MÉTRIQUE ANALLAGMATIQUE.

PAR

RENÉ LAGRANGE

À DIJON.

Introduction.

J'ai montré dans un mémoire antérieur[1] comment on pouvait définir les distances anallagmatiques dans l'espace euclidien à 3 dimensions en les considérant comme les valeurs extrémales de distances particulières, de la même façon, par exemple, que la distance euclidienne de deux points est le maximum de la distance des deux plans passant respectivement par ces deux points. Je me propose ici d'étendre les définitions à l'espace ayant un nombre quelconque de dimensions.

Les éléments fondamentaux de l'espace conforme E_n à n dimensions sont les hypersphères à $n-p$ dimensions $(p=1, 2, \ldots n)$, qu'il sera commode de désigner par la notation H_{n-p}. Les H_{n-1} seront plus simplement appelées « sphères »; les H_0 sont les couples de points, ou « bipoints », et les H_1 sont les « cercles ». Tandis que le mémoire cité utilisait la géométrie pure, le présent travail a naturellement un caractère analytique.

Pour définir la distance covariante d'un point à une hypersphère, le point de départ est toujours la distance d'un point à une sphère. Par contre, nous définirons les distances invariantes de deux hypersphères à partir de la distance de deux sphères, et non de la distance d'un bipoint à une sphère, comme c'était le cas précédemment.[2] Il m'a semblé, en effet, que le produit de deux sphères est un invariant anallagmatique trop naturel et trop simple pour ne pas servir de base à la métrique.

Toute H_{n-p} étant l'intersection de p sphères, les distances de deux hypersphères seront des valeurs extrémales de la distance des deux sphères générales

[1] « Définitions et théorèmes de métrique anallagmatique », Ann. Ec. Norm., (3), t. LIX, fasc. 1, 1942, p. 1—42.

[2] loc. cit., p. 7.

passant respectivement par ces deux variétés, c'est à dire appartenant à deux familles linéaires de sphères. Si α et β désignent respectivement une H_{n-p} et une H_{n-q} $(p \leq q)$, appartenant toutes deux à une même H_{n-r} $(0 \leq r \leq p)$, on obtient ainsi $p-r$ distances conformes en général.[1] A toute H_{n-p} correspond une hypersphère focale à $n+2-p$ dimensions, définie par l'intersection des sphères orthogonales à la H_{n-p}. On démontre que les focales α' et β' de α et β ont les mêmes distances conformes que α, β, tandis que les carrés des distances conformes de α à deux hypersphères focales β, β' sont, chacune à chacune, complémentaires à -1.

Un cas particulièrement important est celui où β est un bipoint appartenant, avec α, à une même H_{n-p+1}; ici, $q=n$ et $r=p-1$; il n'y a qu'une distance focale. Plus particulièrement, c est le cas de deux bipoints cocycliques. On est alors amené à chercher les valeurs extrémales des distances d'une H_{n-p} α aux bipoints d'une H_{n-q} β, qui appartiennent avec α à une même H_{n-p+1}. On peut également chercher les valeurs extrémales des distances conformes de deux bipoints cocycliques respectivement situés sur α et sur β. On retrouve ainsi les distances conformes de α, β.

Enfin, les couples de bipoints qui fournissent ces distances sont les intersections avec α et β des cercles orthogonaux à ces deux hypersphères, qu'on peut appeler les «perpendiculaires communes» ou «hauteurs», et dont les bipoints d'intersection avec α et β sont les «pieds».

Tous ces résultats sont la généralisation remarquablement simple de ceux obtenus, dans le mémoire cité, pour les sphères et les cercles de l'espace ordinaire. Cette extension est immédiate en ce qui concerne les distances covariantes, et le premier chapitre qui leur est consacré est court, et a plutôt le caractère d'un rappel. Ce sont les deux autres chapitres, consacrés aux distances invariantes, qui constituent l'objet essentiel de ce travail. Les notations sont celles d'un mémoire sur les produits d'inversions[2], mais l'algorithme exposé au premier chapitre et la première formale du chapitre II de ce mémoire sont seuls utilisés.[3] Les deux mémoires auxquels le lecteur pourra être amené à se reporter seront désignés par les abréviations respectives M. A. (mesures anallagmatiques) et P. I. (produits d'inversions).

---

[1] Une inversion dont le pôle est sur la H_{n-r} permet de se placer dans un espace à $n-r$ dimensions seulement, pour lequel α est une $H_{n-r-(p-r)}$.

[2] Acta mathematica, t. 82, 1950, p. 1—70.

[3] p. 4—13.

CHAPITRE I.

Distances covariantes.

1. *Distance d'un point à une sphère.* Le produit UM d'une sphère U et d'un point M est un invariant anallagmatique et peut être pris pour distance conforme $[MU]$, en précisant que M et U sont unitaires.

Il subsiste pourtant une ambiguïté quant au signe du rayon de U. Nous ne nous occupons que de sphères réelles ou imaginaires pures, c'est à dire de centre réel et de rayon imaginaire pur; nous convenons alors de prendre ce rayon positif ou imaginaire pur positif. Si R désigne ce rayon, $\operatorname{sgn} R$ représente le signe de R lorsque R est réel et quelconque, et le signe de $\frac{R}{i}$ lorsque R est imaginaire pur quelconque. Dans ces conditions, la distance conforme d'un point M de masse h et d'une sphère unitaire U est

$$[MU] = \frac{UM}{h \operatorname{sgn} R}. \tag{1}$$

Dans une inversion réelle par rapport à la sphère

$$S = \frac{\overrightarrow{OP}^2 - \varrho^2}{2\varrho}$$

de centre O et de rayon ϱ, M devient[1]

$$M' = M - 2(SM)S,$$

dont la masse est

$$h' = h + 2\frac{SM}{\varrho};$$

U devient

$$U' = U - 2(SU)S,$$

toujours unitaire, dont le rayon R' est lié à R par la formule

$$\frac{1}{2R'} = \frac{1}{2R} - \frac{SU}{\varrho}.$$

Si $U = \frac{\overrightarrow{AP}^2 - R^2}{2R}$, il vient donc

[1] Cf. P. I., p. 13.

$$\frac{1}{2R'} = \frac{1}{2R} - \frac{R^2 + \varrho^2 - \overline{AO}^2}{2R\varrho^2} = \frac{\overline{AO}^2 - R^2}{2R\varrho^2} = \frac{UO}{\varrho^2},$$

et, par suite,

$$2) \qquad [M'U'] = \frac{U'M'}{h' \operatorname{sgn} R'} = \frac{UM}{h + 2\frac{SM}{\varrho}}\left(\operatorname{sgn} \frac{UO}{\varrho^2}\right) = \frac{[MU]}{1 + 2\frac{SM}{h\varrho}}\left(\operatorname{sgn} \frac{UO}{\varrho^2}\right) \times (\operatorname{sgn} R).$$

Pour une deuxième sphère unitaire U_1, de rayon R_1, et le même point M, on a donc

$$(3) \qquad \frac{[M'U_1']}{[M'U']} = \frac{[MU_1]}{[MU]} \times \left(\frac{\operatorname{sgn} U_1 O}{\operatorname{sgn} R_1} : \frac{\operatorname{sgn} UO}{\operatorname{sgn} R}\right).$$

On démontre ainsi que *le rapport des distances conformes d'un point à deux sphères est invariant conforme en valeur absolue. Si les deux sphères sont reélles, l'invariance est algébrique pourvu que le pôle d'inversion soit simultanément intérieur ou extérieur aux deux sphères.*

Si U devient un plan unitaire

$$\varpi = \vec{e} \times \overrightarrow{AP}, \quad \vec{e}^{\,2} = 1,$$

la distance devient

$$4) \qquad [M\varpi] = \vec{e} \times \overrightarrow{AM}.$$

2. *Distance d'un point à une hypersphère.* Soit un point unitaire M et une $H_{n-p}\alpha$ $(2 \leq p \leq n)$, ne contenant pas M. α est définie par l'intersection de p sphères linéairement distinctes $U_1, U_2, \ldots U_p$, qu'on peut supposer orthonormales. La distance conforme $[M\alpha]$ est, par définition, la valeur extrémale de la distance de M à la sphère la plus générale qui passe par α. Cette sphère est de la forme

$$(5) \qquad U = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i U_i,$$

et est unitaire pourvu que

$$(6) \qquad \sum_{i=1}^{p} \lambda_i^2 = 1.$$

Les extrema, liés à (6), de

$$UM = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i U_i M$$

sont les extrema libres de la fonction des $p + 1$ variables indépendantes $\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_p, \mu$

$$F(\lambda_1, \ldots \lambda_p, \mu) = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i U_i M - \frac{\mu}{2}\left(\sum_{i=1}^{p} \lambda_i^2 - 1\right).$$

On obtient ainsi (6) et les p équations

$$U_i M = \mu \lambda_i, \qquad i = 1, 2, \dots p; \tag{7}$$

la valeur correspondante de F est μ avec

$$\mu^2 = \sum_{i=1}^{p} (U_i M)^2 = \sum_{i=1}^{p} [U_i M]^2. \tag{8}$$

Si α est réelle, μ^2 est positif; la différentielle seconde qui fournit la nature de l'extremum s'exprime par le carré symbolique

$$\left(\sum_{i=1}^{p} \frac{\partial F}{\partial \lambda_i} d\lambda_i + \frac{\partial F}{\partial \mu} d\mu\right)_2 = -\mu \sum_{i=1}^{p} (d\lambda_i)^2 - 2\, d\mu \sum_{i=1}^{p} \lambda_i\, d\lambda_i,$$

où la dernière somme est nulle d'après (6); cette différentielle est du signe de $-\mu$, donc la valeur extrémale μ est un maximum en valeur absolue. Nous avons ainsi établi que, *lorsque α est réelle, le carré de la distance $[MU]$ de M à la sphère générale passant par α a pour maximum la somme des carrés des distances de M à p sphères orthogonales quelconques passant par α.*

Parmi ces p sphères, on peut en faire passer $p-1$ par M. Leur intersection est la H_{n-p+1} définie par M et α; la $p^{\text{ième}}$ sphère est la sphère orthogonale, le long de α, à cette H_{n-p+1}. Nous sommes ainsi amenés à *appeler distance $[M\alpha]$ la distance de M à la sphère orthogonale à l'hypersphère (α, M) le long de α. Son carré est égal à la somme des carrés de M à p sphères orthogonales quelconques passant par α.*

Pour $p = n$, α est un bipoint (A, A'), et l'on obtient aisément la formule[1]

$$[M(A, A')] = \frac{\overline{MA} \cdot \overline{MA'}}{\overline{AA'}}, \tag{9}$$

où les termes au second membre sont des distances euclidiennes. Si A' va à l'infini,

$$[M(A, \infty)] = \overline{MA}$$

est la distance euclidienne des deux points M, A que l'on peut écrire $[MA]$.

3. α conservant sa signification, les sphères orthogonales à α forment une famille linéaire de rang $n+2-p$ et se coupent suivant une H_{p-2} qu'on peut appeler l'hypersphère focale α' de α. La correspondence entre α et α' est réci-

[1] Cf. M.-A. p. 6.

proque. α' est, par exemple, l'intersection de $n+2-p$ sphères $U_{p+1}, U_{p+2}, \ldots U_{n+2}$ formant un système complet orthonormal avec $U_1, U_2, \ldots U_p$. On a donc

$$[M\alpha']^2 = \sum_{i=p+1}^{n+2} [U_i M]^2,$$

et, par suite,

$$[M\alpha]^2 + [M\alpha']^2 = \sum_{i=1}^{n+2} (U_i M)^2 = 0.$$

Nous pouvons ainsi énoncer le

Théorème. *Les carrés des distances d'un point à deux hypersphères focales sont opposés.*

Ça généralise un résultat établi pour un cercle et son bipoint focal dans l'espace ordinaire.[1]

4. Les plans contenant α sont les sphères (5) dont le rayon est infini, c'est à dire pour lesquelles

$$\sum_{i=1}^{p} \frac{\lambda_i}{R_i} = 0,$$

en désignant par R_i le rayon de U_i. Ces plans forment une famille linéaire de rang $p-1$, dont la base peut être $p-1$ plans orthonormaux, qu'on peut prendre pour $U_2, U_3, \ldots, U_p$. L'hyperplan au nombre minimum de dimensions qui contient α est l'intersection de ces $p-1$ plans, que nous appelons ϖ_α. α est une sphère pour cet espace ϖ_α, et la $p^{\text{ième}}$ sphère U_1 du système a le centre O et le rayon R de α dans ϖ_α. La projection orthogonale K de M sur ϖ_α est telle que l'on ait

$$[MK]^2 = \overline{MK}^2 = [MU_2]^2 + [MU_3]^2 + \cdots + [MU_p]^2,$$

donc

$$[M\alpha]^2 = [MU_1]^2 + \overline{MK}^2.$$

Dans ϖ_α, la droite KO rencontre U_1, donc α, en deux points diamétralement opposés B, C, et l'on a

$$[MU_1]^2 = \frac{(\overrightarrow{MB} \times \overrightarrow{MC})^2}{\overline{BC}^2} = \frac{\overline{MB}^2 \cdot \overline{MC}^2 - \overline{MB}^2 \cdot \overline{MC}^2 \cdot \sin^2 B\widehat{H}C}{\overline{BC}^2}$$

$$= \frac{\overline{MB}^2 \cdot \overline{MC}^2}{\overline{BC}^2} - \overline{MK}^2,$$

[1] Cf. M. A., p. 5 et 6.

donc

$$(10)\qquad [M\alpha]^2 = \frac{\overline{MB}^2 \cdot \overline{MC}^2}{\overline{BC}^2}$$

C'est l'extension, à une hypersphère quelconque, de la puissance réduite de Bloch pour un point et un cercle de l'espace ordinaire. On peut dire, en particulier, que, pour des éléments réels, la valeur absolue de la distance de M à α est le quotient, par le diamètre de α, du produit des deux distances extrêmes de M aux points de α.

CHAPITRE II.

Distances invariantes.

5. *Distance de deux sphères.* Le produit UV de deux sphères unitaires U, V est un invariant conforme et représente le cosinus de leur angle. Il est indiqué d'annuler la distance conforme de deux sphères tangentes, c'est à dire si $UV = \pm 1$, et de la faire réelle pour deux sphères non sécantes. Nous définirons cette distance par

$$(1)\qquad [UV] = \sqrt{(UV)^2 - 1}\,.$$

Si R et R' sont les rayons, et d la distance des centres, on a

$$(2)\qquad [UV] = \sqrt{\frac{(R^2 + R'^2 - d^2)^2}{4R^2R'^2} - 1}\,.$$

6. *Distance de deux hypersphères.* Soit deux hypersphères α et β, ayant respectivement $n-p$ et $n-q$ dimensions. Les distances conformes $[\alpha\beta]$ sont, par définition, les extrema de la distance $[UV]$ de la sphère U la plus générale passant par α à la sphère V la plus générale passant par β. Ces valeurs sont évidemment des invariants conformes. Si α et β sont sur une même sphère, U et V peuvent coïncider; la valeur $[UV]$ correspondante est nulle, mais n'est pas forcément un extremum. Ce cas est exceptionnel, et, lorsqu'il en est ainsi, une inversion par rapport à un point de la sphère qui contient α et β ramène au même problème dans l'espace à $n-1$ dimensions. Plus généralement, α et β peuvent appartenir à plusieurs sphères linéairement distinctes; si r est leur nombre maximum, cela signifie que α et β sont situées sur une même H_{n-r}, mais non sur une H_{n-r-1}; une inversion par rapport à un point de cette H_{n-r} permet de raisonner dans l'espace E_{n-r}. Cependant il n'est guère plus compliqué de

traiter directement le cas général, ce qui donne la possibilité de discuter ce que deviennent les distances lorsqu'une variation des hypersphères fait varier r.

Nous définissons donc α par l'intersection de p sphères

$$\alpha: \quad U_1, U_2, \ldots U_r, U_{r+1}, \ldots U_p,$$

dont le système peut être supposé orthonormal. β est de même l'intersection de q sphères

$$\beta: \quad U_1, U_2, \ldots U_r, V_{r+1}, V_{r+2}, \ldots V_q,$$

formant également un système orthonormal. Par hypothèse,

$$U_{r+1}, U_{r+2}, \ldots, U_p, V_{r+1}, V_{r+2}, \ldots V_q$$

sont linéairement distinctes. Dans cette famille de $p+q-2r$ sphères, considérons un système orthonormal formé par

$$U_{r+1}, U_{r+2}, \ldots U_p, U_{p+1}, U_{p+2}, \ldots U_{p+q-r}.$$

On a des relations de la forme

$$V_k = \sum_{i=r+1}^{p+q-r} a_{ki} U_i, \qquad k = r+1, r+2, \ldots q, \tag{3}$$

avec la condition

$$\begin{vmatrix} a_{r+1,p+1} & a_{r+1,p+2} & \ldots & a_{r+1,p+q-r} \\ a_{r+2,p+1} & a_{r+2,p+2} & \ldots & a_{r+2,p+q-r} \\ \cdot & \cdot & \ldots & \cdot \\ a_{q,p+1} & a_{q,p+2} & \ldots & a_{q,p+q-r} \end{vmatrix} \neq 0, \tag{4}$$

qui exprime l'indépendance linéaire des V_k avec $U_{r+1}, U_{r+2}, \ldots U_p$. Les conditions d'orthonormalité des V_k s'écrivent

$$\sum_{i=r+1}^{p+q-r} a_{ki} a_{hi} = \delta_{kh} \qquad k, h = r+1, r+2, \ldots q. \tag{5}$$

Nous complétons enfin le système des sphères $U_1, U_2, \ldots U_{p+q-r}$ en le système orthonormal complet $U_1, U_2, \ldots U_{p+q+r}, U_{p+q-r+1}, \ldots U_{n+2}$.

Ceci posé, la sphère unitaire générale passant par α est

$$U = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i U_i + \sum_{j=r+1}^{p} \lambda_j U_j,$$

avec

$$\sum_{i=1}^{r} \lambda_i^2 + \sum_{j=r+1}^{p} \lambda_j^2 = 1. \tag{6}$$

La sphère unitaire générale passant par β est

$$V = \sum_{i=1}^{r} \mu_i U_i + \sum_{k=r+1}^{q} \mu_k V_k,$$

avec

$$\sum_{i=1}^{r} \mu_i^2 + \sum_{k=r+1}^{q} \mu_k^2 = 1. \tag{7}$$

On a alors

$$[U V]^2 = \varrho^2 - 1, \tag{8}$$

où

$$\varrho = U V = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i \mu_i + \sum_{j=r+1}^{p} \sum_{k=r+1}^{q} a_{kj} \lambda_j \mu_k. \tag{9}$$

Les valeurs extrémales de (8), liées aux relations (6), (7) entre les variables λ_i, λ_j, μ_i, μ_k, sont les extrema libres de[1]

$$F(\lambda_i, \mu_i, \lambda_j, \mu_k, \sigma, \tau) = \varrho^2 - 1 - \sigma\left(\sum_i \lambda_i^2 + \sum_j \lambda_j^2 - 1\right) - \tau\left(\sum_i \mu_i^2 + \sum_k \mu_k^2 - 1\right).$$

L'annulation des dérivées $\frac{\partial F}{\partial \lambda_i}$, $\frac{\partial F}{\partial \mu_i}$, $\frac{\partial F}{\partial \lambda_j}$, $\frac{\partial F}{\partial \mu_k}$ donne les $p + q$ équations

$$\begin{cases} \varrho \mu_i - \sigma \lambda_i = 0, \\ \varrho \lambda_i - \tau \mu_i = 0, \end{cases} \qquad i = 1, 2, \ldots r, \tag{10}$$

$$\begin{cases} \varrho \sum_k a_{kj} \mu_k - \sigma \lambda_j = 0, & j = r+1.\ r+2, \ldots p, \\ \varrho \sum_j a_{kj} \lambda_j - \tau \mu_k = 0, & k = r+1, r+2, \ldots q, \end{cases} \tag{11}$$

à joindre à (6), (7), (9).

1°. Supposons d'abord $\varrho^2 - \sigma\tau \neq 0$ et $\sigma\tau \neq 0$. Le système (10) donne $\lambda_i = \mu_i = 0$; seuls les λ_j et les μ_k peuvent différer de zéro[2]; compte tenu de (11), (9) donne

$$\varrho^2 = \sigma \sum_j \lambda_j^2 = \tau \sum_k \mu_k^2,$$

donc, grâce à (6) et (7)

$$\varrho^2 = \sigma = \tau. \tag{12}$$

Les inégalités de l'hypothèse se réduisent à

$$\varrho^2(\varrho^2 - 1) \neq 0. \tag{13}$$

[1] Sauf avis contraire, les lettres, i, j, k des signes de sommation prendront les valeurs définies par les inégalités $1 \leq i \leq r$; $r + 1 \leq j \leq p$; $r + 1 \leq k \leq q$.

[2] Les λ_j ne peuvent être tous nuls, d'après (6), donc $\varrho \neq 0$.

Les seules équations à satisfaire sont (11) et (6), car (7) en est une conséquence, compte tenu de (12) et de $\lambda_i = \mu_i = 0$. Grâce à (12), l'élimination des μ_k entre les équations (11) fournit $p - r$ équations linéaires et homogènes en λ_j

$$\varrho^2 \lambda_j - \sum_k \sum_{j'=1}^{r} a_{kj} a_{kj'} \lambda_{j'} = 0, \qquad j = r+1, r+2, \ldots p,$$

ou, en posant

$$b_{jj'} = \sum_{k=r+1}^{q} a_{kj} a_{kj'}, \qquad j, j' = r+1, r+2, \ldots p,$$

$$(14) \qquad \varrho^2 \lambda_j - \sum_{j'} b_{jj'} \lambda_{j'} = 0, \qquad j = r+1, r+2, \ldots p.$$

Les λ_j ne pouvant être tous nuls, ϱ^2 doit vérifier l'équation

$$(15) \qquad \Delta(\varrho^2) = \text{dét.} \, \| \varrho^2 \delta_{jj'} - b_{jj'} \|_{j, j' = r+1, \ldots p} = 0,$$

et ça suffit, avec l'inégalité (13). En général les $p - r$ racines de (15) conviennent. (14) définit les λ_j avec un facteur arbitraire que la condition (6), ou $\sum \lambda_j^2 = 1$, permet de préciser; la deuxième ligne (11) détermine enfin les μ_k.

2°. On ne peut avoir $\varrho^2 - \sigma\tau \neq 0$ et $\sigma\tau = 0$; il viendrait encore $\lambda_i = \mu_i = 0$; ϱ ne pouvant s'annuler, on déduirait encore de (6), (7), (9), (11) la relation contradictoire (12).

3°. Soit $\varrho^2 = \sigma\tau$ avec $\varrho = \sigma\tau = 0$. Si $\tau \neq 0$, (10) et (11) donnent $\mu_i = \mu_k = 0$, qui sont contredits par (7). $\sigma \neq 0$ conduit de même à une contradiction avec (6). Seules sont admissibles les relations $\varrho = \sigma = \tau = 0$; les systèmes (10), (11) disparaissent, les λ_i, λ_j, μ_i, μ_k restant assujettis aux seules équations (6), (7). Les couples U, V correspondants sont tous les couples de sphères orthogonales. L'extremum correspondant $[U\,V]^2 = -1$ ne présente pas d'intérêt.

4°. Il ne reste plus à discuter que le cas où $\varrho^2 = \sigma\tau$, avec $\varrho\sigma\tau \neq 0$. Le système (10) se réduit à

$$(16) \qquad \mu_i = \frac{\sigma}{\varrho} \lambda_i, \qquad i = 1, 2, \ldots r,$$

tandis que (11) fournit les 2 systèmes d'équations

$$(17) \qquad \mu_k = \frac{\sigma}{\varrho} \sum_j a_{kj} \lambda_j, \qquad k = r+1, r+2, \ldots q,$$

$$(18) \qquad \lambda_j - \sum_{j'} b_{jj'} \lambda_{j'} = 0, \qquad j = r+1, r+2, \ldots p.$$

Le déterminant des coefficients de (18) est $\Delta(1)$, non nul en général. Si $\Delta(1) \neq 0$, les λ_j sont tous nuls, donc également les μ_k. Il suffit que les λ_i vérifient $\sum_i \lambda_i^2 = 1$, et que $\varrho^2 = \sigma^2$ pour que $\sum_i \mu_i^2 = 1$. On a donc $\sigma = \tau = \pm \varrho$, et $V = \pm U$, d'où $\varrho^2 = 1$ et $[U\,V] = 0$. Cette solution, obtenue avec toute sphère contenant simultanément α et β, n'offre pas d'intérêt. Si $\Delta(1) = 0$, (18) admet des solutions non nulles, et il y a compatibilité avec (6), (7), (16) et (17). Ces solutions correspondent d'ailleurs à des racines $\varrho^2 = 1$ de (15), car on déduit des 4 systèmes d'équations en question et de (9) que $\varrho^2 = \sigma^2$ et $\varrho^2 = \sigma$ donc $\varrho^2 = \sigma = \tau = 1$. Les racines $\varrho^2 = 0$ et $\varrho^2 = 1$ de l'équation $\Delta(\varrho^2) = 0$, lorsqu'elles existent, et que nous avons écartées a priori dans le premier cas de cette discussion, deviennent admissibles dans le troisième et le quatrième. Les distances conformes correspondentes $[\alpha, \beta] = 0$ et $[\alpha, \beta] = \sqrt{-1}$ peuvent ainsi être acceptées si elles correspondent à des racines de (15).

7. Les valeurs trouvées pour les λ_i, μ_i, λ_j, μ_k sont fournies par le système des équations (6), (7), (10), (11), où les deux hypersphères α, β jouent le même rôle. Cette symétrie disparaît dans la formation de $\Delta(\varrho^2)$. En permutant α et β, on obtient l'équation

(19) $$\Delta'(\varrho^2) \equiv \text{dét.} \left\| \varrho^2 \delta_{kk'} - c_{kk'} \right\|_{k,\, k' = r+1, \ldots q} = 0,$$

où

$$c_{kk'} = \sum_{j=r+1}^{p} (U_j\,V_k)(U_j\,V_{k'}) = \sum_{j=r+1}^{p} a_{kj}\, a_{k'j}.$$

Cette équation (19) est de degré $q - r$, et a necessairement les mêmes racines non nulles que (15), d'après la discussion. Effectivement, la matrice d'élément $b_{jj'}$ est le produit $a'a$ formé avec la matrice à $q - r$ lignes et $p - r$ colonnes

$$a = \left\| \begin{matrix} a_{r+1,\, r+1} & a_{r+1,\, r+2} & \ldots & a_{r+1,\, p} \\ a_{r+2,\, r+1} & a_{r+2,\, r+2} & \ldots & a_{r+2,\, p} \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ a_{q,\, r+1} & a_{q,\, r+2} & \ldots & a_{q,\, p} \end{matrix} \right\|,$$

et sa transposée a'; la matrice $\| c_{kk'} \|$ est le produit $a\,a'$. Les solutions de (15 et de (19) sont les valeurs caractéristiques de ces deux produits, et notre résultat établit que ces valeurs caractéristiques sont les mêmes, sauf peut-être la valeur zéro, qui appartient $|q - p|$ fois au produit dont l'ordre est le plus grand des deux nombres $p - r$, $q - r$. En résumé, *si $p \leq q$, on est conduit à définir $p - r$ distances conformes correspondant aux racines de l'équation*[1] (15).

[1] Les racines $\varrho^2 = 0$ et $\varrho^2 = 1$ ne présentent évidemment pas le même intérêt que les autres, d'après la discussion du paragraphe 6.

Observons en passant que cette relation entre $a a'$ et $a' a$ n'est qu'un cas particulier du théorème plus général suivant, dont la vérification est aisée:

Théorème. *Les valeurs caractéristiques λ du produit $a b'$ formé avec deux matrices* $\mathbf{a}$, *b de p lignes et q colonnes, sont les racines de l'équation*

$$\varDelta(\lambda) = \sum_{i=0}^{p} (-1)^i S_i \lambda^{p-i} = 0, \tag{20}$$

où

$$S_i = \sum_{\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_i} \sum_{\beta_1, \beta_2, \ldots \beta_i} A_{\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_i}^{\beta_1 \beta_2 \ldots \beta_i} B_{\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_i}^{\beta_1 \beta_2 \ldots \beta_i}$$

est la somme des produits, chacun à chacun, des mineurs des deux matrices, de degré i et de mêmes indices.

$\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_i$ sont toutes les combinaisons des indices des lignes, i à i; de même $\beta_1, \beta_2, \ldots \beta_i$ pour les indices des colonnes, de sorte que le nombre des termes de S_i est $C_p^i C_q^i$. S_i disparaît dès que i surpasse le plus petit des deux nombres p, q, d'où il résulte que les deux équations caractéristiques de $a b'$ et $a' b$ ont les mêmes coefficients et les mêmes racines, sauf la racine zéro, qui appartient $|q - p|$ fois à l'équation de plus haut degré.

8. *Remarque.* Lorsque $r = 0$, $\mathbf{a}$ est formée avec les produits des p sphères U_i $(i = 1, 2, \ldots p)$ par les q sphères V_k $(k = 1, 2, \ldots q)$, et $a'\mathbf{a}$ est une matrice carré d'ordre p. Si r devient positif, les r premières lignes et colonnes de $\mathbf{a} = \| (V_k U_i) \|$ ont leurs éléments nuls, à l'exception des $V_i U_i$ $(i = 1, 2, \ldots r)$, égaux à 1. Les r premières lignes et colonnes de $a'\mathbf{a}$ ont la même propriété, donc r des p valeurs caractéristiques initiales deviennent égales à 1, et fournissent r distances con formes nulles, sans grand intérêt. Ceci explique la réduction à $p - r$ des p distances $(p \leq q)$ que l'on peut prévoir en général.

9. Si α est une sphère U, $p = 1$ et $r = 0$; il existe une seule distance $[\alpha \beta]$, qui est la valeur extrémale des distances de α aux sphères qui passent par β. La matrice $\mathbf{a}'$ est la ligne à q éléments

$$\mathbf{a}' = \| (V_1 U)(V_2 U) \ldots (V_q U) \|,$$

et

$$\mathbf{a}' \mathbf{a} = \sum_{k=1}^{q} (V_k U)^2 = q + \sum_{k=1}^{q} [V_k U]^2,$$

donc

$$[U \beta]^2 = q - 1 + \sum_{k=1}^{q} [V_k U]^2.$$

Ainsi, *le carré de la distance d'une sphère U à une H_{n-q} β est la somme des carrés des distances de U à q sphères orthogonales quelconques passant par β, augmentée de* $q-1$.

Si $p+q>n+2$, les deux familles de sphères qui passent par α et β ont en commun une famille linéaire dont la base est formée de $p+q-n-2$ sphères au moins, donc $r \geq p+q-n-2$ et $p-r \leq n+2-q$. C'est ainsi que, si β est un bipoint, $q=n$, et l'on voit qu'un bipoint β a au plus 2 distances conformes à une hypersphère α; il n'y en a qu'une si α et β appartiennent à une même H_{n-p+1}.

10. Lorsque p et q surpassent 1, α et β ont des focales α' et β'. α' est l'intersection des sphères $U_{p+1}, U_{p+2}, \ldots U_{n+2}$, et β' est l'intersection de $n+2-q$ sphères orthonormales

$$V_{q+1},\ V_{q+2}, \ldots V_{p+q-r},\ U_{p+q-r+1}, \ldots U_{n+2}, \tag{21}$$

en désignant par $V_{q+1}, V_{q+2}, \ldots V_{p+q-r}$, $p-r$ sphères formant avec V_{r+1}, $V_{r+2}, \ldots V_q$ un système orthonormal dans la famille linéaire des $p+q-2r$ sphères

$$U_{r+1},\ U_{r+2}, \ldots U_{p+q-r}. \tag{22}$$

Les nouvelles sphères $V_s (s=q+1, q+2, \ldots p+q-r)$ sont des combinaisons linéaires des sphères (22), soit

$$V_s = \sum_{l=r+1}^{p+q-r} u_{sl}\, U_l, \qquad s=q+1, q+2, \ldots p+q-r, \tag{23}$$

de sorte que les coefficients des équations (3) et (23) sont les éléments d'une matrice orthogonale Θ d'ordre $p+q-2r$. Réciproquement, on a

$$U_l = \sum_{t=r+1}^{p+q-r} a_{tl}\, V_t, \qquad l=r+1, r+2, \ldots p+q-r, \tag{24}$$

et le déterminant

$$\begin{vmatrix} a_{q+1,\, r+1} & a_{q+1,\, r+2} & \ldots & a_{q+1,\, p} \\ a_{q+2,\, r+1} & a_{q+2,\, r+2} & \ldots & a_{q+2,\, p} \\ \cdot & \cdot & \ldots & \cdot \\ a_{p+q-r,\, r+1} & a_{p+q-r,\, r+2} & \ldots & a_{p+q-r,\, p} \end{vmatrix} \neq 0, \tag{25}$$

car $U_{r+1}, U_{r+2}, \ldots U_p, V_{r+1}, V_{r+2}, \ldots V_q$ sont linéairement distinctes. Il résulte de là que les $p+q-2r$ sphères $U_{p+1}, U_{p+2}, \ldots U_{p+q-r}, V_{q+1}, V_{q+2}, \ldots V_{p+q-r}$ sont aussi linéairement distinctes, donc les deux familles de sphères qui définissent α' et β' par leurs intersections n'ont en commun que la famille des $n+2+r-p-q$ sphères $U_{p+q-r+1}, U_{p+q-r+2}, \ldots U_{n+2}$. α' et β' sont sur une même $H_{p+q-r-2}$, mais non sur une même $H_{p+q-r-3}$. Quand on substitute α' à α et β' à β, les nombres p, q, r deviennent $p'=n+2-p$, $q'=n+2-q$, $r'=n+$ $+2+r-p-q$, donc, si $p \leq q$, on a $q' \leq p'$ et $q'-r'=p-r$.

α' et β' ont ainsi $p-r$ distances conformes, liées par

$$[\alpha' \beta']^2 = \varrho'^2 - 1$$

aux valeurs caractéristiques ϱ'^2 de la matrice d'éléments

$$c'_{ss'} = \sum_{l=p+1}^{p+q-r} (V_s U_l)(V_{s'} U_l) = \sum_{l=p+1}^{p+q-r} a_{sl} a_{s'l} \qquad s, s' = q+1, q+2, \ldots p+q-r,$$

c'est à dire de la matrice $a_1 a_1'$ formée à partir de la matrice a_1 que constituent les $p-r$ dernières lignes et les $q-r$ dernières colonnes de Θ. Il s'agit justement des rangées de Θ qui n'ont pas servi à former la matrice a utilisée pour α et β.

Désignons par a_2 la matrice formée par les $p-r$ premières colonnes et les $p-r$ dernières lignes de Θ. Les valeurs caractéristiques ϱ^2 qui définissent $[\alpha\beta]$ sont les zéros du déterminant de la matrice

$$\varrho^2 - a'a = \| \varrho^2 \delta_{jj'} - \sum_k a_{kj} a_{kj'} \|,$$

ou, grâce aux conditions d'orthogonalité de Θ,

$$\| (\varrho^2 - 1) \delta_{jj'} + \sum_{s=q+1}^{p+q-r} a_{sj} a_{sj'} \| = \varrho^2 - 1 + a_2' a_2;$$

les valeurs $1-\varrho^2$ sont donc les valeurs caractéristiques de la matrice $a_2' a_2$. On voit de même que toute valeur caractéristique ϱ'^2 de $a_1 a_1'$ est telle que $1-\varrho'^2$ soit valeur caractéristique de $a_2 a_2'$ et réciproquement. a_2 étant une matrice carrée, $a_2 a_2'$ et $a_2' a_2$ ont les mêmes valeurs caractéristiques, et l'on a le

Théorème. *Deux hypersphères ont les mêmes distances conformes que leurs focales.*

11. Considérons α et β'. Supposons, par exemple, que les sphères $U_1, U_2, \ldots U_p$ soient linéairement distinctes des sphères (21) qui définissent β'. Les distances $[\alpha\beta']$ sont telles que $\sigma^2 = [\alpha\beta']^2 + 1$ soient les valeurs caractéristiques du produit $a_4' a_4$ formé avec la matrice a_4 dont les éléments sont les

$$V_s U_i \quad (s = q + 1, q + 2, \ldots p + q - r;\ i = 1, 2, \ldots p),$$

et

$$U_{p+q-r+1} U_i = U_{p+q-r+2} U_i = \cdots = U_{n+2} U_i = 0 \quad (i = 1, 2, \ldots p).$$

Les seuls éléments de a_4 qui peuvent différer de zéro sont les produits $V_s U_j$ dont l'indice $j = r + 1, r + 2, \ldots p$, et la matrice $a_4' a_4$, d'ordre p, a r lignes et r colonnes d'éléments nuls, les éléments communs aux $p - r$ autres rangées étant ceux de $a_2' a_2$. Outre r valeurs caractéristiques nulles que l'on peut écarter, il reste les $p - r$ valeurs caractéristiques $1 - \varrho^2$ de $a_2' a_2$, pour lesquelles

$$[\alpha, \beta']^2 = 1 - \varrho^2 - 1 = - \varrho^2.$$

Si les deux systèmes de sphères qui définissent α et β' ne sont pas disjoints, certaines des $p - r$ distances $[\alpha, \beta']^2$ obtenues sont également nulles et disparaissent, mais correspondent à des valeurs nulles de ϱ^2, également sans intérêt. Dans tous les cas, on peut donc énoncer le

Théorème. *Les carrés des distances conformes d'une même hypersphère α à deux hypersphères β, β' focales l'une de l'autre sont, chacun à chacun, complémentaires à -1, sauf peut-être certaines distances nulles ou égales à -1.*

Observons que cette somme -1 est la valeur commune que l'on trouverait pour le carré des distances conformes de deux hypersphères focales l'une de l'autre.

12. *Distances d'un bipoint à une hypersphère.* Appliquons les généralités qui précèdent à un bipoint $\beta = (B, B')$ et une sphère $\alpha = U$ unitaire. Ici $p = 1$ et $q = n$; β est pris hors de α et $r = 0$. L'hypersphère focale β' de β est une H_{n-2}, définie par l'intersection de 2 sphères orthonormales V_1, V_2, et les 2 points B, B' sont de la forme $\lambda V_1 + \mu V_2$. Réciproquement, on peut prendre pour V_1 et V_2 les sphères

$$V_1 = \frac{B + B'}{\sqrt{2 B B'}}, \quad V_2 = \frac{B - B'}{\sqrt{-2 B B'}},$$

où BB' désigne le produit des deux points. Ceci posé, nous venons de voir que

$$[\alpha \beta]^2 = -[\alpha \beta']^2 - 1,$$

c'est à dire que $[\alpha \beta]^2$ est l'opposé de la valeur caractéristique ϱ^2 de la matrice à 1 élément

$$(U V_1)^2 + (U V_2)^2 = \frac{(UB + UB')^2 - (UB - UB')^2}{2 BB'} = 2 \frac{(UB)(UB')}{BB'}.$$

On a donc

$$[U(B, B')]^2 = -2\frac{(UB)(UB')}{BB'}. \tag{26}$$

β désignant toujours le bipoint (B, B'), prenons pour α l'hypersphère générale définie par l'intersection de p sphères orthonormales $U_1, U_2, \ldots U_p$. Les distances $[\alpha\beta]^2$ sont encore opposées aux valeurs caractéristiques du produit $a'a$ formé avec la matrice a d'éléments $(V_k U_i)$ $(i = 1, 2, \ldots p;\ k = 1, 2)$. Ces valeurs sont les racines ϱ^2 de l'équation[1]

$$\varrho^4 - S_1\varrho^2 + S_2 = 0, \tag{27}$$

où

$$S_1 = \sum_{i=1}^{p}\sum_{k=1}^{2}(V_k U_i)^2 = 2\sum_{i=1}^{p}\frac{(U_iB)(U_iB')}{BB'},$$

et

$$S_2 = \sum_{1\le i<j\le p}\begin{vmatrix} U_iV_1 & U_jV_1 \\ U_iV_2 & U_jV_2\end{vmatrix}^2 = \frac{-1}{(BB')^2}\sum_{1\le i<j\le p}\begin{vmatrix} U_iB & U_jB \\ U_iB' & U_jB'\end{vmatrix}^2.$$

Un calcul aisé donne alors, pour les 2 distances en question, l'équation

$$\left\{[\alpha(B, B')]^2 + \sum_{i=1}^{p}\frac{(U_iB)(U_iB')}{BB'}\right\}^2 - \frac{\left[\sum_{i=1}^{p}(U_iB)^2\right]\left[\sum_{i=1}^{p}(U_iB')^2\right]}{(BB')^2} = 0. \tag{28}$$

Lorsque α et (B, B') sont sur une même H_{n-p+1}, tous les déterminants du deuxième degré de a sont nuls, S_2 est nul, et il reste une seule distance donnée par

$$[\alpha(B, B')]^2 = -2\sum_{i=1}^{p}\frac{(U_iB)(U_iB')}{BB'}. \tag{29}$$

La comparaison avec (26) fournit le

Théorème. *Le carré de la distance conforme d'un bipoint à une H_{n-p}, situés tous deux sur une même H_{n-p+1}, est la somme des carrés des distances du bipoint à p sphères orthogonales quelconques passant par la H_{n-p}.*

On peut faire passer $p-1$ de ces sphères par B, soit $U_1, U_2, \ldots U_{p-1}$. Elles passent aussi par B'; leur intersection est la H_{n-p+1} en question. La p-ième sphère U_p est alors la sphère orthogonale à cette H_{n-p+1}, le long de α. On a donc encore le

[1] On a évidemment $n-r \le n-p+2$, donc $p-r \le 2$; l'égalité à 2 correspond au cas général, et $p-r=1$ si une même H_{n-p+1} contient α et β.

Théorème. *La distance* $[\alpha(B, B')]$ *d'un bipoint à une* H_{n-p}, *situés tous deux sur une même* H_{n-p+1}, *est la distance de* (B, B') *à la sphère orthogonale, le long de de* α, *à cette* H_{n-p+1}.

Tout se passe comme dans un espace à $n-p+1$ dimensions, entre un bipoint et une sphère. Effectivement, il n'intervient que les distances de (B, B') aux intersections d'hypersphères avec la H_{n-p+1} en question, et une inversion par rapport à un point de celle-ci la transforme en un E_{n-p+1} dont les intersections avec les inverses de α et de U_p sont la même sphère.

13. *Distances de deux bipoints.* Si α est lui-même un bipoint (A, A'), on peut simplifier (28) en substituant à α sa focale α'. Celle-ci est définie par 2 sphères, soit

$$(30) \qquad U_1 = \frac{A + A'}{\sqrt{2AA'}}, \quad U_2 = \frac{A - A'}{\sqrt{-2AA'}}.$$

Les carrés des distances $[\alpha\beta]^2 = [\alpha'\beta']^2$ sont de la forme $\varrho^2 - 1$, où ϱ^2 sont les valeurs caractéristiques du produit $a'a$ formé avec la matrice a d'ordre 2 ayant les éléments $V_k U_i$ $(i, k = 1, 2)$. Ces valeurs ϱ^2 sont les racines de l'équation (27) où l'on fait $p = 2$, et où U_1, U_2 ont les expressions (30). Il vient ainsi

$$S_1 = 2\frac{(AB)(A'B') + (A'B)(AB')}{(AA')(BB')},$$

$$S_2 = \frac{[(AB)(A'B') - (AB')(A'B)]^2}{(AA')^2(BB')^2},$$

et (27) s'écrit

$$\left[\varrho^2 - \frac{(AB)(A'B') + (A'B)(AB')}{(AA')(BB')}\right]^2 - 4\frac{(AB)(AB')(A'B)(A'B')}{(AA')^2(BB')^2} = 0.$$

Les distances cherchées sont déterminées par l'équation

$$(31) \quad [(A, A')(B, B')]^2 = -1 + \frac{(AB)(A'B') + (A'B)(AB')}{(AA')(BB')} \pm 2\frac{\sqrt{(AB)(AB')(A'B)(A'B')}}{(AA')(BB')}.$$

A l'aide des distances euclidiennes telles que $\overline{AB}$, ceci s'écrit

$$(31') \quad [(A, A')(B, B')]^2 = -1 + \frac{\overline{AB}^2 \cdot \overline{A'B'}^2 + \overline{A'B}^2 \cdot \overline{AB'}^2 \pm 2\,\overline{AB} \cdot \overline{AB'} \cdot \overline{A'B} \cdot \overline{A'B'}}{\overline{AA'}^2\, \overline{BB'}^2}.$$

Lorsque les deux bipoints sont cocycliques, l'une des racines ϱ^2 devient égale à 1, et la seule racine utile est l'autre, égale à $S_2 = S_1 - 1$, donc

$$(32)\qquad [(A, A')(B, B')]^2 = 2\left[\frac{(A\,B)(A'\,B') + (A'\,B)(A\,B')}{(A\,A')(B\,B')} - 1\right].$$

On peut simplifier en exprimant le co-cyclisme; celui-ci se traduit par une relation linéaire et homogène, soit, par exemple,

$$B' = \lambda\,A + \lambda'\,A + \mu\,B,$$

avec $\lambda\,\lambda'\,\mu \neq 0$ si les points sont réels. On peut choisir les masses de ces points de manière que

$$(33)\qquad B' - B = \theta\,(A' - A), \qquad \theta \neq 0,$$

θ étant un certain scalaire, la condition $B'^2 = 0$ se traduisant par[1]

$$(34)\qquad B\,(A' - A) = \theta\,A\,A'.$$

Il résulte de là que

$$A\,B' = A\,B + \theta\,A\,A' = A'\,B,$$
$$A'\,B' = A'\,B - \theta\,A\,A' = A\,B,$$
$$B\,B' = \theta^2\,A\,A',$$

et (32) devient

$$(35)\qquad [(A, A')(B, B')]^2 = 2\left[\frac{(A\,B)^2 + (A'\,B)^2}{(A'\,B - A\,B)^2} - 1\right] = 4\,\frac{(A\,B)(A'\,B)}{(A'\,B - A\,B)^2},$$

ou encore

$$(35')\qquad [(A, A')(B, B')]^2 = 4\,\frac{(A\,B)(A'\,B)}{(A\,A')(B\,B')}.$$

Ceci vaut également $4\,\dfrac{(A\,B')(A'\,B')}{(A\,A')(B\,B')}$, ce qui permet d'écrire, sous une forme indépendante des masses des points,

$$(36)\qquad [(A, A')(B, B')]^2 = 4\,\frac{\sqrt{(A\,B)(A\,B')(A'\,B)(A'\,B')}}{(A\,A')(B\,B')},$$

ou encore, en fonction des distances euclidiennes,

$$(36')\qquad [(A, A')(B, B')] = 2\,\frac{\sqrt{\overline{A\,B}\cdot\overline{A\,B'}\cdot\overline{A'\,B}\cdot\overline{A'\,B'}}}{\overline{A\,A'}\cdot\overline{B\,B'}}.$$

Si B' va à l'infini, (32) devient

$$[(A, A')(B, \infty)]^2 = 2\left(\frac{A\,B + A'\,B}{A\,A'} - 1\right) = 2\left(\frac{\overline{A\,B}^2 + \overline{A'\,B}^2}{\overline{A\,A'}^2} - 1\right),$$

[1] On peut évidemment faire $\theta = 1$, mais nous le laissons indéterminé en vue d'une application ultérieure.

où A, A', B sont alignés; avec des distances algébriques, on a donc encore

$$(37)\qquad [(A, A')(B, \infty)]^2 = 4\,\frac{\overline{AB}\cdot\overline{A'B}}{\overline{AA'}^2}.$$

Ceci vaut -1 pourvu que $\overline{AB}+\overline{A'B}=0$. En revenant au cas général, on voit que *deux bipoints cocycliques sont conjugués harmoniques pourvu que leur distance conforme soit égale à* $\sqrt{-1}$.

CHAPITRE III.

Autres propriétés d'extremum des distances de deux hypersphères.

16. α et β désignant toujours deux hypersphères d'ordre $n-p$ et $n-q$, considérons les bipoints (B, B') situés sur β et appartenant à une H_{n-p+1} contenant α. Avec les notations du paragraphe 6, B et B' sont de la forme

$$(1)\qquad B=\sum_{i=r+1}^{n+2}\lambda_i U_i,\qquad B'=\sum_{i=r+1}^{n+2}\lambda_i' U_i,$$

les λ_i et les λ_i' étant tels que l'on ait

$$(2)\qquad \sum_{i=r+1}^{n+2}\lambda_i^2=\sum_{i=r+1}^{n+2}\lambda_i'^2=0,$$

et

$$(3)\qquad \begin{cases} V_k B=\displaystyle\sum_{i=r+1}^{p+q-r} a_{ki}\lambda_i=0, \\ V_k B'=\displaystyle\sum_{i=r+1}^{p+q-r} a_{ki}\lambda_i'=0, \end{cases}\qquad k=r+1, r+2, \ldots q.$$

Il faut également exprimer que toute sphère passant par α et B passe aussi par B', c'est à dire que tous les déterminants

$$\begin{vmatrix} U_iB & U_iB' \\ U_jB & U_jB' \end{vmatrix}=0\qquad i, j=1, 2, \ldots p.$$

D'après (1), il suffit de considérer les indices $r+1, r+2, \ldots p$, et cette annulation équivaut à la proportionnalité des λ_j' aux λ_j $(j=r+1, r+2, \ldots p)$. On peut les égaler. Les équations (3), que la condition (4; II) rend résolubles par rapport aux λ_l et λ_l' d'indice $l>p$, entraînent l'égalité $\lambda_l'=\lambda_l$ pour ces indices. Les conditions imposées à (B, B') sont ainsi remplies en prenant

$$(4)\qquad \begin{cases} B = \sum_{i=r+1}^{p+q-r} \lambda_i U_i + \sum_{m=p+q-r+1}^{n+2} \lambda_m U_m, \\ B' = \sum_{i=r+1}^{p+q-r} \lambda_i U_i + \sum_{m=p+q-r+1}^{n+2} \lambda'_m U_m, \end{cases}$$

avec

$$(5)\qquad \sum_{i=r+1}^{p+q-r} \lambda_i^2 = -\sum_{m=p+q-r+1}^{n+2} \lambda_m^2 = -\sum_{m=p+q-r+1}^{n+2} \lambda_m'^2,$$

jointes à la première ligne (3). Les λ_j ($j = r+1, r+2, \ldots p$) ne sont pas tous nuls, afin que (B, B') ne soit pas sur α.

Ceci posé, (29; II) donne

$$(6)\qquad [\alpha(BB')]^2 = -2\sum_{i=1}^{p} \frac{(U_i B)(U_i B')}{BB'} = -2\frac{\sum_{j=r+1}^{p} \lambda_j^2}{\sum_{i=r+1}^{p+q-r} \lambda_i^2 + \sum_{m=p+q-r+1}^{n+2} \lambda_m \lambda'_m}.$$

Etudions les valeurs extrémales de (6) pour l'ensemble des bipoints (B, B') en question. En désignant par N et D le numérateur et le dénominateur de la dernière fraction, il s'agit de déterminer les extrema libres de la fonction F des $2n + 6 - p - r$ variables indépendantes

$$\lambda_{r+1}, \lambda_{r+2}, \ldots \lambda_{n+2}, \lambda'_{p+q-r+1}, \lambda'_{p+q-r+2}, \ldots \lambda'_{n+2}, \sigma_{r+1}, \sigma_{r+2}, \ldots \sigma_q, \tau, \tau'$$

$$F = -2\frac{N}{D} + 2\sum_{k=r+1}^{q} \sigma_k \left(\sum_{i=r+1}^{p+q-r} a_{ki}\lambda_i\right) + \tau\left(\sum_{i=r+1}^{p+q-r} \lambda_i^2 + \sum_{m=p+q-r+1}^{n+2} \lambda_m^2\right) + \\ + \tau'\left(\sum_{i=r+1}^{p+q-r} \lambda_i^2 + \sum_{m=p+q-r+1}^{n+2} \lambda_m'^2\right).$$

L'annulation des dérivées $\frac{\partial F}{\partial \lambda_m}$ et $\frac{\partial F}{\partial \lambda'_m}$ donne d'abord les $2(n+2+r-p-q)$ équations

$$(7)\qquad \begin{cases} \tau\lambda_m + \frac{N}{D^2}\lambda'_m = 0, \\ \frac{N}{D^2}\lambda_m + \tau'\lambda'_m = 0, \end{cases} \qquad m = p+q-r+1, \ldots n+2.$$

$\frac{N^2}{D^4} - \tau\tau'$ est nul, sans quoi $\lambda_m = \lambda'_m = 0$, et B, B' coïncideraient. On a donc $\frac{N^2}{D^4} = \tau\tau' \neq 0$, car on écarte les valeurs nulles de (6). Il vient

$$\frac{N}{D^2} = \pm\tau'\sqrt{\frac{\tau}{\tau'}},$$

avec

$$\lambda'_m = \mp\lambda_m\sqrt{\frac{\tau}{\tau'}}.$$

La deuxième équation (5) donne alors $(\tau - \tau')\sum_m \lambda_m^2 = 0$, où la somme ne peut s'annuler, sans quoi il en serait de même pour $\sum_m \lambda_m \lambda'_m$ et $\sum_i \lambda_i^2$, et D s'annulerait. On a donc $\tau = \tau'$, et $\lambda'_m = -\lambda_m$, puisque $\lambda'_m = \lambda_m$ ferait coïncider B et B'; nous avons ainsi

$$(8) \qquad \begin{cases} \tau = \tau' = \dfrac{N}{D^2} \\ \lambda'_m = -\lambda_m, \end{cases} \qquad m = p + q - r + 1, \ldots n + 2.$$

Les équations $\dfrac{\partial F}{\partial \lambda_i} = 0$ $(i = r + 1, r + 2, \ldots p + q - r)$ fournissent ensuite les deux systèmes d'équations

$$(9) \qquad \begin{cases} 2\left(\tau - \dfrac{1}{D} + \dfrac{N}{D^2}\right)\lambda_j + \displaystyle\sum_{k=r+1}^{q} a_{kj}\,\sigma_k = 0, & j = r + 1, r + 2, \ldots p, \\ 2\left(\tau + \dfrac{N}{D^2}\right)\lambda_l + \displaystyle\sum_{k=r+1}^{q} a_{kl}\,\sigma_k = 0, & l = p + 1, p + 2, \ldots p + q - r, \end{cases}$$

où

$$D = \sum_{i=r+1}^{p+q-r} \lambda_i^2 - \sum_{m=p+q-r+1}^{n+2} \lambda_m^2 = 2 \sum_{i=r+1}^{p+q-r} \lambda_i^2.$$

En posant

$$(10) \qquad \sum_{j=r+1}^{p} \lambda_j^2 = u, \quad \sum_{l=p+1}^{p+q-r} \lambda_l^2 = v,$$

il vient

$$2\left(\tau + \frac{N}{D^2}\right) = \frac{4N}{D^2} = \frac{u}{(u+v)^2},$$

$$2\left(\tau - \frac{1}{D} + \frac{N}{D^2}\right) = \frac{-v}{(u+v)^2},$$

et les $p + q - 2r$ équations (9) s'écrivent

$$(11) \qquad \begin{cases} \dfrac{v}{(u+v)^2}\lambda_j = \displaystyle\sum_{k=r+1}^{q} a_{kj}\,\sigma_k, & j = r + 1, r + 2, \ldots p, \\ \dfrac{u}{(u+v)^2}\lambda_l = -\displaystyle\sum_{k=r+1}^{q} a_{kl}\,\sigma_k, & l = p + 1, p + 2, \ldots p + q - r. \end{cases}$$

(6) s'écrit d'ailleurs

$$[\alpha(BB')]^2 = -\frac{u}{u+v},$$

de sorte que $u \neq 0$. Si v diffère également de zéro, les équations (11) définissent les λ_j et les λ_l en fonction des σ_k, et les équations

$$(12)\qquad V_h B = \sum_{j=r+1}^{p} a_{hj}\lambda_j + \sum_{l=p+1}^{p+q-r} a_{hl}\lambda_l = 0, \qquad h = r+1, r+2, \ldots q,$$

fournissent $q-r$ relations linéaires et homogènes en ces $q-r$ inconnues, soit

$$\sum_{k=r+1}^{q}\left(\frac{r}{u+v}\sum_{l=p+1}^{p+q-r} a_{hl}a_{kl} - \frac{u}{u+v}\sum_{j=r+1}^{p} a_{hj}a_{kj}\right)\sigma_k = 0, \qquad h = r+1, \ldots q.$$

En posant, suivant l'habitude, $[\alpha(BB')]^2 = \varrho^2 - 1$, on a $\varrho^2 = \frac{v}{u+v}$, $\varrho^2 - 1 = \frac{-u}{u+v}$, et ces équations s'écrivent

$$\sum_{k=r+1}^{q}\left(\varrho^2\sum_{i=r+1}^{p+q-r} a_{hi}a_{ki} - \sum_{j=r+1}^{p} a_{hj}a_{kj}\right)\sigma_k = 0,$$

ou enfin, grâce à (5; II) et avec les notations du paragraphe 7,

$$(13)\qquad \sum_{k=r+1}^{q}(\delta_{hk}\varrho^2 - c_{hk})\sigma_k = 0, \qquad h = r+1, r+2, \ldots q.$$

Les σ_k ne peuvent être tous nuls, sans quoi les λ_j le seraient. Il faut donc, et ça suffit, que le déterminant des coefficients soit nul, ce qui donne l'équation (19; II), et ses racines non nulles.

Si $v=0$, $[\alpha(B, B')]^2 = -1$ et $\varrho^2 = 0$ sont des valeurs susceptibles d'être écartées. Examinons donc ce que deviennent nos équations. Les équations (11) se réduisant à

$$(14)\qquad \sum_{k=r+1}^{q} a_{kj}\sigma_k = 0, \qquad j = r+1, r+2, \ldots p,$$

$$(15)\qquad \lambda_l = -u\sum_{k=r+1}^{q} a_{kl}\sigma_k, \qquad l = p+1, p+2, \ldots p+q-r.$$

(12) s'écrit ensuite

$$\sum_{j=r+1}^{p} a_{hj}\lambda_j = u\sum_{k=r+1}^{q}\sum_{l=p+1}^{p+q-r} a_{hl}a_{kl}\sigma_k = u\sum_{k=r+1}^{q}\sigma_k\left(\delta_{kh} - \sum_{j=r+1}^{p} a_{hj}a_{kj}\right),$$

ou, grâce à (14), et en changeant h en k,

$$(16)\qquad \sum_{j=r+1}^{p} a_{kj}\lambda_j = u\,\sigma_k, \qquad k = r+1, r+2, \ldots q.$$

(14) et (16) forment un système de $p+q-2r$ équations linéaires et homogènes, dont les $p+q-2r$ inconnues sont les λ_j et les σ_k. Les λ_j ne pouvant être tous nuls, il faut que le déterminant des coefficients

$$\delta \equiv \begin{vmatrix} a_{r+1,r+1} & a_{r+2,r+1} & \dots & a_{q,r+1} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ a_{r+1,p} & a_{r+2,p} & & a_{q,p} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ u & 0 & \dots & 0 & a_{r+1,r+1} & a_{r+1,r+2} & \dots & a_{r+1,p} \\ 0 & u & \dots & 0 & a_{r+2,r+1} & a_{r+2,r+2} & \dots & a_{r+2,p} \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ 0 & 0 & \dots & u & a_{q,r+1} & a_{q,r+2} & \dots & a_{q,p} \end{vmatrix} = 0.$$

On reconnaît dans δ les matrices a et a'. Il est identiquement nul si $q < p$; c'est en effet un polynôme en u de degré $q-r$ au plus; en divisant les $q-r$ premières colonnes par u, et en multipliant les $p-r$ premières lignes par le même facteur, ou obtient un déterminant indépendant de u, alors que δ est multiplié par u^{p-q}. Si $p \leq q$, le développement est

$$\delta = (-1)^{(p-r)(q-p)} u^{q-p} \sum_{i_1 < i_2 < \dots < i_{p-r}} \begin{vmatrix} a_{i_1,r+1} & a_{i_2,r+1} & \dots & a_{i_{p-r},r+1} \\ a_{i_1,r+2} & a_{i_2,r+2} & \dots & a_{i_{p-r},r+2} \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ a_{i_1,p} & a_{i_2,p} & \dots & a_{i_{p-r},p} \end{vmatrix}^2,$$

où la somme est étendue à toutes les combinaisons p à p des indices

$$r+1,\ r+2, \dots q,$$

donc

$$\delta = (-1)^{(p-r)(q-p)} u^{q-p} S_{p-r},$$

où S_{p-r} est le terme constant du polynôme $\Delta(\varrho^2)$ de l'équation (15; II), développée sous la forme (20; II). u ne pouvant être nul, δ ne peut s'annuler que si $\varrho^2 = 0$ est racine de (15; II). Ainsi la valeur extrémale -1 de (6) n'apparaît que si $q < p$, ou si, q étant au moins égal à p, elle est également fournie par l'équation (15; II). Nous avons ainsi démontré le

Théorème. *Les distances conformes d'une H_{n-p} α à une H_{n-q} β $(p \leq q)$ sont les extrema des distances de α aux bipoints de β situés sur une H_{n-p+1} variable* *passant par α. Ce sont aussi les extrema des distances de β aux bipoints de α situés sur une H_{n-q+1} variable passant par β, exception pouvant être faite de la valeur $\sqrt{-1}$ si $q > p$.*

15. On peut également définir les distances $[\alpha\beta]$ comme extrema de la distance de deux bipoints cocycliques situés respectivement sur α et β. Le bipoint (B, B') situé sur β est défini, comme plus haut, par les équations (4), (5) jointes à la première ligne (3). Le bipoint courant (A, A') de α est défini par des équations analogues à (4), avec les conditions $U_i A = 0$ $(i = 1, 2, \ldots p)$, c'est à dire

$$(17) \qquad \begin{cases} A = \sum_{l=p+1}^{p+q-r} \mu_l U_l + \sum_{m=p+q-r+1}^{n+2} \mu_m U_m, \\ A' = \sum_{l=p+1}^{p+q-r} \mu_l U_l + \sum_{m=p+q-r+1}^{n+2} \mu'_m U_m, \end{cases}$$

où l'égalité des coefficients des μ_l dans les deux expressions résulte de ce que le cocyclisme des deux bipoints exige que la H_{n-q+1} déterminée par β et A contienne également A'. On a en outre les conditions $A^2 = A'^2 = 0$, ou

$$(18) \qquad \sum_{l=p+1}^{p+q-r} \mu_l^2 = - \sum_{m=p+q-r+1}^{n+2} \mu_m^2 = - \sum_{m=p+q-r+1}^{n+2} \mu_m'^2.$$

Les quatre points sont cocycliques pourvu qu'il existe une relation linéaire de la forme

$$A = \theta B + \theta' B' + \theta'' A',$$

où $\theta, \theta', \theta''$ sont 3 scalaires. A l'aide de (4) et (17), on en déduit d'abord

$$(\theta + \theta')\lambda_j = 0, \qquad j = r + 1, r + 2, \ldots p,$$

et la condition que ces λ_j ne soient pas tous nuls exige que $\theta' = -\theta$. Il vient ensuite

$$(1 - \theta'')\mu_l = 0, \qquad l = p + 1, p + 2, \ldots p + q - r,$$

et, les μ_l n'étant pas tous nuls afin que (A, A') ne soit pas sur β, on a nécessairement $\theta'' = 1$, d'où résulte l'expression nécessaire

$$(19) \qquad A' = A + \theta(B' - B),$$

qui définit les μ'_m en fonction des autres coefficients; θ est lui-même déterminé par l'identité $A'^2 = 0$, qui fournit l'expression analogue à (34; II)

$$\theta B B' = A(B' - B),$$

ou, compte tenu de (5),

$$(20) \qquad \theta \sum_{m=p+q-r+1}^{n+2} \lambda_m (\lambda'_m - \lambda_m) = \sum_{m=p+q-r+1}^{n+2} \mu_m (\lambda'_m - \lambda_m).$$

Ceci posé, (35; II) donne ici

$$(21) \quad [(A, A')(B, B')]^2 = 4 \frac{(A\,B)(A\,B')}{(A\,B' - A\,B)^2} = 4 \frac{(\sum_l \lambda_l \mu_l + \sum_m \lambda_m \mu_m)(\sum_l \lambda_l \mu_l + \sum_m \lambda'_m \mu_m)}{[\sum_m \mu_m (\lambda'_m - \lambda_m)]^2}.$$

Les extrema de cette fonction des variables λ_i, λ_m, λ'_m, μ_l, μ_m liées par (3), (5), (18) sont les extrema libres de la fonction de $3n + 9 - 2p - r$ variables

$$(22) \quad F = [(A, A')(B, B')]^2 + 2 \sum_{k=r+1}^{q} \sigma_k \left(\sum_{i=r+1}^{p+q-r} a_{ki} \lambda_i \right) + \sigma \left(\sum_{i=r+1}^{p+q-r} \lambda_i^2 + \sum_{m=p+q-r+1}^{n+2} \lambda_m^2 \right) +$$
$$+ \sigma' \left(\sum_{i=r+1}^{p+q-r} \lambda_i^2 + \sum_{m=p+q-r+1}^{n+2} \lambda'^2_m \right) + \tau \left(\sum_{l=p+1}^{p+q-r} \mu_l^2 + \sum_{m=p+q-r+1}^{n+2} \mu_m^2 \right).$$

En posant $A\,B = N$, $A\,B' = N'$, (21) s'écrit

$$[(A, A')(B, B')]^2 = \frac{4\,N\,N'}{(N' - N)^2} = \left(\frac{N' + N}{N' - N} \right)^2 - 1,$$

de sorte que $\left(\frac{N' + N}{N' - N} \right)^2$ représente ce que nous désignons habituellement par ϱ^2. Nous poserons donc

$$N' - N = D, \qquad N' + N = D\varrho.$$

Enfin nous réserverons aux lettres j, l, m, h, k les ensembles de valeurs habituels. Les équations $\frac{\partial F}{\partial \lambda_m} = \frac{\partial F}{\partial \lambda'_m} = 0$ s'écrivent alors

$$(23) \quad \begin{cases} \dfrac{2\varrho N'}{D^2} \mu_m = -\sigma \lambda_m, \\ \dfrac{2\varrho N}{D^2} \mu_m = \sigma' \lambda'_m, \end{cases} \qquad m = p + q - r + 1,\ p + q - r + 2, \ldots n + 2.$$

Les équations $\frac{\partial F}{\partial \mu_m} = 0$ donnent

$$(24) \qquad \frac{2\varrho}{D^2} (N \lambda'_m - N' \lambda_m) = \tau \mu_m, \qquad m = p + q - r + 1, \ldots n + 2.$$

$N N'$ ne peut être nul, ni $N' - N$; en particulier les μ_m ne peuvent tous s'annuler. Si nous écartons comme d'habitude la valeur $\varrho^2 = 0$, que nous examinerons d'ailleurs plus loin, (23) exige que $\sigma\sigma' \neq 0$, et ce système définit les λ_m et les λ'_m en fonction des μ_m. Ces valeurs, portées dans la deuxième équation (5), donnent

$$\frac{4\varrho^2}{D^4}\left(\frac{N'^2}{\sigma^2}-\frac{N^2}{\sigma'^2}\right)\sum_m \mu_m^2 = 0,$$

où la somme ne peut s'annuler sans que $N'-N=0$, donc $\frac{N'}{\sigma} = \pm\frac{N}{\sigma'}$; il faut prendre le signe $+$ pour que B' diffère de B, et l'on peut enfin poser

$$\frac{N}{D\sigma'} = \frac{N'}{D\sigma} = \nu \neq 0, \tag{25}$$

grâce à quoi (23) s'écrit

$$\lambda_m = -\lambda'_m = -\frac{2\varrho\nu}{D}\mu_m, \qquad m = p+q-r+1, \ldots n+2; \tag{26}$$

on a en autre

$$\theta = -\frac{D}{2\varrho\nu}. \tag{27}$$

Observons qu'on a alors

$$\sigma+\sigma' = \frac{\varrho}{\nu}, \qquad \sigma-\sigma' = \frac{1}{\nu},$$

donc

$$\sigma = \frac{\varrho+1}{2\nu}, \qquad \sigma' = \frac{\varrho-1}{2\nu}. \tag{28}$$

Les valeurs (26), portées dans (24), donnent

$$\tau = 4\frac{\varrho^3\nu}{D^2}, \tag{29}$$

car les μ_m ne sont pas tous nuls. Il faut encore annuler les dérivées de F par rapport aux λ_j, λ_l et μ_l. $\frac{\partial F}{\partial \mu_l} = 0$ donne

$$\frac{2\varrho}{D}\lambda_l + \tau\mu_l = 0,$$

ou, grâce à (29),

$$\lambda_l = -\frac{2\varrho^2\nu}{D}\mu_l = \frac{\varrho}{\theta}\mu_l, \quad l = p+1, p+2, \ldots p+q-r. \tag{30}$$

$\frac{\partial F}{\partial \lambda_j} = 0$ donne

$$\varrho\lambda_j = -\nu\sum_{k=r+1}^{q} a_{kj}\sigma_k, \qquad j = r+1, r+2, \ldots p, \tag{31}$$

tandis que $\frac{\partial F}{\partial \lambda_l} = 0$ s'écrit

$$\frac{2\varrho}{D}\mu_l + \frac{\varrho}{\nu}\lambda_l + \sum_{k=r+1}^{q} a_{kl}\,\sigma_k = 0,$$

ou, compte tenu de (30)

$$(32) \qquad \frac{2\varrho(\varrho^2 - 1)}{D}\mu_l = \sum_{k=r+1}^{q} a_{kl}\,\sigma_k, \qquad l = p+1, p+2, \ldots p+q-r.$$

$\varrho^2 - 1$, qui représente (21), ne peut s'annuler avec des bipoints réels sans point commun, donc (32) détermine les μ_l; à l'aide de (30), on a également

$$(33) \qquad \lambda_l = -\frac{\varrho\,\nu}{\varrho^2 - 1}\sum_{k=r+1}^{q} a_{kl}\,\sigma_k.$$

Il faut identifier les expressions de N et N', ce qui fournit, compte tenu de (18), la double relation

$$(34) \qquad \sum_{l=p+1}^{p+q-r}\mu_l^2 = -\sum_{m=p+q-r+1}^{n+2}\mu_m^2 = -\frac{D^2}{4\varrho\nu}.$$

Nous venons ainsi d'annuler $\frac{\partial F}{\partial \tau}$. Il reste à annuler $\frac{\partial F}{\partial \sigma}$ et les $\frac{\partial F}{\partial \sigma_k}$, car $\frac{\partial F}{\partial \sigma'} = 0$ résulte de $\frac{\partial F}{\partial \sigma} = 0$ si l'on tient compte de (26). $\frac{\partial F}{\partial \sigma} = 0$ donne, grâce à (26), (30) et (34),

$$(35) \qquad \sum_{j=r+1}^{p}\lambda_j^2 = \varrho(\varrho^2 - 1)\nu,$$

et peut être considérée comme définissant ν en fonction des σ_k, car (31) permet d'en déduire

$$(36) \qquad \nu\sum_{j=r+1}^{p}\left(\sum_{k=r+1}^{q} a_{kj}\,\sigma_k\right)^2 = \varrho^3(\varrho^2 - 1);$$

le développement du premier membre permet de l'écrire encore

$$(36') \qquad \nu\sum_{k,h=r+1}^{q} c_{kh}\,\sigma_k\,\sigma_h = \varrho^3(\varrho^2 - 1).$$

Enfin les équations $\frac{\partial F}{\partial \sigma_k} = 0$ s'ecrivent, à l'aide de (31) et (33),

$$\sum_{h=r+1}^{q}\left[(\varrho^2 - 1)\sum_{j=r+1}^{p} a_{kj}\,a_{hj} + \varrho^2\sum_{l=p+1}^{p+q-r} a_{kl}\,a_{hl}\right]\sigma_h = 0,$$

ou, grâce à (5; II)[1],

$$(37)\qquad \sum_{k=r+1}^{q} (\varrho^2 \delta_{kh} - c_{kh})\,\sigma_k = 0; \qquad h = r+1, r+2, \ldots q.$$

Les σ_k ne peuvent être tous nuls, sans quoi les λ_j, λ_l et μ_l le seraient aussi. Il faut et il suffit que le déterminant des coefficients des σ_k dans ces équations linéaires soit nul, c'est à dire que ϱ^2 soit racine de l'équation $\Delta'(\varrho^2) = 0$, avec la restriction habituelle $\varrho^2(\varrho^2 - 1) \neq 0$, à cause de (31) et (32). Les σ_k sont alors définis à un facteur près au moins. Chaque racine ϱ^2 convenable, et une solution correspondante de (37) en $\sigma_{r+1}, \sigma_{r+2}, \ldots \sigma_q$ définissent sans ambiguïté ν et les λ_j; les μ_l contiennent un facteur indéterminé D, ce qui ne correspond évidemment pas à une indétermination du point A; les μ_m sont assujettis à la seule condition (34), et les λ_m, λ'_m s'en déduisent sans nouveau paramêtre arbitraire. A priori, l'ordre d'indétermination des couples de bipoints associés à une racine ϱ^2 est ainsi $n + r + 1 - p - q$.

Remarque. Les équations (31), (33) et (37) s'identifient avec (11) et (13) en faisant $u = \varrho(\varrho^2 - 1)\nu$, $v = -\varrho^3\nu$, de sorte que les bipoints (B, B') obtenus au paragraphe 14 sont les mêmes que dans celui-ci. Le premier problème relatif à β et aux bipoints (A, A') de α fournit aussi les mêmes bipoints (A, A') que dans ce paragraphe. L'ordre d'indétermination étant le même pour les couples de bipoints (A, A'), (B, B') que pour un seul de ces bipoints, il est à présumer que, dans le premier problème, le choix de (B, B') associé à une valeur ϱ^2 détermine en général (A, A') sans ambiguïté.

Effectivement, le théorème du paragraphe 14 nous apprend que la distance $[\alpha(B, B')] = \sqrt{\varrho^2 - 1}$ est une valeur extrémale de la distance de (B, B') aux bipoints de α qui lui sont cocycliques. Dans ce problème, comparé à celui traité pour α, β, le rôle de β devient celui de α, celui de α devient celui de (B, B'), et l'inconnue est le bipoint (A, A') de α cocyclique à (B, B'). Les entiers p', q', r' qui se substituent à p, q, r sont tels que l'on ait $n - p' = 0$, $n - q' = n - p$, $n - r' = n - p + 1$, donc $p' = n$, $q' = p$, $r' = p - 1$, et l'ordre d'indétermination du bipoint (A, A') associé à (B, B') est $n + r' + 1 - p' - q' = 0$.

Le théorème du paragraphe 14 suffit donc pour obtenir tous les couples de bipoints (A, A'), (B, B') associés aux racines ϱ^2 de $\Delta(\varrho^2) = 0$, différent de 0 et 1.

[1] L'élimination des μ_l entre (32) et (34) redonne (36') si l'on tient compte de (37). (37) n'est rien d'autre que (13).

On voit même qu'ils sont tels que leur distance $[(A, A')(B, B']$ soit un extremum de la distance de chacun d'eux aux bipoints cocycliques de l'autre hypersphère. Mais le deuxième problème nous apprend que c'est encore un extremum quand les deux bipoints cocycliques varient simultanément.

16. Il reste à examiner si des couples de bipoints pour lesquels $\varrho = 0$, c'est à dire conjugués harmoniques sur leur cercle, peuvent fournir un extremum de (21). Le système (23) exige d'abord que $\sigma\sigma' = 0$, sans quoi λ_m et λ'_m seraient tous nuls et B, B' coïncideraient. Supposons d'abord $\varrho = \sigma = 0$, $\sigma' \neq 0$. Les λ'_m sont nuls et les λ_m sont indéterminés pourvu que $\sum_m \lambda_m^2 = 0$. (24) donne $\tau = 0$. Les équations $\frac{\partial F}{\partial \mu_l} = 0$ s'évanouissent, tandis que $\frac{\partial F}{\partial \lambda_j} = 0$ et $\frac{\partial F}{\partial \lambda_l} = 0$ donnent les $p + q - 2r$ équations

$$\sigma' \lambda_i + \sum_{k=r+1}^{q} a_{ki} \sigma_k = 0, \qquad i = r + 1, r + 2, \ldots p + q - r.$$

Mais alors les équations $\frac{\partial F}{\partial \sigma_h} = 0$ s'écrivent, grâce à (5; II)

$$\sum_{k=r+1}^{q} \left(\sum_{i=r+1}^{p+q-r} a_{hi} a_{ki} \right) \sigma_k = \sigma_h = 0, \qquad h = r + 1, r + 2, \ldots q;$$

la nullité de tous les σ_h entraîne celle des λ_i et B' s'évanouit. $\sigma \neq 0$ est à écarter pour un notif semblable, et l'on doit donc supposer que $\varrho = \sigma = \sigma' = 0$.

Dans ces conditions, les λ_m et λ'_m sont indéterminés, pourvu que $\sum_m \lambda'^2_m = \sum_m \lambda^2_m$. τ est encore nul. Les équations $\frac{\partial F}{\partial \mu_l} = 0$ s'évanouissent, tandis que $\frac{\partial F}{\partial \lambda_j} = \frac{\partial F}{\partial \lambda_l} = 0$ se réduisent à

$$\sum_{k=r+1}^{q} a_{ki} \sigma_k = 0, \qquad i = r + 1, r + 2, \ldots p + q - r.$$

(4; II) exprime que ce système linéaire et homogène, aux $q - r$ inconnues σ_k, est de rang $q - r$, donc les σ_k sont tous nuls. Il suffit donc que les deux bipoints existent et soient conjugués sur leur cercle pour que toutes les conditions d'extremum soient satisfaites. Les seules relations à vérifier sont les $q - r + 2$ équaions $\frac{\partial F}{\partial \sigma_k} = \frac{\partial F}{\partial \sigma} = \frac{\partial F}{\partial \tau} = 0$, jointes à $\sum_m \lambda'^2_m = \sum_m \lambda^2_m$ et à

$$N + N' = 2 \sum_{l=p+1}^{p+q-r} \lambda_l \mu_l + \sum_{m=p+q-r+1}^{n+2} \mu_m (\lambda_m + \lambda'_m) = 0.$$

En résumé, avec une restriction analogue à celle faite à diverses reprises, nous pouvons énoncer le

Théorème. *Les distances conformes de deux hypersphères α, β sont les valeurs extrémales de la distance conforme de deux bipoints cocycliques situés respectivement sur α et β, sauf peut-être la valeur $\sqrt{-1}$ fournie par des couples de bipoints conjugués harmoniques.*

17. Tous les cercles des couples de bipoints obtenus sont caractérisés par la propriété d'être orthogonaux aux deux hypersphères α et β, respectivement en (A, A') et (B, B'). Ce sont les *hauteurs* communes aux deux hypersphères, dont les deux bipoints peuvent être appelés les *pieds*. Nous devons donc retrouver les bipoints du paragraphe 15 en cherchant les hauteurs γ et leurs pieds. Ceux-ci sont toujours définis par les équations (4), (17) et (19), où l'on peut faire $\theta = 1$, soit

$$(38)\qquad \begin{cases} B = \sum\limits_{j=r+1}^{p} \lambda_j U_j + \sum\limits_{l=p+1}^{p+q-r} \lambda_l U_l + \sum\limits_{m=p+q-r+1}^{n+2} \lambda_m U_m, \\ B' = \sum\limits_{j=r+1}^{p} \lambda_j U_j + \sum\limits_{l=p+1}^{p+q-r} \lambda_l U_l + \sum\limits_{m=p+q-r+1}^{n+2} \lambda'_m U_m, \\ A = \sum\limits_{l=p+1}^{p+p-r} \mu_l U_l + \sum\limits_{m=p+q-r+1}^{n+2} \mu_m U_m, \\ A' = A + B' - B = \sum\limits_{l=p+1}^{p+q-r} \mu_l U_l + \sum\limits_{m=p+q-r+1}^{n+2} \mu'_m U_m, \end{cases}$$

avec

$$(39)\qquad \mu'_m = \mu_m + \lambda'_m - \lambda_m.$$

Rappelons également les conditions

$$(40)\qquad \begin{cases} \sum\limits_j \lambda_j^2 + \sum\limits_l \lambda_l^2 + \sum\limits_m \lambda_m^2 = 0, \\ \sum\limits_m \lambda_m^2 = \sum\limits_m \lambda_m'^2, \\ \sum\limits_j a_{kj} \lambda_j + \sum\limits_l a_{kl} \lambda_l = 0, \qquad k = r+1,\ r+2, \ldots q, \end{cases}$$

et

$$(41)\qquad \begin{cases} \sum\limits_l \mu_l^2 + \sum\limits_m \mu_m^2 = 0, \\ D \equiv \sum\limits_m \mu_m (\lambda'_m - \lambda_m) = \sum\limits_m \lambda_m (\lambda'_m - \lambda_m). \end{cases}$$

Le point courant du cercle γ est la combinaison linéaire

$$(42)\qquad M = aA + bB + b'B',$$

pourvu que les scalaires a, b, b' vérifient

$$\frac{M^2}{2} = N a b + N' a b' + D b b' = 0, \tag{43}$$

où N, N' ont les mêmes significations $N = AB$, $N' = AB'$ qu'au paragraphe 15, ainsi que $D = N' - N = BB'$ rappelé en (41). N, N', D ne peuvent s'annuler si γ est un vrai cercle et si les points sont distincts.

M est en A pour $a = 1$, $b = b' = 0$. Le long de γ, la différentielle dA est la valeur de

$$dM = A\,da + B\,db + B'\,db', \tag{44}$$

où les différentielles de 3 paramètres annulent celle de (43), au point A, c'est à dire avec la relation

$$N\,db + N'\,db' = 0. \tag{45}$$

Sur l'hypersphère α, le déplacement général de A est

$$\delta A = \sum_{l=p+1}^{p+q-r} U_l\,\delta\mu_l + \sum_{m=p+q-r+1}^{n+2} U_m\,\delta\mu_m,$$

avec la seule condition $A\,\delta A = 0$, ou

$$\sum_{l=p+1}^{p+q-r} \mu_l\,\delta\mu_l + \sum_{m=p+q-r+1}^{n+2} \mu_m\,\delta\mu_m = 0. \tag{46}$$

dA et δA représentent deux sphères normales en A aux deux trajectoires de A, donc la condition d'orthogonalité de γ et α est que $dA\,\delta A = 0$ soit la conséquence de (45) et (46). $dA\,\delta A = 0$ s'écrit

$$db \times B\,\delta A + db' \times B'\,\delta A = 0,$$

ou, grâce à (45),

$$N' B\,\delta A - N B'\,\delta A \equiv D \sum_{l=p+1}^{p+q-r} \lambda_l\,\delta\mu_l + \sum_{m=p+q-r+1}^{n+2} (N'\lambda_m - N\lambda'_m)\,\delta\mu_m = 0.$$

Pour que ce soit une conséquence de (46), il faut et il suffit qu'il existe un scalaire η grâce auquel on ait

$$\begin{cases} \eta\,\mu_l = D\,\lambda_l, & l = p+1,\ p+2, \ldots\ p+q-r, \\ \eta\,\mu_m = N'\lambda_m - N\lambda'_m, & m = p+q-r+1,\ p+q-r+2, \ldots\ n+2. \end{cases} \tag{47}$$

En observant que la relation (39) subsiste lorsqu'on permute respectivement A et B avec A' et B', et qu'alors N et N' sont invariants, car $A'B' = AB' - BB' = N$

et $A'B = AB + BB' = N'$, l'orthogonalité de γ et α en A' s'exprime en effectuant cette permutation dans (47), avec un nouveau facteur η', soit

$$(48) \quad \begin{cases} \eta' \mu_l = D\lambda_l, & l = p+1, p+2, \dots p+q-r, \\ \eta'(\mu_m + \lambda'_m - \lambda_m) = N'\lambda'_m - N\lambda_m, & m = p+q-r+1, p+q-r+2, \dots n+2. \end{cases}$$

M vient en B pour $b = 1$, $a = b' = 0$. Le long de γ, la différentielle dB a la forme (44) avec la condition $B\,dB = 0$, ou

$$(49) \qquad N\,da + D\,db' = 0.$$

Sur l'hypersphère β, le déplacement de B est

$$\delta B = \sum_{i=r+1}^{p+q-r} U_i\,\delta\lambda_i + \sum_{m=p+q-r+1}^{n+2} U_m\,\delta\lambda_m,$$

avec les conditions

$$(50) \quad \begin{cases} \displaystyle\sum_{i=r+1}^{p+q-r} \lambda_i\,\delta\lambda_i + \sum_{m=p+q-r+1}^{n+2} \lambda_m\,\delta\lambda_m = 0, \\ \displaystyle\sum_{i=r+1}^{p+q-r} a_{ki}\,\delta\lambda_i = 0, \quad k = r+1, r+2, \dots q. \end{cases}$$

$dB\,\delta B = 0$ s'écrit

$$da \times A\,\delta B + db' \times B'\,\delta B = 0,$$

ou, grâce à (49) et à la première relation (50),

$$D\left(\sum_{l=p+1}^{p+q-r} \mu_l\,\delta\lambda_l + \sum_{m=p+q-r+1}^{n+2} \mu_m\,\delta\lambda_m\right) - N \sum_{m=p+q-r+1}^{n+2} (\lambda'_m - \lambda_m)\,\delta\lambda_m = 0.$$

Pour que γ et B soient orthogonaux en B, il faut et il suffit que cette équation soit une conséquence de (50), donc qu'il existe des scalaires ξ et ξ_k ($k = r+1$, $r+2, \dots q$) tels que l'on ait

$$(51) \quad \begin{cases} \xi\lambda_j + \displaystyle\sum_{k=r+1}^{q} a_{kj}\,\xi_k = 0, & j = r+1, r+2, \dots p, \\ \xi\lambda_l + \displaystyle\sum_{k=r+1}^{q} a_{kl}\,\xi_k = D\mu_l, & l = p+1, p+2, p+q-r, \\ \xi\lambda_m \qquad = D\mu_m - N(\lambda'_m - \lambda_m), & m = p+q-r+1, p+q-r+2, \dots n+2. \end{cases}$$

La permutation de A avec A' et de B avec B' donne de même la condition d'orthogonalité de γ et β en B', sous la forme

$$(52)\quad \begin{cases} \xi' \lambda_j + \sum\limits_{k=r+1}^{q} a_{kj} \xi'_k = 0, & j = r+1, r+2, \ldots p, \\ \xi' \lambda_l + \sum\limits_{k=r+1}^{q} a_{kl} \xi'_k = D \mu_l, & l = p+1, p+2, \ldots p+q-r, \\ \xi' \lambda'_m \qquad = D \mu_m + N' (\lambda'_m - \lambda_m), & m = p+q-r+1, p+q-r+2, \ldots n+2, \end{cases}$$

avec $q - r + 1$ nouveaux multiplicateurs ξ', ξ'_k.

18. Il s'agit d'étudier le système des équations (47), (48), (51), (52), compte tenu de (40) et (41). N'oublions pas que les λ_j ne peuvent être tous nuls, sans quoi (B, B') serait sur α, ni les μ_l, sans quoi (A, A') serait sur β. La différence des premières lignes de (47) et (48) donne $(\eta - \eta')\mu_l = 0$, donc $\eta = \eta'$.

Si nous supposons d'abord $\eta \neq 0$, les équations en question se réduisent aux $q - r$ équations

$$(53)\qquad \mu_l = \frac{D}{\eta} \lambda_l, \qquad l = p+1, p+2, \ldots p+q-r,$$

tandis que les deuxièmes lignes donnent

$$\eta \mu_m = N' \lambda_m - N \lambda'_m = (\eta - N) \lambda_m + (N' - \eta) \lambda'_m, \qquad m = p+q-r+1, \ldots n+2.$$

B' différant de B, la deuxième égalité exige que

$$(54)\qquad \eta = N + N',$$

de sorte que η n'est pas d'autre chose que la quantité $D\varrho$ du paragraphe 15, et il reste les seules équations

$$(55)\qquad \eta \mu_m = N' \lambda_m - N \lambda'_m, \qquad m = p+q-r+1, p+q-r+2, \ldots n+2.$$

La deuxième relation (41) se déduit tout de suite de (54), (55) et de la deuxième relation (40), mais l'identification de N donne

$$\eta N = D \sum_{l=p+1}^{p+q-r} \lambda_l^2 + \sum_{m=p+q-r+1}^{n+2} (N' \lambda_m - N \lambda'_m) \lambda_m,$$

ou, grâce à (41) et (54), et (40),

$$\begin{aligned} (N + N') N &= D \sum_{l=p+1}^{p+q-r} \lambda_l^2 + N' \sum_{m=p+q-r+1}^{n+2} \lambda_m^2 - N \left(D + \sum_{m=p+q-r+1}^{n+2} \lambda_m^2 \right) \\ &= D \left(\sum_{l=p+1}^{p+q-r} \lambda_l^2 + \sum_{m=p+q-r+1}^{n+2} \lambda_m^2 \right) - N D = - D \sum_{j=r+1}^{p} \lambda_j^2 - N D, \end{aligned}$$

donc

$$(56)\qquad \sum_{j=r+1}^{p} \lambda_j^2 = -\frac{2NN'}{D} = -\frac{D(\varrho^2-1)}{2}.$$

La première relation (41) est alors satisfaite, si les relations (40) le sont. Ceci obtenu, les troisièmes équations (51) et (52) s'écrivent

$$(57)\qquad D\mu_m = (\xi - N)\lambda_m + N\lambda'_m = N'\lambda_m + (\xi' - N')\lambda'_m,$$

d'où résulte

$$(58)\quad (\xi - N - N')\lambda_m = (\xi' - N - N')\lambda'_m,\quad m = p+q-r+1,\ p+q-r+2, \dots n+2.$$

Pour que les $\lambda'_m - \lambda_m$ ne soient pas tous nuls, il faut soit $\xi \neq \xi'$, soit $\xi = \xi' = N + N'$.

19. Supposons d'abord que

$$(59)\qquad \xi = \xi' = N + N'.$$

(58) disparaît, et (57) se réduit à

$$(60)\qquad D\mu_m = N'\lambda_m + N\lambda'_m,\qquad m = p+q-r+1,\ p+q-r+2, \dots n+2;$$

et la comparaison avec (55) donne

$$NN'(\lambda'_m + \lambda_m) = 0,$$

où $NN' \neq 0$, d'où résulte, pour remplacer (55) et (60), les relations

$$(61)\qquad \lambda_m = -\lambda'_m = \mu_m,\qquad m = p+q-r+1,\ p+q-r+2, \dots n+2.$$

La différence des deuxièmes lignes de (51) et (52), où $\xi = \xi'$, donne ensuite

$$\sum_{k=r+1}^{q} a_{kl}(\xi_k - \xi'_k) = 0,\qquad l = p+1,\ p+2, \dots p+q-r,$$

donc $\xi_k = \xi'_k$ en vertu de (4; II). Il suffit alors de satisfaire les équations aux deux premières lignes de (51), qui donnent, avec $N + N' = D\varrho$, et grâce à (53)[1],

$$(62)\qquad \begin{cases} \lambda_j = -\dfrac{1}{D\varrho}\displaystyle\sum_{k=r+1}^{q} a_{kj}\xi_k, & j = r+1,\ r+2, \dots p, \\[2ex] \lambda_l = -\dfrac{\varrho}{D(\varrho^2-1)}\displaystyle\sum_{k=r+1}^{q} a_{kl}\xi_k, & l = p+1,\ p+2, \dots p+q-r. \end{cases}$$

[1] On peut observer que $NN' \neq 0$ entraîne $D(\varrho^2-1) \neq 0$, et que $\varrho \neq 0$ puisqu'on suppose $\eta \neq 0$.

On constate tout de suite que ces expressions s'identifient avec (31) et (33), de même que (53) s'identifie avec (30) lorsqu'on fait $\theta = 1$, c'est à dire $\nu = -\frac{D}{2\varrho}$, et $\frac{\xi_k}{\sigma_k} = -\frac{D^2}{2\varrho}$. (35) n'est alors rien d'autre que (56). On retrouve donc les bipoints du paragraphe 15 et les cercles correspondants.

20. η différant toujours de zéro, supposons $\xi \neq \xi'$. ξ' ne peut être égal à η, sans quoi (58) annulerait tous les λ_m, donc D, ce qui est inadmissible. Pour le même motif, $\xi \neq \eta$, et la seule hypothèse à retenir est $\xi \neq \xi' \neq \eta \neq \xi$. (58) donne alors

$$\lambda'_m = \frac{\xi - \eta}{\xi' - \eta}\lambda_m, \qquad m = p + q - r + 1,\ p + q - r + 2, \ldots n + 2,$$

donc

$$D = \sum_{m=p+q-r+1}^{n+2} \lambda_m(\lambda'_m - \lambda_m) = \frac{\xi - \xi'}{\xi' - \eta} \sum_{m=p+q-r+1}^{n+2} \lambda_m^2,$$

tandis que la deuxième condition (40) s'écrit

$$\left[\left(\frac{\xi - \eta}{\xi' - \eta}\right)^2 - 1\right] \sum_{m=p+q-r+1}^{n+2} \lambda_m^2 = 0.$$

D ne pouvant être nul, la seule condition admissible est $\xi + \xi' = 2\eta$, donc

$$\lambda'_m = -\lambda_m.$$

Mais alors (54) et (55) donnent $\mu_m = \lambda_m$, ce qui permet de réduire (57) à

$$(D - \xi + 2N)\lambda_m = (\eta - \xi)\lambda_m = 0,$$

pour tous les m, ce qui est impossible puisque $\eta \neq \xi$ et que les λ_m ne peuvent être tous nuls.

21. Examinons, pour terminer, l'hypothèse $\eta = \eta' = 0$. Les premières lignes de (47) et (48) se réduisent à $D\lambda_l = 0$, donc

$$\lambda_l = 0, \qquad l = p + 1,\ p + 2, \ldots p + q - r. \tag{63}$$

Les autres lignes de ces deux systèmes donnent les $2(n + 2 + r - p - q)$ équations

$$N'\lambda_m - N\lambda'_m = N\lambda_m - N'\lambda'_m = 0, \qquad m = p + q - r + 1, \ldots n + 2,$$

donc $N'^2 = N^2$, sans quoi les λ_m et les λ'_m seraient tous nuls, et $B = B'$. Pour cette même raison, la seule solution acceptable est

$$N' + N = 0, \tag{64}$$

et, par suite,

$$\lambda'_m = -\lambda_m, \qquad m = p + q - r + 1,\ p + q - r + 2, \ldots n + 2. \tag{65}$$

On a alors $\varrho = 0$ et $D = -2N$. Les dernières lignes de (51) et (52) s'écrivent ensuite

$$\xi \lambda_m = -\xi' \lambda_m = 2N(\lambda_m - \mu_m), \tag{66}$$

et la première équation entraîne $\xi' = -\xi$, car les λ_m ne peuvent être tous nuls. La différence des deuxièmes lignes de (51) et (52) donne, comme plus haut, $\xi'_k = \xi_k$, de sorte que la différence des premières lignes de ces deux systèmes se réduit à $2\xi\lambda_j = 0$, donc

$$\xi = \xi' = 0, \tag{67}$$

et, d'après (66),

$$\mu_m = \lambda_m, \quad m = p + q - r + 1,\ p + q - r + 2, \ldots n + 2. \tag{68}$$

La deuxième ligne de (51) définit les μ_l en fonction des ξ_k, soit

$$\mu_l = \frac{1}{D} \sum_{k=r+1}^{q} a_{kl}\, \xi_k, \quad l = p + 1,\ p + 2, \ldots p + q - r, \tag{69}$$

ces éléments ξ_k étant liés par les équations de la première ligne

$$\sum_{k=r+1}^{q} a_{kj}\, \xi_k = 0, \quad j = r + 1,\ r + 2, \ldots p. \tag{70}$$

Les relations (40) et (41) à ajouter se réduisent à

$$N = \sum_m \lambda_m^2 = -\sum_j \lambda_j^2 = -\sum_l \mu_l^2, \tag{71}$$

et

$$\sum_{j=r+1}^{p} a_{kj}\, \lambda_j = 0, \quad k = r + 1,\ r + 2, \ldots q. \tag{72}$$

Les ξ_k ne peuvent être tous nuls, sans quoi les μ_l le seraient; les λ_j également, donc la matrice des coefficients des deux systèmes (70) et (72)

$$a = \begin{Vmatrix} a_{r+1,\,r+1} & a_{r+1,\,r+2} & \ldots & a_{r+1,\,p} \\ a_{r+2,\,r+1} & a_{r+2,\,r+2} & \ldots & a_{r+2,\,p} \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ a_{q,\,r+1} & a_{q,\,r+2} & \ldots & a_{q,\,p} \end{Vmatrix}$$

doit avoir un rang inférieur à $p - r$ et $q - r$, ce qui n'est pas le cas général.[1] Les hauteurs pour lesquelles $\eta = 0$ sont ainsi exceptionnelles, comme la valeur correspondante $\varrho = 0$ dans l'étude directe de la distance $[\alpha\beta]$.

[1] C'est la matrice $\mathfrak{a}$ du paragraphe 7.

Si la rang s de a convient $(s < p - r \leq q - r)$, il existe une infinité de telles hauteurs, dont le pied (B, B') est défini par (72), $\lambda_l = 0$, $\lambda'_m = -\lambda_m$, les λ_m étant liés aux λ_j par la deuxième égalité (71). (B, B') étant choisi, N et $D = -2N$ sont connus. Les ξ_k sont définis par les $p - r$ équations (70) et contiennent aux moins un paramètre arbitraire, en facteur, que l'on peut préciser grâce à la dernière relation (71). Celle-ci prend une forme simple, grâce à (5; II), car (69) donne

$$D^2 \sum_l \mu_l^2 = \sum_{l=p+1}^{p+q-r} \sum_{k=r+1}^{q} \sum_{h=r+1}^{q} a_{kl}\, a_{hl}\, \xi_k \xi_h$$
$$= \sum_{k=r+1}^{q} \sum_{h=r+1}^{q} \left(\delta_{kh} - \sum_{j=r+1}^{p} a_{kj}\, a_{hj}\right) \xi_k \xi_h,$$

donc, compte tenu de (70) lui-même,

$$D^2 \sum_l \mu_l^2 = \sum_{k=r+1}^{q} \xi_k^2;$$

cette condition s'écrit ainsi

(73) $$\sum_{k=r+1}^{q} \xi_k^2 = -\frac{D^3}{2}.$$

A chaque solution de (70), (73), correspond alors un pied (A, A') bien déterminé.

Observons que, pour ces hauteurs, la distance des deux pieds est donnée par

$$[(A, A')(B, B')]^2 = \frac{4NN'}{D^2} = -1,$$

et les deux bipoints sont conjugués harmoniques. L'équation

$$\Delta(\varrho^2) \equiv \varrho^{2(p-r)} - S_1 \varrho^{2(p-r-1)} + \cdots + (-1)^s S_s \varrho^{2(p-r-s)} = 0$$

a une racine $\varrho^2 = 0$ d'ordre $p - r - s$, et s racines différentes de zéro. Pour $\varrho = 0$ les hauteurs trouvées au paragraphe 19 deviennent celles obtenues ici, comme le montrent les équations (54), (61), (62) où l'on fait $\varrho = 0$, ainsi que (56) où $N = -N' = -\frac{D}{2}$, et enfin (53) et (62) où l'on élimine λ_l; il vient en effet

$$\mu_l = \frac{-\varrho}{\eta(\varrho^2 - 1)} \sum_{k=r+1}^{q} a_{kl}\, \xi_k = \frac{-1}{D(\varrho^2 - 1)} \sum_{k=r+1}^{q} a_{kl}\, \xi_k,$$

c'est à dire (69) pour $\varrho = 0$. Nous avons ainsi établi que *les hauteurs de deux hypersphères sont les cercles joignant les bipoints qui fournissent les distances conformes de ces deux hypersphères, y compris parfois la distance* $\sqrt{-1}$.