/\eta_1}(\mathrm{ad} h_0)).$$

La démonstration se trouve dans [BC], chapitre 3.

LEMME 21. Soit N un groupe de Lie connexe dont l'algèbre de Lie \mathfrak{n} est nilpotente. Soit \mathfrak{m} un sous-espace vectoriel de \mathfrak{n} . Il existe un supplémentaire \mathfrak{b} de \mathfrak{m} dans \mathfrak{n} tel que l'application de $\mathfrak{b} \times \mathfrak{m}$ dans N :

$$(X, Y) \rightarrow \exp X \cdot \exp Y$$

soit surjective. On appelle bon supplémentaire un tel supplémentaire.

Démonstration. On procède par récurrence sur $\dim \mathfrak{n}$. Si $\dim \mathfrak{n} = 0$, il n'y a rien à montrer. On distingue deux cas. Soit \mathfrak{z} le centre de \mathfrak{n} .

1^{er} cas. $\mathfrak{g} \cap \mathfrak{m} = \{0\}$. Soit $p: \mathfrak{n} \rightarrow \mathfrak{n}/\mathfrak{g}$ l'homomorphisme canonique. On note par la même lettre l'homomorphisme de N dans $N/\exp \mathfrak{g}$. Soit \mathfrak{b} un supplémentaire de $\mathfrak{m} \oplus \mathfrak{g}$ tel que $p(\mathfrak{b})$ soit un bon supplémentaire de $p(\mathfrak{m})$. Alors \mathfrak{b} convient.

2^e cas. $\mathfrak{g}_1 = \mathfrak{g} \cap \mathfrak{m} \neq \{0\}$. On passe au quotient par \mathfrak{g}_1 . On note p_1 la surjection canonique. Il existe un bon supplémentaire \mathfrak{b}_1 de $p_1(\mathfrak{m})$. On prend un supplémentaire \mathfrak{b} de \mathfrak{m} tel que $p_1(\mathfrak{b}) = \mathfrak{b}_1$. On a

$$p_1(\exp \mathfrak{b} \cdot \exp \mathfrak{m}) = N/\exp \mathfrak{g}_1.$$

Comme \mathfrak{m} contient \mathfrak{g}_1 , il vient $\exp \mathfrak{b} \cdot \exp \mathfrak{m} = N$. □

Dans le lemme 2, on a montré que $\mathfrak{h} = \mathfrak{g}(f) + \mathfrak{u}$, où \mathfrak{u} est l'algèbre de Lie du radical unipotent de \tilde{H} . Choisissons dans \mathfrak{u} un bon supplémentaire \mathfrak{u}_1 de $\mathfrak{u} \cap \mathfrak{h}_0$. Choisissons d'autre part un supplémentaire α_1 de $\alpha \cap \mathfrak{h}$ dans α . Soit $\mathfrak{k} = \mathfrak{h} + \alpha$. On a $\mathfrak{k} = \mathfrak{u}_1 \oplus \mathfrak{h}_0 \oplus \alpha_1$.

LEMME 22. Soit $K = G(f)^1 H \alpha$, et soit D l'image d'une section de $G(f)^1 \rightarrow G(f)^1 / G(f)^0$. L'application I de $D \times \mathfrak{u}_1 \times H_0 \times \alpha$ dans K :

$$(d, n_0, h_0, a) \mapsto d \cdot \exp n \cdot h_0 \cdot \exp a$$

est un difféomorphisme, et K est fermé dans G .

Démonstration. Montrons d'abord que K est fermé. On a : $K \cdot f = HA \cdot f = f + \mathfrak{h}^\perp + \mathfrak{g}_1^\perp = f + \mathfrak{h}_0^\perp$ (condition de Pukanszky et le lemme 4 de [Kir 1]).

Soit K' le stabilisateur de $f + \mathfrak{h}_0^\perp$. On a $K^0 = K'^0 \subset K \subset K'$. Puisque K' est fermé, K^0 et K le sont aussi.

Il est clair que I est un difféomorphisme local en tout point. Par le choix de \mathfrak{u}_1 et α_1 l'image de I est un groupe. L'image de I contenant D , I est surjective et induit un revêtement \tilde{I} de $\mathfrak{n}_1 \times H_0 / G(f)^0 \times \alpha_1$ sur $HA / G(f)^0$. Comme $HA \cdot f = f + \mathfrak{h}_0^\perp$, $HA \cap G(f)$ est connexe, soit $HA \cap G(f) = G(f)^0$; $HA / G(f)^0$ est alors simplement connexe, donc \tilde{I} est trivial, et I est bijectif. □

Par transitivité de l'induction, il suffit de montrer l'équivalence de $\pi(G(f)^1 G^0, f, G(f)^1, \eta, \mathfrak{h})$ et $\pi(G(f)^1 G^0, G(f)^1, \eta, \mathfrak{h}_1)$, ou encore, toujours pour la même raison, de

$$\pi = \text{Ind}_{G(f)^1 H \uparrow K} \tilde{\eta} \quad \text{et} \quad \pi_1 = \text{Ind}_{G(f)^1 H_1 \uparrow K} \tilde{\eta}.$$

Soit respectivement $\delta, \delta_1, \delta_0$ les fonctions modules de $K/G(f)^1 H$, $K/G(f)^1 H_1$,

$K/G(f)^1H_0$. Il résulte du lemme 2 que $\delta_0(h_0) = (\delta(h_0)/\delta(h_1))^{1/2}$ pour tout $h_0 \in G(f)^1H_0$. L'espace \mathcal{H} de π est le complété de l'espace \mathcal{C} des fonctions continues sur K à valeurs dans E_η vérifiant :

$$(A) \begin{cases} \varphi(kh) = \tilde{\eta}(h)^{-1} \delta(h)^{1/2} \varphi(k) \\ \|\varphi(\cdot)\| \text{ à support compact modulo } G(f)^1H \end{cases}$$

pour la norme $\|\varphi\|_2 = \int_{K/G(f)^1H} \|\varphi(k)\|^2 dk$.

De même l'espace \mathcal{H}_1 de π_1 est le complété de l'espace \mathcal{C}_1 des fonctions continues sur K à valeurs dans l'espace E_η vérifiant

$$(A_1) \begin{cases} \varphi(kh_1) = \tilde{\eta}(h_1)^{-1} \delta_1(h_1)^{1/2} \varphi(k) \\ \|\varphi(\cdot)\| \text{ à support compact modulo } G(f)^1H_1 \end{cases}$$

pour la norme $\|\psi\|_2 = \int_{K/G(f)^1H_1} \|\psi(k)\|^2 dk$.

Soit $\varphi \in \mathcal{C}$. Posons $\Phi_{k,\varphi}(h_1) = \delta_1(h_1)^{1/2} \tilde{\eta}(h_1) \varphi(kh_1)$ ($k \in K, h_1 \in H_1$). On vérifie sans peine que

$$\Phi_{k,\varphi}(h_1 h_0) = \delta_0(h_0) \Phi_{k,\varphi}(h_1) \quad (h_0 \in H_0)$$

donc que l'expression

$$F_\varphi(k) = \int_{G(f)^1H_1/G(f)^1H_0} \Phi_{k,\varphi}(h_1) dh_1$$

a un sens. Il est clair que la fonction F_φ vérifie (A₁). Montrons que $\varphi \rightarrow F_\varphi$ est une isométrie qui se prolonge en une isométrie surjective de \mathcal{H} sur \mathcal{H}_1 . A cet effet, on identifie, au moyen de l'application I du lemme 4, \mathcal{H} à $L^2(\alpha_1)$ et \mathcal{H}_1 à $L^2(u_1)$ par :

$$\varphi \in \mathcal{C} \rightarrow \check{\varphi}(a) = \varphi(\exp a), \quad a \in \alpha_1$$

$$\psi \in \mathcal{C}_1 \rightarrow \check{\psi}(u) = \psi(\exp u), \quad u \in u_1.$$

En outre, $G(f)^1H_1/G(f)^1H_0$ s'identifie à α_1 et la mesure sur $G(f)^1H_1/G(f)^1H_0$ à la mesure de Lebesgue sur α_1 . Avec ces identifications, il vient

$$\begin{aligned} \check{F}_\varphi(u) &= \int_{\alpha_1} \varphi(\exp u \exp a) e^{2i\pi f(a)} da \\ &= \int_{\alpha_1} \varphi(\exp u \exp a \exp(-u) \exp u) e^{2i\pi f(a)} da \end{aligned}$$

$$= e^{-2i\pi f(u)} \int_{\alpha_1} \varphi(\exp(\operatorname{ad}_{\exp u}(a))) e^{2i\pi f(a)} da.$$

Soit \mathfrak{n} le plus grand idéal nilpotent de \mathfrak{g} . Puisque $[\mathfrak{n}, \alpha]$ est un idéal abélien $G(f)^1$ -stable inclus dans α , il est clair que $[\mathfrak{n}, \alpha] \subset \mathfrak{z}$. D'autre part $u_1 \subset u \subset \mathfrak{n}$ puisque \mathfrak{g} est résoluble. On a donc : $\operatorname{ad}_{\exp u}(a) = a + [u, a]$. Finalement :

$$\begin{aligned} \check{F}_\varphi(\mathfrak{n}) &= e^{-2i\pi f(u)} \int_{\alpha_1} \varphi(\exp(a + [u, a])) e^{2i\pi f(a)} da \\ &= \int_{\alpha_1} \check{\varphi}(a) e^{2i\pi f([u, a])} e^{2i\pi f(a)} da. \end{aligned}$$

La restriction de B_f à $u_1 \times \alpha_1$ est non dégénérée et définit une transformation de Fourier \mathcal{F} de $L^2(\alpha_1)$ sur $L^2(u_1)$. On vient de montrer que

$$\check{F}_\varphi(u) = e^{-2i\pi f(u)} \mathcal{F}(\check{\varphi}(\cdot) e^{2i\pi f(\cdot)})(u).$$

On a donc bien montré que la fonction $\varphi \rightarrow F_\varphi$ se prolonge en une isométrie de \mathcal{H} sur \mathcal{H}_1 .

On a donc démontré complètement le résultat suivant.

PROPOSITION 7. *Les représentations $\pi(G, f, G(f)^1, \eta, \mathfrak{h})$ et $\pi(G, f, G(f)^1, \eta, \mathfrak{h}_1)$ sont équivalentes.*

(b) **Equivalence de $\pi(G, f, G(f)^1, \eta, \mathfrak{h})$ et $\pi(G, f, G(f)^1, \eta, \mathfrak{h}')$ pour $\mathfrak{h}, \mathfrak{h}'$ contenant α .** La proposition 7 permet de se ramener à ce cas là. On est alors dans la situation du § 5.4. Pour montrer l'équivalence de $\pi(G, f, G(f)^1, \eta, \mathfrak{h})$ et $\pi(G, f, G(f)^1, \eta, \mathfrak{h}')$, il suffit de montrer celle de $\pi(G, f, G(f)^1, \eta_1, \mathfrak{h})$ et $\pi(G, f, G(f)^1, \eta_1, \mathfrak{h}')$. Or la dimension de \mathfrak{g} est inférieure à celle de \mathfrak{g}_0 . L'hypothèse de récurrence s'applique et on a le résultat cherché.

6.3. Cas (v) de la proposition 1. Le plus grand idéal nilpotent \mathfrak{n} de \mathfrak{g} est une algèbre de Heisenberg. Le lemme suivant, dû à Kirillov, [cf. Kir 1], est un peu plus général.

LEMME 23. *Soit G un groupe de Lie d'algèbre de Lie \mathfrak{g} ; on suppose que \mathfrak{g} contient un idéal caractéristique \mathfrak{R} de Heisenberg. Soit \mathfrak{z} le centre de \mathfrak{R} , et $f \in \mathfrak{g}^*$ tel que $f|_{\mathfrak{z}} \neq 0$. Soit $\mathfrak{v} = f|_{\mathfrak{R}}$, $G(\mathfrak{v})$ le stabilisateur de \mathfrak{v} dans G , d'algèbre de Lie $\mathfrak{g}(\mathfrak{v})$. Soit $R = \exp \mathfrak{R}$. On a $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}(\mathfrak{v}) + \mathfrak{R}$ et $G = G(\mathfrak{v}) \cdot R$.*

Le lemme 2 s'applique ici : on a $\mathfrak{h} = \mathfrak{g}(f) + \mathfrak{u}$, et, puisque \mathfrak{g} est résoluble, $\mathfrak{u} \subset \mathfrak{n}$. Montrons que \mathfrak{h} contient $\mathfrak{g}(\nu)$: si $X \in \mathfrak{g}(\nu)$, $f([X, \mathfrak{n}]) = 0$ donc $f([X, \mathfrak{u}]) = 0$, et évidemment $f([X, \mathfrak{g}(f)]) = 0$, donc $f([X, \mathfrak{h}]) = 0$ et $X \in \mathfrak{h}$.

LEMME 24. (i) *La polarisation \mathfrak{h} est \mathfrak{n} -admissible.*
(ii) *$\mathfrak{h} \cap \mathfrak{n}$ est un idéal abélien $G(f)^1$ -stable.*

Démonstration. (i) Soit $X \in \mathfrak{n}$ tel que $f([X, \mathfrak{h} \cap \mathfrak{n}]) = 0$. Comme $\mathfrak{h} = \mathfrak{g}(f) + \mathfrak{u}$, $\mathfrak{h} = \mathfrak{g}(f) + \mathfrak{h} \cap \mathfrak{n}$, donc $f([X, \mathfrak{h}]) = 0$ donc $X \in \mathfrak{h}$.

(ii) Puisque $f|_{\mathfrak{z}} \neq 0$ par hypothèse, $\mathfrak{h} \cap \mathfrak{n}$ est abélien. $\mathfrak{h} \cap \mathfrak{n}$ est $\mathfrak{g}(\nu)$ -stable puisque $\mathfrak{h} \supset \mathfrak{g}(\nu)$, et $\mathfrak{h} \cap \mathfrak{n}$ est évidemment \mathfrak{n} -stable $[\mathfrak{n}, \mathfrak{h} \cap \mathfrak{n}] \subset \mathfrak{z} \subset \mathfrak{n} \subset \mathfrak{h}$. \square

Mais le lemme 24 contredit l'hypothèse qu'il n'existe pas d'idéal abélien $G(f)^1$ -stable. Le cas (v) ne peut pas se produire. On a donc achevé la démonstration du théorème 1'.

7. Equivalence des représentations pour deux choix de polarisations (cas général)

THÉORÈME 1. *Soit \mathfrak{g} une algèbre de Lie algébrique et G un groupe de Lie d'algèbre de Lie \mathfrak{h} . Soit f une forme linéaire admissible, $G(f)^1$ un sous-groupe de $G(f)$ contenant $G(f)^0$, η et η' deux éléments de $PRP_1(f)$, η un élément de $X(f, G(f)^1)$. Les représentations $\pi(G, f, G(f)^1, \eta, \mathfrak{h})$ et $\pi(G, f, G(f)^1, \eta, \mathfrak{h}')$ sont équivalentes.*

Le principe de démonstration est le même que dans le cas résoluble : démonstration par récurrence en utilisant la proposition 1. Cette fois, les quatre cas contenus dans cette proposition (en considérant ensemble le cas réductif et le cas semi-simple) se présentent effectivement.

7.1. Démonstration du théorème dans le cas où \mathfrak{g} est réductive.

(a) *G est un groupe connexe.* Dans ce cas, la proposition 2 nous permet de nous ramener à un problème concernant les séries principales. Reprenons les notations du § 5.1. On a $G(f) = MA$, et aux deux polarisations \mathfrak{h} et \mathfrak{h}' sont associés deux sous-groupes N et N' tels que MAN et MAN' soient des sous-groupes paraboliques minimaux. Notre problème est de démontrer l'équivalence des deux représentations $T_{\mathfrak{n}}^{\sigma(\eta), \lambda(f)}$ et $T_{\mathfrak{n}'}^{\sigma(\eta), \lambda(f)}$. On étudie d'abord $T_{\mathfrak{n}}^{\sigma, \lambda}$, λ n'étant pas nécessairement imaginaire pure.

LEMME 25. *Ecrivons la décomposition de σ en intégrale hilbertienne de représentations irréductibles : $\sigma = \int_M^\oplus \xi d\mu_\sigma(\xi)$. On a alors la décomposition $T_n^{\sigma, \lambda} = \int_M^\oplus T_n^{\xi, \lambda} d\mu_\sigma(\xi)$, et la décomposition analogue pour $T_{n'}^{\sigma, \lambda}$.*

Remarque. Même lorsque λ n'est pas imaginaire pure, l'espace $\mathcal{H}_n^{\sigma, \lambda}$ est un espace de Hilbert. Les objets du lemme ont donc, dans tous les cas, un sens (cf. [Dix 1], appendice A).

Démonstration. Le lemme 7 montre que $L_n^{\sigma, \lambda} = \int_M^\oplus L_n^{\xi, \lambda} d\mu_\sigma(\xi)$ ce qui entraîne le résultat. \square

LEMME 26. *Soit w l'élément du groupe de Weyl $W = M'/M$ qui envoie les racines positives associées à \mathfrak{n} sur celles associées à \mathfrak{n}' . Alors $T_{n'}^{\sigma, \lambda}$ et $T_n^{w\sigma, w\lambda}$ sont équivalentes.*

Démonstration. Soit \bar{w} un antécédent de w dans M' . Soit φ une fonction continue dans $\mathcal{H}_{n'}^{\sigma, \lambda}$. Considérons

$$\mathcal{F}_{\bar{w}} \varphi(g) = \varphi(g\bar{w}).$$

$\mathcal{F}_{\bar{w}} \varphi$ est une fonction continue dont on vérifie facilement qu'elle vérifie la relation de variance de l'espace $\mathcal{H}_n^{w\sigma, w\lambda}$, et qu'elle est une isométrie. \square

Le lemme 25 et le lemme 26 nous ramènent à démontrer l'équivalence de $\int_M^\oplus T_n^{w\xi, w\lambda} d\mu_\sigma(\xi)$ et de $\int_M^\oplus T_n^{\xi, \lambda} d\mu_\sigma(\xi)$. Il reste à montrer l'équivalence de $T_n^{w\xi, w\lambda}$ avec $T_n^{\xi, \lambda}$, pour $\lambda = \lambda(f)$ et ξ une représentation de M intervenant dans l'intégrale hilbertienne $\sigma(\eta)|_M = \int_M^\oplus \xi d\mu_\sigma(\xi)$.

Le fait que f est régulier n'implique pas que λ le soit, et on ne peut donc pas appliquer les résultats de Bruhat (cf. [Bru]).

Nous allons exhiber un opérateur d'entrelacement explicite entre les deux représentations $T_{n'}^{\sigma, \lambda}$ et $T_n^{\sigma, \lambda}$. Formellement, on pose :

$$I(n', n, \sigma, \lambda) \varphi(g) = \int_{N'/N' \cap N} \varphi(gn') dn'$$

où φ est une fonction continue dans $\mathcal{H}_{n'}^{\sigma, \lambda}$, et la normalisation de dn' est choisie en sorte que

$$\int_{N'/N' \cap N} e^{\langle 2\rho, \mathbf{H}(n') \rangle} dn' = 1$$

(cf. § 5.1 pour les notations).

Soit w comme plus haut dans W . Un calcul facile montre que $\mathcal{F}_{\bar{w}} \circ I(n', n, \sigma, \lambda) f(g) = \int_{N/N \cap \bar{w}N\bar{w}^{-1}} f(gn\bar{w}) du$. Soit

$$D(w) = \{\lambda \in \alpha_{\mathbb{C}}^*, \operatorname{Re} \lambda(H_{\beta}) > 0, \forall \beta > 0, w\beta < 0\}.$$

LEMME 27. *Soit $\lambda \in D(w)$. Alors l'intégrale d'entrelacement $I(n', n, \sigma, \lambda)$ est convergente, la fonction $I(n', n, \sigma, \lambda) f$ est continue, et $I(n', n, \sigma, \lambda)$ se prolonge en une application linéaire continue de $\mathcal{H}_n^{\sigma, \lambda}$ dans $\mathcal{H}_{n'}^{\sigma, \lambda}$, qui entrelace les représentations correspondantes.*

Démonstration. Le calcul de $\mathcal{F}_{\bar{w}} \circ I(n', n, \sigma, \lambda)$ permet de se ramener exactement à une proposition de Schiffmann (cf. [Schi]) lorsque σ est irréductible et G semi-simple à centre fini. L'examen un peu attentif des démonstrations de Schiffmann montre que seul intervient le fait que G/MAN est compact, ce qui reste vrai dans notre cas, et que les représentations de K irréductibles sont de dimension finie, ce qui l'est aussi. \square

LEMME 28. *Lorsqu'on identifie $\mathcal{H}_n^{\sigma, \lambda}$ (resp. $\mathcal{H}_{n'}^{\sigma, \lambda}$) à $\int_M^{\oplus} \mathcal{H}_n^{\xi, \lambda} d\mu_{\sigma}(\xi)$ (resp. $\int_M^{\oplus} \mathcal{H}_{n'}^{\xi, \lambda} d\mu_{\sigma}(\xi)$), l'opérateur $I(n', n, \sigma, \lambda)$ s'identifie à $\int_M^{\oplus} I(n', n, \xi, \lambda) d\mu_{\sigma}(\xi)$.*

La démonstration est immédiate.

On peut écrire l'expression de l'opérateur d'entrelacement une fois que l'on a identifié $\mathcal{H}_n^{\sigma, \lambda}$ et $\mathcal{H}_{n'}^{\sigma, \lambda}$ à l'espace \mathcal{H}^{σ} (qui est indépendant de λ et de n) Pour une fonction φ continue dans \mathcal{H}^{σ} , l'expression devient :

$$J(n', n, \sigma, \lambda) \varphi(k) = \int_{N'/N \cap nN'} \varphi(kk(n')) \exp(\langle -\lambda - \rho, \mathbf{H}(kn') \rangle) dn'.$$

Comme pour le lemme 27, les résultats de Knapp et Stein ([KS], § 17) ont une traduction immédiate. Soit $\mathcal{H}_{\infty}^{\sigma}$ l'ensemble des fonction C^{∞} dans \mathcal{H}^{σ} .

LEMME 29. *Soit φ un élément de $\mathcal{H}_{\infty}^{\sigma}$. L'application $\lambda \rightarrow J(n', n, \sigma, \lambda) \varphi$ de $\alpha_{\mathbb{C}}^*$ dans \mathcal{H}^{σ} est analytique sur $D(w)$, et se prolonge en une fonction méromorphe sur $\alpha_{\mathbb{C}}^*$.*

Knapp et Stein ([KS]) ont donné une normalisation des opérateurs d'entrelacement pour σ irréductible, qu'on peut traduire dans le contexte qui nous occupe ici. Notons $\mathcal{A}(n', n, \sigma, \lambda)$ l'opérateur normalisé pour la normalisation de Knapp–Stein correspondant à $I(n', n, \sigma, \lambda)$, et $\mathcal{J}(n', n, \sigma, \lambda)$ l'opérateur normalisé correspondant à $J(n', n, \sigma, \lambda)$. La proposition 60 de [KS] donne le lemme suivant.

LEMME 30. *L'opérateur $\mathcal{J}(n', n, \xi, \lambda)$ (resp. $\mathcal{I}(n', n, \xi, \lambda)$) pour ξ irréductible est unitaire si λ est imaginaire pur.*

L'irréductibilité des représentations $T^{\xi, \lambda}$, avec ξ intervenant dans l'intégrale $\int_{\hat{M}}^{\oplus} \xi d\mu_{\sigma}(\xi)$ et $\lambda = \lambda(f)$ est une conséquence du théorème 6.15 de [SV]. En effet le caractère infinitésimal d'une telle représentation, qui est donné par $2i\pi f|m + \alpha$, est régulier. Il s'agit d'une série principale unitaire à caractère infinitésimal régulier qui est un des cas réglés par Speh et Vogan. Dans le cas complexe, le résultat était connu depuis Parthasarathy–Rao–Varadarajan [PRV]. Plus généralement, Harish Chandra avait résolu dans [H-C 3] le cas de la série fondamentale.

Le lemme 30 nous permet donc de conclure que les opérateurs d'entrelacement normalisés $\mathcal{A}(n', n, \xi, \lambda)$ et $\mathcal{J}(n', n, \xi, \lambda)$ sont unitaires et bijectifs pour de tels ξ, λ .

Notons $\gamma_{\xi}(\lambda)$ le facteur de normalisation :

$$\mathcal{J}(n', n, \xi, \lambda) = \gamma_{\xi}(\lambda) J(n', n, \xi, \lambda).$$

Soit l'opérateur diagonal :

$$\gamma_{\sigma} = \int_{\hat{M}} \gamma_{\xi}(\lambda) \text{Id}_{\mathcal{H}_{\xi}} d\mu_{\sigma}(\xi).$$

Définissons les opérateurs normalisés :

$$\mathcal{A}(n', n, \sigma, \lambda) = \gamma_{\sigma} \mathcal{A}(n', n, \sigma, \lambda)$$

$$\mathcal{J}(n', n, \sigma, \lambda) = \gamma_{\sigma} J(n', n, \sigma, \lambda).$$

LEMME 31. *Pour $\sigma = \sigma(\eta)$ et $\lambda = \lambda(f)$, l'opérateur normalisé $\mathcal{A}(n', n, \sigma, \lambda)$ (resp. $\mathcal{J}(n', n, \sigma, \lambda)$) est un opérateur d'entrelacement bijectif et unitaire entre $U_n^{\sigma, \lambda}$ et $U_{n'}^{\sigma, \lambda}$ (resp. $T_n^{\sigma, \lambda}$ et $T_{n'}^{\sigma, \lambda}$).*

Le lemme 31 achève la démonstration de l'équivalence dans le cas réductif connexe.

(b) *G n'est pas connexe.* On utilise la proposition 3. Sa première assertion nous montre qu'il suffit de montrer l'équivalence des représentations $\pi(G(f)^1 G^0, f, G(f)^1, \eta, \eta)$ et $\pi(G(f)^1 G^0, f, G(f)^1, \eta, \eta')$. On utilise l'assertion (ii) qui décrit ces représentations.

On va d'abord montrer un résultat un peu plus général permettant d'utiliser la technique du prolongement analytique. Soit η une représentation de $G(f)^1$,

$$\sigma = \sigma(\eta) = \text{Ind}_{(G^0(f)^1 \cap M) \uparrow M} \eta|_{G^0(f)^1 \cap M},$$

et R_η la représentation de $G(f)^1$ dans l'espace de $\sigma(\eta)$ définie par la formule :

$$(R_\eta(\gamma) \varphi)(x) = \eta(\gamma) \varphi(\gamma^{-1}x\gamma).$$

Pour $\lambda \in \alpha_C^*$, on considère les représentations $T_n^{\sigma, \lambda}$ et $T_n^{\sigma', \lambda}$ de G^0 définies au chapitre 5, § 1 (b), et on note $\mathcal{H}_n^{\sigma, \lambda}$, $\mathcal{H}_n^{\sigma', \lambda}$ leurs espaces.

Soit W_η (resp. W'_η) la représentation de $G(f)^1$ dans $\mathcal{H}_n^{\sigma, \lambda}$ (resp. $\mathcal{H}_n^{\sigma', \lambda}$) définie par la formule :

$$\begin{aligned} [W_\eta(\gamma) \varphi](x) &= \delta(\gamma)^{-1/2} R_\eta(\gamma) \varphi(\gamma^{-1}x\gamma) \\ \text{(resp. } [W'_\eta(\gamma) \varphi](x) &= \delta'(\gamma)^{-1/2} R_\eta(\gamma) \varphi(\gamma^{-1}x\gamma). \end{aligned}$$

On considère enfin la représentation $W_{n, \lambda}^m$ (resp. $W_{n, \lambda}^{m'}$) du produit semi-direct $G(f)^1 \times_s G^0$ égale au produit tensoriel intérieur de W_η et $T_n^{\sigma(\eta), \lambda}$ (resp. W'_η et $T_n^{\sigma(\eta'), \lambda}$).

LEMME 32. Si $\sigma = \sigma(\eta)$ et $\lambda = \lambda(f)$, $W_{n, \lambda}^m$ (resp. $W_{n, \lambda}^{m'}$) définit, par passage au quotient, une représentation de $G(f)^1 G^0$ équivalente à

$$\pi(G(f)^1 G^0, f, G(f)^1, \eta, \eta) \quad \text{(resp. } \pi(G(f)^1 G^0, f, G(f)^1, \eta', \eta')).$$

Démonstration. C'est la traduction immédiate des propositions 2 et 3. □

LEMME 33. L'opérateur $\mathcal{A}(n', n, \sigma(\eta), \lambda)$ de $\mathcal{H}_n^{\sigma(\eta), \lambda}$ dans $\mathcal{H}_n^{\sigma(\eta'), \lambda}$ entrelace les représentations $W_{n, \lambda}^m$ et $W_{n, \lambda}^{m'}$. Pour $\lambda = \lambda(f)$, $\mathcal{A}(n', n, \sigma(\eta), \lambda)$ est un opérateur d'entrelacement unitaire et bijectif entre $\pi(G(f)^1 G^0, f, G(f)^1, \eta, \eta)$ et $\pi(G(f)^1 G^0, f, G(f)^1, \eta', \eta')$.

Démonstration. Il suffit de montrer que $\mathcal{A}(n', n, \sigma(\eta), \lambda)$ entrelace W_η et W'_η , et on l'aura fait si on sait le faire pour $\lambda \in D(w)$. On peut donc se restreindre à $\lambda \in D(w)$, et utiliser l'expression

$$(I(n', n, \sigma(\eta), \lambda)) \varphi(g) = \int_{N' \backslash N \cap N'} \varphi(gn') dn'.$$

Montrons d'abord que : $I(n', n, \sigma(\eta), \lambda) [W_\eta(\gamma) \varphi](g) = W'_\eta(\gamma) [I(n', n, \sigma(\eta), \lambda) \varphi](g)$

$$I(n', n, \sigma(\eta), \lambda) [W_\eta(\gamma) \varphi](g) = \delta(\gamma)^{-1/2} R_\eta(\gamma) \int_{N' \backslash N \cap N'} \varphi(\gamma^{-1}gn'\gamma) dn'$$

$$\begin{aligned}
&= \delta(\gamma)^{-1/2} R_\eta(\gamma) \int_{N'/N \cap N'} \varphi(\gamma^{-1} g \gamma \gamma^{-1} n' \gamma) dn' \\
&= \delta(\gamma)^{-1/2} R_\eta(\gamma) \delta_1(\gamma) \int_{N'/N \cap N'} \varphi(\gamma^{-1} g \gamma n') dn'
\end{aligned}$$

puisque $G(f)^1$ normalise N' et N . (On a noté $\delta_1(\gamma)$ le jacobien de cette action : $\delta_1(\gamma) = |\det(\text{Ad}_{n'/n \cap n'} \gamma)|$). Rappelons que $\delta(\gamma) = |\det \text{Ad}_{g/h} \gamma|$, soit $\delta(g) = |\det \text{Ad} \gamma|$ (resp. $\delta'(\gamma) = |\det \text{Ad}_{\tilde{n}} \gamma|$), où l'on a noté \tilde{n} (resp. \tilde{n}') l'algèbre nilpotente opposée à n (resp. n'). Puisque $\text{Ad} \gamma$ stabilise f , $\text{Ad} \gamma$ est symplectique pour B_f , et en particulier $\det(\text{Ad}_{n \cap n'} \gamma) = \det(\text{Ad}_{n \cap n'} \gamma)^{-1}$. On a donc

$$\begin{aligned}
I(n', n, \sigma(\eta), \lambda) [W_\eta(\gamma) \varphi](g) &= \delta'(\gamma)^{-1/2} R_\eta(\gamma) \int_{N'/N \cap N'} \varphi(\gamma^{-1} g \gamma n') dn' \\
&= W_\eta'(\gamma) [(n', n, \sigma(\eta), \lambda) \varphi](g).
\end{aligned}$$

Montrons maintenant que $\mathcal{I}(n', n, \sigma(\eta), \lambda)$ est un opérateur d'entrelacement. Comme W est un opérateur qui est décomposé dans l'intégrale $\int^\oplus \mathcal{H}^\xi d\mu(\xi)$, il commute avec tout opérateur diagonal, en particulier avec γ_σ . Le fait que $I(n', n, \sigma(\eta), \lambda)$ est un opérateur d'entrelacement permet donc de conclure que $\mathcal{I}(n', n, \sigma(\eta), \lambda)$ en est un. On a donc, pour tout $\lambda \in D(w)$,

$$\mathcal{I}(n', n, \sigma(\eta), \lambda) \circ W_{\eta, \lambda}^n(g) = W_{\eta, \lambda}^{n'}(g) \circ \mathcal{I}(n', n, \sigma(\eta), \lambda)$$

sur les fonctions C^∞ de $\mathcal{H}_n^{\sigma(\eta), \lambda}$.

Par prolongement analytique, cette relation est encore vraie pour λ imaginaire pure, en particulier pour $\lambda = \lambda(f)$. Le lemme 31 nous affirme que $\mathcal{I}(n', n, \sigma(\eta), \lambda)$ est alors unitaire et bijectif, le lemme 32 que la représentation déduite de $W_{\eta, \lambda}^n$ (resp. $W_{\eta, \lambda}^{n'}$) est $\pi(G(f)^1 G^0, f, G(f)^1, \eta, \mathfrak{h})$ (resp. $\pi(G(f)^1 G^0, f, G(f)^{-1}, \eta, \mathfrak{h}')$) ce qui achève la démonstration. \square

On a donc montré le théorème 1 dans le cas où \mathfrak{g} est réductive. On suppose maintenant qu'on l'a montré pour toute algèbre de Lie de dimension inférieure à n , et on doit le faire pour une algèbre de Lie de dimension n . On examine successivement les cas (ii), (iii) et (v) de la proposition 1.

7.2. Premier cas de réduction (cas (ii) de la proposition 1). La démonstration est identique au cas résoluble (cf. § 6.1).

7.3. *Deuxième cas de réduction* (cas (iii) de la proposition 1). Soit α un idéal abélien non central $G(f)^1$ -stable, $\mathfrak{g}_1 = \alpha^f$, $m = f|_\alpha$ et $G_1 = G(f)^1 G^0(m)$. Par hypothèse, $\mathfrak{g}_1 \neq \mathfrak{g}$ et on pose $f_1 = f|_{\mathfrak{g}_1}$. Soit $\mathfrak{h}_1 = \mathfrak{h} \cap \mathfrak{g}_1 + \alpha$ (cf. lemme 19).

(a) *Démonstration de l'équivalence de $\pi(G, f, G(f)^1, \eta, \mathfrak{h})$ et $\pi(G, f, G(f)^1, \eta, \mathfrak{h}_1)$.* Soit $K = G(f)^1 H \alpha$ d'algèbre de Lie $\mathfrak{k} = \mathfrak{h} + \alpha$. L'idée est de montrer l'équivalence de $\text{Ind}_{G(f)^1 H \uparrow K} \tilde{\eta}$ et de $\text{Ind}_{G(f)^1 H_1 \uparrow K} \tilde{\eta}$ en utilisant le théorème 1' dans le cas résoluble, démontré dans le chapitre 6.

LEMME 34. (i) *Le sous-groupe K est fermé, l'algèbre de Lie \mathfrak{k} est algébrique et résoluble.*

(ii) *Si $f_t = f|_t$, on a $\mathfrak{k}(f_t) = \mathfrak{h} \cap \mathfrak{g}_1$ et $K(f_t) = G(f)^1 (H \cap G_1)$.*

(iii) *$K(f_t)^1 = G(f)^1 H_0$ (cf. les notations du § 6.2) est un sous-groupe de $K(f_t)$ contenant $K(f_t)^0$. La restriction η_t de $\tilde{\eta}$ à $K(f_t)^1$ est un élément de $X(f_t, K(f_t)^1)$.*

(iv) *Les sous-algèbres \mathfrak{h} et \mathfrak{h}_1 sont dans $\text{PRP}_1(f)$.*

(v) *On a $K(f_t)^1 H = G(f)^1 H$ et $K(f_t)^1 H_1 = G(f)^1 H_1$. Les représentations $\tilde{\eta}_t$ de $K(f_t)^1 H$ (resp. $K(f_t)^1 H_1$) et $\tilde{\eta}$ de $G(f)^1 H$ (resp. $G(f)^1 H_1$) coïncident.*

Démonstration. (i) On a montré que K était fermé au lemme 22. D'autre part \mathfrak{h} est algébrique comme algèbre de Lie du stabilisateur de la variété algébrique $f + \mathfrak{h}^\perp$, et α a une structure algébrique par le lemme 12. Enfin \mathfrak{h} est résoluble par hypothèse, donc \mathfrak{k} l'est.

(ii) $\mathfrak{k}(f_t) = (\mathfrak{h} + \alpha)^f \cap (\mathfrak{h} + \alpha) = \mathfrak{h}^f \cap \mathfrak{g}_1 \cap \mathfrak{h} + \alpha = \mathfrak{h} \cap \mathfrak{g}_1$. Soit $\gamma \in K(f_t)$. Par la condition de Pukanszky il existe $h \in H$ tel que $\gamma \cdot f = h \cdot f$, et comme $\gamma \in K(f_t)$, $h \in G_1$. On vérifie facilement que $G(f) \cap K = G(f)^1$, d'où l'égalité $K(f_t) = G(f)^1 (H \cap G_1)$.

(iii), (iv) et (v) sont immédiats ou classiques. □

Le lemme 34 montre qu'on peut appliquer le théorème 1 dans le cas résoluble et conclure à l'équivalence de $\text{Ind}_{G(f)^1 H \uparrow K} \tilde{\eta}$ et $\text{Ind}_{G(f)^1 H_1 \uparrow K} \tilde{\eta}$. Il suffit maintenant de choisir des polarisations qui contiennent α .

(b) *Démonstration de l'équivalence de $\pi(G, f, G(f)^1, \eta, \mathfrak{h})$ et $\pi(G, f, G(f)^1, \eta, \mathfrak{h}')$ pour \mathfrak{h} et \mathfrak{h}' contenant α .* On est dans la situation du § 5.4. En appliquant à \mathfrak{h} et \mathfrak{h}' la proposition 5, on constate qu'il suffit de montrer l'équivalence de $\pi(G_1, f_1, G_1(f_1)^1, \eta_1, \mathfrak{h})$ et $\pi(G_1, f_1, G_1(f_1)^1, \eta_1, \mathfrak{h}')$, équivalence qui est acquise, parce que $\dim \mathfrak{g}_1 < \dim \mathfrak{g}$, par l'hypothèse de récurrence.

7.4. *Troisième cas de réduction* (cas (v) de la proposition 1). Pour pouvoir appliquer la proposition 6, on va montrer que, dans ce cas, toute polarisation vérifiant la condition de Pukanszky est admissible pour le plus grand idéal nilpotent.

On applique le lemme 23 en prenant pour \mathfrak{N} le plus grand idéal nilpotent n de \mathfrak{g} . Les notations sont alors compatibles avec celles du § 5.5, et notamment du lemme 16.

Dans le cas algébrique, on peut écrire la décomposition de Levi de \mathfrak{g} sous forme nilpotente + réductive. Il s'ensuit que \mathfrak{g}_1 est réductive (puisque $\mathfrak{g}_1 \cap n = \mathfrak{z}$) et qu'on peut écrire $\mathfrak{g}_1 = \mathfrak{s}_1 + \mathfrak{z}_1$, où \mathfrak{s}_1 est semi-simple et \mathfrak{z}_1 est le centre de \mathfrak{g}_1 .

LEMME 35. *Toute polarisation résoluble en f est n -admissible.*

Démonstration. Soit $2d+1$ la dimension de n , s celle de \mathfrak{s}_1 , a celle de \mathfrak{z}_1 , x celle de $\mathfrak{g}(f)$. On a

$$\dim \eta = \frac{1}{2}(2d+s+a+x).$$

Soit r le rang de $\mathfrak{s} \sim \mathfrak{g}/\mathfrak{z}_1 + n$, et supposons $\dim(\eta \cap n) < d+1$. On a $\mathfrak{z}_1 \subset \mathfrak{g}_1(f_1) = \mathfrak{g}(f) \subset \eta$. Donc $\dim(\eta \cap (\mathfrak{z}_1 + n)) < a+d$. Soit $\dim \eta + \mathfrak{z}_1 + n/\mathfrak{z}_1 + n$ est supérieur à $\frac{1}{2}(s+x-a)$. Mais η est résoluble, et $\dim(\eta + \mathfrak{z}_1 + n/\mathfrak{z}_1 + n) \leq \frac{1}{2}(s+r)$. D'autre part, $\dim \mathfrak{g}(f) \geq r+a$, c'est-à-dire $x \geq r+a$, d'où une contradiction. \square

Le lemme 35 permet d'utiliser la proposition 6 du paragraphe 5.5. L'équivalence de $\pi(G, f, G(f)^1, \eta, \eta)$ et $\pi(G, f, G(f)^1, \eta, \eta')$ se ramène à montrer l'équivalence de $\pi(\tilde{G}_1, f_1, \tilde{G}_1(f_1)^1, \tilde{\eta}_1, \eta_1) \otimes \tilde{W}$ et de $\pi(\tilde{G}'_1, f_1, \tilde{G}'_1(f_1)^1, \tilde{\eta}'_1, \eta'_1) \otimes W'$ (où le ' indique que les constructions ont été faites pour η').

Pour montrer cette dernière équivalence, il faut regarder un peu plus en détail la construction de \tilde{G}_1 et \tilde{W} . On pourra se référer à [LV] pour la définition et les propriétés de l'indice de Maslov τ de trois polarisations en ν . Si η est une polarisation admissible pour τ , on note $l = \eta \cap n$. Si l et l' sont deux polarisations en ν , Lion (cf. [Li2]) a construit un opérateur d'entrelacement canonique entre les représentations $\pi(N, \nu, l)$ et $\pi(N, \nu, l')$ noté $\mathcal{F}_{l, l'}$. Si A désigne l'action de G_1 sur les fonctions sur ν définies par les automorphismes de G_1 restreints à N , par définition

$$W_l(g) = \mathcal{F}_{l, g^1} \circ A(g)$$

et le cocycle c_l de W_l est égal à

$$c_l(g, g') = e^{-i(\pi/4)\tau(l, g^1, gg'^1)}.$$

On note enfin avec l'indice $l: s_l$ la fonction s sur G_1 envisagée au § 5.5.

Utilisons la notions d'indice de Maslov τ de quatre polarisations introduites au § 1.5.12 de [LV]. Soient \mathfrak{l} et \mathfrak{l}' deux polarisations en ν .

LEMME 36. (i) L'application φ de $G_1 \times \mathbb{U}$ (\mathbb{U} le groupe des nombres complexes de module 1) :

$$(g, t) \rightarrow (g, e^{-i(\pi/4)\tau(\mathfrak{l}, g\mathfrak{l}, g\mathfrak{l}', \mathfrak{l}')} t)$$

définit par restriction un isomorphisme de \tilde{G}_1 sur $\tilde{G}_{\mathfrak{l}'}$.

(ii) L'opérateur $\mathcal{F}_{\mathfrak{l}'\mathfrak{l}}$ est un opérateur d'entrelacement unitaire et bijectif entre $\tilde{W}_{\mathfrak{l}'} \circ \varphi$ et $\tilde{W}_{\mathfrak{l}}$.

Démonstration. (i) Que φ définisse une application de \tilde{G}_1 dans $\tilde{G}_{\mathfrak{l}'}$ résulte de 1.5.12, 1.5.13 ainsi que 1.7.6 de [LV]. Il est alors évident que φ est bijectif. On montre que φ est un morphisme de groupe grâce à la formule de 1.6.17 de [LV].

(ii) Il s'agit de montrer l'égalité :

$$\mathcal{F}_{\mathfrak{l}'\mathfrak{l}} \circ \tilde{W}_{\mathfrak{l}}(g, t) = \tilde{W}_{\mathfrak{l}'}(\varphi(g, t)) \circ \mathcal{F}_{\mathfrak{l}'\mathfrak{l}}$$

c'est-à-dire :

$$t^{-1} \mathcal{F}_{\mathfrak{l}'\mathfrak{l}} \circ W_{\mathfrak{l}}(g) = e^{i(\pi/4)\tau(\mathfrak{l}, g\mathfrak{l}, g\mathfrak{l}', \mathfrak{l}')} t^{-1} W_{\mathfrak{l}'}(g) \circ \mathcal{F}_{\mathfrak{l}'\mathfrak{l}}$$

Par définition de $W_{\mathfrak{l}}(g)$, et en utilisant le calcul de 1.6.16 de [LV], cela revient à montrer l'égalité :

$$\mathcal{F}_{\mathfrak{l}'\mathfrak{l}} \circ \mathcal{F}_{\mathfrak{l}, g\mathfrak{l}} = e^{i(\pi/4)\tau(\mathfrak{l}, g, g\mathfrak{l}', \mathfrak{l}')} \mathcal{F}_{\mathfrak{l}', g\mathfrak{l}'} \circ \mathcal{F}_{g\mathfrak{l}', g\mathfrak{l}}$$

qui résulte facilement du lemme 1.6.13 de [LV]. □

Remarquons maintenant que pour g laissant \mathfrak{l} et \mathfrak{l}' stables, on a $\tau(\mathfrak{l}, g\mathfrak{l}, g\mathfrak{l}', \mathfrak{l}')=0$, ce qui prouve qu'il n'y a pas d'ambiguïté dans la définition de $\tilde{\eta}'_1$, i.e. $\tilde{\eta}_1 = \tilde{\eta}'_1 \circ \varphi$. Il en résulte que les représentations

$$\pi(\tilde{G}_1, f_1, \tilde{G}_1(f_1)^1, \tilde{\eta}_1, \eta_1) \circ \varphi \quad \text{et} \quad \pi(\tilde{G}'_1, f_1, \tilde{G}'_1(f_1)^1, \tilde{\eta}'_1, \eta'_1)$$

sont équivalentes. On a donc bien démontré le résultat cherché.

8. Passage aux G -orbites

Soit f une forme bien polarisable et admissible, et g un élément de G . L'égalité $G(g \cdot f) = gG(f)g^{-1}$ est immédiate, et il est donc cohérent de poser

$$G(g \cdot f)^1 = gG(f)^1g^{-1}.$$

Soit $\eta \in X(f, G(f)^1)$. La représentation ${}^g\eta$ de $G(g \cdot f)^1$ définie par la formule : ${}^g\eta(\gamma) = \eta(g^{-1}\gamma g)$ est dans $X(g \cdot f, G(g \cdot f)^1)$. Si $\eta \in PRP_1(f)$, $\text{Ad } g(\eta) \in PRP_1(g \cdot f)$, ce qui prouve que $g \cdot f$ est bien polarisable.

THÉORÈME 2. (1) *Les représentations $\pi(G, f, G(f)^1, \eta)$ et $\pi(G, g \cdot f, G(g \cdot f)^1, {}^g\eta)$ sont équivalentes.*

(2) *Si f et f' sont des formes bien polarisables et admissibles dans des G -orbites distinctes, pour toutes les valeurs des autres données les représentations $\pi(G, f, G(f)^1, \eta)$ et $\pi(G, f', G(f')^1, \eta')$ sont disjointes.*

8.1. Démonstration de la première partie. Soit η un élément de $PRP_1(f)$. On considère la polarisation $g \cdot \eta$ en $g \cdot f$. Il est clair que $gG(f)^1g^{-1}$ laisse stable $g \cdot \eta$, que $g \cdot \eta$ vérifie la condition de Pukanszky, bref que $g \cdot \eta \in PRP_1(g \cdot f)$. On peut donc prendre respectivement $\pi(G, f, G(f)^1, \eta, \eta)$ comme modèle de $\pi(G, f, G(f)^1, \eta)$ et $\pi(G, g \cdot f, gG(f)^1g^{-1}, g \cdot \eta, g \cdot \eta)$ comme modèle de $\pi(G, g \cdot f, G(g \cdot f)^1, {}^g\eta)$. Considérons l'application qui à une fonction continue φ dans $\mathcal{H}(G, f, G(f)^1, \eta, \eta)$ associe la fonction :

$$x \rightarrow \varphi(xg).$$

On vérifie que cette application prend ses valeurs dans $\mathcal{H}(G, gG(f)^1g^{-1}, g \cdot \eta, g \cdot \eta)$, est unitaire, que son prolongement est bijectif et entrelace les deux représentations.

La deuxième partie du théorème se démontre en deux étapes. La première consiste à passer du cas connexe au cas non connexe (proposition 8). La deuxième se fait par récurrence sur la dimension et utilise le résultat de la première étape.

8.2. Du cas connexe au cas non connexe.

PROPOSITION 8. *Si le théorème 2 (2), est vrai pour un groupe connexe, il est vrai pour un groupe quelconque.*

Démonstration. Les stabilisateurs de f dans $G, G(f)G^0, G(f)^1G^0$, et G^0 sont

respectivement $G(f)$, $G(f)$, $G(f)^1 G^0$ et $G^0(f)$. Posons $G^0(f)^1 = G(f)^1 G^0$. Les données sont réunies pour construire quatre classes de représentations :

$$\begin{aligned} \pi &= \pi(G, f, G(f)^1, \eta), \quad T = \pi(G(f) G^0, f, G(f)^1, \eta), \\ T_1 &= \pi(G(f)^1 G^0, f, G(f)^1, \eta) \quad \text{et} \quad \pi_0 = \pi(G^0, f, G^0(f)^1, \eta|_{G^0(f)^1}). \end{aligned}$$

Rappelons les rapports qu'on a déjà établis entre les représentations :

$$\pi = \text{Ind}_{G(f)G^0 \uparrow G} T, \quad T = \text{Ind}_{G(f)^1 G^0 \uparrow G(f)G^0} T \quad (\text{lemme 4}), \quad T_1|_{G^0} = \pi_0 \quad (\text{lemme 9}).$$

Le théorème classique de décomposition des représentations induites (cf. [Mac]) donne :

$$\pi|_{G^0} = \sum_{x \in G/G(f)^1 G^0} T_1^x|_{G^0}$$

(où T_1^x est la représentation $g \rightarrow T_1(x^{-1}gx)$). Par le lemme 37, il vient alors :

$$\pi|_{G^0} = \sum_{x \in G/G(f)^1 G^0} \pi_0^x.$$

Choisissons f' vérifiant les hypothèses générales et définissons pour f' les représentations π'_1, T', T'_1, π'_0 . Supposons π et π' non disjointes. Alors $\pi|_{G^0}$ et $\pi'|_{G^0}$ sont non disjointes; le groupe G^0 est localement algébrique, donc de type I (cf. [Dix 0]). La décomposition ci-dessus et la décomposition analogue pour $\pi'|_{G^0}$, permettent alors d'affirmer l'existence d'un $x \in G$ tel que π_0^x et π'_0 soient non disjointes. Mais on sait, par la première partie du théorème, que $\pi_0^x = \pi(G^0, x \cdot f, G^0(x \cdot f)^1, x \cdot \eta)$. Le théorème étant vrai pour G^0 , on en déduit que f' et $x \cdot f$ sont dans la même orbite sous G^0 , et donc que f' et f sont dans la même orbite sous l'action de G . \square

On suppose, dans le reste du chapitre, que G est connexe. Le résultat cherché est immédiat pour $\dim \mathfrak{g} = 0$. On le suppose vrai pour tout groupe de Lie connexe de dimension inférieure à n . Il l'est alors pour tout groupe de Lie de dimension inférieure à n . Montrons le pour G de dimension n . Soit f et f' dans \mathfrak{g}^* , supposons qu'on a les données permettant de définir $\pi(G, f, G(f)^1, \eta)$ et $\pi(G, f', G(f')^1, \eta')$, et que ces représentations sont non-disjointes. On utilise la méthode de réduction de la proposition 1, le groupe Γ étant trivial.

8.3. *G est un groupe réductif connexe.* Choisissons une polarisation η en f . On utilise les notations et les résultats du § 5.1 et le lemme 25 du § 7.2. On écrit donc la décomposition :

$$\pi(G, f, G(f)^1, \eta, \eta) = \int_{\dot{M}} T^{\xi, \lambda(f)} d\mu_{\sigma(\eta)}(\xi).$$

En appliquant la première partie du théorème, et les résultats classiques sur les orbites des éléments semi-simples réguliers dans les algèbres de Lie réductives, on peut remplacer f' par $g \cdot f'$, et donc supposer que $G(f') = G(f)$, et donc aussi que $\eta' = \eta$ est une polarisation en f' . On a alors la décomposition :

$$\pi(G, f', G(f')^1, \eta', \eta) = \int_{\dot{M}} T^{\xi, \lambda(f')} d\mu_{\sigma(\eta')}(\xi).$$

Le groupe G étant de type I on a unicité de la décomposition d'une représentation en intégrale hilbertienne de représentations irréductibles. Si $\pi(G, f, G(f)^1, \eta, \eta)$ et $\pi(G, f', G(f')^1, \eta', \eta)$ sont non disjointes, il existe au moins un couple $(\xi', \lambda(f'))$, ξ' dans le support de $d\mu_{\sigma(\eta')}$ qui est conjugué à $(\xi, \lambda(f))$, ξ dans le support de $d\mu_{\sigma(\eta)}$, sous l'action d'un élément du groupe de Weyl. Mais alors la différentielle de ξ' est dans la W -orbite de celle de ξ , et donc f et f' , qui vérifient respectivement $2i\pi f|_m = d\xi$, $2i\pi f|_\alpha = \lambda(f)$ et $2i\pi f'|_m = d\xi'$, $2i\pi f'|_\alpha = \lambda(f')$, sont W -conjugués, ce qu'il fallait démontrer.

8.4. *Il existe des idéaux abéliens non centraux.* On est donc dans le cas (ii) ou le cas (iii) de la proposition 1. Soit α un idéal abélien non central maximal. Alors $A = \exp \alpha$ est un sous-groupe fermé de G . Choisissons des polarisations η et η' en f et f' qui contiennent α , ce qu'on peut toujours faire. Soit m, m' les restrictions de f et f' à α . On considère, comme dans le paragraphe 5.4 les stabilisateurs G_1 et G'_1 de m et m' . Les choix qu'on a faits de η et η' nous permettent d'écrire :

$$\pi(G, f, G(f)^1, \eta, \eta) = \text{Ind}_{G_1 \uparrow G} \pi(G_1, f_1, G_1(f_1)^1, \eta_1, \eta)$$

$$\pi(G, f', G(f')^1, \eta', \eta') = \text{Ind}_{G'_1 \uparrow G} \pi(G'_1, f'_1, G'_1(f'_1)^1, \eta'_1, \eta').$$

D'autre part il est clair que $\pi(G_1, f_1, G_1(f_1)^1, \eta, \eta)$ restreinte à A (resp. $\pi(G'_1, f'_1, G'_1(f'_1)^1, \eta', \eta')$) est un multiple du caractère χ_f (resp. $\chi_{f'}$) de différentielle $2i\pi f|_\alpha$ (resp. $2i\pi f'|_\alpha$) (dont on sait qu'il existe par le lemme 15).

On est donc dans la situation classique d'application du théorème de Mackey (cf. [Mac]) de décomposition orbitale. On a

$$\begin{aligned}\pi(G, f, G(f)^1, \eta, \mathfrak{h})|_A &= \int_{G/G_1}^{\oplus} \chi_f^x d\mu(x) \\ \pi(G, f', G(f')^1, \eta', \mathfrak{h}')|_A &= \int_{G/G'_1}^{\oplus} \chi_{f'}^{x'} d\mu'(x').\end{aligned}$$

Puisque les représentations de départ sont non disjointes, leurs restrictions à A le sont aussi. Par unicité de la décomposition, il existe un $x \in G$ tel que f et $x \cdot f'$ coïncident sur A . On peut donc supposer $f|_{\mathfrak{a}} = f'|_{\mathfrak{a}}$.

On voit qu'on est dans un et un seul des deux cas suivants :

- f et f' sont dans α^{\perp} , cas où χ_f et $\chi_{f'}$ sont triviaux.
- f et f' sont dans $\mathfrak{g}^* \setminus \alpha^{\perp}$.

(a) *On suppose que f et f' sont dans α^{\perp} .* Alors, de manière immédiate, par la proposition 4, on se ramène au résultat équivalent sur G/A .

(b) *On suppose que f et f' sont dans $\mathfrak{g}^* \setminus \alpha^{\perp}$.* Avec l'hypothèse $f|_{\mathfrak{a}} = f'|_{\mathfrak{a}}$, on a $G_1 = G'_1$ etc. La théorie de Mackey appliquée à A et G_1 nous dit que $\pi(G, f, G(f)^1, \eta, \mathfrak{h})$ et $\pi(G, f', G(f')^1, \eta', \mathfrak{h}')$ sont non disjointes si et seulement si $\pi(G_1, f_1, G_1(f_1)^1, \eta_1, \mathfrak{h}_1)$ et $\pi(G_1, f'_1, G_1(f'_1)^1, \eta'_1, \mathfrak{h}'_1)$ sont non disjointes. Par l'hypothèse de récurrence (si $\mathfrak{g}_1 = \mathfrak{g}$, $[\mathfrak{g}, \mathfrak{a}]$ est un idéal sur lequel f et f' s'annulent et on est dans le cas § 8.4(a)), ceci entraîne l'existence d'un $g_1 \in G_1$ tel que $g_1 \cdot f_1 = f'_1$, donc tel que $g_1 f_1 - f'_1 \in \mathfrak{g}_1^{\perp}$. D'après le lemme de Kirillov cité dans la démonstration du lemme 14, il existe un a dans A tel que $af'_1 = g_1 f_1$, ce qui démontre le résultat.

8.5. *Il n'existe pas d'idéal abélien non central (cas (v) de la proposition 1).* On est dans la situation du § 5.5, dont on reprend les notations. Deux polarisations \mathfrak{h} et \mathfrak{h}' en f et f' sont admissibles pour le plus grand idéal nilpotent \mathfrak{n} , qui est de Heisenberg. Naturellement, si $\pi(G, f, G(f)^1, \eta, \mathfrak{h})$ et $\pi(G, f', G(f')^1, \eta', \mathfrak{h}')$ sont non disjointes leurs restrictions à $Z = \exp \mathfrak{z}$ sont multiples d'un même caractère, et donc $f|_{\mathfrak{z}} = f'|_{\mathfrak{z}}$. Quitte à remplacer f' par un élément de la N -orbite de f' , on peut supposer que $f|_{\mathfrak{n}} = f'|_{\mathfrak{n}}$. Mais alors $G_1 = G'_1$, $\mathfrak{g}_1 = \mathfrak{g}'_1$, les représentations $\pi(N, \nu, \mathfrak{h} \cap \mathfrak{n})$ et $\pi(N, \nu, \mathfrak{h}' \cap \mathfrak{n})$ sont équivalentes, donc les groupes \tilde{G}_1 et \tilde{G}'_1 sont isomorphes et les représentations \tilde{W} et \tilde{W}' sont équivalentes modulo cet isomorphisme. En fin de compte, $\pi(\tilde{G}_1, f_1, \tilde{G}_1(f_1)^1, \eta_1, \mathfrak{h}_1)$ et $\pi(\tilde{G}_1, f'_1, \tilde{G}_1(f'_1)^1, \eta'_1, \mathfrak{h}'_1)$ sont non disjointes par le lemme de Schur, et par l'hypothèse

de récurrence $f'_1 \in G_1 \cdot f_1$, ce qui entraîne, puisque $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_1 + \mathfrak{n}$, que $f' \in G \cdot f$. La démonstration du théorème 2 est achevée.

9. Commutant des représentations

Dans ce chapitre, on suppose que G est un groupe de Lie complexe dont l'algèbre de Lie est algébrique, et on considère G comme groupe de Lie réel. Ceci, entraîne que \mathfrak{g} est une algèbre de Lie algébrique complexe (considérée comme réelle) et que G opère sur \mathfrak{g} par des automorphismes complexes.

LEMME 37. *Soit $f \in \mathfrak{g}^*$. Il existe une forme \mathbb{C} -linéaire sur \mathfrak{g} unique f' dont la partie réelle est f . Le stabilisateur de f' dans G est égal à celui de f . Plus généralement, les notions d'orthogonalité pour B_f et $B_{f'}$ coïncident.*

Démonstration. On pose $f'(x) = f(x) - if(ix)$. □

Lorsque cela sera nécessaire, on notera \mathfrak{g}' , α' ... le dual complexe de l'algèbre de Lie complexe \mathfrak{g} , α ...

THÉORÈME 3. *Le commutant de la représentation $\pi(G, f, G(f)^1, \eta, \mathfrak{h})$ est isomorphe à celui de $\text{Ind}_{G(f)^1 \uparrow G(f)} \eta$.*

On démontre le théorème par récurrence sur $\dim \mathfrak{g}$, comme dans les chapitres qui précèdent. Toutefois il y a une différence dans l'application de la proposition 1 : les idéaux abéliens sont pris *caractéristiques*, ce qui veut dire qu'on applique la proposition 1 avec pour Γ le groupe des automorphismes de \mathfrak{g} , et on considère des idéaux abéliens complexes.

9.1. \mathfrak{g} est une algèbre de Lie réductive. Le lemme ci-dessous est crucial, parce qu'il permet d'éviter, dans le cas complexe, l'étude compliquée que fait Duflo dans le cas général [Duf4].

LEMME 38. *Soit \mathfrak{g} une algèbre de Lie réductive complexe et G un groupe de Lie complexe d'algèbre de Lie \mathfrak{g} . Soit $f \in \mathfrak{g}^*$ comme dans le chapitre 5. Il existe une polarisation réelle stable sous l'action de $G(f)$.*

Démonstration. On a noté $\alpha = \mathfrak{g}(f)$. Soit $\Sigma \subset \alpha'$ l'ensemble des racines de \mathfrak{g} par rapport à α . Soit f' la forme linéaire complexe dont f est la partie réelle. On a $G(f') = G(f) = G(\lambda f')$ pour tout nombre complexe λ non nul. La forme f' étant régulière,

aucune des quantités $\langle \alpha, f' \rangle$, α décrivant l'ensemble Σ , n'est nulle. Soit $\lambda \in \mathbb{C}^*$ tel que $\operatorname{Re} \lambda \langle \alpha, f' \rangle \neq 0$ pour tout α , et définissons $\Sigma^+ = \{\alpha, \operatorname{Re} \lambda \langle \alpha, f' \rangle > 0\}$. Il est clair que Σ^+ est $G(f)$ -stable et également stable par conjugaison complexe, donc que la sous-algèbre définie par Σ^+ est $G(f)$ -stable et la complexifiée d'une sous-algèbre de Borel réelle. On a donc démontré l'existence d'une polarisation stable sous $G(f)$. La forme f étant régulière, cette polarisation est automatiquement une bonne polarisation. \square

On choisit comme modèle de $\pi(G, f, G(f)^1, \eta)$ la représentation $\pi(G, f, G(f)^1, \eta, \mathfrak{h})$ pour une polarisation \mathfrak{h} $G(f)$ -stable. Par transitivité de l'induction, $\pi(G, f, G(f)^1, \eta, \mathfrak{h}) = \pi(G, f, G(f), \operatorname{Ind}_{G(f)^1 \uparrow G(f)} \eta, \mathfrak{h})$. Il suffit donc de démontrer le théorème pour $G(f)^1 = G(f)$.

Soit donc η une représentation dans $X(f)$, et \mathcal{C}_η le commutant de l'algèbre de von Neumann engendrée par η , et, d'autre part, \mathcal{C} le commutant de l'algèbre de von Neumann engendrée par la représentation $\pi(G, f, G(f), \eta, \mathfrak{h})$.

On a une injection de \mathcal{C}_η dans \mathcal{C} définie de la manière suivante. Soit $A \in \mathcal{C}_\eta$. Un élément φ de l'espace $\mathcal{H}(G, f, G(f), \eta, \mathfrak{h})$ est une fonction à valeurs dans l'espace de η . On définit un élément $I(A)$ de \mathcal{C} par la formule :

$$[I(A)(\varphi)](g) = A(\varphi(g)).$$

Il s'agit de montrer que I est surjective. Remarquons tout d'abord que si B est dans \mathcal{C} et donné par la formule :

$[B(\varphi)](g) = B_1(\varphi(g))$, où B_1 est un opérateur dans l'espace de η , alors il est clair que B_1 est dans \mathcal{C}_η , et donc que $B \in I(\mathcal{C}_\eta)$. Selon une technique habituelle, au moins dans ce travail, on va distinguer le cas connexe du cas non connexe.

(a) *G est connexe.* On utilise la proposition 2, ainsi que le lemme 25, ce qui nous permet d'écrire la décomposition de $\pi(G, f, G(f), \eta)$:

$$\pi(G, f, G(f), \eta, \mathfrak{h}) = \int_M^\oplus T^{\xi, \lambda(f)} d\mu_\eta(\xi)$$

où μ_η est la mesure sur M donnée par la désintégration de η . Les $T^{\xi, \lambda}$ étant irréductibles, un élément de \mathcal{C} est nécessairement un opérateur décomposé, et on a vu que de tels opérateurs étaient dans $I(\mathcal{C}_\eta)$.

(b) *G n'est pas connexe.* On a vu (proposition 3) qu'on avait :

$$\pi(G, f, G(f), \eta, \mathfrak{h}) = \operatorname{Ind}_{G(f)G^0 \uparrow G} \pi(G(f)G^0, f, G(f), \eta, \mathfrak{h})$$

avec

$$\pi(G(f)G^0, f, G(f), \eta, \eta)|_{G^0} = \pi(G^0, f, G^0(f), \eta|_{G^0(f)}, \eta).$$

La décomposition orbitale Ω de Mackey s'écrit alors :

$$\pi(G, f, G(f), \eta, \eta)|_{G^0} = \sum_{x \in G/G(f)G^0}^{\oplus} \pi(G^0, f, G^0(f), \eta|_{G^0(f)}, \eta)^x.$$

Il résulte de théorème 2 que les différentes représentations qui interviennent dans le membre de droite de l'égalité sont disjointes pour des x distincts modulo $G(f)G^0$. Soit B un élément de \mathcal{C} . Alors B est un opérateur qui se décompose selon la décomposition $\Omega : B = \sum_{x \in G/G(f)G^0}^{\oplus} B^x$ où B^x est dans le commutant de $\pi(G^0, f, G^0(f), \eta|_{G^0(f)}, \eta)^x$, qui n'est rien d'autre que $\pi(G^0, x \cdot f, G^0(x \cdot f), x \cdot \eta|_{G^0(f)}, x \cdot \eta)$. On sait, par le paragraphe (a), que B^x est de la forme $I(A^x)$, et donc que B est de la forme $I(A)$, et par la remarque ci-dessus, $B \in I(\mathcal{C}_\eta)$.

9.2. *Premier cas de réduction.* Il existe un idéal abélien caractéristique α sur lequel f s'annule. On applique la proposition 4 (α est, à fortiori, $G(f)^1$ -stable). De manière évidente, les commutants de

$$\text{Ind}_{G(f)^1 \uparrow G(f)} \eta \quad \text{et} \quad \text{Ind}_{G_1(f_1)^1 \uparrow G_1(f_1)} \eta_1$$

sont isomorphes, ainsi que ceux de $\pi(G, f, G(f)^1, \eta)$ et de $\pi(G_1, f_1, G_1(f_1)^1, \eta_1)$. L'hypothèse de récurrence permet alors de conclure.

9.3. *Deuxième cas de réduction.* On a choisi un idéal abélien caractéristique α tel que $\mathfrak{g}_1 = \alpha^f$ est différent de \mathfrak{g} et $A = \exp \alpha$ est un sous-groupe fermé. On choisit une polarisation $\eta \in PRP_1(f)$ contenant α (lemme 19) et on applique les résultats du § 5.4. On a :

$$\pi(G, f, G(f)^1, \eta, \eta) = \text{Ind}_{G_1 \uparrow G} \pi(G_1, f_1, G_1(f_1)^1, \eta_1, \eta).$$

La restriction de $\pi(G_1, f_1, G_1(f_1)^1, \eta_1)$ à A est un multiple du caractère χ_f de A . Le stabilisateur de χ_f étant η , on peut appliquer la méthode des petits groupes. Le commutant de $\pi(G, f, G(f)^1, \eta, \eta)$ est isomorphe à celui de $\pi(G_1, f_1, G_1(f_1)^1, \eta_1, \eta)$, lui-même isomorphe, par l'hypothèse de récurrence, à celui de $\text{Ind}_{G_1(f_1)^1 \uparrow G_1(f_1)} \eta_1$. L'isomor-

phisme entre les commutants de $\text{Ind}_{G(f)^1 \uparrow G(f)} \eta$ et $\text{Ind}_{G_1(f_1)^1 \uparrow G_1(f_1)} \eta_1$ est, pour sa part, évident, puisque $G_1(f_1) = G(f)A$.

9.4. *Troisième cas de réduction.* Le plus grand idéal nilpotent \mathfrak{n} de \mathfrak{g} est de Heisenberg, et toute polarisation \mathfrak{h} est admissible pour \mathfrak{n} . On utilise les résultats du § 5.5, mais en les simplifiant un peu. En effet, G ayant une structure complexe, et f pouvant être pris comme la partie réelle d'une forme \mathbb{C} -linéaire sur \mathfrak{g} , il est inutile de considérer des revêtements à deux feuillets. La considération de ces revêtements provient du calcul du cocycle de la représentation projective considérée au § 5.5. Or on a :

$$c(g_1, g_2) = \tau(L, g, L, g_2 g_1 L)$$

où L est une polarisation en $\nu = f|_{\mathfrak{r}}$ et τ est l'indice de Maslov (cf. [Li 1]). Le lemme suivant est facile.

LEMME 39. *Soit E un espace vectoriel complexe, $E_{\mathbb{R}}$ le sous-espace vectoriel sous-jacent, et Q une forme quadratique sur $E_{\mathbb{R}}$. La signature de Q est nulle. Il en résulte que l'indice de Maslov est nul sur un espace symplectique complexe.*

Si f est une forme linéaire réelle sur \mathfrak{g} , f est la partie réelle d'une forme complexe f' , et il est clair que les polarisations pour f sont des polarisations pour f' et des sous-espaces complexes de \mathfrak{g} : l'espace $\mathfrak{g}/\mathfrak{g}(f)$ est un espace symplectique complexe. Il résulte de ces remarques que le groupe \tilde{G}_1 considéré au paragraphe 5.5 est égal au produit direct de G_1 par $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. La proposition 6, compte tenu des lemmes 35 et 36 et de ce qui précède, s'écrit de la manière suivante. $\pi(G, f, G(f)^1, \eta, \mathfrak{h})$ est équivalente à la représentation déduite de $\pi(G_1, f, G_1(f_1)^1, \eta_1, \mathfrak{h}_1) \otimes W$ par passage au quotient.

D'après le lemme de Schur, comme W restreinte à N est irréductible, les commutants de $\pi(G, f, G(f)^1, \eta, \mathfrak{h})$ et $\pi(G_1, f_1, G_1(f_1)^1, \eta_1, \mathfrak{h}_1)$ sont isomorphes. Il reste donc à appliquer l'hypothèse de récurrence à G_1 , qui est de dimension inférieure à celle de G , et à comparer les commutants de

$$\text{Ind}_{G(f)^1 \uparrow G(f)} \eta \quad \text{et} \quad \text{Ind}_{G_1(f_1)^1 \uparrow G_1(f_1)} \eta_1$$

qui sont évidemment isomorphes.

La démonstration du théorème 3 est donc achevée.

Avant de passer au chapitre suivant, faisons quelques commentaires sur les conséquences du théorème 3. Supposons, pour simplifier, que $G(f)^0$ est d'indice fini

dans $G(f)$, ce qui est le cas si G est algébrique complexe. Alors, pour tout choix de $G(f)^1$ et de η , la représentation s'écrit comme une somme de représentations irréductibles, par conséquent la représentation $\pi(G_1, f, G(f)^1, \eta)$ s'écrit comme une somme finie de représentations irréductibles de G . Simplifions encore, et considérons la représentation $\pi(G, f, G(f)^0, \chi_f)$. Par le théorème de Peter–Weyl projectif appliqué au groupe fini $G(f)/G(f)^0$, la représentation $\text{Ind}_{G(f)^0 \uparrow G(f)} \chi_f$ est la somme $\bigoplus_{\tau \in X_{\text{irr}}(f)} (\dim \tau) \cdot \tau$. Par le théorème 3, on sait donc que $\pi(G, f, G(f)^0, \chi_f)$ s'écrit comme : $\bigoplus_{\tau \in X_{\text{irr}}(f)} (\dim \tau) \pi(G, f, (f)^0, \chi_f, \tau)$, où les $\pi(G, f, G(f)^0, \chi_f, \tau)$ sont des représentations irréductibles de G . Malheureusement la décomposition n'est pas canonique, en ce qu'elle dépend du choix d'une polarisation $\eta \in PRP(f)$: si η et η'' sont deux telles polarisations, il est très possible *a priori* que la sous-représentation $\pi(G, f, G(f)^0, \chi_f, \eta, \tau)$ (définie pour $\tau \in X_{\text{irr}}(f)$), de $\pi(G, f, G(f)^0, \chi_f, \eta)$ soit équivalente à $\pi(G, f, G(f)^0, \chi_f, \eta'', \tau')$ pour un τ' de $X_{\text{irr}}(f)$ distinct de τ . C'est à lever cette ambiguïté, i.e. à définir une paramétrisation *canonique*, qu'est consacré le chapitre 10.

10. Construction d'une famille de représentations irréductibles d'un groupe algébrique complexe

On va, dans ce chapitre, étudier de manière plus précise le commutant des représentations $\pi(G, f, G(f)^0, \chi_f)$, le groupe G étant algébrique complexe. Dans un premier temps, on construit un opérateur d'entrelacement canonique $A_{\eta''\eta}^G$ entre $\pi(G, f, G(f)^0, \chi_f, \eta)$ et $\pi(G, f, G(f)^0, \chi_f, \eta'')$, où η et η'' sont deux très bonnes polarisations (cf. infra) en f . Ensuite on construit une injection E_{η}^G du commutant \mathcal{C}_{χ_f} de $\text{Ind}_{G(f)^0 \uparrow G(f)} \chi_f$ dans le commutant de $\pi(G, f, G(f)^0, \chi_f, \eta)$, dont on montre qu'elle commute à $A_{\eta''\eta}^G$, i.e. $E_{\eta''\eta}^G = A_{\eta''\eta}^G \circ E_{\eta}^G$. Ceci permet de définir sans ambiguïté la sous-représentation irréductible τ de $\text{Ind}_{G(f)^0 \uparrow G(f)} \chi_f$; on note $\pi_{f,\tau}^G$ cette représentation.

On définit d'abord les *très bonnes polarisations*.⁽¹⁾ La polarisation η en f est très bonne si :

- (i) η est bonne
- (ii) η est admissible pour le radical unipotent n de \mathfrak{g}
- (iii) avec les notations du § 5.5, η_1 étant une bonne polarisation, on demande que η_1 soit admissible pour le plus grand idéal nilpotent de $\mathfrak{g}_1 = \mathfrak{n}^f$. Et ainsi de suite ...

(¹) Cette notion apparaît aussi dans un préprint de R. Lipsman « Harmonic induction on Lie Groups ».

On démontrera au chapitre 12 que les formes fortement régulières au sens de Duflo sont très bien polarisables.

10.1. *Construction d'un opérateur d'entrelacement.* On construit dans ce paragraphe un opérateur d'entrelacement unitaire et bijectif entre $\pi(G, f, G(f)^0, \chi_f, \eta)$ et $\pi(G, f, G(f)^0, \chi_f, \eta')$.

(a) *g est une algèbre de Lie réductive.* Si η est réductive, l'opérateur d'entrelacement a déjà été construit au § 7.1. Décrivons avec précision la situation, en tenant compte des simplifications dues à ce que l'on a choisi $G(f)^1 = G(f)^0$ et que G est complexe. Il en résulte que $G^0(f)$ est connexe, donc $G^0(f) = G(f)^0$. Par conséquent χ_f est une représentation irréductible de $G^0(f)$, ce qui prouve que $\pi(G^0, f, G(f)^0, \chi_f) = \pi(G^0, f, G^0(f), \chi_f)$ est irréductible. Posons

$$A_{\eta'\eta}^{G^0} = \mathcal{I}(\mathfrak{n}', \mathfrak{n}, \chi_f, \lambda(f)).$$

D'autre part, la proposition 3 implique que

$$\pi(G, f, G(f)^0, \chi_f) = \text{Ind}_{G^0 \uparrow G} \pi(G^0, f, G(f)^0, \chi_f).$$

On définit $A_{\eta'\eta}^G$ comme l'opérateur d'entrelacement induit à partir de $A_{\eta'\eta}^{G^0}$.

(b) *Cas général.* On fait une démonstration par récurrence, mais selon une méthode de réduction qui n'est pas celle de la proposition 1. Comme on l'avait remarqué au chapitre 9, (lemme 37), toute forme linéaire f est la partie réelle d'une forme linéaire complexe f' . Notons ν' la restriction de f' à \mathfrak{n} (cf. le § 5.5 pour les notations). Il est clair que $g(f) = g(f')$, $g(\nu) = g(\nu')$, les polarisations en f sont des polarisations en f' et réciproquement, etc.

La construction de l'opérateur se fait par récurrence, mais en utilisant une méthode de réduction différente de celle qu'on a employée jusqu'ici. Le lemme suivant, classique, en donne le principe.

LEMME 40. *Soit g une algèbre de Lie sur R ou C, n le radical unipotent de g de g, $f \in \mathfrak{g}^*$, $\nu = f|_{\mathfrak{n}}$, et $\mathfrak{b} = \text{Ker } \nu \cap \mathfrak{n}(\nu)$*

- (i) *b est un idéal dans $g(\nu)$*
- (ii) *un des deux cas suivants se présente :*
 - $\dim(g(\nu)/\mathfrak{b}) < \dim g$
 - *ou g est réductive.*

On applique le lemme 40 dans le cas complexe, c'est-à-dire à f' , ν' , $b' = \text{Ker } \nu' \cap \mathfrak{n}(\nu')$.

La construction de $A_{\mathfrak{g}^{\eta}}^G$ se fait par récurrence sur la dimension complexe de \mathfrak{g} . Si cette dimension est nulle, la construction des représentations est triviale, et $A_{\mathfrak{g}^{\eta}}^G$ est l'identité. Si l'algèbre de Lie est réductive, la construction a déjà été faite au paragraphe (a).

On suppose donc $\dim(\mathfrak{g}(\nu')/b') < \dim \mathfrak{g}$, et on distingue encore deux cas.

Premier cas : $\mathfrak{g}(\nu') = \mathfrak{g}$ et $b' \neq \{0\}$.

Dans ces conditions, $\mathfrak{n}(\nu') = \mathfrak{n} \subset \mathfrak{g}(f)$. On fait d'abord l'hypothèse que $G(\nu) = G$. Le noyau b' est alors un idéal stable sous l'action de G . Comme N est unipotent, il est simplement connexe, et b' est donc l'algèbre de Lie d'un sous-groupe fermé connexe B' . Posons $G_2 = G/B'$, \mathfrak{g}_2 son algèbre de Lie, f_2 la forme déduite de f par passage au quotient, p la surjection canonique de G sur G_2 . Par une généralisation immédiate de la proposition 4, si η est une bonne polarisation (qui contient nécessairement b'), $\eta_2 = p(\eta)$ est une bonne polarisation en f_2 , et on a

$$\pi(G, f, G(f)^0, \chi_f, \eta) \circ p = \pi(G_2, f_2, G_2(f_2)^0, \chi_{f_2}, \eta_2).$$

Montrons maintenant que η_2 est une très bonne polarisation si η est une très bonne polarisation.

Soit \mathfrak{m} la sous-algèbre dont le quotient \mathfrak{m}/b' est le radical unipotent de \mathfrak{g}/b' . On remarque que $\mathfrak{n} \subset \mathfrak{m} \subset \mathfrak{m} + \mathfrak{z}$, où \mathfrak{z} est le centre de \mathfrak{g} . Montrons que la polarisation η_2 est admissible pour \mathfrak{m}/b' , ce qui revient à montrer que η est admissible pour \mathfrak{m} . Mais cette dernière assertion est la conséquence immédiate de l'admissibilité de η pour \mathfrak{n} . Enfin l'inclusion $\mathfrak{n} \subset \mathfrak{m} \subset \mathfrak{m} + \mathfrak{z}$ prouve que l'orthogonal de \mathfrak{m}/b' pour f_2 est \mathfrak{g}_2 tout entier : l'admissibilité de η entraîne que η est très bonne.

Soit pour finir η et η'' deux très bonnes polarisations. On peut appliquer l'hypothèse de récurrence pour construire $A_{\mathfrak{g}_2^{\eta_2}}^{G_2}$. On pose $A_{\mathfrak{g}^{\eta}}^G = A_{\mathfrak{g}_2^{\eta_2}}^{G_2}$, ce qui définit bien un opérateur d'entrelacement.

Si $G(\nu) \neq G$, la relation $\pi(G, f, G(f)^0, \chi_f, \eta) = \text{Ind}_{G(\nu) \uparrow G} \pi(G(\nu), f, G(f)^0, \chi_f, \eta)$ incite à définir l'opérateur $A_{\mathfrak{g}^{\eta}}^G$ comme opérateur induit à partir de $A_{\mathfrak{g}^{\eta}}^{G(\nu)}$.

Deuxième cas : $\mathfrak{g}(\nu) \neq \mathfrak{g}$.

On utilise la proposition 6, avec les simplifications apportées au chapitre 9 :

$$\pi(G, f, G(f)^0, \chi_f) = \text{Ind}_{G_1 \cdot N \uparrow G} \pi(G_1, f_2, G_1(f_1)^0, \chi_{f_1}, \eta_1) \otimes W(N, \nu, \eta \cap \mathfrak{n})$$

puisque η est \mathfrak{n} -admissible.

Considérons l'opérateur d'entrelacement $I_{\eta''\eta}^N$ entre $\pi(N, \nu, \eta \cap n)$ et $\pi(N, \nu, \eta'' \cap n)$ défini dans [Li 1], et l'opérateur $A_{\eta'', \eta_1}^{G_1}$ défini par l'hypothèse de récurrence. Un calcul simple montre que $A_{\eta'', \eta_1}^{G_1} \otimes I_{\eta''\eta}^N$ est un opérateur d'entrelacement pour les représentations de $G_1 \cdot N$ associées à f, η et η'' . Par définition $A_{\eta''\eta}^G$ est l'opérateur induit.

On a donc défini, dans tous les cas et sans ambiguïté un opérateur d'entrelacement $A_{\eta''\eta}^G$.

10.2. *Construction d'une injection E_{η}^G du spectre de $\tau_f = \text{Ind}_{G(f)^0 \uparrow G(f)} \chi_f$ dans le spectre de $\pi(G, f, G(f)^0, \chi_f, \eta)$.* On suppose dorénavant G algébrique complexe.

La démonstration est faite par récurrence selon le même schéma que pour la construction de $A_{\eta''\eta}^G$.

- Si g est réductive, il existe (lemme 38) une polarisation qui est $G(f)$ -stable. Soit τ un élément de l'ensemble $X_{\text{irr}}(f)$ et posons :

$$E_{\eta}^G(\tau) = \pi(G, f, G(f), \tau, \eta).$$

Cette définition est, on le sait (théorème 1), indépendante du choix de la polarisation $G(f)$ -stable η . Soit maintenant η'' une polarisation non nécessairement $G(f)$ -stable. On sait que $\pi(G, f, G(f)^0, \chi_f, \eta)$ et $\pi(G, f, G(f)^0, \chi_f, \eta'')$ sont équivalentes. Posons :

$$E_{\eta''\eta}^G(\tau) = A_{\eta''\eta}^G \circ E_{\eta}^G(\tau).$$

Il faut montrer que cette définition est indépendante du choix de la polarisation $G(f)$ -stable η , c'est-à-dire :

$$A_{\eta''\eta}^G \circ E_{\eta}^G = A_{\eta''\eta_1}^G \circ E_{\eta_1}^G$$

ce qui est vrai puisque (cf. [KS])

$$(A_{\eta''\eta}^G)^{-1} A_{\eta''\eta_1}^G = A_{\eta\eta_1}^G$$

à une constante près et qu'on sait que $A_{\eta\eta_1}^G$ vérifie

$$A_{\eta\eta_1}^G \circ E_{\eta_1}^G = E_{\eta}^G.$$

Montrons que E_{η}^G ainsi définie est une injection. On peut supposer η $G(f)$ -stable. La proposition 3 et le théorème des petits groupes de Mackey montrent que si τ et τ' sont inéquivalentes, $\pi(G, f, G(f), \tau_1, \eta)$ et $\pi(G, f, G(f), \tau'_1, \eta)$ sont inéquivalentes.

• Supposons \mathfrak{g} non réductive et plaçons nous dans le cas $\mathfrak{g}(\nu') = \mathfrak{g}$. On se réfère à l'étude de ce cas dans le § 10.1.

Par définition $E_{\mathfrak{h}}^G$ est l'application déduite de $E_{\mathfrak{h}_2}^{G_2}$. Il est clair que $E_{\mathfrak{h}}^G$ est injective puisque $E_{\mathfrak{h}_2}^{G_2}$ l'est.

• Supposons \mathfrak{g} non réductive et $\mathfrak{g}(\nu) \neq \mathfrak{g}$.
Soit \mathfrak{g} une très bonne polarisation. On a

$$\pi(G, f, G(f)^0, \chi_f, \mathfrak{h}) = \text{Ind}_{G_1 N \uparrow G} \pi(G_1, f_1, G_1(f_1)^0, \chi_{f_1}, \mathfrak{h}_1) \otimes W(N, \nu, \mathfrak{h} \cap \mathfrak{n}).$$

Supposons construit $E_{\mathfrak{h}_1}^{G_1}(\tau)$. Alors par définition

$$E_{\mathfrak{h}}^G(\tau) = \text{Ind}_{G_1 N \uparrow G} E_{\mathfrak{h}_1}^{G_1}(\tau) \otimes W(N, \nu, \mathfrak{h} \cap \mathfrak{n}).$$

Le théorème des petits groupes appliqué à N montre que $E_{\mathfrak{h}}^G(\tau)$ est irréductible et que $E_{\mathfrak{h}}^G$ est injective puisque c'est le cas pour $E_{\mathfrak{h}_1}^{G_1}(\tau)$ et $E_{\mathfrak{h}_1}^{G_1}$.

Enfin $E_{\mathfrak{h}''}^G = A_{\mathfrak{h}''\mathfrak{h}}^G \circ E_{\mathfrak{h}}^G$ par construction même. On a montré le :

THÉORÈME 4. *Soit G un groupe algébrique complexe et f une forme admissible et très bien polarisable*

(1) *Si \mathfrak{h} et \mathfrak{h}'' sont deux très bonnes polarisations de f , il existe un opérateur d'entrelacement canonique $A_{\mathfrak{h}''\mathfrak{h}}^G$ entre*

$$\pi(G, f, G(f)^0, \chi_f, \mathfrak{h}) \quad \text{et} \quad \pi(G, f, G(f)^0, \chi_f, \mathfrak{h}'').$$

(2) *L'application $E_{\mathfrak{h}}^G$ est une bijection du spectre de $\text{Ind}_{G(f)^0 \uparrow G(f)} \chi_f$ sur celui de $\pi(G, f, G(f)^0, \chi_f, \mathfrak{h})$.*

(3) *On a, pour tout couple $(\mathfrak{h}, \mathfrak{h}'')$ de très bonnes polarisations en f :*

$$E_{\mathfrak{h}''}^G = A_{\mathfrak{h}''\mathfrak{h}}^G \circ E_{\mathfrak{h}}^G.$$

Notons par définition $\pi_{f, \tau}^G$ la classe de $E_{\mathfrak{h}}^G(\tau)$ pour $\tau \in X_{\text{irr}}(f)$. Il résulte de la définition de $E_{\mathfrak{h}}^G(\tau)$ la description suivante :

PROPOSITION 9. (1) *Si G est réductive connexe, $\pi_{f, \tau}^G$ est la représentation de la série principale $T^{\tau, \lambda(f)}$.*

(2) Si \mathfrak{g} n'est pas réductive, et si \mathfrak{n} est le radical unipotent de \mathfrak{g} , les notations étant celles du § 5.5,

$$\pi_{f,\tau}^G = \text{Ind}_{G_1 \cdot N \uparrow G} \pi_{f_1, \tau_1}^{G_1} \otimes W_\nu.$$

(3) Soit η une très bonne polarisation $G(f)$ -stable. Alors la représentation $\pi(G, f, G(f), \tau, \eta)$ appartient à la classe $\pi_{f,\tau}^G$.

Démonstration. Les points (1) et (2) sont une simple traduction de la définition.

On montre le (3) par récurrence sur $\dim \mathfrak{g}$. Si \mathfrak{g} est réductive, le résultat est acquis par définition de E_η^G . Si \mathfrak{g} n'est pas réductive, par transitivité de l'induction on a :

$$\pi(G, f, G(f)^0, \chi_f, \eta) = \pi\left(G, f, G(f), \text{Ind}_{G(f)^0 \uparrow G(f)} \chi_f, \eta\right)$$

et donc $\pi(G, f, G(f), \tau, \eta)$ est une sous-représentation irréductible de $\pi(G, f, G(f)^0, \chi_f, \eta)$. Par la proposition 6 on a :

$$\pi(G, f, G(f), \tau, \eta) = \text{Ind}_{G^{(\nu)}N \uparrow G} \pi(G_1, f_1, G_1(f_1), \tau_1, \eta_1) \otimes W_\nu,$$

où η_1 est une très bonne polarisation $G_1(f_1)$ -stable en f_1 . Par l'hypothèse de récurrence, on a :

$$\pi(G_1, f_1, G_1(f_1), \tau_1, \eta_1) = E_{\eta_1}^{G_1}(\tau_1).$$

Par construction on a donc :

$$\pi(G, f, G(f), \tau, \eta) = E_\eta^G(\tau). \quad \square$$

Dans [Duf4], Duflo a donné un procédé de construction de représentations associées aux mêmes données que celles que nous avons considérées ici. (Le procédé de Duflo est plus général, mais plus compliqué.) Il est vraisemblable que les deux méthodes aboutissent au même résultat. Compte tenu de la proposition 9, (2), et de la proposition analogue pour les représentations de Duflo, il suffirait de l'établir dans le cas d'une algèbre de Lie \mathfrak{g} réductive.

II. La formule de Plancherel

Dans cette partie, G est un groupe algébrique complexe qu'on considère comme groupe de Lie réel. On note \mathfrak{g} son algèbre de Lie. On sera parfois amené à utiliser la structure

complexe. Le dual complexe de \mathfrak{g} est noté \mathfrak{g}' et il est \mathbf{R} -isomorphe à \mathfrak{g}^* : on a vu (lemme 37) que toute forme linéaire $f \in \mathfrak{g}^*$ était la partie réelle d'une forme unique $f' \in \mathfrak{g}'$. Les notions de polarisation en f et en f' coïncident.

Fixons un sous-groupe Z fermé et connexe du centre de G , d'algèbre de Lie \mathfrak{z} , et un caractère unitaire χ_λ de Z de différentielle $2i\pi\lambda$ ($\lambda \in \mathfrak{z}^*$). On considère la sous-variété $\mathfrak{g}_\lambda^* = \{f \in \mathfrak{g}^*, f|_{\mathfrak{z}} = \lambda\}$.

11. Régularité et admissibilité

(a) *Définitions.* Les définitions et les résultats de ce chapitre sont essentiellement dus à Duflo [Duf4].

Définition. On dit que $f \in \mathfrak{g}_\lambda^*$ est λ -régulière si $\mathfrak{g}(f)$ est de dimension maximale.

Il est bien connu (cf. [DV], [Dix 3], 1.14.3) que, dans ce cas $\mathfrak{g}(f)/\mathfrak{z}$ est abélienne.

Soit $S(f)$, l'image réciproque, dans $G(f)^0$ du tore maximal de dimension $G(f)^0/Z$, et $\mathfrak{s}(f)$ son algèbre de Lie.

Définition. On dit que $f \in \mathfrak{g}_\lambda^*$ est fortement λ -régulière si elle est régulière et si $\mathfrak{s}(f)$ est de dimension maximale.

Remarque. A l'identification entre \mathfrak{g}^* et \mathfrak{g}' près, cette définition est celle qui est donnée par Duflo dans [Duf4].

Soit \mathcal{O}_λ l'ensemble des formes fortement λ -régulières. Dans la suite, on fixe un élément de référence $f_0 \in \mathcal{O}_\lambda$, et $\mathfrak{s} = \mathfrak{s}(f_0)$, α le centralisateur de \mathfrak{s} dans \mathfrak{g} et $\mathfrak{p} = [\mathfrak{s}, \mathfrak{g}]$. Puisque \mathfrak{s} est semi-simple, on a $\mathfrak{g} = \alpha \oplus \mathfrak{p}$ ce qui permet d'identifier \mathfrak{g}^* à $\alpha^* \oplus \mathfrak{p}^*$. On note $\alpha_\lambda^* = \alpha^* \cap \mathfrak{g}_\lambda^*$.

PROPOSITION 10. *L'ensemble \mathcal{O}_λ est un ouvert de Zariski de \mathfrak{g}_λ^* qui est stable sous l'action de G . Si f_1 et f_2 sont dans \mathcal{O}_λ , $S(f_1)$ et $S(f_2)$ sont conjugués par un élément du groupe dérivé (G^0, G^0) .*

Avant de passer à la démonstration, on démontre quelques lemmes.

LEMME 41. (i) *Si f est λ -régulière, $\mathfrak{s}(f)$ est central dans $\mathfrak{g}(f)$.*

(ii) $\mathfrak{g}(f_0) \subset \alpha$.

(iii) *Soit $l \in \alpha_\lambda^*$, l régulier comme élément de \mathfrak{g}_λ^* . On a $\mathfrak{g}(l) \subset \alpha$ et $\mathfrak{s}(l) = \mathfrak{s}$, ce qui implique que l est fortement λ -régulière.*

Démonstration. (i) Soit X un vecteur propre pour l'action de $\mathfrak{s}(f)$ dans $\mathfrak{g}(f)$:

$\forall S \in \mathfrak{s}(f)$, $[S, X] = \alpha(S)X$ (où $\alpha \in \mathfrak{s}(f)^*$). Comme $\mathfrak{g}(f)/\mathfrak{z}$ est abélien, cette égalité implique que $X \in \mathfrak{z}$ et donc que $\alpha = 0$.

(ii) résulte immédiatement de (i).

(iii) Puisque $[\mathfrak{s}, \alpha] = 0$ et $[\mathfrak{s}, \mathfrak{p}] \subset \mathfrak{p}$, le fait que $l \in \mathfrak{p}^\perp$ entraîne que $\mathfrak{s} \subset \mathfrak{g}(l)$ et donc $\mathfrak{s} \subset \mathfrak{s}(l)$, et, à cause de la maximalité de \mathfrak{s} , que $\mathfrak{s} = \mathfrak{s}(l)$. On sait alors, par (i), que $\mathfrak{g}(l)$ centralise \mathfrak{s} , donc que $\mathfrak{g}(l) \subset \alpha$. \square

LEMME 42. Soit $f_1 \in \mathcal{O}_\lambda$, et $\mathfrak{s}_1, \alpha_1, \mathfrak{p}_1$ les espaces construits à partir de f_1 , comme $\mathfrak{s}, \alpha, \mathfrak{p}$ à partir de f_0 . Soit Σ l'ensemble des racines non nulles pour l'action de \mathfrak{s}_1 dans \mathfrak{g} , et, pour chaque $\alpha \in \Sigma$ l'espace propre \mathfrak{p}_α correspondant. Soit $l \in \alpha_{1,\lambda}^*$ un élément λ -régulier en tant que forme sur \mathfrak{g} . L'application ω :

$$\alpha_1^* \times \prod_{\alpha \in \Sigma} \mathfrak{p}_1^\alpha \xrightarrow{\omega} \mathfrak{g}^*$$

$$(l_1, X_\alpha) \rightarrow \left(\prod_{\alpha \in \Sigma} \exp X_\alpha \right) \cdot l_1$$

est polynomiale et étale en $(l, 0)$, et applique $\alpha_{1,\lambda}^* \times \prod_{\alpha \in \Sigma} \mathfrak{p}_1^\alpha$ dans \mathfrak{g}_λ^* .

Démonstration. L'application est évidemment polynomiale. Calculons sa différentielle en $(l, 0)$. C'est l'application

$$\alpha_1^* \times \prod \mathfrak{p}_1^\alpha \rightarrow \mathfrak{g}^*$$

$$(l', X_\alpha) \rightarrow \sum_{\alpha \in \Sigma} X_\alpha \cdot l + l'.$$

Supposons qu'on ait, pour tout X , $\langle \sum_{\alpha \in \Sigma} X_\alpha \cdot l + l', X \rangle = 0$, en prenant $X \in \alpha_1$, on trouve que $l' \in \alpha_1^\perp$, donc que $l' = 0$. L'égalité implique alors que $\sum X_\alpha \in \mathfrak{g}(l)$. Par le lemme 40, $\mathfrak{g}(l) \subset \alpha_1$, donc $\sum X_\alpha \in \alpha_1 \cap \mathfrak{p}_1$, soit $X_\alpha = 0$ pour tout α . La différentielle est injective, et surjective par un argument de dimension. \square

LEMME 43. Soit $f \in \mathcal{O}_\lambda$.

(i) $\mathfrak{s}(f)$ est conjuguée à \mathfrak{s} par un élément de (G^0, G^0) .

(ii) Soit $l \in \alpha_\lambda^*$. Fixons une base β de \mathfrak{p} . Soit $D(l)$ le pfaffien de la restriction de la forme B_l à \mathfrak{p} dans β . Si $l \in \mathcal{O}_\lambda$, alors $D(l) \neq 0$ et l est régulier comme élément de α_λ^* .

(iii) Soit l un élément régulier de α_λ^* tel que $D(l) \neq 0$. Alors l régulier dans \mathfrak{g}_λ^* et $l = \mathcal{O}_\lambda$. On note $\mathcal{C}_\lambda = \mathcal{O}_\lambda \cap \alpha^*$.

Démonstration. On applique le lemme 42 à $\mathfrak{s}_1 = \mathfrak{s}$ et $\mathfrak{s}_1 = \mathfrak{s}(f)$. Les espaces \mathfrak{g}^* , \mathfrak{a}^* etc. étant porteurs d'une structure complexe, le lemme 41 permet d'appliquer le théorème d'inversion locale algébrique; l'image de l'application ω contient un ouvert de Zariski de \mathfrak{g}^* , donc l'image de la restriction de ω à $\alpha_{1,\lambda}^* \times \prod_{\alpha \in \Sigma} \mathfrak{p}_1^\alpha$ contient un ouvert de Zariski (non vide) de \mathfrak{g}_λ^* . On peut donc affirmer l'existence d'éléments $X_\alpha \in \mathfrak{p}^\alpha$, $l \in \alpha_\lambda^*$, $X'_\alpha \in \mathfrak{p}_1^\alpha$, $l_1 \in \alpha_{1,\lambda}^*$ tels que :

$$\left(\prod \exp X_\alpha \right) \cdot l = \left(\prod \exp X'_\alpha \right) \cdot l_1$$

soit un élément λ -régulier dans \mathfrak{g}_λ^* . Mais cette condition implique que l et l_1 sont λ -réguliers, et donc, par le lemme 41, que $\mathfrak{s}(l) = \mathfrak{s}$ et $\mathfrak{s}(l_1) = \mathfrak{s}(f)$. On en déduit que \mathfrak{s} et $\mathfrak{s}(f)$ sont conjugués par fonction d'un élément de (G^0, G^0) .

(ii) et (iii). Soit $l \in \mathcal{O}_\lambda \cap \alpha_\lambda^*$. Par le lemme 41 $\mathfrak{g}(l) \subset \alpha$ et $\mathfrak{s}(l) = \mathfrak{s}$, ce qui prouve que B_l restreinte à $\mathfrak{p} \times \mathfrak{p}$ est non dégénérée, et donc que $D(l) \neq 0$. Soit maintenant l_1 un élément de α_λ^* régulier comme forme sur α et tel que $D(l_1) \neq 0$. Comme $[\alpha, \mathfrak{p}] \subset \mathfrak{p}$, il est clair que $\alpha(l_1) \subset \mathfrak{g}(l_1)$. Soit $X \in \mathfrak{g}(l_1)$, écrivons $X = X_1 + X_2$ avec $X_1 \in \alpha$, $X_2 \in \mathfrak{p}$. Soit $A \in \mathfrak{p}$. L'égalité $l_1([X, A]) = 0$ entraîne $l_1([X_2, A]) = 0$, et comme B_{l_1} restreinte à $\mathfrak{p} \times \mathfrak{p}$ est non dégénérée, $X_2 = 0$, soit $X \in \alpha$, donc $\mathfrak{g}(l_1) \subset \alpha(l_1)$, c'est-à-dire $\mathfrak{g}(l_1) = \alpha(l_1)$. Par ailleurs, le lemme 41 montre que $\mathfrak{g}(l) = \alpha(l)$. On a donc, par définition

$$\dim \mathfrak{g}(l) \leq \dim \mathfrak{g}(l_1)$$

$$\dim \alpha(l) \geq \dim \alpha(l_1)$$

ce qui permet de conclure. □

Démonstration de la proposition 10. Il reste à montrer que \mathcal{O}_λ est un ouvert de Zariski de \mathfrak{g}_λ^* . Montrons que \mathcal{O}_λ est un voisinage de f_0 . Par le lemme 42, il existe un voisinage \mathcal{U} de f_0 inclus dans l'image de l'application $(X_\alpha, l) \rightarrow (\prod \exp X_\alpha) \cdot l$ et ne contenant que les éléments λ -réguliers de \mathfrak{g}_λ^* . Il suffit de montrer qu'un élément $(\prod \exp X_\alpha) \cdot l \in \mathcal{U}$ est fortement régulier. Or l'hypothèse entraîne que l est λ -régulier, donc que $\mathfrak{s}(l) = \mathfrak{s}$. D'autre part il est clair que $\dim \mathfrak{s}(\prod \exp X_\alpha \cdot l) = \dim \mathfrak{s}$, et on a terminé.

(b) *Paramétrisation des orbites λ -régulières.* Soit $f \in \mathcal{O}_\lambda$. On note $T(f)$ le tore compact maximal de $S(f)$ et $\mathfrak{t}(f)$ son algèbre de Lie. Bien entendu $\mathfrak{t}(f)$ est une sous-algèbre de Lie réelle qui engendre $\mathfrak{s}(f)$ comme espace vectoriel complexe modulo \mathfrak{z} . Il en résulte que les centralisateurs de $\mathfrak{t}(f)$ et $\mathfrak{s}(f)$ dans \mathfrak{g} coïncident, ainsi que $[\mathfrak{t}(f), \mathfrak{g}]$ et $[\mathfrak{s}, \mathfrak{g}]$. On fixe $f_0 \in \mathcal{O}_\lambda$, et on note \mathfrak{t} au lieu de $\mathfrak{t}(f_0)$, T au lieu de $T(f_0)$. Comme dans le

paragraphe précédent, on considère α et \mathfrak{p} , le pfaffien D etc ... On utilise aussi le centralisateur A et le normalisateur A' de T dans G : A' et A ont α pour algèbre de Lie et $W=A'/A$ est un groupe fini.

LEMME 44. (i) Si f et f_1 appartiennent à \mathcal{O}_λ , $T(f)$ et $T(f_1)$ sont conjugués par un élément de (G^0, G^0) .

(ii) Toute G -orbite dans \mathcal{O}_λ rencontre α_λ^* selon une A' -orbite.

Démonstration. (i) Résulte de lemme 43.

(ii) Soit $f \in \mathcal{O}_\lambda$ et $g \in G$ tel que $gT(f)g^{-1} = T$. Soit $l = g \cdot f$: on a $T(l) = T$, donc l est dans α_λ^* . Supposons maintenant que f et $g \cdot f$ soient tous deux dans α_λ^* . Alors $T(g \cdot f) = T(f) = T$, donc $g \in A'$.

LEMME 45. L'application $\Omega \rightarrow \Omega \cap \alpha_\lambda^*$ est un homéomorphisme de \mathcal{O}_λ/G sur \mathcal{C}_λ/A' .

Démonstration. Après le lemme 44, il suffit de montrer que l'application $l \rightarrow G \cdot l$ de \mathcal{C}_λ/A' sur \mathcal{O}_λ/G est ouverte. Soit ω un ouvert de α^* dont l'intersection ω_λ avec α_λ^* est incluse dans \mathcal{C}_λ . Il résulte du lemme 42 que l'application $(l, X_\alpha) \rightarrow (\prod \exp X_\alpha) \cdot l$ est étale en tout point de $\omega \times \{0\}$; son image contient donc un voisinage de ω_λ dans \mathfrak{g}_λ^* ; par G -invariance on conclut que $G \cdot \omega$ est ouvert dans \mathfrak{g}_λ^* .

Les résultats précédents sont résumés dans l'énoncé suivant :

PROPOSITION 11. L'ensemble \mathcal{C}_λ est égal à l'ensemble des formes f régulières dans α_λ^* qui n'annulent pas D . Pour tout $f \in \mathcal{O}_\lambda$, $T(f)$ et T sont conjugués par (G^0, G^0) . Tout G -orbite dans \mathcal{O}_λ rencontre α_λ^* suivant une A' -orbite, ce qui définit un homéomorphisme de \mathcal{O}_λ/G sur \mathcal{C}_λ/A' .

(c) **Formes admissibles.** Soit $f \in \mathfrak{g}_\lambda^*$. On a défini, au chapitre 2, le fait que f est entière comme l'existence d'un caractère χ_f de $G(f)^0$ de différentielle $2i\pi f|_{\mathfrak{g}(f)}$. On observe immédiatement que χ_f , s'il existe, admet χ_λ pour restriction à Z .

Remarque. La définition d'admissibilité donnée par Duflo ([Duf 4]) fait intervenir un revêtement à deux feuillets de $G(f)^0$. Comme on l'a déjà vu à plusieurs reprises (lemme 38), la structure complexe fait que ce revêtement n'est autre que le produit direct de $G(f)^0$ par $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, et que donc il n'y a pas de différence entre les deux notions.

Dans la suite on parlera donc de formes admissibles plutôt qu'entières.

Il est immédiat que l'ensemble des formes admissibles est G -stable. On peut donc parler d'orbites admissibles et d'orbites fortement régulières admissibles. On va décrire

précisément l'ensemble $\mathcal{O}_\lambda^{\text{ad}}$ des formes fortement λ -régulières et admissibles. On note aussi $\mathcal{C}_\lambda^{\text{ad}} = \mathcal{O}_\lambda^{\text{ad}} \cap \alpha^*$.

LEMME 46. *Un élément $f \in \mathcal{C}_\lambda$ est admissible si et seulement si $2i\pi f|_t$ s'intègre en un caractère de T .*

Démonstration. On rappelle que pour $f \in \mathcal{C}_\lambda$, $t = t(f) \subset \mathfrak{g}(f) \subset \alpha$. D'autre part, $G(f)^0$ est nilpotent, T est son compact maximal donc $G(f)^0/T$ est simplement connexe. Soit $p : G(f)^0 \rightarrow G(f)^0$ le revêtement simplement connexe de $G(f)^0$. Par ce qui précède, p induit un homéomorphisme de $G(f)^0/p^{-1}(T)$ sur $G(f)^0/T$, et donc $p^{-1}(T)$ est connexe. Soit ζ_f le caractère de T de différentielle $2i\pi f|_t : \zeta_f \circ p$ et la restriction à $p^{-1}(T)$ du caractère $\tilde{\chi}_f$ de $G(f)^0$ de différentielle $2i\pi f|_{\mathfrak{g}(f)}$ coïncident, et en particulier $\tilde{\chi}_f$ est trivial sur $\text{Ker } p$. \square

Considérons l'ensemble R des éléments $\nu \in \mathfrak{t}^*$ tels que $2i\pi\nu$ s'intègre en un caractère de T , et notons $R_\lambda = \{\nu \in R, \nu|_{\mathfrak{g} \cap \mathfrak{t}} = \lambda\}$. Il est bien clair que R est un réseau de \mathfrak{t}^* , et R_λ le translaté d'un sous-groupe discret de \mathfrak{t}^* . Résumons :

PROPOSITION 12. *L'ensemble $\mathcal{C}_\lambda^{\text{ad}}$ est l'image réciproque sur la projection de α^* sur \mathfrak{t}^* de l'ensemble R_λ . Pour un ν donné dans R_λ , l'ensemble $\mathcal{C}_{\lambda,\mu}^{\text{ad}} = \{l \in \mathcal{C}_\lambda^{\text{ad}}, l|_t = \mu\}$ est inclus dans une sous-variété affine $\alpha_{\lambda,\mu}^*$ de α^* dont l'espace vectoriel sous-jacent est $(\mathfrak{g} + \mathfrak{t})^\perp$.*

En fin de compte, tout ce chapitre est résumé par le théorème, dû à Duflo ([Duf4]) dans le cas $\mathfrak{g} = \{0\}$.

THÉORÈME 5. *L'ensemble $\mathcal{O}_\lambda^{\text{ad}}/G$ des orbites fortement régulières admissibles est homéomorphe à $(\bigcup_{\mu \in R_\lambda} \mathcal{C}_{\lambda,\mu}^{\text{ad}})/A'$, où $\mathcal{C}_{\lambda,\mu}^{\text{ad}}$ est l'ensemble des $l \in \alpha^*$ qui sont λ -régulières en tant que formes sur α , tels que $D(l) \neq 0$ et tels que $l|_t = \mu$.*

Remarque. On peut étendre les notions de λ -régularité et de λ -régularité forte de la façon suivante, qui nous sera utile un peu plus loin. Soit α un idéal G -stable de \mathfrak{g} , complexe et unipotent, et on suppose que $D = \exp \alpha$ est un sous-groupe fermé de G . Soit λ une forme linéaire sur α , partie réelle de la forme \mathbb{C} -linéaire λ' sur α , telle que $G(\lambda) = G$ (et donc $\mathfrak{g}(\lambda) = \mathfrak{g}$). Comme D est simplement connexe, il existe un caractère χ_λ de $D = D(\lambda)$ dont la différentielle est $2i\pi\lambda$. D'autre part $\text{Ker } \lambda'$ est l'algèbre de Lie d'un sous-groupe fermé I' de D , et D/I' est central dans G/I' . On peut donc définir une forme $\tilde{\lambda}$ sur $\alpha/\text{Ker } \lambda'$ et les notions de $\tilde{\lambda}$ -régularité et de $\tilde{\lambda}$ -régularité forte bien définies pour les

formes sur $\mathfrak{g}/\text{Ker } \lambda' = \bar{\mathfrak{g}}$. Soit $\mathfrak{g}_\lambda^* = \{f \in \mathfrak{g}^*, f|_\alpha = \lambda\}$. On a une bijection canonique entre \mathfrak{g}_λ^* et $\bar{\mathfrak{g}}_\lambda^*$ qui permet de définir les formes λ -régulières et λ -fortement régulières comme images des formes $\bar{\lambda}$ -régulières et $\bar{\lambda}$ -fortement régulières.

12. Les formes fortement λ -régulières sont très bien réellement polarisables

Les objets sont ceux de la remarque qui conclut de chapitre 11; $G, \mathfrak{g}, D, \alpha, \lambda, \mathfrak{g}_\lambda^*$.

PROPOSITION 13. *Soit f une forme fortement λ -régulière sur \mathfrak{g} . Il existe de très bonnes polarisations en f (cf. chapitre 2 et chapitre 10).*

Démonstration. D'abord on rappelle la remarque faite au début du chapitre : si $f = \text{Re}(f')$, $f' \in \mathfrak{g}'$, une polarisation en f' , est, considérée comme espace réel, une polarisation en f . On procède par récurrence sur $\dim \mathfrak{g}$ en s'inspirant de la démonstration analogue dans [Duf3] (cf. aussi [Dix3]).

Soit \mathfrak{n} le plus grand idéal unipotent, $\mathfrak{g}_1 = \mathfrak{n}^f$, $\mathcal{I} = \text{Ker } f \cap \mathfrak{n}$, et $f_1 = f|_{\mathfrak{g}_1}$. Il est clair que $\mathfrak{g}_1 = \mathfrak{n}^{f'}$ et $\mathcal{I} = \text{Ker } f' \cap \mathfrak{n}$.

Première étape. $\mathfrak{g}_1 = \mathfrak{g}$ et $\mathcal{I} \neq 0$.

Alors \mathcal{I} est un idéal de \mathfrak{g} sur lequel f s'annule. Posons $\bar{\mathfrak{g}} = \mathfrak{g}/\mathcal{I}$ et \bar{f} l'image de f . Soit $\bar{\alpha} = \alpha + \mathcal{I}/\mathcal{I}$. Montrons que \bar{f} est fortement $\bar{\lambda}$ -régulière.

D'abord \bar{f} est régulière parce que $\bar{\mathfrak{g}}(\bar{f}) = \mathfrak{g}(f)/\mathcal{I}$, et toute forme \bar{f}_0 sur $\bar{\mathfrak{g}}$ se relève en une forme f_0 sur \mathfrak{g} telle que $\bar{\mathfrak{g}}(f_0) = \mathfrak{g}(f_0)/\mathcal{I}$. Soit \bar{f}_0 $\bar{\lambda}$ -régulière : f_0 est λ -régulière, et donc $\dim \bar{\mathfrak{s}}(f_0) \leq \dim \bar{\mathfrak{s}}(f)$. Comme $\mathcal{I} \subset \mathfrak{n}$, on obtient l'inégalité $\dim \bar{\mathfrak{s}}(\bar{f}_0) \leq \dim \bar{\mathfrak{s}}(\bar{f})$. Par l'hypothèse de récurrence, il existe une très bonne polarisation η en \bar{f} . Il reste à montrer que son image réciproque dans \mathfrak{g} vérifie les mêmes propriétés. C'est évidemment une polarisation. Soit H et \bar{H} les groupes analytiques connexes correspondant à η et $\bar{\eta}$. Comme $\mathcal{I} \subset \eta$, et qu'on sait qu'il existe un caractère χ_f de H de différentielle $2i\pi f|_\eta$, \mathcal{I} est l'algèbre de Lie d'un groupe fermé connexe I , et on a $\bar{H} = H/I$, d'où l'on déduit $\overline{H \cdot f} = \bar{H} \cdot \bar{f}$, et donc que $H \cdot f$ est fermé dès que $\bar{H} \cdot \bar{f}$ l'est. Puisque $\mathfrak{g}(\nu) = \mathfrak{g}$, dire que η est très bonne revient à dire que η contient \mathfrak{n} , ce qui est évident puisque $\bar{\eta}$ contient $\mathfrak{n}(\nu)/\mathcal{I}$.

Deuxième étape. $\mathfrak{g}_1 = \mathfrak{g}$ et $\mathcal{I} = \{0\}$.

Alors nécessairement \mathfrak{n} est de dimension 0 ou 1 et est central dans \mathfrak{g} , donc \mathfrak{g} est semi-simple ou réductive. Que f soit fortement λ -régulière implique que f' est l'image (par l'isomorphisme entre \mathfrak{g} et \mathfrak{g}^* défini par la forme de Killing) d'un élément semi-simple et régulier. Le stabilisateur $\mathfrak{g}(f)$ est alors une sous-algèbre de Cartan, et toute sous-algèbre de Borel η contenant $\mathfrak{g}(f)$ convient.

Troisième étape. $\mathfrak{g}_1 \neq \mathfrak{g}$.

Posons $\alpha_1 = n(\nu)$, $\lambda_1 = \nu|_{n(\nu)}$. Montrons que f_1 est λ_1 -fortement régulière. D'après le lemme 16,

$$\mathfrak{g}_1(f_1) = \mathfrak{g}(f) + n(\nu).$$

Soit f''_1 une forme coïncidant avec λ_1 sur $n(\nu)$. Choisissons une forme $f'' \in \mathfrak{g}^*$ telle que $f''|_n = \nu$ et $f''|_{\mathfrak{g}_1} = f''_1$. On a alors, comme pour f , l'égalité

$$\mathfrak{g}_1(f''_1) = \mathfrak{g}(f'') + n(\nu).$$

Puisque f est λ -régulière, $\dim \mathfrak{g}(f'') \geq \dim \mathfrak{g}(f)$, dont on déduit $\dim \mathfrak{g}_1(f_1) \leq \dim \mathfrak{g}_1(f''_1)$ (en effet, $\mathfrak{g}(f) \cap n(\nu)$ ne dépend que de ν , donc $\mathfrak{g}(f) \cap n(\nu) = \mathfrak{g}(f'') \cap n(\nu)$). Supposons maintenant f''_1 λ -régulière. On a $\mathfrak{s}(f) = \mathfrak{s}(f_1)$ et $\mathfrak{s}(f'') = \mathfrak{s}(f''_1)$; on déduit donc de $\dim \mathfrak{s}(f_1) \geq \dim \mathfrak{s}(f''_1)$ l'inégalité cherchée : $\dim \mathfrak{s}(f) \geq \dim \mathfrak{s}(f'')$.

Appliquons à \mathfrak{g}_1 l'hypothèse de récurrence : soit η_1 une très bonne polarisation en f . D'après [Dix 3], 1.12.13, il existe une polarisation \mathfrak{p} en ν telle que $[\eta_1, \mathfrak{p}] \subset \mathfrak{p}$. Il est clair que $\eta = \eta_1 + \mathfrak{p}$ est une polarisation résoluble en f . Montrons qu'elle vérifie la condition de Pukanszky.

Soit $\varphi \in f + \eta^\perp$. En projetant sur \mathfrak{g}_1^\dagger et en appliquant la condition de Pukanszky pour η_1 , on montre l'existence d'un $h_1 \in H_1$ tel que $\varphi - h_1 \cdot f \in \mathfrak{g}_1^\dagger$. En projetant sur n^* , et en appliquant la condition de Pukanszky pour \mathfrak{p} , on montre l'existence d'un $p \in \exp \mathfrak{p}$ tel que $\varphi - ph_1 f \in (\mathfrak{g}_1 + n)^\perp$. Le lemme 16 montre qu'alors $\varphi \in H \cdot f$.

Reste à montrer les propriétés d'admissibilité. Il est clair que η est admissible pour n . Le reste vient de ce que η_1 est très bonne.

13. Définition d'une structure borélienne

Dans ce chapitre G, Z etc ... vérifient les conditions générales de la partie II.

Soit $\mathcal{P}_\lambda(G)$ le « fibré » (non localement trivial) de base $\mathcal{O}_\lambda^{\text{ad}}$ et de fibre au-dessus de f l'espace $X(f)$ des représentations de $G(f)$ dont la restriction à $G(f)^0$ est un multiple de caractère χ_f . $\mathcal{P}_\lambda(G)$ est un G -espace. L'objet de ce chapitre est de définir sur $\mathcal{P}_\lambda(G)$ une structure borélienne « raisonnable », i.e. définie de façon naturelle et telle que les applications $(f, \tau) \mapsto f$, $(f, \tau) \mapsto \dim \tau$, $(f, \tau) \mapsto \pi_{f, \tau}^G$ soient boréliennes. (Pour les questions générales sur les structures boréliennes, cf. [AM], et [Dix 1] appendice.)

(a) *La topologie de Fell.* Soit G un groupe localement compact et $\mathcal{H}(G)$ l'ensemble des sous-groupes fermés de G . On munit (cf. [Fe]) $\mathcal{H}(G)$ d'une structure d'espace topologique compact de la façon suivante :

Soit $(U_i)_{i \in I}$ une famille finie d'ouverts de G , et F un fermé de G ; la topologie est définie pour la base d'ouverts $\mathcal{F}(U_i, F)$

$$\mathcal{F}(U_i)_{i \in I}, F) = \{K \in \mathcal{K}(G), K \cap F = \emptyset \text{ et } K \cap U_i \neq \emptyset \forall i \in I\}.$$

LEMME 47. *Si G est séparable, alors $\mathcal{K}(G)$ est séparable, donc métrisable.*

Démonstration. Soit $(U_i)_{i \in \mathbb{N}}$ une base dénombrable d'ouverts relativement compacts. Soit $(F_j)_{j \in \mathbb{N}}$ l'ensemble des adhérences des réunions finies de U_i . L'ensemble des $\mathcal{F}(U_i, F_j)$ est une base dénombrable d'ouverts de $\mathcal{K}(G)$. \square

Soit $Y = \{(K, x) \in \mathcal{K}(G) \times G, x \in K\}$. C'est un fermé du produit $\mathcal{K}(G) \times G$, donc c'est un espace métrisable et localement compact. Considérons l'ensemble $C_c(Y)$ les fonctions continues à support compact sur Y . Fell munit $C_c(Y)$ d'une structure d'algèbre normée involutive, dont la complétée est appelée $A_S(G)$ et la C^* -algèbre enveloppante est notée $C_S^*(G)$. On vérifie facilement que $C_S^*(G)$ est séparable. L'espace topologique $C_S^*(G)^\wedge$ est alors séparable ([Dix 1], proposition 3.3.4) et l'espace topologique $\text{Rep}_n(C_S^*(G))$ (resp. $\text{Irr}_n(C_S^*(G))$) des représentations de dimension n (resp. irréductible de dimension n) de $C_S^*(G)$ est polonais (cf. [Dix 1], propositions 3.7.1 et 3.7.4). Soit $C_S^*(G)_n^\wedge = \{\pi \in C_S^*(G)^\wedge, \dim \pi = n\}$ et ${}_m C_S^*(G) = \bigcup_{n \leq m} C_S^*(G)_n^\wedge$.

LEMME 48. *Soit m un entier. L'espace ${}_m C_S^*(G)^\wedge$ est borélien standard.*

Démonstration. On sait que ${}_m C_S^*(G)^\wedge$ est homéomorphe à $(C_S^*(G)/I_m)^\wedge$, où

$$I_m = \bigcap_{\pi \in {}_m C_S^*(G)^\wedge} \text{Ker } \pi$$

([Dix 1], proposition 3.6.3). Et $(C_S^*(G)/I_m)^\wedge$ est borélien standard puisque les représentations irréductibles de $C_S^*(G)/I_m$ sont de dimension finie, donc de type I. \square

LEMME 49. *Il existe un entier m tel que, pour tout f dans $\mathcal{O}_\lambda^{\text{ad}}$, $[G(f) : G(f)^0] \leq m$.*

Démonstration. C'est une conséquence immédiate de [Rich], théorème 9.3.1.

Soit $\mathcal{S}(G)$ l'ensemble des couples (K, T) , $K \in \mathcal{K}(G)$, T une classe de représentations unitaires de K et $\mathcal{S}_i(G) \subset \mathcal{S}(G)$ la partie correspondante aux T irréductibles. Fell munit $\mathcal{S}(G)$ d'une topologie en construisant une injection W de $\mathcal{S}(G)$ dans l'ensemble des classes de représentations de $C_S^*(G)$ et en transportant la topologie de ce dernier ensemble sur $\mathcal{S}(G)$. Sans entrer ici dans les détails, il nous suffit de savoir que W restreinte à $\mathcal{S}_i(G)$ est une surjection sur $C_S^*(G)^\wedge$ telle que $\dim W(K, T) = T$.

La topologie sur $\mathcal{S}(G)$ n'étant pas métrisable, il sera utile d'utiliser la notion de famille filtrante et croissante d'une utilisation aussi commode que celle des suites : une famille filtrée par I à valeurs dans X est une famille de X indexée par I , I étant muni d'un filtre croissant. On a donc les notions de convergence, de famille extraite etc.

LEMME 50. *L'application de $\mathcal{O}_\lambda^{\text{ad}}$ dans $\mathcal{S}(G)$ qui associe à f le couple $(G(f)^0, \chi_f)$ est continue.*

Démonstration. Soit $(f_i)_I$ une famille filtrée par I tendant vers $f \in \alpha^*$, avec $f_i \in \mathcal{O}_\lambda^{\text{ad}}$. On peut choisir une famille $(g_i)_I$ de G de limite e , telle que $g_i \cdot f_i \in \alpha^*$ (lemme 42). Montrons d'abord que $\lim_I G(g_i \cdot f_i)^0 = G(f)^0$. On a $S(g_i \cdot f_i) = S(f)$. Notons $U(g_i \cdot f_i)$, $U(f)$ respectivement les radicaux unipotents de $G(g_i \cdot f_i)^0$, $G(f)^0$. Comme $G(f)^0 = S(f) \cdot U(f)$ avec $S(f) \cap U(f) = \{e\}$ (resp. $G(g_i \cdot f_i)^0 = S(f) \cdot U(g_i \cdot f_i)$), il suffit de montrer que $\lim_I U(g_i \cdot f_i) = U(f)$. Soient $u(g_i \cdot f_i)$ et $u(f)$ les algèbres de Lie de ces groupes. Il est clair que $\lim_I u(g_i \cdot f_i) = u(f)$, et par conséquent que $U(f)$ est inclus dans toute valeur d'adhérence de la famille $U(g_i \cdot f_i)$. Soit $u_i \in U(g_i \cdot f_i)$ de limite u . Montrons que $u \in U(f)$. On a $u_i = \exp U_i$, avec $U_i \in u(g_i \cdot f_i)$, et, l'exponentielle étant un difféomorphisme sur l'ensemble des éléments unipotents, on a $\lim U_i = U$ avec $\exp U = u$, ce qui prouve bien que $u \in U(f)$.

On sait donc que $\lim_I G(g_i \cdot f_i)^0 = G(f)^0$. Comme $\lim_I g_i = e$, il vient $\lim G(f_i)^0 = G(f)^0$. On utilise maintenant le théorème 3.1' de [Fe] : il suffit de montrer que χ_{f_i} tend vers χ_f au sens de la topologie sur les fonctions de type positif définie par Fell, ce qui revient ici à montrer que, pour tout $x_i \in G(f_i)^0$ de limite $x \in G(f)^0$, on a $\lim_I \chi_{f_i}(x_i) = \chi_f(x)$. On procède comme avant en écrivant $G(f) = S(f) U(f)$. \square

LEMME 51. *L'ensemble $\mathcal{O}_\lambda^{\text{ad}}$, muni de la structure borélienne induite, est borélien standard.*

Démonstration. On sait que \mathcal{O}_λ est un ouvert de Zariski. On va montrer que $\mathcal{O}_\lambda^{\text{ad}}$ est fermé dans \mathcal{O}_λ . Soit f_n une suite de $\mathcal{O}_\lambda^{\text{ad}}$ tendant vers $f \in \mathcal{O}_\lambda$. Comme dans la démonstration qui précède, on choisit $g_n \in G$, de limite e , tels que $g_n \cdot f_n \in \alpha^*$. Il est clair que $\mathcal{O}_\lambda^{\text{ad}}$ est fermé dans \mathcal{C}_λ , ce qui démontre l'admissibilité de f . \square

LEMME 52. *Dans le produit $\mathcal{O}_\lambda^{\text{ad}} \times \mathcal{H}(G)$, l'ensemble $\{(f, G(f)), f \in \mathcal{O}_\lambda^{\text{ad}}\}$ est borélien.*

Démonstration. C'est le graphe de l'application $f \rightarrow G(f)$, qui est borélien ([AM],

chapitre II, proposition 2.3); c'est donc un ensemble borélien ([AM], introduction, proposition 2.2). \square

On identifie l'ensemble $\mathcal{P}_\lambda(G)$ à l'ensemble des triplets $(f, G(f), \tau) \in \mathcal{O}_\lambda^{\text{ad}} \times \mathcal{S}_i(G)$, avec $\tau \in X_i(f)$ et on le munit de la structure borélienne induite par celle du produit $\mathcal{O}_\lambda^{\text{ad}} \times \mathcal{S}_i(G)$.

PROPOSITION 14. *$\mathcal{P}_\lambda(G)$ muni de la structure borélienne, ainsi définie, est un ensemble borélien standard.*

Démonstration. Notons $\mathcal{S}_i^r(G)$ l'ensemble des couples $(K, T) \in \mathcal{S}(G)$ avec T irréductible et de dimension inférieure ou égale à r . Il résulte de lemme 49 que $\mathcal{P}_\lambda(G) \subset \mathcal{O}_\lambda^{\text{ad}} \times \mathcal{S}_i^m(G)$, du lemme 48 que $\mathcal{S}_i^m(G)$ est standard et du lemme 51 que le produit $\mathcal{O}_\lambda^{\text{ad}} \times \mathcal{S}_i^m(G)$ est standard. Il suffit donc de montrer que $\mathcal{P}_\lambda(G)$ est une partie borélienne.

L'ensemble $\mathcal{P}_\lambda(G)$ est égal à l'ensemble des $(f, G(f), T)$ dans $\mathcal{O}_\lambda^{\text{ad}} \times \mathcal{S}(G)$ tels que $T|_{G(f)^0}$ est un multiple de χ_f .

Montrons que l'application de $\mathcal{O}_\lambda^{\text{ad}} \times \mathcal{S}(G)$ dans $\mathcal{O}_\lambda^{\text{ad}} \times \mathcal{A}(G)$:

$$(f, G(f), T) \mapsto (f, G(f)^0, T|_{G(f)^0})$$

est borélienne. C'est la composée

$$\begin{array}{ccc} f & \mapsto & (f, G(f)^0) \\ \nearrow & & \searrow \\ (f, G(f), T) & \mapsto & (f, G(f), T, G(f)^0) \end{array}$$

qui est borélienne, et de

$$(f, G(f), T, G(f)^0) \mapsto (f, G(f)^0, T|_{G(f)^0})$$

qui est continue par [Fe], théorème 3.2.

Il en résulte que $\mathcal{P}_\lambda(G)$ est l'image réciproque, par l'application borélienne $(f, G(f), T) \mapsto (f, G(f)^0, T|_{G(f)^0})$ de l'ensemble

$$\chi_f = \left\{ (f, G(f)^0, \underbrace{\chi_f \oplus \dots \oplus \chi_f}_{n \text{ fois}}, f \in \mathcal{O}^{\text{ad}}, n \leq m) \right\}.$$

Pour n fixé, l'ensemble $\{(f, G(f)^0, n\chi_f)\}$ est l'image, par une application borélienne (lemme 50), d'un borélien standard (lemme 51); c'est donc un ensemble borélien. L'ensemble X_f est donc une réunion finie de standards, c'est bien un standard, donc un ensemble borélien, ce qui prouve que $\mathcal{P}_\lambda(G)$ est borélien. \square

En conclusion à ce chapitre :

LEMME 53. *Les applications de $\mathcal{P}_\lambda(G)$ dans $\mathcal{O}_\lambda^{\text{ad}}$ et $\mathbf{N}: (f, \tau) \mapsto f$ et $(f, \tau) \mapsto \dim \tau$ sont boréliennes.*

Démonstration. La première affirmation résulte de la définition. Pour la seconde, il suffit de savoir que l'application associant à une classe de représentations irréductibles d'une C^* -algèbre sa dimension est borélienne. \square

Remarque. La construction qui vient d'être faite peut s'étendre de la manière suivante : soit \mathcal{U}^{ad} l'ensemble des formes très bien polarisables et admissible dans \mathfrak{g}^* , et soit $\mathcal{P}'(G)$ le « fibré » construit au-dessus de \mathcal{U}^{ad} comme $\mathcal{P}_\lambda(G)$ l'est au-dessus de $\mathcal{O}_\lambda^{\text{ad}}$. Munissons $\mathcal{P}'(G)$ de la structure borélienne construite de la même façon : la structure borélienne induite à $\mathcal{P}_\lambda(G)$ et celle définie ci-dessus coïncident.

14. L'application $(f, \tau) \rightarrow \pi_{f, \tau}^G$ est borélienne

On a défini sur $\mathcal{P}_\lambda(G)$ une structure borélienne dans le chapitre 13. L'objet de ce chapitre est de montrer que l'application de $\mathcal{P}_\lambda(G)$ dans $\hat{G}: (f, \tau) \rightarrow \pi_{f, \tau}^G$ est borélienne. A ce sujet, remarquons deux choses : premièrement, ce point reste en général implicite dans les papiers sur la question (à l'exception par exemple de [Puk]). Deuxièmement, on peut s'attendre à mieux, à savoir la continuité de l'application. Les travaux de Fell sur la continuité de l'induction des représentations ([Fe]) permettraient de conclure en ce sens si la représentation $\pi_{f, \tau}^G$ était une représentation induite. Or ce n'est qu'une sous-représentation d'une représentation induite. S'il est raisonnable de penser que le spectre de la représentation π_f^G varie continûment en fonction du paramètre (n'oublions pas que notre topologie sur $\mathcal{P}_\lambda(G)$ incorpore la continuité de l'application $f \rightarrow G(f)$), il faut maîtriser le choix de quelle sous-représentation irréductible s'appelle $\pi_{f, \tau}^G$, et parvenir à suivre continûment $\pi_{f, \tau}^G$, en fonction de τ .

La méthode de démonstration est la suivante. On note $\mathcal{K}^{\text{al}}(G)$ l'ensemble des sous-groupes fermés algébriques de G . Soit $\mathcal{X}(G)$ l'ensemble fibré au-dessus de $\mathcal{K}^{\text{al}}(G)$ (de

fibres non localement constantes), dont la fibre au-dessus de $K \in \mathcal{K}^{\text{al}}(G)$ est l'ensemble $\mathcal{P}'(K)$. On va définir sur $\mathcal{X}(G)$ une structure borélienne convenable telle qu'en particulier pour un K fixé dans $\mathcal{K}^{\text{al}}(G)$, la structure borélienne induite sur la fibre au-dessus de K soit celle de $\mathcal{P}'(K)$. Ce sera donc le cas si $K=G$. Ensuite on va montrer que l'application de $\mathcal{X}(G)$ dans $\mathcal{S}(G)$ qui à (K, f, τ) associe $(K, \pi_{f, \tau}^K)$ est borélienne, ce par récurrence sur $\dim \mathfrak{f}$, et en distinguant, en gros, les cas où \mathfrak{f} est réductive des cas où \mathfrak{f} ne l'est pas.

14.1. *Résultats préliminaires sur la topologie de Fell.* La topologie de Fell sur l'ensemble $\mathcal{X}(G)$ a été définie au chapitre 13. On a vu que cette topologie était compacte et métrisable (lemme 47). On peut donc la caractériser avec des suites, et le lemme suivant, classique, rend intuitive cette topologie.

LEMME 54. *Soit G un groupe localement compact séparable, H_n une suite convergente de $\mathcal{X}(G)$ de $\lim H$. Alors*

$$H = \left\{ \lim_n x_n, x_n \in H_n, x_n \text{ suite convergente} \right\}.$$

LEMME 55. *Soit G un groupe métrique localement compact et séparable, et f une application d'un espace métrique E dans $\mathcal{X}(G)$. Supposons qu'on a :*

$$\forall y \in E, \forall K \in \mathcal{X}(G), K \text{ valeur d'adhérence de } f \text{ en } y \Rightarrow K \subset f(y).$$

Alors f est borélienne.

Démonstration. Soit $(x_i)_{i \in \mathbb{N}}$ une famille dense dans G : Soit $b(x_i) = \sup \{b, B(x_i, b) \text{ est compacte}\}$, et $a(x_i) = \inf \{1, \frac{1}{2}b(x_i)\}$. Soit $d_i(H) = \inf \{d(x_i, H) a(x_i)\}$. On sait que l'application de $\mathcal{X}(G)$ dans le cube de Hilbert définie par la famille $(d_i)_{i \in \mathbb{N}}$ est un homéomorphisme dans le cube (cf. [AM], chapitre II, proposition 2.1), et qu'une application f à valeurs dans $\mathcal{X}(G)$ est borélienne ssi, pour tout i , $d_i \circ f$ l'est. On va montrer que pour tout i , $d_i \circ f$ est semi-continue inférieurement.

Soit donc une suite y_n convergeant vers y telle que $d_i \circ f(y_n)$ tende vers b . On veut l'inégalité $b \geq d_i \circ f(y)$. De deux choses l'une :

– $b \geq a(x_i)$. Alors $d_i \circ f(y) \leq a(x_i) \leq b$.

– $b < a(x_i)$. Pour n assez grand, $d_i \circ f(y_n) = d(x_i, f(y_n))$, et $d_i \circ f(y_n) \rightarrow b$. On extrait de la suite $f(y_n)$ une suite qui converge vers $K : f(y_{\varphi(n)})$. Soit $z_n \in f(y_{\varphi(n)})$ avec $b \leq d(z_n, x_i) \leq b + 1/n$. Comme z_n est à valeurs dans le compact $\tilde{B}(x_i, 2a(x_i))$, on peut

extraire de z_n une suite convergente. Pour résumer, on a construit une suite extraite, notée y_n , telle que $y_n \rightarrow y$, $f(y_n) \rightarrow K$, $z_n \in f(y_n)$, $z_n \rightarrow z$, $z \in K$. On a donc $d(x_i, z) = b$; donc $d(x_i, f(y)) \leq b$. \square

Soit E un espace vectoriel réel de dimension finie. Soit $\text{Gr}_i(E)$ l'ensemble des sous-espaces vectoriels de dimension i , et $\text{Gr}(E) = \bigcup_{i=0}^{\dim E} \text{Gr}_i(E)$. On munit $\text{Gr}(E)$ de trois topologies :

- la topologie induite par la topologie de Fell sur l'ensemble des sous-groupes fermés de E ;
- la topologie réunion disjointe des topologies habituelles sur chacune des $\text{Gr}_i(E)$;
- après avoir muni E d'une structure euclidienne, on identifie un élément $F \in \text{Gr}(E)$ au projecteur orthogonal sur F , et on munit $\text{Gr}(E)$ de la topologie sur l'ensemble des projecteurs orthogonaux. ⁽¹⁾

Il est facile de vérifier le :

LEMME 56. *Les trois topologies ainsi définies coïncident.*

LEMME 57. *Soit G un groupe de Lie séparable. L'application L de $\mathcal{H}(G)$ dans $\text{Gr}(\mathfrak{g})$ qui à un sous-groupe fermé H associe son algèbre de Lie est borélienne.*

Démonstration. On applique le lemme 55. Soit H_n une suite de $\mathcal{H}(G)$ qui converge vers H , et $\mathfrak{G}_n, \mathfrak{G}$ leurs algèbres de Lie. Soit η' une valeur d'adhérence de η_n . On montre que $\mathfrak{G}' \subset \mathfrak{G}$. Fixons ε tel que \exp est un difféomorphisme de $B(0, \varepsilon)$ sur un voisinage V de e dans G . Soit $X \in \mathfrak{G}'$. On montre que $X \in \mathfrak{G}$, et il suffit de le faire pour $X \in B(0, \varepsilon)$. Soit $\mathfrak{G}_{\psi(n)}$ une sous-suite de η_n tendant vers η' . Par le lemme 54, il existe une suite $X_{\psi(n)} \in \mathfrak{G}_{\psi(n)}$ qui converge vers X . Mais alors $\exp X_{\psi(n)}$ tend vers $\exp X$, qui est donc dans H . Le même argument s'applique à tX pour $t \leq 1$ donc $X \in \mathfrak{G}$. \square

Dans l'appendice A du chapitre II de [AM] il est montré que l'ensemble des sous-groupes connexes et fermés $\mathcal{H}^c(G)$ est borélien dans $\mathcal{H}(G)$ (c'est même un F_σ). En particulier, c'est donc un borélien standard (puisque $\mathcal{H}(G)$ l'est), et l'application L est une bijection borélienne de $\mathcal{H}^c(G)$ sur l'ensemble $\text{AL}(\mathfrak{g})$ des algèbres de Lie des sous-groupes fermés de G . D'après le théorème de Souslin (cf. [AM], chapitre I, proposition 2.5), L est alors un isomorphisme borélien et $\text{AL}(\mathfrak{g})$ est une partie borélienne de $\text{Gr}(\mathfrak{g})$. On a donc montré le lemme suivant.

⁽¹⁾ Je remercie J. Lafontaine de m'avoir indiqué cette définition de la topologie.

LEMME 58. *L'application \exp est borélienne de $\text{Al}(\mathfrak{g})$ dans $\mathcal{K}_c(G)$.*

Remarque. L'exemple suivant illustre une des difficultés de la topologie de Fell. Dans $\mathbf{R}^2/\mathbf{Z}^2$, on considère le groupe H_n engendré par $(1, 1+1/n)$, d'algèbre de Lie $\mathfrak{G}_n = \mathbf{R}(1, 1+1/n)$. On vérifie facilement que $H_n \rightarrow \mathbf{R}^2/\mathbf{Z}^2$ lorsque n tend vers l'infini, alors que $\mathfrak{G}_n \rightarrow \mathfrak{G}_\infty = \mathbf{R}(1, 1)$. En particulier, ceci montre que l'application $H \rightarrow \mathfrak{G}$ n'est pas continue en général, pas plus que l'application $H \rightarrow \dim H$.

LEMME 59. *Si G est une groupe de Lie séparable, l'application de $\mathcal{K}(G)$ dans \mathbf{N} : $H \rightarrow \dim H$ est borélienne.*

Démonstration. L'application $H \rightarrow L(H)$ est borélienne et l'application $\mathfrak{G} \rightarrow \dim \mathfrak{G}$ est continue. \square

LEMME 60. *La restriction de l'application L au borélien $\{H, \dim H = p\}$ est continue (mais ce n'est pas un homéomorphisme).*

Démonstration. Cela résulte du lemme 59 et de la démonstration du lemme 57.

LEMME 61. *Soit $\mathcal{K}_p(G)$ l'ensemble des sous-groupes fermés de dimension p du groupe de Lie séparable G . L'application de $\mathcal{K}_p(G)$ dans $\mathbf{N} \cup \{\infty\}$ qui à un sous-groupe K associe le nombre $p(K)$ de ses composantes connexes est borélien.*

Démonstration. Soit K_n une suite de $\mathcal{K}_p(G)$ convergeant vers K . Soit K' une valeur d'adhérence de la suite K_n^0 . Il est clair que $K' \subset K$, et que, par le lemme 60, $K^0 \subset K'$. On montre que l'application est semi-continue supérieurement. Soit l une valeur d'adhérence de la suite $p(K_n)$. On veut montrer que $l \leq p(K)$, et on peut évidemment supposer que $p(K)$ est fini égal à d . Il est évident qu'on peut extraire de K_n une suite $K_{\varphi(n)}$ telle qu'à la fois $K_{\varphi(n)} \rightarrow K$, $K_{\varphi(n)}^0 \rightarrow K'$ et $p(K_{\varphi(n)}) = l$ pour tout n .

Soit x^1, \dots, x^k ($k \leq d$) dans K tels que K soit la réunion disjointe des $x^i K'$. Soit ω un voisinage ouvert de K' dans G tel que les $x^i \omega$ soient disjoints et ω' un autre voisinage ouvert de K' tel que $\bar{\omega}' \subset \omega$. Soit enfin $x_{\varphi(n)}^i$ une suite telle que $x_{\varphi(n)}^i \in K_{\varphi(n)}$ et $x_{\varphi(n)}^i \rightarrow x^i$. Pour n assez grand, $K_{\varphi(n)}^0 \subset \bar{\omega}'$, et les $x_{\varphi(n)}^i \omega$ sont des voisinages ouverts disjoints de $x_{\varphi(n)}^i K_{\varphi(n)}^0$. Il en résulte que $k = l$ et par conséquent $l \leq d$. L'application p est s.c.s. donc borélienne. \square

LEMME 62. *L'application de $\text{AL}(\mathfrak{g})$ dans $\text{AL}(\mathfrak{g})$ qui à \mathfrak{h} associe son plus grand idéal nilpotent $\mathfrak{n}_{\mathfrak{h}}$ est borélien. La restriction de cette application au borélien $\{\mathfrak{h}, \dim \mathfrak{n}_{\mathfrak{h}} = x\}$ est continue.*

Démonstration. On utilise le lemme 55. Soit \mathfrak{h}_n une suite tendant vers \mathfrak{h} , n_n et n les plus grands idéaux nilpotents correspondants, et n' une valeur d'adhérence de n_n . On vérifie que n' est un idéal nilpotent de \mathfrak{h} :

- $n' \subset \mathfrak{h}$. On a $n' = \lim n_{\psi(n)}$, ($n_{\psi(n)}$ une suite extraite de n_n). Donc pour tout $X \in n'$, il y a une suite $X_{\psi(n)}$, $X_{\psi(n)} \in n_{\psi(n)}$ telle que $\lim X_{\psi(n)} = X$. Donc $X \in \mathfrak{h}$ (lemme 54).
- n' est un idéal dans \mathfrak{h} par une démonstration analogue.
- n' est nilpotent. Il en résulte que $n' \subset n$.
- Sur $\{\mathfrak{h}, \dim n_{\mathfrak{h}} = x\}$, il est clair que $n' = n$; l'application y est continue. \square

On montre de même :

LEMME 63. *L'application $(\mathfrak{h}, \mathfrak{h}') \mapsto \mathfrak{h} \cap \mathfrak{h}'$ est borélienne.*

LEMME 64. *Soit $AL_a(\mathfrak{g})$ l'ensemble des sous-algèbres de Lie algébriques de l'algèbre de Lie algébrique \mathfrak{g} . L'application qui à une sous-algèbre \mathfrak{h} associe son radical unipotent $u_{\mathfrak{h}}$ est borélienne. Sa restriction à l'ensemble borélien $\{\mathfrak{h}, \dim n_{\mathfrak{h}} = x, \dim u_{\mathfrak{h}} = y\}$ est continue.*

Démonstration. A cause du lemme 62, il suffit de montrer l'application $\mathfrak{h} \mapsto u_{\mathfrak{h}}$ est borélienne sur l'ensemble des algèbres de Lie nilpotentes d'une dimension donnée. On utilise le lemme 55; il suffit de démontrer la chose suivante : soit \mathfrak{h}_n une suite tendant vers \mathfrak{h} , u_n et u les radicaux unipotents de \mathfrak{h}_n et \mathfrak{h} , u' une valeur d'adhérence de u_n ; alors $u' \subset u$, ce qui est immédiat. \square

LEMME 65. *L'ensemble des $\mathfrak{h} \in AL_a(\mathfrak{g})$ dont le radical unipotent a une dimension donnée est borélien pour la structure induite sur $AL_a(\mathfrak{g})$. En particulier, l'ensemble des sous-algèbres réductives de \mathfrak{g} est borélien.*

Démonstration. Cela résulte des lemmes 59 et 64. \square

14.2 *Définition d'une topologie sur $\mathcal{X}(G)$.* Considérons une structure euclidienne sur \mathfrak{g} , qui permet d'identifier le dual \mathfrak{h}^* de toute sous-algèbre de Lie \mathfrak{h} de \mathfrak{g} à un sous-espace vectoriel de \mathfrak{g}^* . On identifie ainsi $\mathcal{P}'(K)$, pour $K \in \mathcal{K}^{\text{al}}(G)$, à une partie de $\mathfrak{g}^* \times \mathcal{S}(G)$. $\mathcal{X}(G)$ s'identifie alors à une partie de $\mathcal{K}(G) \times \mathfrak{g}^* \times \mathcal{S}(G)$. On a défini sur $\mathcal{K}(G)$ et $\mathcal{S}(G)$ des topologies, sur \mathfrak{g}^* on a une topologie naturelle, on obtient donc sur $\mathcal{X}(G)$ une certaine topologie et la structure borélienne qui lui est associée.

LEMME 66. *Pour K fixé, la topologie induite sur la fibre au-dessus de K par celle de $\mathcal{X}(G)$ coïncide avec celle de $\mathcal{P}'(K)$.*

Démonstration. D'abord, il résulte du lemme 3.2 de [Fe] que si G_1 est un sous-groupe fermé de G , l'injection canonique de $\mathcal{S}(G_1)$ dans $\mathcal{S}(G)$ est un homéomorphisme de $\mathcal{S}(G_1)$ sur son image. Fixons $K \in \mathcal{K}^{\text{al}}(G)$. La topologie induite par celle de $\mathcal{S}(G)$ sur $\mathcal{S}(K)$ est celle de $\mathcal{S}(K)$, donc la topologie sur la fibre au-dessus est bien celle de $\mathcal{P}(K)$. \square

Le sous-groupe $K \in \mathcal{K}^{\text{al}}(G)$ étant donné, on note $u_{\mathfrak{t}}$ le radical unipotent de son algèbre de Lie, et U_K son radical unipotent.

LEMME 67. *L'application qui au couple $(K, f) \in \mathcal{K}(G) \times \mathfrak{g}^*$ associe le stabilisateur $K(\nu_f)$ dans K de la restriction ν_f de f à $u_{\mathfrak{t}}$ est borélienne. Plus précisément, il existe une partition dénombrable de boréliens de $\mathcal{K}^{\text{al}}(G) \times \mathfrak{g}^*$ telle que la restriction à chacun de ces boréliens de l'application soit continue.*

Démonstration. Grâce aux lemmes 59, 60 et 64, on peut se limiter à des boréliens où $\dim K$, $\dim U_K$, $\dim U_{K(\nu_f)}$, $K(f|_k)$ et $K(\nu_f)$ ont une dimension donnée. Soit ω un tel borélien. Supposons que $(K, f) \rightarrow (K_0, f_0)$ dans ω . On montre par un raisonnement analogue à ceux qui précèdent, que toute valeur d'adhérence de $K(\nu_f)$ est un sous-groupe de $K_0(\nu_{f_0})$ qui contient $K_0(\nu_{f_0})^0$. Le lemme 55 nous permet donc de conclure que l'application est borélienne. Restreignons-nous maintenant à l'ensemble borélien des (K, f) tels que $K(\nu_f)$ a un nombre donné de composantes connexes. La restriction de l'application y est bien continue. \square

LEMME 68. *L'application Φ qui à $(K, f, \tau) \in \mathcal{K}(G)$ associe $(K(\nu_f), f_1, \tau_1)$, où $f_1 = f|_{K(\nu_f)}$ et τ_1 est la représentation de $K(\nu_f)(f_1)$ définie au § 5.5, est borélienne, et continue sur chacun des boréliens définis au lemme 67.*

Démonstration. Sur un borélien ω_i du lemme 67, l'application $(K, f, \tau) \rightarrow K(\nu_f)$ est continue. Il est clair que $f \rightarrow f_1$ est continue. Il reste à montrer que l'application $(K, f, \tau) \rightarrow (K(\nu_f)(f_1), \tau_1)$ est continue. Or $K(\nu_f)(f_1) = K(f|_{\mathfrak{t}}) U_{K(\nu_f)}$. Par définition, l'application $(K, f, \tau) \rightarrow (K(f|_{\mathfrak{t}}), \tau)$ est continue, et on constate facilement que l'application $(K, f, \tau) \rightarrow (U_{K(\nu_f)}, \chi_f)$ est continue sur ω_i . On vérifie immédiatement que l'application $(K, f, \tau) \rightarrow K(f|_{\mathfrak{t}}) U_{K(\nu_f)}$ est continue.

Si donc $(K(f|_{\mathfrak{t}}) U_{K_0(\nu_{f_0})}, \tau'_0)$ est une valeur d'adhérence, au voisinage de (K_0, f_0, τ_0) , de l'application Φ , il est immédiat de remarquer que $\tau'_0|_{K(f_0)} = \tau_0$ et $\tau'_0|_{U_{K_0(\nu_{f_0})}} = \chi_{f_0}$, et donc que $\tau'_0 = \tau_0$, ce qui prouve la continuité. \square

On peut résumer les résultats qui précèdent par la proposition suivante :

PROPOSITION 15. *Il existe une partition borélienne dénombrable de $\mathcal{X}_\lambda(G) : (\Omega_i)_{i \in \mathbb{N}}$ telle que la restriction à Ω_i des applications associant à (K, f, τ) respectivement \mathfrak{k} , le radical unipotent u de \mathfrak{k} , le sous-groupe $U_K = \exp u$, les stabilisateurs $K(v_f)$ et $\mathfrak{k}(v_f)$ de la restriction v_f de f à $u_{\mathfrak{k}}$ dans K et \mathfrak{k} , et $u_{\mathfrak{k}}(v_f)$ soient continues, ainsi que $\dim \mathfrak{k}$, $\dim u_{\mathfrak{k}}$, $\dim \mathfrak{k}(v_f)$. L'application $(K, f, \tau) \mapsto (K(v_f), f_1, \tau_1)$ est alors continue sur Ω_i pour tout i .*

On sait que (cf. chapitre 5, § 5) que v_f définit une représentation irréductible de $U_K : \pi(U_K, v_f)$.

LEMME 69. *L'application associant à (K, f, τ) dans $\mathcal{X}_\lambda(G)$ le couple $(U_K, \pi(U_K, v_f))$ est continue sur chaque borélien Ω_i de la proposition 15.*

Démonstration. Supposons que $(K_\lambda, f_\lambda, \tau_\lambda)$ tende vers (K, f, τ) dans Ω_i . Notons U_λ, v_λ au lieu de U_{K_λ} et v_{f_λ} . Il est immédiat de constater que la dimension des polarisations en v_λ est un entier qui ne dépend que de Ω_i . Choisissons pour tout λ une polarisation réelle \mathfrak{h}_λ en v_λ . Dans la grassmannienne, les valeurs d'adhérences de \mathfrak{h}_λ sont des polarisations \mathfrak{h} en v . Soit $H_\lambda = \exp \mathfrak{h}_\lambda, \chi_\lambda$ le caractère de H_λ de différentielle $2i\pi v_\lambda|_{\mathfrak{h}_\lambda}$. On a $\pi(U_\lambda, v_\lambda) = \text{Ind}_{H_\lambda \uparrow N_\lambda} \chi_\lambda$. Extrayons de l'application $\pi(U_\lambda, v_\lambda)$ une application $\pi(U_{\lambda_i}, v_{\lambda_i})$. L'application correspondante \mathfrak{h}_{λ_i} a une valeur d'adhérence \mathfrak{h} . On vérifie sans mal que la valeur d'adhérence correspondante de $(H_{\lambda_i}, \chi_{\lambda_i})$ est (H, χ) où $H = \exp \mathfrak{h}$, et χ le caractère de différentielle $2i\pi v|_{\mathfrak{h}}$. Par continuité de l'induction par rapport aux paramètres, (cf. [Fe], théorème 4.2), $(U_{\lambda_i}, \pi(U_{\lambda_i}, v_{\lambda_i}))$ admet $(U_K, \pi(U_K, v_f))$ comme valeur d'adhérence ce qui suffit à montrer la continuité de l'application. \square

Il reste encore à démontrer un dernier résultat concernant la continuité, sur les boréliens d'une certaine partition dénombrable de $\mathcal{X}_\lambda(G)$, de l'application associant à (K, f, τ) le couple $(K(v_f), W_{v_f})$, où W_{v_f} est la représentation métaplectique de $K(v_f)$ (cf. § 5.5).

PROPOSITION 16. *Il existe une partition borélienne de $\mathcal{X}_\lambda(G) (\Omega'_i)$ plus fine que (Ω_i) telle que l'application*

$$(K, f, \tau) \mapsto (K(v_f), W_{v_f})$$

soit continue sur chacun des Ω'_i .

Démonstration. Sur chaque Ω_i , la dimension et le nombre des composantes connexes de $K(v_f)$ est constant. Soit $p = \dim K(v_f)$, d le nombre de composantes connexes, et $\mathcal{K}_p^d(G)$ le borélien de $\mathcal{H}(G)$ formé des sous-groupes fermés de dimension p et à $d+1$ composantes connexes. Soit $K \in \mathcal{K}_{p+1}^d(G)$ et K^0, \dots, K^d ses composantes connexes. En reprenant l'argument de la démonstration du lemme 61, il existe un voisinage ouvert ω de K^0 , et une famille $x_i \in K^i$ telle que les $x_i \omega$ soient des ouverts disjoints et telle qu'il existe un voisinage ouvert U de K dans $\mathcal{K}_\lambda^p(G)$ vérifiant :

$\forall K' \in U$, il existe une seule composante connexe de K' contenue dans $x_i \cdot \omega$.

On note K'^i la composante connexe incluse dans $x_i \cdot \omega$. Comme $\mathcal{H}(G)$ est dénombrablement engendré, on a montré qu'il existait une partition Ω'_i plus fine que Ω_i sur laquelle on pouvait numéroter continûment les composantes connexes de $K(v_f)$: $K(v_f)^0, K(v_f)^1, \dots, K(v_f)^{p_i}$; i.e. on a : si $(K', f', \tau') \rightarrow (K, f, \tau)$ dans Ω'_i , alors $K'(v_f)^j \rightarrow K(v_f)^j$ dans l'ensemble des fermés de K . Quitte à encore raffiner Ω'_i , la proposition 1.12.10 de [Dix 3] fournit un procédé continu de construction d'une polarisation réelle \mathfrak{p}_f en v_f . Soit, pour $(K, f, \tau) \in \Omega'_i$ et $j \leq p_i$

$$n(K, f, j) = \inf \{ \dim (k \mathfrak{p}_f \cap \mathfrak{p}_f), k \in K(v_f)^j \}$$

et

$$X(K, f, j) = \{ k \in K(v_f)^j, \dim (k \mathfrak{p}_f \cap \mathfrak{p}_f) = n(K, f, j) \}$$

$X(K, f, j)$ est un ouvert de Zariski⁽¹⁾ dans $K(v_f)^j$. Soit n_j une famille d'entiers ($j \leq p_i$), et soit

$$\Omega''_i(n_j) = \{ (K, f, \tau) \in \Omega'_i, n(K, f, j) = n_j \}.$$

Montrons que l'application $(K, f, \tau) \rightarrow n(K, f, j)$ est s.c.s. Soit (K_m, f_m, τ_m) une suite tendant vers (K, f, τ) dans Ω'_i . Soit $k \in X(K, f, j)$, et soit k_m une suite de K_m – et même de K_m^j , on peut le supposer – tendant vers k . Comme $X(K_m, f_m, j)$ est un ouvert de Zariski dans K_m^j , on peut supposer que $k_m \in X(K_m, f_m, j)$. On a donc $\dim (k_m \cdot \mathfrak{p}_{f_m} \cap \mathfrak{p}_{f_m}) = n(K_m, f_m, j)$. Soit l une valeur d'adhérence de la suite $n(K_m, f_m, j)$. Quitte à extraire une suite, on peut supposer que $n(K_m, f_m, j) = l$, donc que $\dim (k_m \mathfrak{p}_{f_m} \cap \mathfrak{p}_{f_m}) = l$. Mais à la limite, $\dim (k \mathfrak{p}_f \cap \mathfrak{p}_f) \geq \limsup \dim (k_m \mathfrak{p}_{f_m} \cap \mathfrak{p}_{f_m}) = l$. L'application n est donc bien s.c.s. Les $\Omega''_i(n_j)$ sont des boréliens et on a construit une partition de Ω'_i ,

(¹) i.e. un ouvert pour la topologie induite par la topologie de Zariski en $K(v_f)$.

donc une partition Ω'_i de $\mathcal{X}_\lambda(G)$, telle que sur Ω'_i , les applications $(K, f, \tau) \rightarrow n(K, f, j)$ soient constantes.

Montrons la continuité sur Ω'_i de $(K, f, \tau) \rightarrow (K(\nu), W_\nu)$. Soit d la dimension commune des u_f/p_f pour $(K, f, \tau) \in \Omega'_i$. Soit (K_s, f_s, τ_s) une application filtrée tendant vers (K, f, τ) dans Ω'_i . On utilise la construction faite par Lion de la représentation métaplectique (cf. [Li 2]). Pour alléger les notations, on écrit u_s au lieu de u_f , p_s au lieu de p_f , ν_s au lieu de ν_f , u, p, ν au lieu de u_f, p_f, ν_f .

Choisissons une base coexponentielle X^1, \dots, X^d à p dans u (cf. [BC], chapitre 1), c'est-à-dire une base d'un supplémentaire de p dans u telle que l'application de $\mathbf{R}^d \times p$ dans U :

$$(t_1, \dots, t_d, P) \rightarrow \exp t_1 X^1 \dots \exp t_d X^d \cdot \exp P$$

soit un difféomorphisme.

Montrons qu'on peut choisir une base coexponentielle $X^1(s), \dots, X^d(s)$ à p_s dans u_s telle que $\lim_s X^i(s) = X^i$. Il suffit de le faire pour $d=1$, un raisonnement par récurrence permettant de conclure immédiatement. Or pour $d=1$, tout vecteur $X(s)$ n'appartenant pas à p_s convient, on peut donc bien choisir $X(s)$ de limite X . La polarisation p_s (resp. p) fournit un modèle de $\pi(U_s, \nu_s)$ (resp. $\pi(U, \nu)$) : $\pi(U_s, \nu_s, p_s)$ (resp. $\pi(U, \nu, p)$). La base coexponentielle $X^i(s)$ (resp. X^i) permet d'identifier l'espace $\mathcal{H}(U_s, \nu_s, p_s)$ de $\pi(U_s, \nu_s, p_s)$ (resp. $\mathcal{H}(U, \nu, p)$ de $\pi(U, \nu, p)$) à $L^2(\mathbf{R}^d)$.

Soit $k_s \in K(\nu_s)$, $P_s = \exp p_s, \chi_s$ le caractère de P_s de différentielle $2i\pi\nu_s|_{p_s}$ (resp. $k \in K(\nu), P, \chi, \dots$). On considère l'intégrale d'entrelacement :

$$I(p_s, \mathfrak{f}_s \circ p_s) \varphi(n_s) = \int_{P_s/k_s P_s \cap P_s} \varphi(n_s p_s) \chi_s(p_s) dp_s$$

(pour φ continue à support compact modulo P_s dans $\mathcal{H}(U_s, \nu_s, \mathfrak{f}_s, p_s)$). On considère l'opérateur $A(k_s)$ de $\mathcal{H}(U_s, \nu_s, p_s)$ dans $\mathcal{H}(U_s, \nu_s, k_s, p_s)$ défini par la formule

$$(A(k_s) \varphi)(n_s) = \varphi(k_s^{-1} n_s k_s).$$

On sait [Li 2] qu'on a un modèle de $W_s = W_\nu$ dans $\mathcal{H}(U_s, \nu_s, p_s)$ en posant

$$W_s(k_s) = I(p_s, k_s \cdot p_s) \circ A(k_s).$$

Dorénavant, $k_s \in X(K_s, f_s, j)$ tend vers $k \in X(K, f, j)$. Comme on l'a fait plus haut, choisissons une base coexponentielle de $k_s p_s \cap p_s$ dans p_s , $X^{d+1}(s, k_s), \dots, X^{d+r}(s, k_s)$

telle que $\lim X^l(s, k_s) = X^l$, où X^{d+1}, \dots, X^{d+r} est une base coexponentielle de $k \cdot p \cap \mathfrak{p}$ dans \mathfrak{p} . Ecrivons une formule de décomposition pour n_s dans N_s :

$$n_s = \exp \xi_1(n_s) X^1(s) \exp \xi_2(n_s) X^2(s) \dots \exp \xi_d(n_s) X^d(s) \exp \psi_s(n_s).$$

Le groupe U étant simplement connexe, si $n_s \in U_s$ tend vers $n \in U$, $\xi_i(n_s) \rightarrow \xi_i(n)$ et $\psi_s(n_s) \rightarrow \psi(n)$ et $\psi_s(n_s) \rightarrow \psi(n)$.

Cette formule nous permet d'en obtenir une pour $W_s(k_s)$:

$$\begin{aligned} & [W_s(k_s) \varphi](t_1, \dots, t_d) \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} \varphi(\xi_i(k_s^{-1} \exp t_1 X^1(s) \dots \exp t_d X^d(s) \exp u_{d+1} X^{d+1}(s, k_s) \dots \exp u_{d+r} X^{d+r}(s, k_s) k_s)) \\ & \quad \times \chi_s(\psi_s(k_s^{-1} \exp t_1 X^1(s) \dots \exp t_d X^d(s) \exp u_{d+1} X^{d+1}(s, k_s) \dots \exp u_{d+r} X^{d+r}(s, k_s) k_s)) \\ & \quad \times \chi_s(\exp(u_{d+1} X^{d+1}(s, k_s)) \dots \exp(u_{d+r} X^{d+r}(s, k_s))) du_{d+1} \dots du_{d+r}. \end{aligned}$$

On sait que pour une fonction dans l'espace de Schwartz $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ l'intégrale est convergente et définit un opérateur unitaire. Le théorème de convergence dominée et la continuité des ξ_i et de ψ nous permettent de conclure que $W_s(k_s)$ tend fortement vers $W(k)$.

Montrons maintenant que pour tout k dans $K(\nu_f)$, pour toute application $k_s \in K(\nu_s)$ de limite k , $W_s(k_s)$ tend vers $W(k)$. Montrons-le d'abord pour $k \in K(\nu)^0$. Soit $\omega = X(K, f, 0)$.

On montre par récurrence sur n que pour tout k dans ω^n , pour toute application k_s de limite k , $W_s(k_s)$ tend vers $W(k)$. La propriété est vraie pour $n=1$. Montrons-la pour $n+1$. Soit $k = k_1 \cdot k_2$, $k_1 \in \omega$ et $k_2 \in \omega^n$, et soit k_s une application de limite k . Alors $k_s^{-1} k_s$ tend vers k_2 . Soit $k'_s \in X(K, f, 0)$ une application de limite k_1 . $k'_s^{-1} k_s$ tend vers k_2 , donc $W_s(k'_s^{-1} \cdot k_s)$ tend vers $W(k_2)$, donc $W_s(k_s)$ tend vers $W(k)$. On conclut pour $K(\nu_f)$ tout entier en remarquant que $K(\nu_f) = (\cup_j X(K, f, j) \cdot K(\nu_f)^0)$. \square

On peut maintenant passer à la démonstration du théorème principal du chapitre.

THÉORÈME 6. *L'application π de $\mathcal{X}(G)$ dans $\mathcal{A}(G)$ qui à (K, f, τ) associe $\pi_{f, \tau}^K$ est borélienne.*

Démonstration. On procède par récurrence sur $\dim \mathfrak{k}$: les lemmes 58 et 59 nous montrent que l'ensemble $\mathcal{X}_p(G)$ des triplets (K, f, τ) avec $\dim K = p$ est borélien. Il suffit de montrer que π est borélienne sur \mathcal{X}_p , et on le fait par récurrence sur p .

On démontre la proposition plus précise suivante :

(H_n) Il existe une partition borélienne dénombrable $\Delta_{i,n}$ de $\mathcal{X}_n(G)$ telle que la restriction de π à $\Delta_{i,n}$ soit continue.

Pour $n=0$ il n'y a rien à démontrer. Plaçons-nous dans $\mathcal{X}_n(G)$, considérons l'ensemble des Ω'_i (proposition 15 et 16) qui sont contenus dans $\mathcal{X}_n(G)$. Soit I l'ensemble d'indices correspondants. Soit

$$I_1 = \{i \in I, \forall (K, f, \tau) \in \Omega'_i, \dim \mathfrak{k}(\nu_p) < \dim \mathfrak{k}\}$$

$$I_2 = \{i \in I, \forall (K, f, \tau) \in \Omega'_i, \dim \mathfrak{k}(\nu_p) = \dim \mathfrak{k}\}.$$

Soit $i \in I_2$; montrons la continuité sur Ω'_i .

Puisque $\mathfrak{k}(\nu_p) = \mathfrak{k}$, $u_t(\nu_p) = u_t$ et $\mathfrak{k}(f)$ contient u_t . Soit $K' = K(\nu_p)$. On a $K(f) \subset K'$, et donc $K(f) = K'(f)$. Ecrivons la décomposition de Levi $K' = K'_1 U_K$. Soit \mathfrak{k}'_1 l'algèbre de Lie de $K'_1, f'_1 = f|_{\mathfrak{k}'_1}$. On vérifie facilement que $K(f) = K'_1(f_1) \cdot U_K$. L'hypothèse que f est bien polarisable entraîne que f_1 l'est également. L'admissibilité de f entraîne celle de f_1 . Puisque \mathfrak{k}'_1 est réductive, il existe donc une polarisation η'_1 , en f'_1 qui est $K'_1(f_1)$ stable et qui vérifie la condition de Pukanszky. Alors $\eta = \eta'_1 + u_t$ est une polarisation en f vérifiant la condition de Pukanszky et qui est $K(f)$ -stable. Par la proposition 9 on a dans ce cas $\pi_{f,\tau}^K = \text{Ind}_{K(f)H \uparrow K} \bar{\tau}$.

On peut reproduire le raisonnement fait dans le cas nilpotent pour montrer la continuité de π (cf. lemme 69).

Soit $i \in I_1$. Soit $\Delta'_{j,n}$ l'image réciproque, par l'application borélienne $(K, f, \tau) \rightarrow (K(\nu_p), f_1, \tau_1)$ (cf. proposition 15) de la partition $\Delta_{j,p}$ ($p \leq n-1$) et $\Delta_{j,n}$ les intersections de ces boréliens avec Ω'_i .

Montrons la continuité de π sur $\Delta_{j,n}$. Sur $\Delta_{j,n}$, les applications associant à (K, f, τ) $(K(\nu_p), f_1, \tau_1)$, $(K(\nu_p), W_\nu)$ et $(U_K, \pi_{\nu_j}^{U_K})$ sont continues (propositions 15 et 16). L'application $(K(\nu_p), f_1, \tau_1) \rightarrow (K(\nu_p), \pi_{f_1, \tau_1}^{K(\nu_p)})$ est continue. Le produit tensoriel étant évidemment continu, et l'induction étant continue ([Fe], théorème 4.2), le résultat est démontré. \square

COROLLAIRE. L'application de $\mathcal{P}_\lambda(G)$ dans \hat{G} qui au couple (f, τ) associe la représentation $\pi_{f,\tau}^G$ est borélienne.

Démonstration. C'est la conséquence du lemme 66, du théorème 5, et de l'inclusion $\mathcal{P}_\lambda(G) \subset \mathcal{P}'(G)$. \square

15. Enoncé du théorème de Plancherel

Rappelons brièvement les données : G est un groupe algébrique complexe qu'on considère comme un groupe de Lie réel, Z est un sous-groupe fermé et connexe du centre de G , λ est une forme linéaire sur \mathfrak{z} telle que $2i\pi\lambda$ s'intègre en un caractère χ_λ de Z .

15.1. *Normalisation des mesures.* On fixe une mesure de Haar dg sur G , ce qui détermine une mesure de Haar dg_0 sur G^0 par la formule :

$$\int_G f(g) dg = \sum_{\gamma \in G/G^0} \int_{G^0} f(\gamma g_0) dg_0.$$

On fixe également une mesure de Haar dz sur Z . Sur T (cf. chapitre 11, b), et sur $Z \cap T$ (qui est connexe) on considère les mesures de Haar normalisées (i.e. de masse totale 1). On fixe enfin une mesure de Haar da sur A' et donc une mesure de Haar da_0 sur A . Tous ces choix entraînent des normalisations des mesures de Lebesgue sur \mathfrak{g} , \mathfrak{a} , \mathfrak{z} , \mathfrak{t} , $\mathfrak{z} \cap \mathfrak{t}$, qu'on notera $d_{\mathfrak{g}}$, $d_{\mathfrak{a}}$ etc.

Systematiquement, lorsqu'on aura fixé une mesure d_E sur un espace vectoriel E , la mesure duale d_{E^*} sur E^* sera normalisée en sorte qu'on ait la formule :

$$\int_{E^*} \int_E \varphi(X) e^{2i\pi\langle f, X \rangle} d_E X d_{E^*} f = \varphi(0).$$

Si F est un sous-espace vectoriel de E , si $e \in F^*$, et si $E_e^* = \{f \in E^*, f|_F = e\}$, le choix de mesures sur E et F en détermine un sur E_e^* par la formule :

$$\int_{E_e^*} \int_E \varphi(X) e^{2i\pi\langle f, X \rangle} d_E X d_{E_e^*} f = \int_F \varphi(Y) e^{2i\pi\langle e, Y \rangle} d_F Y.$$

Enfin, en l'absence d'une indication contraire, si E s'exprime comme somme directe de E_1 et E_2 , les choix de mesure sur E , E_1 , E_2 vérifieront

$$\int_E \varphi(X) d_E X = \int_{E_1} \int_{E_2} \varphi(X_1 + X_2) d_{E_1} X_1 d_{E_2} X_2.$$

C'est ainsi qu'on fixe une mesure sur \mathfrak{p} , et aussi une base β de \mathfrak{p} telle que la forme volume associée à β définisse exactement la mesure $d_{\mathfrak{p}}$. On a donc une normalisation du pfaffien $D(l)$ de la restriction de la forme B_l ($l \in \mathfrak{g}^*$) à \mathfrak{p} .

15.2. *Définition d'une mesure sur $\mathcal{P}_\lambda(G)/G$.* On définit d'abord une mesure sur $\mathcal{O}_\lambda^{\text{ad}}/G$ à l'aide de la description de cet espace donnée au théorème 5. On a en effet

$$\mathcal{O}_\lambda^{\text{ad}}/G = \bigcup_{\xi \in R} (\mathcal{C}_{\lambda, \xi}^{\text{ad}}/A').$$

On a déterminé une mesure sur \mathfrak{g} , \mathfrak{t} , $\mathfrak{g} \cap \mathfrak{t}$, donc aussi $\mathfrak{g} + \mathfrak{t}$ qui est inclus dans α . Soit $\alpha_{\lambda, \xi}^* = \{f \in \alpha^*, f|_{\mathfrak{g}} = \lambda \text{ et } f|_{\mathfrak{t}} = \xi\}$. Les choix qui précèdent déterminent une mesure $d_{\alpha_{\lambda, \xi}^*}$ sur $\alpha_{\lambda, \xi}^*$, et on sait que $\mathcal{C}_{\lambda, \xi}^{\text{ad}}$ est un ouvert de Zariski dans $\alpha_{\lambda, \xi}^*$. On considère la mesure μ_λ sur $\mathcal{C}_\lambda^{\text{ad}}$ définie par la formule

$$\int_{\mathcal{C}_\lambda^{\text{ad}}} \varphi(f) d\mu_\lambda(f) = \sum_{\xi \in R} \int_{\mathcal{C}_{\lambda, \xi}^{\text{ad}}} \varphi(v) |D(v)| d_{\alpha_{\lambda, \xi}^*} v.$$

Pour la structure borélienne induite sur $\mathcal{C}_\lambda^{\text{ad}}$, μ_λ est bien une mesure.

LEMME 70. *La mesure μ_λ est une mesure A' -invariante sur $\mathcal{C}_\lambda^{\text{ad}}$.*

Démonstration. Puisque A' normalise T , ainsi bien sûr que \mathfrak{g} , A' permute entre eux les différents $\mathcal{C}_{\lambda, \xi}^{\text{ad}}$. On a pour $h \in A'$, $D(h \cdot f) = \det(\text{ad}_v h^{-1}) D(f) = \det \text{ad}_\alpha \cdot h \cdot D(f)$ puisque G est unimodulaire. D'autre part, l'action de h sur α multiplie la mesure par $|\det \text{ad}_\alpha h|$; par dualité la mesure sur α^* , et donc sur les $\alpha_{\lambda, \xi}^*$, est multipliée par $|\det \text{ad}_\alpha h|^{-1}$. \square

Considérons, sur chaque orbite ω de A' dans α^* , la mesure de Liouville β_ω (cf. notations générales). La mesure β_ω est A' -invariante, et, d'après [DR], proposition 5.14, l'application $\omega \rightarrow \int \varphi(f) d\beta_\omega(f)$ est mesurable pour toute fonction mesurable φ positive ou nulle. On peut donc désintégrer la mesure μ_λ , ce qui définit une mesure m_λ sur $\mathcal{C}_\lambda^{\text{ad}}/A'$:

$$\int_{\mathcal{C}_\lambda^{\text{ad}}} \varphi(f) d\mu_\lambda(f) = \int_{\mathcal{C}_\lambda^{\text{ad}}/A'} dm_\lambda(\omega) \int_\omega \varphi(f) d\beta_\omega(f).$$

On a ainsi défini une mesure, notée encore m_λ , sur l'ensemble $\mathcal{O}_\lambda^{\text{ad}}/G$. On est maintenant en mesure de définir une mesure M_λ sur $\mathcal{P}_\lambda(G)/G$ par la formule :

$$\int_{\mathcal{P}_\lambda(G)/G} \varphi(\Omega) dM_\lambda(\Omega) = \int_{\mathcal{O}_\lambda^{\text{ad}}/G} \sum_{\tau \in X_{\text{irr}}(s(\omega))} \dim \tau [G(s(\omega)) : G(s(\omega))^0]^{-1} \psi(p(s(\omega), \tau)) dm_\lambda(\omega)$$

où s est une section de la projection $\mathcal{O}_\lambda^{\text{ad}} \rightarrow \mathcal{O}_\lambda^{\text{ad}}/G$, et p est la projection de $\mathcal{P}_\lambda(G)$ sur

$\mathcal{P}_\lambda(G)/G$. La formule ci-dessus définit bien une mesure pour la structure borélienne quotient de la structure borélienne définie sur $\mathcal{P}_\lambda(G)$. Remarquons qu'on peut également définir une mesure sur $\mathcal{P}_\lambda(G)$ (resp. $\mathcal{O}_\lambda^{\text{ad}}$) à l'aide de la mesure sur $\mathcal{P}_\lambda(G)/G$ (resp. $\mathcal{O}_\lambda^{\text{ad}}/G$) et des mesures de Liouville sur chacune des orbites.

15.3. *Enoncé du théorème de Plancherel.*

THÉORÈME 7. (1) *Pour M_λ -presque toutes les orbites Ω dans $\mathcal{P}_\lambda(G)/G$, la représentation $\pi_{f,\tau}^G((f, \tau) \in \Omega)$ est à trace. Autrement dit, soit φ un élément de l'ensemble $\mathcal{C}_c^\infty(G, Z, \chi_\lambda)$ des fonctions indéfiniment dérivables sur G vérifiant*

$$\forall g \in G, \forall z \in Z, \quad \varphi(gz) = \chi_\lambda(z)^{-1} \varphi(g)$$

et qui sont à support compact modulo Z ; on pose

$$\pi_{f,\tau}^G(\varphi) = \int_{G/Z} \pi_{f,\tau}^G(g) \varphi(g) dg.$$

L'opérateur $\pi_{f,\tau}^G(\varphi)$ est à trace, et on note $\text{tr} \pi_{f,\tau}^G(\varphi)$ sa trace.

(2) *L'application $(f, \tau) \rightarrow \text{tr} \pi_{f,\tau}^G(\varphi)$ est mesurable et définit, par passage au quotient, un élément de $L^1(\mathcal{P}_\lambda(G)/G, M_\lambda)$.*

(3) *On a la formule, pour $\varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(G, Z, \chi_\lambda)$:*

$$\begin{aligned} \varphi(e) &= \int_{\mathcal{P}_\lambda(G)/G} \text{tr} \pi_\Omega^G(\varphi) dM_\lambda(\Omega) \\ &= \int_{\mathcal{O}_\lambda^{\text{ad}}/G} [G(s(\omega)): G(s(\omega))^0]^{-1} \left(\sum_{\tau \in X_{\text{int}}(s(\omega))} \dim \tau \text{tr} \pi_{s(\omega), \tau}^G(\varphi) \right) dm_\lambda(\omega). \end{aligned}$$

Les deux derniers chapitres sont consacrés à la démonstration du théorème 7. Seule la mesurabilité de l'application peut se comprendre dès maintenant. Elle résulte en effet de la mesurabilité de l'application $(f, \tau) \rightarrow \pi_{f,\tau}^G$ et de la mesurabilité de la trace sur \hat{G} .

Expliquons le lien entre la formule de Plancherel abstraite et la formule du théorème 6. La proposition suivante l'explique.

PROPOSITION 17. *Soit X un ensemble standard, G un groupe localement compact unimodulaire de type I, π une application borélienne de X dans \hat{G} . Soit \mathcal{R} la relation d'équivalence définie par l'application $\pi(x\mathcal{R}x' \Leftrightarrow \pi(x) = \pi(x'))$.*

(1) L'ensemble X/\mathcal{R} muni de la structure borélienne quotient est borélien analytique et la bijection induite de E/\mathcal{R} sur $\pi(X)$ est un isomorphisme borélien.

(2) Soit M une mesure sur X/\mathcal{R} , et supposons qu'on ait la formule d'inversion :

$$\varphi(e) = \int_{X/\mathcal{R}} \text{tr } \pi(x)(\varphi) dM(x).$$

(On a supposé implicitement que $\pi(x)$ était traçable pour presque tout x dans X/\mathcal{R} .) Alors il existe une partie F de $\pi(X)$ qui est borélienne standard telle que $\pi(X) \setminus F$ est négligeable pour la mesure image de M et $\hat{G} \setminus F$ est négligeable pour la mesure de Plancherel de G . De plus les deux mesures coïncident sur F .

Démonstration. (1) Puisque π est borélienne et \hat{G} dénombrablement engendré (parce que standard), $\pi(X)$ est analytique et π induit un isomorphisme borélien de X/\mathcal{R} sur $\pi(X)$ ([AM], proposition 2.11).

(2) Une conséquence du théorème de capacité de Choquet (cf. [AM], p. 11) est qu'il existe un borélien standard F inclus dans l'espace analytique $\pi(X)$ tel que $\pi(X) \setminus F$ est de mesure nulle pour la mesure image de M . On peut maintenant évoquer la proposition 8.2.4 de [Dix 1] sur l'unicité de la désintégration d'une représentation pour conclure que F est de complémentaire négligeable pour la mesure de Plancherel de G et que sur F les deux mesures coïncident. \square

Donnons maintenant une formulation équivalente au théorème 7.

THÉORÈME 7'. (1) Pour m_λ -presque toute orbite dans $\mathcal{O}_\lambda^{\text{ad}}/G$, la représentation $\pi_\omega^G = \pi_f^G$ ($f \in \omega \subset \mathcal{O}_\lambda^{\text{ad}}$) est à trace.

(2) Soit φ un élément de $\mathcal{C}_c^\infty(G, Z, \chi_\lambda)$. On définit

$$\pi(\varphi) = \int_{G/Z} \varphi(g) \pi(g) dg.$$

Alors

$$\varphi(e) = \int_{\mathcal{O}_\lambda^{\text{ad}}/G} [G(s(\omega)) : G(s(\omega))^0]^{-1} \text{tr } \pi_\omega(\varphi) dm_\lambda(\omega)$$

où s est une section de la surjection $\mathcal{O}_\lambda^{\text{ad}} \rightarrow \mathcal{O}_\lambda^{\text{ad}}/G$.

Démonstration de l'équivalence. Par application du théorème 3, le commutant de π_f est égal à celui de $\text{Ind}_{G(f)^0 \uparrow G(f)} \chi_f$. La formule de Plancherel projective pour le groupe

$G(f)/G(f)^0$, ou encore la formule de Plancherel pour les fonctions ψ sur $G(f)$ vérifiant

$$\forall g \in G(f), \forall g_0 \in G(f)^0, \quad \psi(gg_0) = \psi(g)\chi_f(g_0)^{-1}$$

exprime que

$$\text{Ind}_{G(f)^0 \uparrow G(f)} \chi_f = \sum_{\tau \in X(f)} \dim \tau \cdot \tau,$$

c'est-à-dire :

$$\left[\text{Ind}_{G(f)^0 \uparrow G(f)} \chi_f \right](\psi) = \sum_{\tau \in X(f)} \dim \tau \cdot \tau(\psi).$$

En fin de compte, pour $\varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(G, Z, \chi_\lambda)$, on obtient :

$$\text{tr}(\pi_f(\varphi)) = \sum_{\tau \in X(f)} \dim \tau \cdot \text{tr} \pi_{f,\tau}(\varphi). \quad \square$$

16. Démonstration du théorème dans le cas où G est réductif connexe

Puisque G est un groupe algébrique complexe réductif et connexe, il est dans la classe de Harish Chandra. Celui-ci [H-C 1, 2] a démontré la formule de Plancherel, d'abord pour les groupes semi-simples complexes, mais sans le calcul des constantes [H-C 1], puis pour des groupes réductifs généraux avec le calcul complet des constantes. Le problème est donc de comparer la formule énoncée par Harish Chandra et la formule énoncée dans le théorème 6.

(a) Dans un premier temps, nous explicitons en termes « semi-simples » la formule à démontrer. Les notations utilisées sont celles du chapitre 5 § 1 et du chapitre 11. On est amené à considérer simultanément des formes fortement λ -régulières, pour λ fixé dans \mathfrak{z}^* , et des formes fortement régulières (i.e. dans le cas où l'idéal central est réduit à $\{0\}$).

LEMME 71. *Soit $f \in \mathfrak{g}^*$, fortement régulière, et telle que $f|_{\mathfrak{z}} = \lambda$. Alors f est fortement λ -régulière. Réciproquement, si f est fortement λ -régulière, f est fortement régulière.*

Démonstration. Rappelons qu'on a noté $\mathfrak{g}_1 = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ et \mathfrak{c} le centre de \mathfrak{g} . Si $f_1 = f|_{\mathfrak{g}_1}$, on a l'égalité $\mathfrak{g}(f) = \mathfrak{g}_1(f_1) + \mathfrak{c}$, qui établit le lemme. \square

Dans le chapitre 11 on a considéré le centralisateur de la partie compacte d'un $\mathfrak{g}(f_0)$, avec f_0 fortement régulière. La proposition 12 et le lemme 4 montrent que $\mathfrak{g}(f_0)$ est une sous-algèbre de Cartan : $\mathfrak{g}(f_0) = \mathfrak{a} = \mathfrak{a}_t \oplus \mathfrak{a}_p$ (chapitre 5, § 1), donc $\mathfrak{t} = \mathfrak{a}_t$, et le centralisateur de \mathfrak{t} dans \mathfrak{g} est \mathfrak{a} (les notations des chapitres 5 et 11 sont compatibles!). Soit W le groupe de Weyl de \mathfrak{g} par rapport à A . On a aussi : $W = M'/M$, où M' est le normalisateur de A_p dans \mathfrak{k} , et $W = A'/A$ (notations du chapitre 11). Le lemme 44 se réduit, dans ce cas, au théorème de conjugaison des algèbres de Cartan.

Remarquons enfin que les groupes $G(f)$ étant connexes, les ensembles $\mathcal{P}_\lambda(G)$ et $\mathcal{O}_\lambda^{\text{ad}}$ coïncident pour tout λ .

Décrivons maintenant la mesure m_λ sur l'ensemble $\mathcal{O}_\lambda^{\text{ad}}$. Soit K une forme bilinéaire symétrique sur \mathfrak{g} prolongeant la forme de Killing de \mathfrak{g}_1 et telle que la forme quadratique $X \rightarrow -K(X, \theta X)$ soit définie positive. On choisit sur \mathfrak{g} , \mathfrak{a} et \mathfrak{p} les mesures de Lebesgue définies par la structure euclidienne associée à K et θ . Sur \mathfrak{m} on met la mesure normalisée en sorte que $\text{vol}(M) = 1$, ce qui fixe la mesure sur \mathfrak{a}_p . Soit $\mathfrak{z}_c = \mathfrak{z} \cap \mathfrak{m}$, $\mathfrak{z}_d = \mathfrak{z} \cap \mathfrak{a}_p$, et \mathfrak{m}_1 un supplémentaire de \mathfrak{z}_c dans \mathfrak{m} , \mathfrak{a}_1 un supplémentaire de \mathfrak{z}_d dans \mathfrak{a}_p . On a donc la décomposition :

$$\mathfrak{a} = \mathfrak{m}_1 \oplus \mathfrak{z}_c \oplus \mathfrak{z}_d \oplus \mathfrak{a}_1$$

d'où la décomposition :

$$\mathfrak{a}^* = \mathfrak{m}_1^* \oplus \mathfrak{z}_c^* \oplus \mathfrak{z}_d^* \oplus \mathfrak{a}_1^*.$$

On fixe sur \mathfrak{z}_c la mesure normalisée, et on obtient donc sur \mathfrak{m}_1 la mesure normalisée comme quotient de la mesure sur \mathfrak{m} et de la mesure sur \mathfrak{z}_c . Une mesure ayant été fixée au départ sur \mathfrak{z} , tous ces choix entraînent celui de mesures sur \mathfrak{z}_d et donc \mathfrak{a}_1 .

LEMME 72. *Soit U un groupe de Lie abélien compact d'algèbre de Lie \mathfrak{u} et \mathfrak{u}^* le dual de \mathfrak{u} . On fixe sur U la mesure de Haar normalisée, sur \mathfrak{u} la mesure de Lebesgue associée, sur \mathfrak{u}^* la mesure duale. Soit R le réseau de \mathfrak{u}^* : $R = \{f \in \mathfrak{u}^*, 2i\pi f \text{ est la différentielle d'un caractère de } U\}$, et B une base de R . Alors, la base duale de B est univolumique pour la mesure qu'on s'est donnée sur \mathfrak{u} .*

Démonstration. On a $U = \mathbf{R}^n / \mathbf{Z}^n$, $\mathfrak{u} = \mathbf{R}^n$, $R = \mathbf{Z}^n \subset \mathbf{R}^n$, ce qui montre bien la relation cherchée entre bases de \mathfrak{u} et base de \mathfrak{u}^* . \square

Considérons donc des bases de \mathfrak{z}_c^* et de \mathfrak{m}_1^* qui soient des bases des réseaux des différentielles de caractères des groupes correspondants : $B(\mathfrak{z}_c^*)$ et $B(\mathfrak{m}_1^*)$.

On considère les bases duales : $\beta(\mathfrak{z}_c)$ et $\beta(\mathfrak{m}_1)$. Sur α_p et sur \mathfrak{z}_d et α_1 on choisit des bases $\beta(\mathfrak{z}_d)$, $\beta(\alpha_1)$, compatibles avec les mesures déjà déterminées sur ces espaces. Sur α_1^* et \mathfrak{z}_d^* , on considère les bases duales $B(\alpha_1^*)$ et $B(\mathfrak{z}_d^*)$. On note

$$\begin{aligned} \{\xi_1, \dots, \xi_k\} &= B(\mathfrak{m}_1^*), & \{\xi_{k+1}, \dots, \xi_l\} &= B(\mathfrak{z}_c^*), \\ \{\xi_{l+1}, \dots, \xi_m\} &= B(\mathfrak{z}_d^*) & \text{et} & \quad \{\xi_{m+1}, \dots, \xi_h\} = B(\alpha_1^*). \end{aligned}$$

LEMME 73. L'ensemble $\mathcal{C}_\lambda^{\text{ad}}$ est exactement $\{l = \sum_1^h x_i \xi_i, \text{ avec } \sum_{k+1}^m x_i \xi_i = \lambda, x_i \in \mathbf{Z} \text{ pour } 1 \leq i \leq k \text{ et } x_i \in \mathbf{R} \text{ pour } m+1 \leq i \leq h, \text{ et } l \text{ fortement } \lambda\text{-régulière}\}$.

Démonstration. C'est une conséquence immédiate du théorème 5 et du choix des bases. \square

LEMME 74. On a, pour $f \in \alpha^*$, $D(f) = \varepsilon \prod_{\alpha \in \Sigma^+} \langle f, \alpha \rangle$, où $\varepsilon = \pm 1$ et Σ^+ est l'ensemble des racines positives de $\mathfrak{g}_\mathbf{C}$ par rapport à $\alpha_\mathbf{C}$ associées au choix de \mathfrak{n} .

Démonstration. Choisissons une base orthonormale sur $\mathfrak{p} = \mathfrak{n} + \bar{\mathfrak{n}}$ ($\bar{\mathfrak{n}}$ la sous-algèbre nilpotente associée à $-\Sigma^+$). On a alors :

$$D(f) = \sqrt{\det(\langle f, [e_i, e_j] \rangle)}.$$

Soit e'_i une autre base de \mathfrak{p} , et C la matrice de passage de la base e_i dans la base e'_i . On a :

$$\det C = \sqrt{|\det -K(e'_i, \theta' e'_j)|}.$$

Il vient donc :

$$D(f) = \frac{\sqrt{|\det \langle f, [e'_i, e'_j] \rangle|}}{\sqrt{|\det (-K(e'_i, \theta e'_j))|}}.$$

Raisonnons dans le complexifié de \mathfrak{g} , et prenons pour les e'_i une base de Chevalley X_α de $(\mathfrak{n} + \bar{\mathfrak{n}})_\mathbf{C}$. On a $\theta X_\beta = C_\beta X_{\theta\beta}$, et donc $K(X_\alpha, \theta\beta) = C_\beta K(X_\alpha, X_{\theta\beta})$.

Il en résulte que :

$$\sqrt{|\det -K(X_\alpha, \theta X_\beta)|} = \left| \prod_{\alpha \in \Sigma^+} K(X_\alpha, \theta X_{-\theta\alpha}) \right|.$$

Calculons :

$$\prod_{\alpha \in \Sigma^+} K(X_\alpha, \theta X_{-\theta\alpha}) = \prod_{\substack{\alpha \in \Sigma^+ \\ \theta\alpha = \alpha}} C_\alpha K(X_\alpha, X_{-\alpha}) \prod_{\substack{\alpha \in \Sigma^+ \\ \theta\alpha \neq \alpha}} C_\alpha K(X_{\theta\alpha}, X_{-\theta\alpha}).$$

Or :

$$\prod_{\substack{\alpha \in \Sigma^+ \\ \theta\alpha \neq \alpha}} C_\alpha K(X_{\theta\alpha}, X_{-\theta\alpha}) = \prod_{\substack{\alpha \in \Sigma^+ \\ \theta\alpha > \alpha}} C_\alpha C_{\theta\alpha} K(X_{\theta\alpha}, X_{-\theta\alpha}) K(X_\alpha, X_{-\alpha}).$$

Pour tout $\alpha_1, C_\alpha C_{\theta\alpha} = 1$, et en particulier, si $\theta\alpha = \alpha$, $C_\alpha = \pm 1$. Finalement :

$$\prod_{\alpha \in \Sigma^+} K(X_\alpha, \theta X_{-\theta\alpha}) = \prod_{\alpha \in \Sigma^+} K(X_\alpha, X_{-\alpha}).$$

En ce qui concerne le numérateur :

$$\sqrt{\det(\langle f, [X_\alpha, X_\beta] \rangle)} = \prod_{\alpha \in \Sigma^+} \langle f, H_\alpha \rangle = \prod_{\alpha \in \Sigma^+} \langle f, \alpha \rangle K(X_\alpha, X_{-\alpha}).$$

Le résultat du lemme est démontré. \square

On obtient maintenant immédiatement :

LEMME 75. (1) La mesure μ_λ sur $\mathcal{C}_\lambda^{\text{ad}}$ est donnée par la formule :

$$\int_{\mathcal{C}_\lambda^{\text{ad}}} \varphi(f) d\mu_\lambda(f) = \sum_{i=1}^k \sum_{x_i \in \mathbf{Z}} \int \dots \int_{\mathbf{R}^{h-m}} \varphi \left(\lambda + \sum_{i=1}^k x_i \xi_i + \sum_{i=m+1}^h x_i \xi_i \right) \\ \times \left| \prod_{\alpha \in \Sigma^+} \left\langle \lambda + \sum_{i=1}^k x_i \xi_i + \sum_{m+1}^h x_i \xi_i, \alpha \right\rangle dx_{m+1} \dots dx_h \right|$$

où $2n = \dim \mathfrak{g}$.

(2) La mesure μ sur \mathcal{C}^{ad} (correspondant au choix $\mathfrak{z} = \{0\}$) est donnée par la formule :

$$\int_{\mathcal{C}^{\text{ad}}} \varphi(f) d\mu(f) = \sum_{i=1}^l \sum_{x_i \in \mathbf{Z}} \int \dots \int_{\mathbf{R}^{h-i}} \varphi \left(\sum_{i=1}^h x_i \xi_i \right) \prod_{\alpha \in \Sigma^+} \left\langle \sum x_i \xi_i, \alpha \right\rangle dx_{l+1} \dots dx_h.$$

Remarques. (1) Le lien entre μ et les mesures μ_λ apparaît immédiatement sur les formules. Il suffit de montrer la formule globale (i.e. pour μ).

(2) Le groupe A étant connexe, dans ce cas, l'opération de A sur \mathfrak{a}^* est triviale. Seul opère donc le groupe de Weyl $W = A'/A$. La mesure de Liouville, dans ce cas, est la sommation sur la W -orbite. Mais d'autre part, la mesure μ_λ (resp. μ) est W -invariante. On écrit donc la formule à démontrer sous la forme :

$$\varphi(1) = \frac{1}{|W|} \sum_{\xi \in R} \int_{\alpha^*} \text{tr}_{dg} \pi_{\xi \oplus \nu}(\varphi) \prod_{\alpha \in \Sigma^+} \langle \xi \oplus \nu, \alpha \rangle d_{\alpha^*} \nu.$$

(On a noté tr_{dg} parce que le caractère a été calculé par rapport à la mesure dg .)

(b) Pour la commodité de la lecture, on rappelle maintenant les résultats de Harish Chandra.

Les représentations utilisées. Soit $R' \subset \mathfrak{m}^*$ l'ensemble des $\mu \in \mathfrak{m}^*$ tels que $i\mu$ est différentielle d'un caractère de M . Soit $\mu \in R'$ et $\lambda \in \alpha_p^*$, et considère le caractère $L'_{\mu, \lambda}$ de MA_p de différentielle $i(\mu \oplus \lambda)$. On étend $L'_{\mu, \lambda}$ à $MA_p N$ trivialement sur N , et on induit : $T'_{\mu, \lambda} = \text{Ind}_{MA_p N \uparrow G} L'_{\mu, \lambda}$. On a évidemment $T'_{\mu, \lambda} = T_n^{2\pi\mu, 2\pi\lambda}$ (cf. chapitre 5, § 1 (b)).

Les normalisations des mesures. Sur K , on utilise la mesure de Haar dk normalisée. Sur α_p et \mathfrak{n} on considère les mesures de Lebesgue d'_{α_p} et $d_{\mathfrak{n}}$ associées à la structure euclidienne définie par la forme de Killing. Ces choix en déterminent d'autres pour les mesures de Haar da et dn sur A et N . Soit ρ la 1/2 somme des racines positives (choix défini par celui de \mathfrak{n}). On choisit comme mesure sur G la mesure $dx = e^{2\rho(\log a)} dk da dn$.

Sur α_p^* , on met la mesure $d'_{\alpha_p^*}$ par laquelle

$$\int_{\alpha_p^*} \int_{\alpha_p^*} \varphi(X) e^{i(f, X)} d'_{\alpha_p} X d'_{\alpha_p^*} f = \varphi(0).$$

Soit $2n$ la dimension (réelle) de \mathfrak{g} , x la dimension de α_p et m . L'algèbre \mathfrak{f} est donc de dimension n .

Formule de Plancherel. Les représentations $T'_{\mu, \lambda}$ sont à trace. Soit $\varphi \in C_c^\infty(G)$, on a :

$$\varphi(1) = \frac{1}{(2\pi)^{(n-x)/2} 2^{(n-x)/2} |W| \bar{\omega}_k(\rho_k)} \sum_{\mu \in R'} \int_{\alpha_p^*} \text{tr}_{dx} T'_{\mu \oplus \lambda}(\varphi) \left| \prod_{\alpha \in \Sigma^+} \langle \mu + \lambda, \alpha \rangle \right| d'_{\alpha_p^*} \lambda$$

où $\bar{\omega}_k$ est le produit des racines de \mathfrak{f} par rapport à m et ρ_k la demi-somme des racines positives de \mathfrak{f} par rapport à m .

(c) Comparons maintenant les deux formules.

LEMME 76. (1) $dg = 2^{-(n-x)/2} v(K) dx$ (où $v(K)$ est le volume de K pour la mesure associée à la structure euclidienne sur \mathfrak{f}).

(2) $v(M)/v(K)=(2\pi)^{-(n-x)/2}\tilde{\omega}_k(Q_k)$ (où $v(M)$ est le volume de M pour la mesure associée à la structure euclidienne sur \mathfrak{m}).

$$(3) d'_{\mathfrak{a}_p^*}=v(M)(2\pi)^{-x}d_{\mathfrak{a}_p^*}.$$

Démonstration. (1) (2) sont respectivement les lemmes 37.2 et 37.4 de [H-C 2].

(3) Dans les deux cas, on a considéré la mesure sur \mathfrak{a} associée à la structure euclidienne. Sur \mathfrak{m} , les mesures d'_m associée à la structure euclidienne et d_m normalisée sont liées par : $d'_m=v(M)d_m$. Il s'ensuit que les mesures sur \mathfrak{a}_p vérifient $d_{\mathfrak{a}_p}=v(M)d'_{\mathfrak{a}_p}$ et que donc $d_{\mathfrak{a}_p^*}=(v(M))^{-1}d''_{\mathfrak{a}_p^*}$, où $d''_{\mathfrak{a}_p^*}$ est la mesure duale de la mesure $d'_{\mathfrak{a}_p}$ par la convention du chapitre 15. L'égalité $d'_{\mathfrak{a}_p^*}=(2\pi)^{-x}d''_{\mathfrak{a}_p^*}$ achève la démonstration. \square

On peut maintenant démontrer la formule :

$$\begin{aligned} & \frac{1}{|W|} \sum_{\xi \in R} \int_{\mathfrak{a}_p^*} \text{tr}_{d_{\mathfrak{g}}} \pi_{\xi \oplus \nu}(\varphi) \left| \prod_{\alpha \in \Sigma^+} \langle \xi + \nu, \alpha \rangle \right| d_{\mathfrak{a}_p^*} \nu \\ &= \frac{1}{|W|} \sum_{\xi \in R} \int_{\mathfrak{a}_p^*} v(K) 2^{-(n-x)/2} \text{tr}_{d_x} T'_{2\pi\xi, 2\pi\nu}(\varphi) \prod_{\alpha \in \Sigma^+} \langle \xi \oplus \nu, \alpha \rangle v(M)^{-1} (2\pi)^x d'_{\mathfrak{a}_p^*} \nu \\ & \quad \text{puisque } \pi_{\xi \oplus \nu}^G = T'_{2\pi\xi, 2\pi\nu} \text{ par les propositions 2 et 9} \\ &= \frac{1}{|W|} \frac{v(K)}{v(M)} (2\pi)^{-(n-x)} 2^{-(n-x)/2} \sum_{\xi \in R} \int_{\mathfrak{a}_p^*} \text{tr}_{d_x} T'_{\mu, \lambda}(\varphi) \prod_{\alpha \in \Sigma^+} \langle \mu \oplus \lambda, \alpha \rangle d_{\mathfrak{a}_p^*} \nu = \varphi(1) \end{aligned}$$

par la formule de Harish Chandra et le lemme 76. La formule est donc démontrée pour un groupe réductif complexe.

17. Démonstration du théorème dans le cas général

La démonstration du théorème se fait par récurrence sur la dimension de \mathfrak{g} , en traitant à part les cas où \mathfrak{g} est réductive et \mathfrak{g} est nilpotente. La méthode de démonstration est tout à fait analogue à celle de Kleppner et Lipsman pour les produits semi-directs (cf. [KL 1 et 2]). Il paraît toutefois plus simple de ne pas utiliser leurs résultats mais de faire une démonstration autonome qui s'inspire de la leur.

La méthode de réduction résulte du lemme 40. Les notations sont les suivantes. Le radical unipotent de \mathfrak{g} est noté \mathfrak{n} . Si $f \in \mathfrak{g}^*$, on note f' la forme linéaire complexe sur \mathfrak{g} dont f est la partie réelle, ν la restriction de f à \mathfrak{n} , ν' la restriction de f' à \mathfrak{n} , et $\mathfrak{n}' = \text{Ker } f' \cap \mathfrak{n}(\nu)$. Comme N est simplement connexe, \mathfrak{b}' est l'algèbre de Lie d'un sous-

groupe B' fermé de $N(\nu)$. Le lemme 40 montre que, de deux choses l'une, \mathfrak{g} est réductive ou $\mathfrak{g}(\nu)/\mathfrak{b}'$ est de dimension inférieure à celle de \mathfrak{g} .

Soit ϱ la restriction de λ à $\mathfrak{n} \cap \mathfrak{z}$, et \mathfrak{n}_ϱ^* l'ensemble des ν dans \mathfrak{n}^* dont la restriction à $\mathfrak{z} \cap \mathfrak{n}$ est ϱ . On a, dans \mathfrak{n}_ϱ^* , une notion de ϱ -régularité comme dans \mathfrak{g}_λ^* .

Soit \mathcal{O}_λ l'ouvert de Zariski de \mathfrak{g}_λ^* des formes fortement λ -régulières. On considère l'ensemble : $\mathcal{O}'_\lambda = \{f \in \mathcal{O}_\lambda, \nu \text{ est } \varrho\text{-régulière et } \mathfrak{g}(\nu) \text{ de dimension minimale}\}$ ainsi que

$$\mathcal{W}_\varrho = \{\nu, f \in \mathcal{O}'_\lambda\}.$$

Il est clair que \mathcal{O}'_λ est un ouvert de Zariski non vide de \mathfrak{g}_λ^* , sur lequel la dimension de $\mathfrak{g}(\nu)/\mathfrak{b}'$ est constante. On peut donc distinguer les cas suivants :

- $\mathfrak{g} = \mathfrak{n}$
- \mathfrak{g} est réductive
- Pour $f \in \mathcal{O}'_\lambda$, $\dim \mathfrak{g}(\nu)/\mathfrak{b}' < \dim \mathfrak{g}$.

On traite séparément les deux premiers cas, le troisième correspond à la démonstration par récurrence sur $\dim \mathfrak{g}$.

17.1. Les cas particuliers : \mathfrak{g} réductive, \mathfrak{g} unipotente. Lorsque \mathfrak{g} est réductive et G connexe, le résultat est établi au chapitre 16. Lorsque \mathfrak{g} est nilpotente, et G connexe et simplement connexe, le résultat est dans Kirillov [Kir 3]. On aura donc traité complètement les cas : \mathfrak{g} réductive et $\mathfrak{g} = \mathfrak{n}$ en montrant comment passer du cas connexe au cas non connexe. On va, à cet effet, formuler un résultat général, mais qu'on n'utilisera *en pratique* que dans les deux situations qui nous occupent maintenant.

PROPOSITION 18. *Si le théorème 7' est vrai dans le cas connexe, il est vrai dans le cas général.*

Démonstration. Les questions d'admissibilité et de régularité ne dépendant que de G^0 , il n'y a pas d'ambiguïté à parler simplement de $\mathcal{O}_\lambda^{\text{ad}}$. Si $f \in \mathcal{O}_\lambda^{\text{ad}}$, on note π_f^0 et π_f respectivement les représentations de G et G^0 qui lui sont associées. On a bien sûr $\pi_f = \text{Ind}_{G^0 \uparrow G} \pi_f^0$ par transitivité de l'induction. Notons respectivement Ω_f^0 et Ω_f l'orbite de f sous G^0 et G : $\Omega_f = \bigcup_{\gamma \in G/G(f)} G^0 \Omega_{\gamma \cdot f}^0$. La sous-algèbre de Lie \mathfrak{a} étant fixée, on note A' et A les groupes correspondants pour G^0 , et \bar{A}' et \bar{A} pour G . C'est une conséquence du théorème 5 que, pour $f \in \mathfrak{a}^*$, $G/G(f)G^0$ et $\bar{A}'/\bar{A}'(f)\bar{A}'$ sont en bijection. Notons ω_f et Ω_f^0 les orbites de f dans \mathfrak{a}^* sous \bar{A}' et A' respectivement. Le choix de normalisation des mesures invariantes sur les orbites implique que :

$$\int \varphi(l)_{\omega_{\gamma \cdot f}^0} d\beta_{\omega_f}(l) = \sum_{\gamma \in \tilde{A}'/\tilde{A}'(f)\tilde{A}'} \int_{\omega_{\gamma \cdot f}^0} \varphi(l) d\beta_{\omega_{\gamma \cdot f}^0}(l).$$

Si m_λ et m_λ^0 sont respectivement les mesures étudiées sur $\mathcal{O}_\lambda^{\text{ad}}/G$ et $\mathcal{O}_\lambda^{\text{ad}}/G^0$, il résulte des remarques qui précèdent, et de l'égalité

$$[G^0(f) : G(f)^0]^{-1} = [G(f) : G^0(f)] [G(f) : G(f)^0]^{-1}$$

qu'on a la formule d'intégration :

$$\begin{aligned} & \int_{\mathcal{O}_\lambda^{\text{ad}}/G^0} [G^0(s(\Omega)) : G(s(\Omega))^0]^{-1} \psi(\Omega_f^0) dm_\lambda^0(\Omega_f^0) \\ &= \int_{\mathcal{O}_\lambda^{\text{ad}}/G} [G(s(\Omega)) : G(s(\Omega))^0]^{-1} \sum_{\gamma \in G/G(s(\Omega))G^0} \psi(\gamma \cdot s_2(\Omega)) [G(s(\Omega)) : G^0(s(\Omega))] dm_\lambda(\Omega) \end{aligned}$$

où $s_2 : \mathcal{O}_\lambda^{\text{ad}}/G \rightarrow \mathcal{O}_\lambda^{\text{ad}}/G^0$ et $s : \mathcal{O}_\lambda^{\text{ad}}/G^0 \rightarrow \mathcal{O}_\lambda^{\text{ad}}$ sont des sections pour les surjections canoniques.

La formule du caractère pour les représentations induites montre que π_f est traçable dès que π_f^0 l'est et qu'on a, pour $\varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(G, Z, \chi_\lambda)$

$$\begin{aligned} \text{tr } \pi_f(\varphi) &= \sum_{\gamma \in G/G^0} \text{tr} \int_{G^0/Z} \varphi(\gamma g \gamma^{-1}) \pi_f^0(g) dg \\ &= \sum_{\gamma \in G/G(f)G^0} [G(f) : G^0(f)] \text{tr} \int_{G^0/Z} \varphi(\gamma g \gamma^{-1}) \pi_f^0(g) dg. \end{aligned}$$

Calculons donc :

$$\begin{aligned} P(\varphi) &= \int_{\mathcal{O}_\lambda^{\text{ad}}/G} \text{tr } \pi_{s(\Omega)}(\varphi) [G(s(\Omega)) : G(s(\Omega))^0]^{-1} dm_\lambda(\Omega) \\ &= \int_{\mathcal{O}_\lambda^{\text{ad}}/G} \sum_{\gamma \in G/G(s(\Omega))G^0} [G(s(\Omega)) : G^0(s(\Omega))] \text{tr} \int_{G^0/A} \varphi(\gamma g \gamma^{-1}) \pi_{s(\Omega)}^0(g) dg \\ &\quad \times [G(s(\Omega)) : G(s(\Omega))^0]^{-1} dm_\lambda(\Omega). \end{aligned}$$

Effectuons les changements de variable $g \rightarrow \gamma g \gamma^{-1}$ puis $f \rightarrow \gamma \cdot f$. Il vient :

$$P(\varphi) = \int_{\mathcal{O}_\lambda^{\text{ad}}/G} \sum_{\gamma \in G/G(s(\Omega))G^0} \text{tr } \pi_{\gamma \cdot s(\Omega)}^0(\varphi) [G^0(s(\Omega)) : G(s(\Omega))^0]^{-1} dm_\lambda(\Omega)$$

$$= \int_{\mathcal{O}_\lambda^{\text{ad}}/G^0} \text{tr } \pi_{s_1(\Omega^0)}^0 dm_\lambda^0(\Omega^0)$$

où s_1 est une section pour la projection naturelle de $\mathcal{O}_\lambda^{\text{ad}}$ sur $\mathcal{O}_\lambda^{\text{ad}}/G^0$. En appliquant le résultat pour G^0 , il vient bien

$$P(\varphi) = \varphi(e). \quad \square$$

17.2. Principe de la démonstration par récurrence. On considère maintenant un groupe G dont l'algèbre de Lie n'est ni réductive, ni unipotente, et on suppose que le résultat est connu pour tout groupe de dimension inférieure. (La formule, dans le cas d'un groupe fini, est évidente; on peut donc bien amorcer la récurrence.)

Dans la suite, lorsqu'il n'y aura pas d'ambiguïté possible, on écrira \mathfrak{g}_1 au lieu de $\mathfrak{g}(\nu)$. Considérons le « fibré » (non localement trivial) \mathcal{F}_λ dont la base est $\mathfrak{n}_\mathfrak{o}^*$, et la fibre au-dessus de $\nu \in \mathfrak{n}^*$ est $\mathfrak{g}(\nu)_{\lambda_1}^* = \{f \in \mathfrak{g}(\nu)^*, f|_{\mathfrak{n}(\nu)+\mathfrak{z}} = \lambda_1\}$ où λ_1 est la forme sur $\mathfrak{n}(\nu)+\mathfrak{z}$ dont la restriction à \mathfrak{z} est λ et à $\mathfrak{n}(\nu)$ est $\nu|_{\mathfrak{n}(\nu)}$. On notera (f_1, ν) un élément de \mathcal{F}_λ . Soit I l'application de \mathfrak{g}_λ^* dans \mathcal{F}_λ associant à un $l \in \mathfrak{g}^*$ l'élément $(l|_{\mathfrak{g}(\nu)}, \nu=l|_{\mathfrak{n}})$. Il résulte du lemme 16 que, pour $f \in \mathfrak{g}_\lambda^*$, l'image réciproque de $I(f)$ est l'ensemble $N(\nu) \cdot f$: si $I(f')=I(f)$, $f'-f \in (\mathfrak{g}(\nu)+\mathfrak{n})^\perp$. En particulier, l'image d'une orbite $G \cdot f = \Omega$ par I peut être décrite. On note p la projection de \mathfrak{g}^* sur \mathfrak{n}^* . On a donc démontré le lemme suivant :

LEMME 77. (i) Soit $\omega = p(\Omega) = G \cdot \nu$, et, pour $\xi \in \omega$, Ω_ξ l'orbite sous l'action de $G(\xi)$, de $f|_{\mathfrak{g}(\xi)}$. L'image $I(\Omega)$ est le sous-ensemble de \mathcal{F}_λ de base ω et de fibre au-dessus de ξ l'orbite Ω_ξ .

(ii) L'application I induit une bijection, notée \bar{I} , de \mathfrak{g}_λ^*/G sur le fibré \mathcal{F}_λ de base $\mathfrak{n}_\mathfrak{o}^*/G$ et dont la fibre au-dessus de $G \cdot \nu = \omega \in \mathfrak{n}_\mathfrak{o}^*/G$ s'identifie à $\mathfrak{g}(\nu)_{\lambda_1}^*/G(\nu)$.

Le lemme 17 montre que dès que f est admissible, si $I(f)=(f_1, \nu)$, f_1 est admissible. (Un groupe unipotent étant simplement connexe, il n'y a pas de problème d'admissibilité pour ν .) Réciproquement, si f est tel que f_1 est admissible, l'égalité $G_1(f_1)=G(f)N(\nu)$ montre que f est admissible.

Etudions maintenant le comportement de I vis-à-vis de la régularité et de la régularité forte. Soit $f \in \mathfrak{g}_\lambda^*$, et $I(f)=(f_1, \nu)$. On a posé : $\mathfrak{b}' = \text{Ker } f' \cap \mathfrak{n}(\nu)$. Soit $\mathfrak{g}_1 = \mathfrak{g}_1/\mathfrak{b}'$, $\mathfrak{z} = \mathfrak{z} + \mathfrak{n}(\nu)/\mathfrak{b}'$. Il est clair que \mathfrak{z} est central dans \mathfrak{g}_1 . Notons λ_1 la forme déduite de λ_1 .

LEMME 78. *Si f est fortement régulière, alors la forme f_1 sur \mathfrak{g}_1 déduite de f par passage au quotient est fortement $\tilde{\lambda}_1$ -régulière.*

La démonstration de ce lemme est incluse dans la démonstration de la proposition 13 (troisième étape).

Au sens de la remarque de la fin du chapitre II, la forme $f_1 = f|_{\mathfrak{g}(\nu)}$ est fortement λ_1 -régulière. On utilisera cette terminologie dans la suite. Notons $\mathcal{O}'_{\lambda^{\text{ad}}} = \mathcal{O}_{\lambda^{\text{ad}}} \cap \mathcal{O}'_{\lambda}$. Restreinte à cet ensemble l'application I induit une bijection devenue maintenant facile à décrire.

LEMME 79. *L'application \bar{I} , restreinte à $\mathcal{O}'_{\lambda^{\text{ad}}}/G$, est une bijection de $\mathcal{O}'_{\lambda^{\text{ad}}}/G$ sur le fibré de base \mathcal{W}'_{λ}/G et dont la fibre au-dessus de $G \cdot \nu$ est l'ensemble $\mathcal{O}_{\lambda_1}/G$ des $G(\nu)$ -orbites fortement λ_1 -régulières dans $\mathfrak{g}(\nu)_{\lambda_1}^*$.*

Démonstration. Il reste à montrer que si ν est ϱ -régulière et telle qu'il existe une forme l dans \mathcal{O}'_{λ} avec $p(l) = \nu$, et si $f_1 \in \mathfrak{g}(\nu)_{\lambda_1}^*$ est fortement λ_1 -régulière, alors toute forme f avec $f|_{\mathfrak{n}} = \nu$ et $f|_{\mathfrak{g}(\nu)} = f_1$ est fortement λ -régulière. Choisissons une telle forme f . Montrons que f est λ -régulière. Soit $l \in \mathcal{O}'_{\lambda}$ avec $p(l) = \nu$, et soit $l_1 = l|_{\mathfrak{g}(\nu)}$ comme $\mathfrak{g}(f) \cap \mathfrak{n}(\nu) = \mathfrak{g}(f) \cap \mathfrak{n}$ ne dépend que de $f|_{\mathfrak{n}} = \nu$, on a $\mathfrak{g}(f) \cap \mathfrak{n}(\nu) = \mathfrak{g}(l) \cap \mathfrak{n}(\nu)$. De cette égalité, de $\mathfrak{g}_1(l_1) = \mathfrak{g}(l) + \mathfrak{n}(\nu)$, $\mathfrak{g}_1(f_1) = \mathfrak{g}(f) + \mathfrak{n}(\nu)$ et de $\dim \mathfrak{g}_1(l_1) = \dim \mathfrak{g}_1(f_1)$ (lemme 78), on déduit que $\dim \mathfrak{g}(l) = \dim \mathfrak{g}(f)$ donc que f est λ -régulière. Montrons maintenant que f est fortement λ -régulière. Il est clair, avec les notations du chapitre II, que $\tilde{s}(f) = \tilde{s}_1(f_1)$, ce qui donne le résultat voulu. \square

17.3. *Questions de mesures.* Passons au choix des mesures sur les différents espaces considérés. On a fixé déjà une mesure de Haar sur G et sur Z , et donc des mesures de Lebesgue sur \mathfrak{g} et $\mathfrak{z} : d_{\mathfrak{g}}$ et $d_{\mathfrak{z}}$. Choisissons maintenant une mesure de Haar sur N et la mesure de Lebesgue correspondante sur $\mathfrak{n} : d_{\mathfrak{n}}$. On fixe aussi une mesure de Haar sur $Z' = Z \cap N$, et la mesure de Lebesgue correspondante sur $\mathfrak{z}' = \mathfrak{z} \cap \mathfrak{n}$.

LEMME 80. *Les actions coadjointes de G sur \mathfrak{g}_{λ}^* , \mathfrak{n}^* et \mathfrak{n}_{ϱ}^* sont unimodulaires.*

Démonstration. Cela résulte de ce que G est unimodulaire, G/N réductif et Z central dans G . \square

Le lemme 80 et la proposition 5.1.4 de [DR] permettent d'appliquer le théorème de désintégration des mesures (cf. [Bour2]) : on peut fixer des choix d'une mesure $\mu_{\mathfrak{n}_{\varrho}^*} G$

sur $\mathfrak{n}_\mathfrak{g}^*/G$ et de mesures G -invariantes b_ω sur chacune des G -orbites ω dans $\mathfrak{n}_\mathfrak{g}^*$ en sorte que l'on ait la formule :

$$\int_{\mathfrak{n}_\mathfrak{g}^*} \varphi(\nu) d_{\mathfrak{n}_\mathfrak{g}^*}(\nu) = \int_{\mathfrak{n}_\mathfrak{g}^*/G} d\mu_{\mathfrak{n}_\mathfrak{g}^*/G}(\omega) \int_{\omega} \varphi(\nu) db_\omega(\nu).$$

Remarque. Il résulte de cette désintégration que, pour $\mu_{\mathfrak{n}_\mathfrak{g}^*}/G$ presque toute orbite $\omega = G \cdot \nu$ dans $\mathfrak{n}_\mathfrak{g}^*/G$, l'espace homogène $G/G(\nu)$ a une mesure G -invariante.

Par ailleurs, sur chaque $N \cdot \nu$ dans $\mathfrak{n}_\mathfrak{g}^*/N$ on a une mesure $\beta_{N \cdot \nu}$ (mesure de Liouville). La mesure $b_{G \cdot \nu}$ étant elle même N -invariante, on peut la désintégrer, ce qui détermine le choix d'une mesure $d_{G/G(\nu)N}g$ sur le stabilisateur $G/G(\nu)N$ de $N \cdot \nu$ dans G :

$$\int_{G \cdot \nu} \varphi(\xi) db_\omega(\xi) = \int_{G/G(\nu)N} d_{G/G(\nu)N}g \int_{N \cdot g\nu} \varphi(\xi) d\beta_{N \cdot g\nu}(\xi).$$

Remarque. Les choix qui ont été faits sont déterminés presque partout; mais on peut supposer, en les prolongeant arbitrairement, qu'on les a faits partout.

Les choix qui ont été faits d'une mesure $d_{G/G(\nu)N}$ pour tout ν , ainsi que de mesures sur G et sur N entraînent celui d'une normalisation de la mesure de Haar sur $G(\nu)N/N \sim G(\nu)/N(\nu)$ pour tout $\nu \in \mathfrak{n}_\mathfrak{g}^*$. On a également choisi une normalisation des mesures sur Z et $Z \cap N$. Il en résulte qu'on a fait le choix, pour tout ν , d'une mesure de Haar sur $G(\nu)/ZN(\nu)$.

Le lemme suivant équivaut au lemme 2.2 de [KL2], pourvu qu'on sache que la mesure de Plancherel de \hat{N} est une pseudo-image, pour l'application de Kirillov de \mathfrak{n}^* dans \hat{N} , de la mesure de Lebesgue de \mathfrak{n}^* , ce qui est bien entendu vrai. La démonstration que nous en donnons est plus dans l'esprit de la méthode des orbites.

LEMME 81. *Pour presque tout ν dans $\mathfrak{n}_\mathfrak{g}^*$, le groupe $G(\nu)N/ZN \sim G(\nu)/ZN(\nu)$ est unimodulaire.*

Démonstration. Par hypothèse, on a :

$$\det \text{Ad } g = 1 \quad (\forall g \in G).$$

Par le lemme 80

$$\det \text{Ad } g|_{\mathfrak{n}} = 1 \quad (\forall g \in G).$$

Par la première désintégration :

$$\det \text{Ad } g|_{\mathfrak{g}(\nu)} = 1 \quad (\forall g \in G(\nu), \text{ pour presque toute orbite } G \cdot \nu \text{ dans } \mathfrak{n}_\mathfrak{g}^*(G)).$$

Comme $G(\nu)$ agit par automorphisme symplectiques sur $\mathfrak{n}/\mathfrak{n}(\nu)$, il vient :

$$\det \text{Ad } g|_{\mathfrak{n}/\mathfrak{n}(\nu)} = 1 \quad (\forall g \in G(\nu)).$$

On en déduit successivement :

$$\det \text{Ad } g|_{\mathfrak{n}(\nu)} = 1 \quad (\forall g \in G(\nu))$$

et donc

$$\det \text{Ad } g|_{\mathfrak{g}(\nu)/\mathfrak{n}(\nu)} = 1 \quad (\forall g \in G(\nu), \text{ pour presque toute orbite dans } \mathfrak{n}_\mathfrak{g}^*).$$

Le résultat vient en remarquant que $\text{Ad } g|_{\mathfrak{g}} = \text{Id}$. □

LEMME 82. *Considérons l'application \bar{p} de $\mathcal{O}_\lambda^{\text{ad}}/G$ sur $\mathfrak{n}_\mathfrak{g}^*/G$ induite par la projection p de \mathfrak{g}_λ^* sur $\mathfrak{n}_\mathfrak{g}^*$. L'image réciproque par \bar{p} d'une partie $\mu_{\mathfrak{n}_\mathfrak{g}^*/G}$ -négligeable de $\mathfrak{n}_\mathfrak{g}^*/G$ est négligeable pour la mesure m_λ .*

Démonstration. Puisque \mathfrak{n} est le radical unipotent, on a $\mathfrak{n} \cap \mathfrak{t} = \{0\}$. Soit $\mathfrak{z}_u = \mathfrak{z} \cap \mathfrak{n}$ et $\mathfrak{z}_c = \mathfrak{z} \cap \mathfrak{t}$, soit \mathfrak{z}_s un supplémentaire de $\mathfrak{z}_u + \mathfrak{z}_c$ dans \mathfrak{z} , et \mathfrak{t}_1 un supplémentaire de $\mathfrak{t} \cap \mathfrak{z}$ dans \mathfrak{t} .

Choisissons un supplémentaire α_1 de \mathfrak{z}_u dans $\alpha \cap \mathfrak{n}$, un supplémentaire α_2 de $\mathfrak{z} + \mathfrak{t} + \alpha \cap \mathfrak{n}$ dans α et un supplémentaire \mathfrak{p}_2 de $\mathfrak{p}_1 = \mathfrak{n} \cap \mathfrak{p}$ dans \mathfrak{p} . Comme \mathfrak{t} laisse \mathfrak{n} stable, on a $\mathfrak{n} = \mathfrak{n} \cap \alpha \oplus \mathfrak{n} \cap \mathfrak{p}$, et donc

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{t}_1 \oplus \mathfrak{z}_u \oplus \mathfrak{z}_s \oplus \mathfrak{z}_c \oplus \alpha_1 \oplus \alpha_2 \oplus \mathfrak{p}_1 \oplus \mathfrak{p}_2$$

où $\mathfrak{t} = \mathfrak{t}_1 \oplus \mathfrak{z}_c$, $\mathfrak{z} = \mathfrak{z}_u \oplus \mathfrak{z}_c \oplus \mathfrak{z}_s$, $\alpha \cap \mathfrak{n} = \mathfrak{z}_u \oplus \alpha_1$. Cette décomposition permet l'identification :

$$\mathfrak{g}^* = \mathfrak{t}_1^* \oplus \mathfrak{z}_u^* \oplus \mathfrak{z}_c^* \oplus \mathfrak{z}_s^* \oplus \alpha_1^* \oplus \alpha_2^* \oplus \mathfrak{p}_1^* \oplus \mathfrak{p}_2^*.$$

Avec cette identification, p devient le projecteur sur $\mathfrak{z}_u^* \oplus \alpha_1^* \oplus \mathfrak{p}_1^*$ associé à cette décomposition en somme directe.

Soit X une partie G -stable de $\mathfrak{n}_\mathfrak{g}^*$, contenue dans $p(\mathcal{O}_\lambda^{\text{ad}})$ et telle que X/G soit de mesure nulle dans $\mathfrak{n}_\mathfrak{g}^*/G$. Il en résulte que X est de mesure nulle dans $\mathfrak{n}_\mathfrak{g}^*$ pour la mesure $d_{\mathfrak{n}_\mathfrak{g}^*}$. Comme $p^{-1}(X) \cap \mathcal{O}_\lambda^{\text{ad}}$ est G -stable dans \mathfrak{g}_λ^* , $p^{-1}(X) \cap \mathcal{O}_\lambda^{\text{ad}}$ est le saturé, sous l'action de G , de $p^{-1}(X) \cap \mathcal{C}_\lambda^{\text{ad}}$ (théorème 5), et, par conséquent,

$X=G(X \cap p(\alpha^*))$. Il résulte alors du lemme 83 *infra* que $X \cap p(\alpha^*)$ est de mesure nulle dans $p(\alpha^*)=\varrho+\alpha^*$.

Il s'agit de démontrer que $p^{-1}(X) \cap \mathcal{O}_\lambda^{\text{ad}}/G$ est de mesure nulle dans $\mathcal{O}_\lambda^{\text{ad}}/G$ pour la mesure m_λ , ou encore, d'après ce qui précède, de montrer que $p^{-1}(X) \cap \mathcal{C}_\lambda^{\text{ad}}$ est de mesure nulle dans $\mathcal{C}_\lambda^{\text{ad}}$ pour μ_λ .

Calculons, en notant $\mathbf{1}_Y$ la fonction indicatrice de Y :

$$\int_{\mathcal{C}_\lambda^{\text{ad}}} \mathbf{1}_{p^{-1}(X) \cap \mathcal{C}_\lambda^{\text{ad}}} d\mu_\lambda = \sum_{\xi \in R_\lambda} \int_{\alpha_1^*} \int_{\alpha_2^*} \mathbf{1}_{p^{-1}(X) \cap \mathcal{C}_\lambda^{\text{ad}}}(\xi + \alpha_1 + \alpha_2) D(\xi + \alpha_1 + \alpha_2) d\alpha_1 d\alpha_2$$

(cf. chapitre 15, § 2).

On obtient :

$$\int_{\mathcal{C}_\lambda^{\text{ad}}} \mathbf{1}_{p^{-1}(X) \cap \mathcal{C}_\lambda^{\text{ad}}} d\mu_\lambda = \sum_{\xi \in R_\lambda} \int_{\alpha_1^*} \int_{\alpha_2^*} \mathbf{1}_X(\varrho + \alpha_1) D(\xi + \alpha_1 + \alpha_2) d\alpha_1 d\alpha_2.$$

Le théorème de Fubini permet d'écrire :

$$\int_{\mathcal{C}_\lambda^{\text{ad}}} \mathbf{1}_{p^{-1}(X) \cap \mathcal{C}_\lambda^{\text{ad}}} d\mu_\lambda = \sum_{\xi \in R_\lambda} \int_{\alpha_2^*} d\alpha_2 \int_{\alpha_1^*} \mathbf{1}_X(\varrho + \alpha_1) D(\xi + \alpha_1 + \alpha_2) d\alpha_1.$$

D'où enfin

$$\int_{\mathcal{C}_\lambda^{\text{ad}}} \mathbf{1}_{p^{-1}(X) \cap \mathcal{C}_\lambda^{\text{ad}}} d\mu_\lambda = 0$$

puisque $X \cap p(\alpha^*)$ est de mesure nulle dans $\varrho + \alpha^*$. □

LEMME 83. *Soit E une variété différentiable, F une sous-variété incluse dans E , G un groupe de Lie opérant dans E (E, F, G sont \mathcal{C}^∞ et l'opération l'est également). On suppose que toute G -orbite dans E rencontre F , et que E et F sont munis de mesures associées à des densités différentiables. Alors une partie X de E qui est G -invariante est de mesure nulle seulement si $X \cap F$ est de mesure nulle dans F .*

Démonstration. Considérons l'application de $G \times F$ dans $E : (g, x) \rightarrow g \cdot x$. Soit F_1 l'ensemble des $x \in F$ tels que cette application est une submersion au voisinage de (e, x) . Soit F_2 le complémentaire de F_1 . D'après le théorème de Sard, l'image de $G \times F_2$ est de mesure nulle dans E , et par conséquent F_1 est un ouvert non vide de F .

Pour la même raison, si X est G -invariante et de mesure nulle dans E , il suffit de montrer que $X \cap F_1$ est de mesure nulle dans F ; supposons $X \cap F_1$ au contraire de

mesure non nulle, et soit $x \in F_1 \cap X$ qui admet des voisinages aussi petits que l'on veut dont l'intersection avec F est de mesure non nulle. Choisissons un sous-espace η de \mathfrak{g} tel que $\eta \cdot x \oplus T_x F$ soit égal à $T_x E$ ($T_x F, T_x E$ les espaces tangents à F et E).

D'après le théorème des fonctions implicites, il existe un voisinage \mathcal{U} de x dans E , un voisinage \mathcal{V} de x dans F , et \mathcal{W} de 0 dans η tel que \mathcal{U} soit difféomorphe à $\mathcal{V} \times \mathcal{W}$. Mais alors, \mathcal{V} étant de mesure non nulle dans F , \mathcal{U} est de mesure non nulle dans E . \square

Remarque. Dans la terminologie bourbakiste (cf. [Bour 2], § 3 n° 2, définition 1), le lemme 82 exprime que la mesure $\mu_{\eta^*/G}$ est une pseudo-image de la mesure m_λ .

LEMME 84. *L'ensemble $\mathcal{O}'_\lambda{}^{\text{ad}}/G$ est de complémentaire négligeable dans $\mathcal{O}_\lambda{}^{\text{ad}}/G$ pour la mesure m_λ . L'ensemble $\mathcal{O}''_\lambda{}^{\text{ad}}/G$ des G -orbites de formes $f \in \mathcal{O}'_\lambda{}^{\text{ad}}$ telles que $G(\nu)/ZN(\nu)$ est unimodulaire est également de complémentaire négligeable dans $\mathcal{O}_\lambda{}^{\text{ad}}/G$.*

Démonstration. On démontre l'assertion concernant $\mathcal{O}'_\lambda{}^{\text{ad}}$ en remarquant que $p(\mathcal{O}'_\lambda{}^{\text{ad}})$ est un ouvert de Zariski de $\mathfrak{n}_\mathfrak{g}^*$ et en appliquant le lemme 82. L'assertion concernant $\mathcal{O}''_\lambda{}^{\text{ad}}$ résulte des lemmes 81, 82 et de la première assertion. \square

Le lemme 79 décrit l'ensemble $\mathcal{O}'_\lambda{}^{\text{ad}}$ comme un fibré, et le lemme 82 exprime que la mesure $\mu_{\eta^*/G}$ est une pseudo-image de la mesure m_λ . Il en résulte qu'on a une désintégration de la mesure m_λ : pour presque tout ν dans $\mathfrak{n}_\mathfrak{g}^*$, il existe une mesure $n_{\lambda_1}^{G(\nu)}$ sur l'ensemble $\mathcal{O}'_{\lambda_1}{}^{\text{ad}}/G(\nu)$ correspondant à ν telle qu'on puisse écrire :

$$m_\lambda = \int_{\mathcal{W}'/G} n_{\lambda_1}^{G(\nu)} d\mu_{\eta^*/G}(\nu).$$

Par ailleurs, on a choisi une mesure de Haar sur $G(\nu)/ZN(\nu)$, ce qui entraîne, pour tout f dans $\mathcal{O}''_\lambda{}^{\text{ad}}$, la détermination de la mesure $m_{\lambda_1}^{G(\nu)}$ sur l'ensemble $\mathcal{O}'_{\lambda_1}{}^{\text{ad}}/G(\nu)$. Les trois prochains paragraphes sont consacrés à la démonstration du résultat suivant.

PROPOSITION 19. *Les mesures $m_{\lambda_1}^{G(\nu)}$ et $n_{\lambda_1}^{G(\nu)}$ coïncident pour presque tout ν dans $\mathfrak{n}_\mathfrak{g}^*$.*

Remarque. La détermination de $m_{\lambda_1}^{G(\nu)}$ et de $n_{\lambda_1}^{G(\nu)}$ dépend du choix de la mesure $\mu_{\eta^*/G}$. Mais il est clair que l'énoncé de la proposition n'en dépend pas.

17.4. *Etude des quotients* $\mathcal{O}_\lambda^{\text{ad}}/G$ et \mathcal{W}'_0/G . On a décrit l'ensemble $\mathcal{O}_\lambda^{\text{ad}}/G$ comme la réunion

$$\left(\bigcup_{\xi \in R_\lambda} \mathcal{C}_{\lambda, \xi}^{\text{ad}} \right) / A'$$

(théorème 5), où $\mathcal{C}_{\lambda, \xi}^{\text{ad}}$ est un ouvert de Zariski de

$$\alpha_{\lambda, \xi}^* = \{f \in \alpha^*, f|_{\mathfrak{g}} = \lambda \text{ et } f|_{\mathfrak{t}} = \xi\}.$$

On peut encore écrire :

$$\mathcal{O}_\lambda^{\text{ad}}/G \sim \bigcup_{W \cdot \xi \in R_\lambda/W} \left(\bigcup_{w \in W/W_\xi} \mathcal{C}_{\lambda, w\xi}^{\text{ad}} \right) / A' \sim \bigcup_{W \cdot \xi \in R_\lambda/W} (\mathcal{C}_{\lambda, \xi}^{\text{ad}}/A'_\xi)$$

où A'_ξ (resp. W_ξ) est le stabilisateur de ξ dans A' (resp. W). Puisque $A \subset A'_\xi \subset A'$, A'_ξ est un groupe algébrique complexe.

Notons $\bar{\alpha}_{\lambda, \xi}^*$ la cloture (pour la topologie de Zariski) de $\alpha_{\lambda, \xi}^*$ dans l'espace vectoriel complexe α^* (c'est le plus petit sous-espace complexe contenant la variété réelle $\alpha_{\lambda, \xi}^*$). D'après un théorème dû à Rosenlicht (cf. [Ros]), il existe un ouvert de Zariski $\mathcal{U}''_{\lambda, \xi}$ A'_ξ -invariant de $\bar{\alpha}_{\lambda, \xi}^*$ tel que $\mathcal{U}''_{\lambda, \xi}/A'_\xi$ est une variété algébrique complexe lisse. Il existe un ouvert de Zariski $\mathcal{U}'_{\lambda, \xi}$ A'_ξ -invariant et une famille $(\varphi_i)_{1 \leq i \leq d}$ de fonctions polynomiales sur $\bar{\alpha}_{\lambda, \xi}^*$ dont les différentielles $d\varphi_i$ sont linéairement indépendantes en tout point x de $\mathcal{U}''_{\lambda, \xi}$. Notons $(\psi_j)_{1 \leq j \leq 2d}$ la famille des parties réelles et imaginaires des φ_i . L'intersection de $\mathcal{U}''_{\lambda, \xi}$ avec $\alpha_{\lambda, \xi}^*$ est un ouvert de Zariski (i.e. pour la topologie induite par la topologie de Zariski de α^*) de $\alpha_{\lambda, \xi}^*$. Soit r ($r \leq 2d$) le rang maximum de la famille ψ_j sur $\mathcal{U}''_{\lambda, \xi} \cap \alpha_{\lambda, \xi}^*$ et soit $\mathcal{U}'_{\lambda, \xi}$ l'ouvert de Zariski inclus dans $\mathcal{U}''_{\lambda, \xi} \cap \alpha_{\lambda, \xi}^*$ des points où le rang vaut r . Posons enfin $\mathcal{U}''_{\lambda, \xi} = \bigcap_{w \in W} w^{-1} \mathcal{U}'_{\lambda, w\xi}$: on obtient ainsi un ouvert de Zariski (pour la topologie de Zariski réelle) de $\alpha_{\lambda, \xi}^*$ qui est A'_ξ -invariant et tel que $\mathcal{U}_\lambda = \bigcup_{\xi \in R_\lambda} \mathcal{U}_{\lambda, \xi}$ est stable sous l'action de A' , et de complémentaire négligeable dans $\mathcal{C}_\lambda^{\text{ad}}$ pour la mesure μ_λ .

D'après le théorème des fonction implicites, l'ouvert de Zariski $\mathcal{U}_{\lambda, \xi}$ peut s'écrire comme réunion d'une famille d'ouverts (pour la topologie ordinaire) A'_ξ -invariants $\mathcal{U}_{\lambda, \xi}^i$ tels que la famille $(\psi_j)_{1 \leq j \leq r}$ (après une réindexation convenable qui dépend de (i)) définisse une carte sur le quotient $\mathcal{U}_{\lambda, \xi}^i/A'_\xi$.

Soit f_0 un élément arbitraire de \mathcal{U}_λ , $\xi \in R_\lambda$ tel que $f_0 \in \mathcal{U}_{\lambda, \xi}$, et V^* un sous-espace vectoriel de $(\mathfrak{g} + \mathfrak{t})^\perp \cap \alpha^*$ tel que $V^* \oplus \alpha \cdot f_0 = (\mathfrak{g} + \mathfrak{t})^\perp \cap \alpha^*$. Alors il existe un i tel que $f_0 \in \mathcal{U}_{\lambda, \xi}^i$, un ouvert \mathcal{U} contenant f_0 et inclus dans $\mathcal{U}_{\lambda, \xi}^i$ tel que

(1) $\forall f \in (f_0 + V^*) \cap \mathcal{U}, \alpha \cdot f \oplus V^* = (\mathfrak{z} + \mathfrak{t})^\perp \cap \alpha^*$

(2) la surjection canonique de $\alpha_{\lambda, \xi}^*$ sur $\alpha_{\lambda, \xi}^*/A_\xi'$ induit un difféomorphisme de $(f_0 + V^*) \cap \mathcal{U}$ sur $q(\mathcal{U})$.

On a donc démontré la proposition suivante :

PROPOSITION 20. (1) *Il existe une partie \mathcal{U}_λ de $\mathcal{C}_\lambda^{\text{ad}}$ qui est A' -stable, de complémentaire négligeable pour le mesure μ_λ et telle que, si $\mathcal{U}_{\lambda, \xi} = \mathcal{U}_\lambda \cap \alpha_{\lambda, \xi}^*$, $\mathcal{U}_{\lambda, \xi}$ est un ouvert de Zariski A_ξ' -stable de $\alpha_{\lambda, \xi}^*$, et $\mathcal{U}_{\lambda, \xi}/A_\xi'$ est une variété différentiable.*

(2) *Soit $\mathcal{U}'_{\lambda, \xi}$ un ouvert de Zariski A_ξ' -stable de $\alpha_{\lambda, \xi}^*$ inclus dans $\mathcal{C}_{\lambda, \xi}^{\text{ad}}$ tel que $\mathcal{U}'_{\lambda, \xi}/A_\xi'$ soit une variété différentiable.*

Soit $f_0 \in \mathcal{U}'_{\lambda, \xi}$ et V^ un sous-espace de α^* tel que $\alpha \cdot f_0 \oplus V^* = (\mathfrak{z} + \mathfrak{t})^\perp \cap \alpha^*$. Il existe un ouvert $\mathcal{U} \subset \mathcal{U}'_{\lambda, \xi}$ (ouvert pour la topologie ordinaire) tel que :*

- $\forall f \in (f_0 + V^*) \cap \mathcal{U}, \alpha \cdot f \oplus V^* = (\mathfrak{z} + \mathfrak{t})^\perp \cap \alpha^*$
- *La surjection canonique q de $\alpha_{\lambda, \xi}^*$ sur $\alpha_{\lambda, \xi}^*/A_\xi'$ induit un difféomorphisme de $(f_0 + V^*) \cap \mathcal{U}$ sur $q(\mathcal{U})$.*

En étudiant de la même manière l'action des G et N sur \mathfrak{n}_ρ^* on obtient :

PROPOSITION 21. *Il existe un ouvert de Zariski $\mathcal{W}_\rho \subset \mathcal{W}'_\rho$ de \mathfrak{n}_ρ^* qui est G -stable et qui est réunion d'ouverts G -stables ordinaires \mathcal{W}_ρ^i tels que \mathcal{W}_ρ^i/G et \mathcal{W}_ρ^i/N soient des ouverts de carte pour les quotients \mathcal{W}_ρ/G et \mathcal{W}_ρ/N . Soit X^* un sous-espace de \mathfrak{n}^* tel que $\mathfrak{g} \cdot \nu_0 \oplus X^* = (\mathfrak{z} \cap \mathfrak{n})^\perp$ pour un ν_0 fixé dans \mathcal{W}_ρ^i , et Y^* un sous-espace de \mathfrak{n}^* tel que $\mathfrak{n} \cdot \nu_0 + Y^* = (\mathfrak{z} \cap \mathfrak{n})$ pour ν_0 fixé dans \mathcal{W}_ρ^i .*

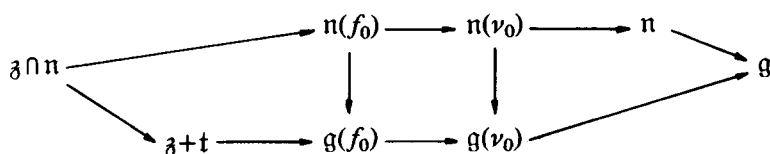
Il existe un ouvert \mathcal{W} contenant ν_0 inclus dans \mathcal{W}_ρ^i tel que $\forall \nu \in \mathcal{W} \cap (\nu_0 + X^*), \mathfrak{g} \cdot \nu \oplus X^* = (\mathfrak{z} \cap \mathfrak{n})^\perp$ (resp. $\forall \nu \in \mathcal{W} \cap (\nu_0 + Y^*), \mathfrak{n} \cdot \nu \oplus Y^* = (\mathfrak{z} \cap \mathfrak{n})^\perp$) et tel que l'application q_G de \mathfrak{n}_ρ^* sur \mathfrak{n}_ρ^*/G (resp. q_N de \mathfrak{n}_ρ^* sur \mathfrak{n}_ρ^*/N) induise un difféomorphisme de $(\nu_0 + X^*) \cap \mathcal{W}$ (resp. $(\nu_0 + Y^*) \cap \mathcal{W}$) sur $q_G(\mathcal{W})$ (resp. $q_N(\mathcal{W})$).

On notera, dans la suite, $\mathcal{U}'_\lambda = p^{-1}(\mathcal{W}_\rho) \cap \mathcal{U}_\lambda$, $\mathcal{U}'_{\lambda, \xi} = \mathcal{U}'_\lambda \cap \mathcal{U}_{\lambda, \xi}$.

17.5. Construction d'un bon espace transverse. On fixe $f_0 \in \mathcal{U}_{\lambda, \xi}$, et on pose $I(f_0) = (f_1^0, \nu_0)$. On va construire un sous-espace V^* (cf. proposition 20) qui se comporte convenablement quand on le projette sur \mathfrak{n}^* , $\mathfrak{g}(\nu_0^*)$, etc.

LEMME 85. *Il existe une base \mathcal{B} de \mathfrak{g} telle que chacun des espaces : $\mathfrak{z} \cap \mathfrak{n}$, $\mathfrak{z} + \mathfrak{t}$, $\mathfrak{n}(f_0)$, $\mathfrak{g}(f_0)$, $\mathfrak{n}(\nu_0)$, $\mathfrak{g}(\nu_0)$, \mathfrak{n} , α et \mathfrak{p} soient engendrés par les vecteurs de \mathcal{B} q'ils contiennent.*

Démonstration. On a le diagramme



où une flèche indique une inclusion.

Tous ces espaces sont stables sous l'action de t . Toutes les bases qu'on considérera seront composées de vecteurs propres sous l'action de t . On choisit une base de $\mathfrak{g} \cap n$ qu'on complète en une base de $\mathfrak{g} + \mathfrak{t}$ d'une part, en une base de $n(f_0)$ d'autre part. Puisque $n(f_0) \cap (\mathfrak{g} + \mathfrak{t}) = \mathfrak{g} \cap n$ on obtient ainsi une base de $(\mathfrak{g} + \mathfrak{t}) + n(f_0)$, qu'on complète en une base de $n(\nu_0)$ d'une part, de $g(f_0)$ d'autre part. Comme $g(f_0) \cap n(\nu_0) = n(f_0)$, on obtient ainsi une base de $g(f_0) + n(\nu_0)$. On complète la base de $n(\nu_0)$ en une base de n , et la base de $g(f_0) + n(\nu_0)$ en une base de $g(\nu_0)$. Comme $g(\nu_0) \cap n = n(\nu_0)$, on obtient bien une base de $g(\nu_0) + n$ qu'il reste à compléter en une base de g . Tous les vecteurs de la base étant propres pour l'action de t , ils sont soit dans α , soit dans \mathfrak{p} . On a bien démontré l'assertion du lemme.

La base \mathcal{B} étant choisie, on entendra, dans ce qui suit, par *le supplémentaire* d'un sous-espace le supplémentaire engendré par des vecteurs de \mathcal{B} . Soit V_2 le supplémentaire de $\mathfrak{g} \cap n$ dans $n(f_0)$ et V_1 le supplémentaire de $(\mathfrak{g} + \mathfrak{t}) + V_2$ dans $g(f_0)$; posons $V = V_1 \oplus V_2$, $E = \mathfrak{g} + \mathfrak{t}$. Puisque $g(f_0) \subset \alpha$, V et E sont dans α . Soit W le supplémentaire de $V \oplus E$ dans α , et $Y = W \oplus \mathfrak{p}$. La somme directe $g = E \oplus V \oplus W \oplus \mathfrak{p}$ fait que cela a un sens de parler de V^* , qui est un sous-espace de α^* , et qui est un supplémentaire, dans $\alpha^* \cap (\mathfrak{g} + \mathfrak{t})^\perp$ de $g(f_0)^\perp \cap \alpha^* = \alpha(f_0)^\perp \cap \alpha^* = \alpha \cdot f_0$. Le sous-espace V^* vérifie donc la condition de la proposition 19. On a donc démontré le lemme :

LEMME 86. *Le sous-espace V^* construit ci-dessous vérifie*

$$V^* \oplus \alpha \cdot f_0 = \alpha^* \cap (\mathfrak{g} + \mathfrak{t})^\perp.$$

Etudions maintenant la projection de V^* sur n^* .

LEMME 87. *La projection de V^* sur n^* est V_2^* . C'est un espace qui vérifie :*

$$V_2^* + g \cdot \nu_0 = (\mathfrak{g} \cap n)^\perp.$$

(L'orthogonal étant pris dans n^* .)

Démonstration. On a $V_2 = V \cap n$, d'où le premier résultat. D'autre part, $g \cdot \nu = n(f_0)^\perp$; il s'agit donc de montrer que $V_2^\perp \oplus n(f_0)^\perp = (\mathfrak{z} \cap n)^\perp$. On a $V_2^\perp \cap n(f_0)^\perp = 0$ puisque $V_2 \subset n(f_0)$; d'autre part $(\mathfrak{z} \cap n) \oplus V_2 = n(f_0)$, donc $(\mathfrak{z} \cap n)^\perp = V_2^\perp \cap n(f_0)^\perp$. \square

Il reste à étudier la situation dans la fibre $g(\nu_0)^*$. Rappelons qu'on a $g_1(f_1^0) = g(f_0) + n(\nu_0)$, et par conséquent $t_1 = t_1(f_1^0) = t(f_0) = t$. En particulier $\alpha_1 = \alpha \cap g(\nu_0)$, et $p_1 = p \cap g(\nu_0)$. Si $f_0 \in \alpha^*$, alors $f_1^0 \in \alpha_1^*$. D'autre part $\mathfrak{z}_1 = \mathfrak{z} + n(\nu_0)$ est central dans g_1 modulo \mathfrak{b}' (cf. lemme 78). Le lemme qui suit se démontre comme ceux qui précèdent.

LEMME 88. *Le noyau de la projection de V^* sur n^* est V_1^\perp . Cet espace vérifie :*

$$V_1^\perp \oplus \alpha_1 \cdot f_1^0 = \alpha_1^* \cap (\mathfrak{z} + t + n(\nu_0))^\perp.$$

Posons $Z = W \oplus p$, et soit Z_1 le supplémentaire de $n(f_0)$ dans $n(\nu_0)$, Z_2 le supplémentaire de $g(f_0) + n(\nu_0)$ dans $g(\nu_0)$, Z_3 le supplémentaire de $n(\nu_0)$ dans n et Z_4 le supplémentaire de $g(\nu_0) + n$ dans g . On a $Z = Z_1 \oplus Z_2 \oplus Z_3 \oplus Z_4$.

17.6. *Démonstration de la proposition 19.* L'espace V^* construit au § 5 et les résultats du § 4 vont permettre (1) d'utiliser des mesures définies par des densités sur des variétés, (2) de se placer dans une carte convenable pour se ramener à un calcul de déterminants.

Puisque $g_1(f_1) = g(f) + n(\nu)$, on a déjà remarqué que $t_1 = t_1(f_1) = t(f) = t$, et $\alpha_1 = \alpha \cap g_1$, $p_1 = p \cap g_1$. Si $f \in \mathcal{C}_\lambda^{\text{ad}}$, et $I(f) = (f_1, \nu)$, la forme f_1 est donc un élément de $\mathcal{C}_{\lambda_1}^{\text{ad}} = \mathcal{O}_{\lambda_1}^{\text{ad}} \cap \alpha_1^*$. Appliquons à la description de $\mathcal{C}_{\lambda_1}^{\text{ad}}$ le théorème 5. On a $\mathfrak{z}_1 = \mathfrak{z} + n(\nu)$, et par conséquent $\mathfrak{z}_1 \cap t_1 = \mathfrak{z} \cap t$. Il en résulte que $\mathcal{C}_{\lambda_1}^{\text{ad}}$ est égal à la réunion, pour tous les $\xi \in R_\lambda$, des $\mathcal{C}_{\lambda_1, \xi}^{\text{ad}}$, où $\mathcal{C}_{\lambda_1, \xi}^{\text{ad}} = \{I_1 \in \mathcal{C}_{\lambda_1}^{\text{ad}}, I_1|_{\mathfrak{z}_1 \cap t_1} = \xi\}$. Evidemment, si $f \in \mathcal{C}_{\lambda, \xi}^{\text{ad}}$, alors $f_1 \in \mathcal{C}_{\lambda_1, \xi}^{\text{ad}}$.

Soit A_1 et A'_1 les intersections avec G_1 de A et A' , et $W_1 = A'_1/A$. Le théorème 5 énonce que $\mathcal{O}_{\lambda_1}^{\text{ad}}/G_1$ s'identifie à $\mathcal{C}_{\lambda_1}^{\text{ad}}/A'_1$, le lemme 79 montre que les W_1 -orbites dans R_λ sont exactement les W -orbites dans R_λ .

LEMME 89. *Soit $f_0 \in \mathcal{U}'_{\lambda, \xi}$. L'application de $\mathcal{U}_{\lambda, \xi}/A'_\xi$ dans \mathcal{W}_0/G associant à $A'_\xi \cdot f$ l'orbite $G \cdot \nu$ est une submersion au voisinage de f_0 .*

Démonstration. Soit V^* l'espace construit au lemme 87, \mathcal{U} le voisinage ouvert de f_0 dans $\mathcal{U}_{\lambda, \xi}$ donné par la proposition 20 et \mathcal{W} le voisinage ouvert de ν_0 dans $n_\mathfrak{q}^*$ donné (pour $X^* = V_2^\perp$) par la proposition 21. Alors $(f_0 + V^*) \cap \mathcal{U}$ et $(\nu_0 + V^*) \cap \mathcal{W}$ sont des ouverts

de carte pour respectivement $\mathcal{U}_{\lambda, \xi}/A'_\xi$ et \mathcal{W}_ρ/G . Il est clair que l'application $f \rightarrow \nu$ est une submersion au voisinage de f_0 de $f_0 + V^*$ dans $\nu_0 + V^*_2$, ce qui assure le résultat. \square

On déduit du lemme 89 un résultat sur la nature des fibres.

LEMME 90. *Soit $\nu \in \mathcal{W}_\rho$. Notons $\mathcal{U}_{\lambda, \xi}^1 = \{f_1, I(f) = (f_1, \nu), f \in \mathcal{U}_{\lambda, \xi}\}$. Alors $\mathcal{U}_{\lambda, \xi}^1/A'_{1, \xi}$ est une variété différentiable et $\mathcal{U}_{\lambda, \xi}^1$ est un ouvert de Zariski de $\alpha_{1, \lambda}^*$.*

Les lemmes 88 et 90 permettent d'appliquer la proposition 20 (2) à V_1^* et f_1^0 dans $\mathfrak{g}(\nu)_{\lambda_1}^*$. On s'est essentiellement ramené à calculer des mesures sur des variétés différentiables, dont on va donner maintenant des formules explicites.

On fixe un f_0 arbitraire dans $\mathcal{U}_{\lambda, \xi}$ tel que $\nu_0 \in \mathcal{W}_\rho$; on a construit un certain sous-espace V^* de α^* au § 5, et la proposition 20 (2) construit un ouvert \mathcal{U} de $\mathcal{U}_{\lambda, \xi}$ associé à ces données. Définissons \tilde{m}_λ comme l'image réciproque (dans $(f_0 + V^*) \cap \mathcal{U}$) de la restriction à $q(\mathcal{U})$ de m_λ , et calculons \tilde{m}_λ .

On a fixé sur \mathfrak{g}^* , α^* , \mathfrak{p}^* , \mathfrak{z} , $\mathfrak{z} \cap \mathfrak{t}$, \mathfrak{t} des mesures de Lebesgue, et donc aussi sur $(\mathfrak{z} + \mathfrak{t})^\perp \cap \alpha^*$. Choisissons les mesures de Lebesgue d_V sur V , d_W sur W , d_p sur \mathfrak{p} de manière compatible avec les choix faits précédemment. Rappelons également que le pfaffien d'une forme bilinéaire alternée dans une base ne dépend que de la forme volume associée à cette base. Ca a donc un sens de parler du pfaffien sans spécifier la base.

Le lemme qui suit adapte à la situation présente un lemme de [Kir 3].

LEMME 91. *La mesure \tilde{m}_λ admet une densité par rapport à la mesure d_{V^*} sur $(f_0 + V^*) \cap \mathcal{U}$, qui est égale au produit $D \cdot D'$, où D' est le pfaffien de la forme B_f dans l'espace W et D est le pfaffien de B_f dans \mathfrak{p} .*

Démonstration. Choisissons des bases univolumiques de E^* , V^* , W^* , \mathfrak{p}^* :

$\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_p$ base de E^*

ξ_1, \dots, ξ_r base de V^*

$\zeta_1, \dots, \zeta_{2l}$ base de W^*

$\zeta_{2l+1}, \dots, \zeta_{2d}$ base de \mathfrak{p}^* .

Soit $e_1, \dots, e_p, X_1, \dots, X_r, D_1, \dots, D_{2d}$ la base de \mathfrak{g} duale de la base précédente. L'ensemble $\mathcal{C}_{\lambda, \xi}^{\text{ad}}$ se décrit facilement :

$$\mathcal{C}_{\lambda, \xi}^{\text{ad}} = \left\{ f = f_0 + \sum_{i=1}^r \alpha_i \xi_i + \sum_{j=1}^{2l} \beta_j \zeta_j, \quad \alpha_i \in \mathbf{R}, \beta_j \in \mathbf{R}, f \lambda\text{-régulière dans } \alpha^* \text{ et } D(f) \neq 0 \right\}$$

et la mesure μ_λ sur $\mathcal{C}_{\lambda, \xi}^{\text{ad}}$ s'écrit :

$$\mu_\lambda = D(f) d\alpha_1 \dots d\alpha_r d\beta_1 \dots d\beta_{2l} = D(f) d_{V^*} \wedge d_{W^*}.$$

D'autre part, l'ensemble $(f_0 + V^*) \cap \mathcal{U}$ est une partie de l'ensemble

$$\left\{ f = f_0 + \sum_{i=1}^r \alpha_i \xi_i, \quad \alpha_i \in \mathbf{R} \right\}.$$

Notons avec les mêmes lettres les formes volumes associées à d_{V^*}, d_{W^*} . Si $\beta_{A^0, f}$ est la forme de Liouville de l'orbite $A^0 \cdot f$, il existe une fonction \mathcal{C}^∞ notée δ telle que :

$$\delta(f) d_{V^*} \wedge \beta_{A^0, f} = d_{V^*} \wedge d_{W^*}$$

en tout point $f \in (f_0 + V^*) \cap \mathcal{U}$. Par définition de $\beta_{A^0, f}$,

$$\beta_{A^0, f}(D_1 \cdot f, D_2 \cdot f, \dots, D_{2l} \cdot f) = D'(f).$$

D'autre part, le déterminant de $(D_1 \cdot f, \dots, D_{2l} \cdot f)$ dans la base $\zeta_1, \dots, \zeta_{2l}$ est égal au discriminant de B_f dans D_1, \dots, D_{2l} . On obtient

$$\beta_{A^0, f}(\zeta_1, \dots, \zeta_{2l}) = (D'(f))^{-1}$$

et donc $\delta(f) = D'(f)$. Le théorème de Fubini montre alors que la mesure \bar{m}_λ admet bien une densité de classe \mathcal{C}^∞ par rapport à d_{V^*} , qui a la valeur cherchée. \square

LEMME 92. *Le produit $D'(f) \cdot D(f)$ est égal au pfaffien de B_f restreinte à $W \oplus \mathfrak{p}$.*

Démonstration. Les notations étant celles qui précèdent, il s'agit de calculer le pfaffien de B_f dans la base D_1, \dots, D_{2d} . Comme $f \in \alpha^*$, $B_f|_{\mathfrak{a} \times \mathfrak{p}} = 0$, ce qui donne le résultat. \square

Intéressons nous maintenant à $\mathfrak{n}_\mathfrak{g}^*/G$. D'après le lemme 87, $V_\mathfrak{g}^*$ vérifie la condition de la proposition 21 (en prenant $X^* = V_\mathfrak{g}^*$). Le sous-espace Z_4 est un supplémentaire de $\mathfrak{g}(\nu_0) + \mathfrak{n}$. Il existe donc un voisinage \mathcal{W}' de ν_0 dans lequel $Z_4 \oplus \mathfrak{g}(\nu) + \mathfrak{n} = \mathfrak{g}$, et, si \mathcal{W} désigne l'ouvert défini par la proposition 21, on peut supposer que $\mathcal{W} \subset \mathcal{W}'$.

Choisissons arbitrairement une base de Z_4 . Pour tout ν dans \mathcal{W} , ce choix entraîne

celui d'une forme volume sur $\mathfrak{g}(\nu) + \mathfrak{n}$, et donc d'une mesure sur $G/G(\nu)N$. On obtient ainsi le choix d'une mesure G -invariante sur $\mathcal{W} = G \cdot \nu$ par la formule :

$$\int_{G \cdot \nu} \varphi(\xi) db_\omega(\xi) = \int_{G/G(\nu)N} d\mu_{G/G(\nu)N} \int_{N \cdot g\nu} \varphi(\xi) d\beta_{N \cdot g\nu}(\xi).$$

Rappelons (cf. § 17.3), que les choix de mesures sur $\mathfrak{n}_\mathfrak{g}^*$, $\mathfrak{n}_\mathfrak{g}^*/G$ et les G -orbites dans $\mathfrak{n}_\mathfrak{g}^*$ sont liés par la formule

$$\int_{\mathfrak{n}_\mathfrak{g}^*} \varphi(\nu) d_{\mathfrak{n}_\mathfrak{g}^*}(\nu) = \int_{\mathfrak{n}_\mathfrak{g}^*/G} d\mu_{\mathfrak{n}_\mathfrak{g}^*/G}(\omega) \int_\omega \varphi(\nu) db_\omega(\nu)$$

le choix des mesures db_ω (dans $p_G(\mathcal{W})$) implique donc un choix local de la mesure $\mu_{\mathfrak{n}_\mathfrak{g}^*/G}$. Notons $\bar{\mu}_\mathfrak{g}$ l'image réciproque de la restriction à $p_G(\mathcal{W})$ de $\mu_{\mathfrak{n}_\mathfrak{g}^*/G}$ dans $(\nu_0 + V_2^*) \cap \mathcal{W}$.

Soit $\Delta(f_0)$ le déterminant de la restriction de B_{f_0} à $Z_4 \times Z_1$ (dans des bases univolumiques) et $D_1(f_0)$ le pfaffien de la restriction de B_{f_0} à Z_3 (dans une base univolumique).

LEMME 93. La mesure $\bar{\mu}_\mathfrak{g}$ coïncide, sur $(\mathfrak{g} + V_2^*) \cap \mathcal{W}$ avec la mesure $\mathcal{I}(\nu) d_{V_2^*}$, où $\mathcal{I}(\nu)$ est une fonction \mathcal{C}^∞ qui vérifie : $\mathcal{I}(V_0) = \Delta(f_0) D_1(f_0)$.

Démonstration. On a $\mathfrak{n}^* = \mathfrak{z}_u^* \oplus Z_1^* \oplus V_2^* \oplus Z_3^*$. Dans \mathcal{W} , on a :

$$\forall \nu \in \mathcal{W} \cap (\nu_0 + V_2^*), \quad \mathfrak{g} \cdot \nu \oplus V_2^* = (\mathfrak{g} \cap \mathfrak{n})^\perp \quad \text{et} \quad \mathfrak{n} \cdot \nu \oplus V_2^* \oplus Z_1^* = (\mathfrak{g} \cap \mathfrak{n})^\perp.$$

Choisissons des bases univolumiques de ces différents espaces. (Rappelons que des mesures sont fixées sur \mathfrak{g} , \mathfrak{n} , \mathfrak{z} , $\mathfrak{g} \cap \mathfrak{n}$, $\mathfrak{g}(\nu_0) + \mathfrak{n}$, et qu'on choisit arbitrairement les autres.) Notons :

$$\begin{aligned} Y_1, \dots, Y_k & \text{ la base de } \mathfrak{z}_u, & \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_k & \text{ la base de } \mathfrak{z}_u^* \\ X_1, \dots, X_m & \text{ la base de } V_2, & \xi_1, \dots, \xi_m & \text{ la base de } V_2^* \\ D_1, \dots, D_s & \text{ la base de } Z_1, & \zeta_1, \dots, \zeta_s & \text{ la base de } Z_1^* \\ E_1, \dots, E_{2d} & \text{ la base de } Z_3, & \eta_1, \dots, \eta_{2d} & \text{ la base de } Z_3^* \\ F_1, \dots, F_s & \text{ la base de } Z_4, & \varphi_1, \dots, \varphi_s & \text{ la base de } Z_4^*. \end{aligned}$$

(Les notations sont différentes de celles employées pour le lemme 91.)

Le problème est un problème de division de formes différentielles : il est clair que

la densité $\mathcal{J}(\nu)$ est de classe \mathcal{C}^∞ et qu'on peut la calculer en un point. Soit γ_ν la forme de degré maximal sur $Z_4 \cdot \nu$ définie par :

$$\gamma_\nu(F_1 \cdot \nu \dots F_s \cdot \nu) = 1.$$

Puisque $g \cdot \nu = Z_4 \cdot \nu \oplus n \cdot \nu$, la forme $B_\nu = \gamma_\nu \wedge \beta_\nu$ (où β_ν est de la forme de Liouville sur l'orbite $N \cdot \nu$) est une forme de degré maximal sur $g \cdot \nu$. La formule définissant la mesure $b_{G \cdot \nu}$ montre que cette mesure est associée à la forme différentielle B_ν .

Notons $\omega_{V_2^*}$ et $\omega_{(\delta \cap n)^\perp}$ les formes volumes sur V_2^* et $(\delta \cap n)^\perp$, \mathcal{J} vérifie

$$\mathcal{J}(\nu_0) \cdot \omega_{V_2^*} \wedge B_{\nu_0} = \omega_{(\delta \cap n)^\perp}.$$

Calculons les deux membres :

On a $\beta_{\nu_0}(E_1 \cdot \nu_0, \dots, E_{2d} \cdot \nu_0) = D_1(f_0)$ par définition de la forme de Liouville. D'autre part $\gamma_{\nu_0}(F_1 \cdot \nu_0, \dots, F_s \cdot \nu_0) = 1$ par définition de γ_{ν_0} .

Il reste donc à calculer le déterminant de la famille $(\xi_1, \dots, \xi_m, E_1 \cdot \nu_0, \dots, E_{2d} \cdot \nu_0, \dots, F_1 \cdot \nu_0, \dots, F_s \cdot \nu_0)$ dans la base $(\xi_1, \dots, \xi_m, \eta_1, \dots, \eta_{2d}, \varphi_1, \dots, \varphi_s)$. C'est un système triangulaire par blocs, et on vérifie facilement que ce déterminant vaut $D_1(f_0)^2 \cdot \Delta(f_0)$, d'où le résultat. \square

Avant de pouvoir achever, il faut un résultat permettant de comparer les densités rencontrées. Le lemme qui suit le fait, et il est crucial.

LEMME 94. *Le pfaffien $D''(f_0)$ de la restriction de B_f à Z est égal (au signe près) au produit $D_1(f_0) \cdot D_2(f_0) \Delta(f_0)$, où $D_1(f_0)$ est le pfaffien de la restriction de B_f à Z_3 , $D_2(f_0)$ le pfaffien de la restriction de B_f à Z_2 et $\Delta(f_0)$ le déterminant de la matrice de B_{f_0} restreinte à $Z_4 \times Z_1$ (dans la base $\mathcal{B}(Z_4) \times \mathcal{B}(Z_1)$).*

Démonstration. Ecrivons la matrice de B_{f_0} en blocs correspondant aux sous-espaces Z_1, Z_2, Z_3, Z_4 .

On a :

- $f_0([n(\nu_0), n]) = 0$, donc B_{f_0} restreinte à $Z_1 \times Z_3$ et $Z_1 \times Z_1$ est nulle.
- $f_0([g(\nu_0), n]) = 0$, donc B_{f_0} restreinte à $Z_2 \times Z_1$ et $Z_2 \times Z_3$ est nulle.

La matrice de B_{f_0} a donc la forme suivante :

	Z_4	Z_3	Z_2	Z_1
Z_4				
Z_3			0	0
Z_2		0		0
Z_1		0	0	0

Le résultat est alors évident. □

Démonstration de la proposition 19. D'abord, la proposition 20 permet de se restreindre à \mathcal{U}_λ . D'après le lemme 82, l'image réciproque, dans $\mathcal{O}_\lambda^{\text{ad}}$ de \mathcal{W}_ρ (donné par la proposition 21), est de complémentaire négligeable dans $\mathcal{O}_\lambda^{\text{ad}}$. Le lemme 84 montre que $\mathcal{O}_\lambda^{\text{ad}}$ est de complémentaire négligeable dans $\mathcal{O}_\lambda^{\text{ad}}$. Il suffit donc de démontrer le théorème de désintégration pour la restriction de m_λ à l'intersection de \mathcal{U}'_λ/A' avec $\mathcal{O}_\lambda^{\text{ad}}/G$.

D'autre part, les remarques au début du paragraphe montrent que l'application \bar{I} induit sur $\mathcal{C}_{\lambda,\xi}^{\text{ad}} \cap \mathcal{O}'_{\lambda,\xi} / A'_\xi$ une fibration de base $\mathcal{O}'_{\lambda,\xi}$ et de fibre $\mathcal{C}_{\lambda,\xi}^{\text{ad}} / A'_{1,\xi}$. D'autre part, les W -orbites dans R_λ et les W_1 -orbites dans R_λ coïncident.

Fixons un f_0 dans $\mathcal{O}_\lambda^{\text{ad}} \cap \mathcal{U}_\lambda$, tel que si $I(f_0) = (f_1^0, \nu_0)$, ν_0 appartienne à \mathcal{W}_ρ ; soit V^* construit au paragraphe 5, et les ouverts \mathcal{U} et \mathcal{W} fixés par les proposition 20 et 21.

La mesure \bar{m}_λ dans $\mathcal{U} \cap (f_0 + V^*)$, s'écrit $D''(f) \cdot d_{V^*}$ (lemmes 91 et 92) et la mesure $\bar{\mu}_\rho$ dans $\mathcal{W} \cap (\nu_0 + V_2^*)$ s'écrit $\mathcal{J}(\nu) d_{V_2^*}$. La fibre au dessus de ν_0 s'identifie à $f_1^0 + V_1^*$, et la mesure y est donnée par la formule $(D''(f_0) / \mathcal{J}(\nu_0)) d_{V_1^*}$. Appliquons les lemmes 93 et 94; on trouve $(D''(f_0) / \mathcal{J}(\nu_0)) = D_2(f_0)$. L'image de la mesure $n_{\lambda_1}^{G_1}$ dans $f_1^0 + V_1^*$ est donnée par la densité $D_2(f_0) d_{V_1^*}$. D'autre part, la proposition 20, les lemmes 88, 90 et 91 montrent que l'image de $m_{\lambda_1}^{G_1}$ dans $f_1^0 + V_1^*$ est donnée par la même formule. □

17.7. Démonstration du théorème 7'. G est un groupe tel que \mathfrak{g} n'est ni réductif, ni nilpotent. On a démontré qu'il existait une partie $\mathcal{O}_\lambda^{\text{ad}}/G$ de complémentaire négligeable de $\mathcal{O}_\lambda^{\text{ad}}/G$ telle que, pour $f \in \mathcal{O}_\lambda^{\text{ad}}$, $G(\nu)/N(\nu)$ est unimodulaire. Il en résulte que

$G(\nu)/B'$ est unimodulaire (lemme 81); c'est donc un groupe complexe algébrique et unimodulaire, auquel on peut appliquer l'hypothèse de récurrence, le sous-groupe du centre de $G(\nu)/B'$ étant $Z \cdot N(\nu)/B'$ et le caractère χ_{λ_1} de différentielle $2i\pi\bar{\lambda}_1|_{\mathfrak{g} + \mathfrak{n}(\nu)/\mathfrak{b}'}$.

Soit $f \in \mathcal{O}_{\lambda_1}^{\text{ad}}$, et $I(f) = (f_1, \nu)$. La proposition 6 exprime que

$$\pi_f^G = \text{Ind}_{G(\nu)N \uparrow G} (\pi_{f_1}^{G_1} \otimes W_{\nu}).$$

L'application de la formule du caractère d'une représentation induite (cf. [BC], chapitre V) donne :

LEMME 95. Soit $\varphi \in \mathcal{C}^{\infty}(G, Z, \chi_{\lambda})$. Si les intégrales considérées convergent, on a :

$$\text{tr } \pi_f^G(\varphi) = \int_{G/G(\nu)N} d_{G/G(\nu)N} g \left[\text{tr} \int_{G(\nu)N/Z} \varphi(gxg^{-1}) (\pi_{f_1}^{G_1} \otimes W_{\nu})(x) d_{G(\nu)N} x \right].$$

Soit σ une section borélienne de $\mathcal{O}_{\lambda}^{\text{ad}}/G$ dans $\mathcal{O}_{\lambda}^{\text{ad}}$. Si $\Omega \in \mathcal{O}_{\lambda}^{\text{ad}}/G$, on note $\omega \in \mathfrak{n}^*/G$ sa projection sur \mathfrak{n}^* , f^{Ω} , ou, quand il n'y a pas d'ambiguïté possible, plus simplement f , au lieu de $\sigma(\Omega)$, ν_{Ω} , ou plus simplement ν , la restriction de $\sigma(\Omega)$ à \mathfrak{n}^* , \mathfrak{g}_1^{Ω} , ou plus simplement \mathfrak{g}_1 , au lieu de $\mathfrak{g}(\nu_{\Omega})$, ainsi que G_1^{Ω} , ou G_1 , au lieu de $G(\nu_{\Omega})$, et enfin f_1^{Ω} , ou même f_1 la restriction de $\sigma(\Omega)$ à \mathfrak{g}_1^{Ω} , et Ω_1 la G_1^{Ω} -orbite correspondante.

Soit $\varphi \in \mathcal{C}_c^{\infty}(G, Z, \chi_{\lambda})$, et soit

$$P(\varphi) = \int_{\mathcal{O}_{\lambda}} \frac{1}{[G(f) : G(f)^0]} \text{tr } \pi_f^G(\varphi) dm_{\lambda}^G(\Omega).$$

(Pour l'instant, on ne sait pas que l'intégrale converge.)

D'après le lemme 95 et la proposition 19 :

$$\begin{aligned} P(\varphi) &= \int_{\mathfrak{n}^*/G} d\mu_{\mathfrak{n}^*/G}(\omega) \int_{\mathfrak{g}^*/G_1} [G_1(f_1) : G_1(f_1)^0]^{-1} dm_{\lambda_1}^{G_1}(\Omega_1) \\ &\quad \times \int_{G/G(\nu)N} d_{G/G(\nu)N} g \text{tr} \int_{G(\nu)N/Z} \varphi(gxg^{-1}) (\pi_{f_1}^{G_1} \otimes W_{\nu})(x) d_{G(\nu)N} x \end{aligned} \quad (1)$$

puisque $[G(f) : G(f)^0] = [G_1(f_1) : G_1(f_1)^0]$.

Considérons la fonction Φ_g , pour ν fixé de \mathfrak{g}^*/G_1 dans \mathbf{C} :

$$\Phi_g(\Omega_1) = \text{tr} \int_{G(\nu)/N(\nu)Z} \pi_{f_1}(\gamma) d_{G(\nu)/N(\nu)Z} \gamma \left[\text{tr} \int_{N/Z} \varphi(g\gamma n g^{-1}) W_{\nu}(\gamma n) dn \right]. \quad (2)$$

On voit, en posant $x=\gamma n$, $\gamma \in G(\nu)$, $n \in N$, dans (1) que (1) équivaut à :

$$P(\varphi) = \int_{n \backslash \nu G} d\mu_{n \backslash \nu G}(\omega) \int_{g \backslash G_1} dm_{\nu}^{G_1}(\Omega_1) \int_{G/G(\nu)N} \Phi_g(\Omega_1) d_{G/G(\nu)N} g. \quad (3)$$

Soit maintenant la fonction Ψ_g de $G(\nu)$ dans \mathbb{C}

$$\Psi_g(\gamma) = \text{tr} \int_{N/Z'} \varphi(g\gamma n g^{-1}) W_{\nu}(\gamma) \pi_{\nu}^N(n) dn. \quad (4)$$

Le fait que la représentation π_{ν}^N est à trace est connu depuis Kirillov. L'intégrale (4) est donc convergente.

On vérifie facilement que, pour $\gamma \in G(\nu)$, $n \in N(\nu)$

$$\Psi_g(\gamma n) = \Psi_g(\gamma) \chi_{\nu}(n^{-1}). \quad (5)$$

L'équation (2) s'écrit donc

$$\Phi_g(\Omega_1) = \text{tr} \pi_{f_1}^{G_1}(\Psi_g). \quad (6)$$

Appliquons l'hypothèse de récurrence à $G(\nu)$:

$$\int_{g \backslash G_1} \Phi_g(\Omega_1) [G_1(f_1) : G_1(f_1)^0]^{-1} dm_{\nu}^{G_1}(\Omega_1) = \Psi_g(e) \quad (7)$$

et, pour $m_{\nu}^{G_1}$ -presque toute orbite Ω_1 , la ligne (6) a un sens, i.e. $\text{tr} \pi_{f_1}^{G_1}(\Psi_g)$ est bien défini.

Reportons maintenant (4) et (7) dans (3); après avoir permuté deux intégrations :

$$P(\varphi) = \int_{n \backslash \nu G} d\mu_{n \backslash \nu G}(\omega) \int_{G/G(\nu)N} d_{G/G(\nu)N} g \text{tr} \int_{N/Z'} \varphi(gng^{-1}) W_{\nu}(n) dn. \quad (8)$$

Faisons le changement de variable dans la dernière intégrale : $n \rightarrow gng^{-1}$. On obtient

$$P(\varphi) = \int_{n \backslash \nu G} d\mu_{n \backslash \nu G}(\omega) \int_{G/G(\nu)N} d_{G/G(\nu)N} g \text{tr} \int_{N/Z'} \varphi(n) W_{\nu}(g^{-1}ng) dn. \quad (9)$$

On a $W_{\nu}(g^{-1}ng) = \pi_{\nu}^N(g^{-1}ng)$. Par transport de structure, on a

$$\text{tr} \int_{N/Z'} \varphi(n) W_{\nu}(g^{-1}ng) dn = \text{tr} \int_{N/Z'} \varphi(n) \pi_{g^{-1}\nu}(n) dn.$$

De (9) on tire :

$$P(\varphi) = \int_{\mathfrak{n}_v^*/G} d\mu_{\mathfrak{n}_v^*/G} \int_{G/G(v)N} d_{G/G(v)N} \mathcal{G}[\mathrm{tr} \pi_{g^{-1}v}^N(\varphi)]. \quad (10)$$

Mais il résulte des choix de normalisations de mesure que (10) s'écrit encore :

$$P(\varphi) = \int_{\mathfrak{n}_v^*/N} \mathrm{tr} \pi_v^N(\varphi) dm_\rho^N(\omega). \quad (11)$$

Le théorème de Plancherel pour N donne donc

$$P(\varphi) = \varphi(e).$$

La première partie du théorème, i.e. l'existence des caractères résulte de ce calcul et du théorème de Fubini. \square

Bibliographie

- [And 1] ANDLER, M., Sur des représentations construites par la méthode des orbites. *C. R. Acad. Sci. Paris*, 290 (1980), 873–875.
- [And 2] — La formule de Plancherel pour les groupes algébriques complexes unimodulaires. *C. R. Acad. Sci. Paris*, 295 (1982), 515–517.
- [AK] AUSLANDER, L. & KOSTANT, B., Polarizations and unitary representations of solvable Lie groups. *Invent. Math.*, 14 (1971), 255–354.
- [AM] AUSLANDER, L. & MOORE, C. C., Unitary representations of solvable Lie groups. *Mem. Amer. Math. Soc.*, 62. Rhode Island, 1966.
- [Ber] BERNAT, P., Sur les représentations unitaires des groupes de Lie résolubles. *Ann. Sci. Ecole Norm. Sup.*, 82 (1965), 37–99.
- [BC] BERNAT, P., CONZE, N. ET AL., *Représentations des groupes de Lie résolubles*. Dunod, Paris, 1972.
- [Bor] BOREL, A., *Linear algebraic groups*. Benjamin, New York, 1969.
- [Bour 1] BOURBAKI, N., *Topologie générale*. Chapitre IX, 2^e éd. Hermann, Paris, 1958.
- [Bour 2] — *Intégration*. Chapitre VI, Hermann, Paris, 1959.
- [Bour 3] — *Algèbre linéaire*. Chapitre IX, Hermann, Paris, 1959.
- [Bru] BRUHAT, F., Sur les représentations induites des groupes de Lie. *Bull. Soc. Math. France*, 84 (1956), 97–205.
- [Char 1] CHARBONNEL, J. Y., La formule de Plancherel pour un groupe résoluble connexe II. *Math. Ann.*, 250 (1980), 1–34.
- [Char 2] — Sur les orbites de la représentation coadjointe. À paraître dans *Compositio Math.*
- [Dix 0] DIXMIER, J., Sur les représentations unitaires des groupes de Lie algébriques. *Ann. Inst. Fourier*, 7 (1957), 315–328.
- [Dix 1] — *Les C*-algèbres et leurs représentations*. Gauthier-Villars, Paris, 1964.
- [Dix 2] — Représentations induites holomorphes des groupes résolubles algébriques. *Bull. Soc. Math. France*, 94 (1966), 181–206.

- [Dix 3] — *Algèbres enveloppantes*. Gauthier villars, Paris, 1974.
- [Duf 1] DUFLO, M., Sur les extensions des représentations irréductibles des groupes de Lie nilpotents. *Ann. Sci. Ecole Norm. Sup.*, 5 (1972), 71–120.
- [Duf 2] — Opérateurs différentiels biinvariants sur un groupe de Lie. *Ann. Sci. Ecole Norm. Sup.*, 10 (1977), 265–288,
- [Duf 3] — Construction of primitive ideals in an enveloping algebra. *Lie Groups and their Representations*. Gelfand ed. Bolyai-Janos Summer School in Mathematics, J. Wiley, New York, 1975.
- [Duf 4] — Construction de représentations unitaires d'un groupe de Lie. *Harmonic Analysis and Group Representations*. Lignori Editore, Naples, 1982.
- [DR] DUFLO, M. & RAÏS, M., Sur l'analyse harmonique sur les groupes de Lie résolubles. *Ann. Sci. Ecole Norm. Sup.*, 9 (1976), 107–144.
- [DV] DUFLO, M. & VERGNE, M., Une propriété de la représentation coadjointe d'une algèbre de Lie. *C.R. Acad. Sci. Paris*, 268 (1969), 583–585.
- [Fe] FELL, J. M. G., Weak containment and induced representations of groups II. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 110 (1964), 424–447.
- [God] GODEMENT, R., Mémoire sur la théorie des caractères dans les groupes localement compacts unimodulaires. *J. Math. Pures Appl.*, 30 (1951), 1–110.
- [Gui] GUINZBURG, V. A., Method of orbits in the representation theory of complex Lie groups. *Functional Anal. Appl.*, 15 (1981), 18–28.
- [H-C 1] HARISH CHANDRA, The Plancherel formula for complex semi-simple Lie groups. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 76 (1954), 485–528.
- [H-C 2] — Harmonic analysis on real reductive groups I. *J. Funct. Anal.*, 19 (1975), 104–204.
- [H-C 3] — Harmonic analysis on real reductive groups III. *Ann. of Math.*, 104 (1976), 117–201.
- [Kir 1] KIRILLOV, A. A., Représentations unitaires des groupes de Lie nilpotents. *Uspehi Mat. Nauk.*, 17 (1962), 57–110.
- [Kir 2] — Plancherel measure of nilpotent Lie groups. *J. Funct. Anal.*, 1 (1967), 330–331.
- [Kir 3] — The characters of unitary representations of Lie groups. *J. Funct. Anal.*, 2 (1968), 40–55.
- [KL 1] KLEPPNER, A. & LIPSMAN, R. L., The Plancherel formula for group extensions. *Ann. Sci. Ecole Norm. Sup.*, 5 (1972), 459–516.
- [KL 2] — The Plancherel formula for group extensions II. *Ann. Sci. Ecole Norm. Sup.*, 6 (1973), 103–132.
- [KS] KNAPP, A. & STEIN, E., Intertwining operators for semi-simple Lie groups. *Ann. of Math.*, 93 (1971), 489–578.
- [Li 1] LION, G., Indice de Maslov et représentation de Weil, in *Trois textes sur les représentations des groupes*. Pub. Math. Univ. Paris 7 n° 2. Paris, 1978.
- [Li 2] — Groupes de Lie résolubles et indice de Maslov. *C.R. Acad. Sci. Paris*, 291 (1980), 7–10.
- [LV] LION, G. & VERGNE, M., *The Weil representation, Maslov index and theta series*. Birkhäuser, Boston, 1980.
- [Mac] MACKEY, G., Unitary representations of group extensions I. *Acta Math.*, 99 (1958), 265–311.
- [PRV] PARTHASARATHY, K. R., RANGA RAO, R. & VARADARAJAN, V. S., Representations of complex semi-simple Lie groups and Lie algebras. *Ann. of Math.*, 85 (1967), 383–429.
- [Puk 1] PUKANSZKY, L., On the theory of exponential groups. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 126 (1967), 487–507.

- [Puk2] — Unitary representations of solvable Lie groups. *Ann. Sci. Ecole Norm. Sup.*, 4 (1971), 81–137.
- [Rich] RICHARDSON, R. W., Deformations of Lie subgroups and the variation of the isotropy subgroups. *Acta Math.*, 129 (1972), 35–73.
- [Ros] ROSENBLICHT, M., A remark on quotient spaces. *An. Acad. Brasil. Cienç.*, 35 (1963), 487–489.
- [Schi] SCHIFFMANN, G., Integrales d'entrelacement et fonctions de Whittaker. *Bull. Soc. Math. France*, 99 (1971), 3–72.
- [SV] SPEH, B. & VOGAN, D., Reducibility of generalized principal series representations. *Acta Math.*, 145 (1980), 228–299.
- [Ver] VERGNE, M., Etude de certaines représentations induites des groupes de Lie résolubles exponentiels. *Ann. Sci. Ecole Norm. Sup.*, 3 (1970), 353–384.
- [Wal] WALLACH, N., *Harmonic analysis on homogeneous spaces*. Dekker, New York, 1974.
- [War] WARNER, G., *Harmonic analysis on semi-simple Lie groups. Vol. I et II*. Springer, Berlin, 1972.

Reçu le 1 mars, 1983