SUR DES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES LINÉAIRES TRANSFORMABLES EN ELLES-MÊMES PAR UN CHANGEMENT DE FONCTION ET DE VARIABLE

PAR

P. APPELL

À PARIS.

1. Les fonctions périodiques d'une variable z sont des fonctions qui ne changent pas quand on y remplace z par $z+\omega$, ω étant une certaine constante. On peut, plus généralement, imaginer des fonctions de z qui ne changent pas de valeur quand on fait sur z une opération déterminée $\varphi(z)$, de telle façon que l'on ait

$$f[\varphi(z)] = f(z).$$

Il peut se faire qu'une fonction $f(z)$ ne change pas quand on fait successivement sur z plusieurs opérations déterminées $\varphi(z)$, $\psi(z)$, ... l'on aura alors

$$f[\varphi(z)] = f(z), \qquad f[\psi(z)] = f(z), \quad \ldots .$$

Telles sont les fonctions doublement périodiques pour lesquelles $\varphi(z)=z+\omega$, $\psi(z) = z+\omega'$, la fonction modulaire de M. Hermite et, plus généralement, les fonctions fuchsiennes et kleinéennes de M. Poincaré pour lesquelles $\varphi(z)$, $\psi(z)$, ... sont certaines fonctions de la forme $\frac{az+b}{cz+d}$ ....
Nous avons donné des exemples de fonctions $f(z)$ vérifiant une relation de la forme

$$f[\varphi(z)] = f(z)$$

dans deux Notes présentées à l'Académie des sciences de Paris dans les séances des 21 avril et 19 mai 1879: dans deux de ces exemples $\varphi(z)$ est une fonction algébrique de z, $\varphi(z) = z^2$ ou $z^3 - 1$; dans un autre $\varphi(z)$ est une fonction transcendante $\sin\frac{\pi}{2}z$. M. Rausenberger a publié une suite de Mémoires intéressants sur les fonctions $f(z)$ vérifiant une ou plusieurs relations de la forme ci-dessus, en supposant que les opérations désignées par $\varphi(z)$, $\psi(z)$, ... soient *algébriques:* il a considéré des fonctions plus générales $f(z)$ vérifiant des relations de la forme

$$f[\varphi(z)] = \psi[f(z)],$$

$\varphi(z)$ et $\psi(z)$ désignant des fonctions algébriques données.[1] A un autre point de vue, des équations fonctionnelles de formes analogues dont les principales sont

$$f[\varphi(z)] = \psi(z)f(z), \qquad f[\varphi(z)] = f(z) + \psi(z),$$

$\varphi(z)$ et $\psi(z)$ désignant des fonctions données algébriques ou transcendantes, ont été étudiées par Abel,[2] par M. Schroeder,[3] M. Korkine,[4] M. Farkas[5] et enfin par M. Koenigs[6] à qui l'on doit d'importants théorèmes sur l'éxistence et l'expression générale des solutions holomorphes de certaines équations fonctionnelles.

Dans une Note *Sur des équations différentielles linéaires dont les intégrales vérifient des relations de la forme* $F[\varphi(x)] = \psi(x)F(x)$ présentée à

[1] Voyez Rausenberger: *Theorie der allgemeinen Periodicität,* (Mathematische Annalen, Tome 18, année 1881): *Zur Theorie der Functionen mit mehreren nicht vertauschbaren Perioden,* (Deux articles. Ibid., année 1882); *Über periodische Functionen zweiter Gattung,* (Ibid., année 1882); *Lehrbuch der Theorie der periodischen Funktionen einer Variablen mit einer endlichen Anzahl wesentlicher Discontinuitätspunkte.* (Lpz. 1884.)

[2] Oeuvres complètes, publiées par M. M. Sylow et Lie, Tome II, p. 36.

[3] *Über unendlich viele Algorithmen zur Auflösung der Gleichungen,* (Mathematische Annalen, Tome 2); *Über iterirte Functionen,* (Ibid., Tome 3).

[4] *Sur un problème d'interpolation,* (Bulletin des sciences mathématiques, 1882).

[5] Journal de mathématiques de M. Resal, mars 1884.

[6] *Recherches sur les substitutions uniformes,* (Bulletin des sciences mathématiques, 1883); *Recherches sur les intégrales de certaines équations fonctionnelles,* (Annales de l'Ecole Normale, année 1884, supplément); *Nouvelles recherches sur les équations fonctionnelles,* (Ibid., novembre 1885).

l'Académie des sciences dans la séance du 7 novembre 1881, j'ai considéré des équations différentielles linéaires et homogènes définissant y en fonction de x et possédant la propriété suivante. Il existe deux fonctions φ et ψ telles qu'en faisant le changement de fonction et de variable

$$x = \varphi(t), \quad y = z\psi(t),$$

on ramène l'équation à la forme primitive où x serait remplacé par t et y par z. En d'autres termes, il existe un changement de fonction et de variable qui transforme l'équation *en elle-même;* si cette hypothèse est réalisée, l'équation admet au moins une intégrale $y = F(x)$ vérifiant une relation de la forme

$$F[\varphi(x)] = A\psi(x)F(x)$$

où A désigne une constante.

On reconnaît dans ce théorème une analogie lointaine avec les théorèmes que M. PICARD a donnés sur les équations différentielles linéaires à coefficients doublement périodiques. (Comptes rendus, 1880, premier semestre; Journal de Crelle, t. 90.)

Dans le cas où l'équation différentielle est du second ordre, les deux fonctions φ et ψ existent toujours comme l'ont montré KUMMER dans son mémoire sur la série $F(\alpha, \beta, \gamma, x)$, et M. BRIOSCHI dans différents mémoires dont le point de départ se trouve résumé dans les Comptes rendus, t. 93, p. 941. Je me propose, dans le présent travail, d'étudier et d'intégrer une classe étendue de ces équations, en m'appuyant sur les résultats obtenus par M. KOENIGS.

2. Rappelons d'abord quelques uns de ces résultats, afin de pouvoir caractériser les équations dont nous allons nous occuper.

La suite des quantités $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p$ est dite *converger régulièrement* vers une limite x, lorsque, à tout nombre positif ε aussi petit que l'on veut, il est possible de faire correspondre un entier N_ε assez grand pour que, *sous la seule condition* $p \geqq N_\varepsilon$, on ait

$$|\alpha_p - x| < \varepsilon.\text{[1]}$$

[1] La notation $|u|$ signifie *module de u*.

Soit une fonction $\varphi(z)$ uniforme dans l'intérieur d'une région R du plan et jouissant de la propriété que, si z est intérieur à cette région, il en est de même du point $z_1 = \varphi(z)$; si nous posons généralement $z_{i+1} = \varphi(z_i)$, les points de la suite

$$z, z_1, z_2, \ldots, z_p$$

sont tous à l'intérieur de la région R. Lorsque cette suite converge régulièrement vers une limite x qui n'est pas pour $\varphi(z)$ un point singulier essentiel, on sait que x est un zéro de la fonction

$$z - \varphi(z)$$

qui doit vérifier l'inégalité

$$|\varphi'(x)| < 1.$$

Cette valeur de $\varphi'(x)$ sera constamment désignée par a et supposée différente de zéro. Réciproquement, si x désigne un zéro de la fonction $z - \varphi(z)$ tel que $|\varphi'(x)| < 1$, le point x est le centre d'un cercle C_x à l'intérieur duquel: 1°) $\varphi(z)$ est holomorphe, 2°) le module de $\frac{\varphi(z) - x}{z - x}$ reste constamment inférieur à un nombre fixe moindre que 1, 3°) les points $z_1, z_2, \ldots, z_p$ convergent uniformément vers le point x (voyez Koenigs, Annales de l'Ecole normale, 1884, supplément, page 6). Toutes ces conditions étant remplies, nous supposons que les coefficients de l'équation différentielle sont *holomorphes ou méromorphes au point limite* x, hypothèse qui écarte les équations dont les coefficients sont des fonctions doublement périodiques, ou des fonctions fuchsiennes. Nous montrons que toutes ces équations sont intégrables à l'aide de la fonction $B(z)$ introduite par M. Koenigs, et même qu'elles peuvent, par une substitution que nous indiquons, être ramenées à avoir leurs coefficients constants.

3. Pour obtenir une première expression des coefficients de nos équations, nous aurons à nous appuyer sur les considérations suivantes.

Soit $\psi(z)$ une fonction de z holomorphe dans le cercle C_x et telle que le module de $\psi(x)$ est moindre que l'unité. Alors, en désignant par k une constante positive comprise entre l'unité et le module de $\psi(x)$, on pourra, à cause de la continuité de $\psi(z)$, assigner un nombre positif ρ tel que, sous la condition

$$|z - x| < \rho$$

on ait

$$|\psi(z)| \leqq k.$$

Soit, d'autre part, $\varpi(z)$ une fonction *holomorphe* dans le cercle C_x. La série

$$(1) \qquad F_1(z) = \sum_{n=0}^{n=\infty} \psi(z)\psi(z_1)\psi(z_2)\ldots\psi(z_n)\varpi(z_n)$$
$$= \psi(z)\varpi(z) + \psi(z)\psi(z_1)\varpi(z_1) + \psi(z)\psi(z_1)\psi(z_2)\varpi(z_2) + \ldots$$

est convergente pour toutes les valeurs de z prises dans le cercle C_x et définit, par suite, une fonction de z dans ce cercle. En effet, z étant un point du cercle C_x, on peut trouver un nombre ν assez grand pour que, sous la seule condition $n \geqq \nu$, on ait

$$|z_n - x| < \rho, \qquad |\psi(z_n)| \leqq k.$$

Partageons la série (1) en deux parties la première contenant les ν premiers termes, la seconde les autres

$$F_1(z) = \sum_{n=0}^{n=\nu-1} \psi(z)\psi(z_1)\ldots\psi(z_n)\varpi(z_n) + \sum_{n=\nu}^{n=\infty} \psi(z)\psi(z_1)\ldots\psi(z_n)\varpi(z_n).$$

La seconde partie contient en facteur $\psi(z)\psi(z_1)\ldots\psi(z_{\nu-1})$ et peut s'écrire

$$\psi(z)\psi(z_1)\ldots\psi(z_{\nu-1})\sum_{p=0}^{p=\infty} \psi(z_\nu)\psi(z_{\nu+1})\ldots\psi(z_{\nu+p})\varpi(z_{\nu+p}),$$

série évidemment *convergente*, car le module de $\varpi(z_{\nu+p})$ restant inférieur à une limite fixe L puisque $\varpi(z)$ est holomorphe, et les modules des facteurs

$$\psi(z_\nu),\ \psi(z_{\nu+1}),\ \ldots,\ \psi(z_{\nu+p})$$

étant tous inférieurs ou égaux au nombre k moindre que l'unité, le module du terme général sera moindre que

$$Lk^p$$

terme général d'une progression géométrique décroissante.

La fonction $F_1(z)$ existe donc dans tout le cercle C_x: elle vérifie la relation suivante qui résulte immédiatement de la forme du développement

$$F_1[\varphi(z)] = \frac{1}{\psi(z)} F_1(z) - \varpi(z). \tag{2}$$

La série des dérivées des termes de $F_1(z)$ est aussi uniformément convergente dans tout le cercle C_x, comme on le verra en faisant un raisonnement analogue à celui que fait M. Koenigs pour des séries du même genre. On en conclut que la fonction $F_1(z)$ est *holomorphe* dans le cercle C_x. Ce fait se trouvera du reste vérifié *a posteriori* dans tous les cas que nous traiterons.

Complétons ces considérations en cherchant toutes les fonctions holomorphes ou méromorphes vérifiant la relation (2).

Soit $F(z)$ une autre fonction holomorphe ou méromorphe dans le cercle C_x vérifiant la même relation que $F_1(z)$

$$F[\varphi(z)] = \frac{1}{\psi(z)} F(z) - \varpi(z).$$

La différence $F(z) - F_1(z)$ vérifiera la relation

$$F[\varphi(z)] - F_1[\varphi(z)] = \frac{1}{\psi(z)} [F(z) - F_1(z)].$$

M. Koenigs a montré [1] qu'il existe une seule fonction holomorphe $G(z)$ vérifiant l'équation

$$G[\varphi(z)] = \frac{\psi(x)}{\psi(z)} G(z)$$

et qu'il n'existe aucune fonction méromorphe dans le cercle C_x vérifiant cette équation. Cette fonction $G(z)$ étant formée, on aura

$$\frac{F[\varphi(z)] - F_1[\varphi(z)]}{G[\varphi(z)]} = \frac{1}{\psi(x)} \frac{F(z) - F_1(z)}{G(z)},$$

ce qui montre que la fonction

$$\frac{F(z) - F_1(z)}{G(z)}$$

[1] Annales de l'Ecole normale, 1884, supplément p. 25 et 26.

est une solution méromorphe de l'équation fonctionnelle

$$\Xi[\varphi(z)] = \frac{1}{\psi(x)}\Xi(z)$$

dont M. KOENIGS a donné toutes les solutions méromorphes et holomorphes dans le cercle C_x. D'après l'analyse de M. KOENIGS (loc. cit. page 16), cette équation n'admet de solution holomorphe ou méromorphe dans le domaine du point x que si l'on a

$$\psi(x) = [\varphi'(x)]^n,$$

n désignant un entier positif ou négatif. Si l'on suppose cette condition remplie, la seule solution holomorphe ou méromorphe de l'équation fonctionnelle est

$$\alpha[B(z)]^{-n},$$

α étant une constante et $B(z)$ une fonction holomorphe dont M. KOENIGS a donné l'expression et qui vérifie la relation

$$B[\varphi(z)] = \varphi'(x)B(z).$$

On a donc alors, pour expression générale de $F(z)$

$$F(z) = F_1(z) + \alpha G(z)[B(z)]^{-n}.$$

Cette fonction $B(z)$ est définie par M. KOENIGS comme la limite vers laquelle tend le produit

$$\frac{\varphi_p(z) - x}{a^{p+1}}$$

quand p augmente indéfiniment, $\varphi_p(z)$ désignant l'opération $\varphi(z)$ répétée p fois. La dérivée $B'(z)$ est la limite du produit convergent

$$B'(z) = \prod_{i=0}^{i=\infty}\frac{\varphi'(z_i)}{a}.$$

S'il n'existe pas d'entier n vérifiant la relation

$$\psi(x) = [\varphi'(x)]^n,$$

l'équation

$$\Xi[\varphi(z)] = \frac{1}{\psi(x)}\Xi(z)$$

n'admet aucune solution holomorphe ou méromorphe au point x. Dans ce cas, il n'existe pas de fonction holomorphe ou méromorphe $F(z)$ autre que $F_1(z)$ vérifiant la relation

$$F[\varphi(z)] = \frac{1}{\psi(z)} F(z) - \varpi(z).$$

Équations du second ordre.

4. Arrivons maintenant à l'objet principal de ce travail et prenons d'abord une équation linéaire et homogène du second ordre que l'on peut toujours supposer privée du second terme:

$$\frac{d^2u}{dz^2} - uf(z) = 0.$$

KUMMER[1] et M. BRIOSCHI[2] ont montré qu'en remplaçant z par $\varphi(z)$ et u par $u\sqrt{\varphi'(z)}$, l'équation reprend la même forme pourvu que $\varphi(z)$ vérifie la condition

$$(3) \qquad f[\varphi(z)] = \frac{1}{\varphi'^2} f(z) + \frac{2\varphi'\varphi''' - 3\varphi''^2}{4\varphi'^4}$$

où φ', φ'', φ''' désignent les dérivées successives de $\varphi(z)$. Lorsque $f(z)$ est donnée, la détermination d'une solution $\varphi(z)$ de cette équation (3) est impossible dans la plupart des cas. Nous supposerons $\varphi(z)$ donné et nous chercherons à former une fonction $f(z)$ vérifiant la relation (3).

Supposons que l'on se donne une fonction $\varphi(z)$ remplissant toutes les conditions indiquées dans le numéro 2. Nous savons qu'au point limite x on a $|\varphi'(x)| < 1$, et nous supposons, comme plus haut que $\varphi'(x)$ est différent de zéro. Dans un certain cercle C_x de centre x et de rayon suffisamment petit, $\varphi'(z)$ restera différent de zéro et la fonction

$$\varpi(z) = \frac{3\varphi''^2 - 2\varphi'\varphi'''}{4\varphi'^4} = \frac{1}{\varphi'^{\frac{3}{2}}}\left(\frac{1}{\sqrt{\varphi'}}\right)''$$

---

[1] Journal de Crelle, t. 15.

[2] Un résumé très-succinct des importantes recherches de M. BRIOSCHI se trouve dans les Comptes rendus, t. 93, p. 941.

sera holomorphe dans C_x. En écartant le cas où cette fonction serait identiquement nulle, on peut appliquer l'analyse du n° 3 en prenant pour $\psi(z)$ la fonction $[\varphi'(z)]^2$. D'après ce que nous avons vu, la série

$$f_1(z) = \sum_{n=0}^{n=\infty} [\varphi'(z)\varphi'(z_1)\ldots\varphi'(z_n)]^2\varpi(z_n)$$

est convergente et définit une fonction holomorphe au point x vérifiant l'équation (3).

Si l'on prend pour la fonction $f(z)$ cette détermination particulière $f_1(z)$, l'équation différentielle

$$\frac{d^2u}{dz^2} - uf_1(z) = 0$$

aura son intégrale générale holomorphe au point x: soient $F_1(z)$ et $F_2(z)$ deux solutions holomorphes linéairement indépendantes: les fonctions

$$\frac{1}{\sqrt{\varphi'(z)}}F_1[\varphi(z)], \qquad \frac{1}{\sqrt{\varphi'(z)}}F_2[\varphi(z)]$$

seront aussi des solutions holomorphes et l'on aura

$$\frac{1}{\sqrt{\varphi'(z)}}F_1[\varphi(z)] = a_1F_1(z) + b_1F_2(z),$$

$$\frac{1}{\sqrt{\varphi'(z)}}F_2[\varphi(z)] = a_2F_1(z) + b_2F_2(z),$$

a_1, b_1, a_2, b_2 désignant des constantes. Si l'on fait

$$F(z) = \lambda_1F_1(z) + \lambda_2F_2(z)$$

on pourra déterminer les constantes λ_1 et λ_2 de telle façon que

$$\frac{1}{\sqrt{\varphi'(z)}}F[\varphi(z)] = AF(z), \tag{4}$$

A désignant une constante. Il existera donc une intégrale $F(z)$ et, en général, deux intégrales telles que $F(z)$, holomorphes au point x et vérifiant cette relation. Quelle sera l'expression analytique d'une de ces intégrales? La fonction $B(z)$ de M. Koenigs (log. cit. page 16) vérifie l'équation

$$B[\varphi(z)] = \varphi'(x)B(z) = aB(z)$$

sa dérivée $B'(z)$ vérifie donc l'équation

$$\varphi'(z)B'[\varphi(z)] = \varphi'(x)B'(z) = aB'(z)$$

en posant

$$\varphi'(x) = a;$$

d'où

$$\sqrt{B'[\varphi(z)]} = \sqrt{\frac{a}{\varphi'(z)}}\sqrt{B'(z)}.$$

Comme $z = x$ est un zéro simple de $B(z)$, $B'(x)$ est différent de zéro et $\sqrt{B'(z)}$ est une fonction holomorphe au point x. Le produit

$$F(z)\sqrt{B'(z)}$$

sera donc *holomorphe* au point x et vérifiera la relation

$$F[\varphi(z)]\sqrt{B'[\varphi(z)]} = A\sqrt{a}F(z)\sqrt{B'(z)}.$$

Ce produit est donc nécessairement de la forme

$$C[B(z)]^n$$

où n est un entier positif ou nul, C une constante arbitraire. Quant à la constante A, elle est

$$A = a^{n-\frac{1}{2}}.$$

L'on a donc enfin, en laissant de côté le facteur constant C,

$$F(z)\sqrt{B'(z)} = [B(z)]^n$$

d'où

(5) $$F(z) = \frac{[B(z)]^n}{\sqrt{B'(z)}}.$$

L'équation différentielle

$$\frac{d^2u}{dz^2} - uf_1(z) = 0$$

admettra donc une et, en général, deux intégrales de cette forme où il ne reste plus qu'à déterminer l'entier positif ou nul n. Pour cela exprimons que la fonction

$$u = [B(z)]^n [B'(z)]^{-\frac{1}{2}}$$

vérifie l'équation: nous aurons après réduction et en désignant les dérivées de B par B', B'',

$$f_1(z) = n(n-1)\frac{B'^2}{B^2} + \frac{3}{4}\frac{B''^2}{B'^2} - \frac{1}{2}\frac{B'''}{B'}.$$

Cette relation doit être identique en z: or, pour $z = x$, tous les termes sont finis sauf $\frac{B'^2}{B^2}$ qui devient infini du second ordre. Il faut donc que ce terme disparaisse, c'est à dire que n ait une des deux valeurs 0 ou 1.

L'équation différentielle

$$\frac{d^2u}{dz^2} - uf_1(z) = 0$$

aura donc les deux intégrales

$$u_1 = \frac{1}{\sqrt{B'(z)}}, \qquad u_2 = \frac{B(z)}{\sqrt{B'(z)}}.$$

Elle peut être regardée comme intégrée dans le domaine du point x.

Remarque. Comme le nombre entier désigné ci-dessus par n est égal à 1 ou à 0, la fonction $f_1(z)$ vérifie l'identité

$$f_1(z) = \frac{3}{4}\frac{B''^2}{B'^2} - \frac{1}{2}\frac{B'''}{B'}.$$

Proposons nous de démontrer directement cette identité sans nous servir de l'équation différentielle. Posons

$$\Pi(z) = \frac{3}{4}\frac{B''^2}{B'^2} - \frac{1}{2}\frac{B'''}{B'}$$

et calculons la valeur $\Pi(z_1)$ que prend cette fonction quand on y remplace z par $\varphi(z)$. Désignons pour abréger par B_1', B_1'', B_1''' les valeurs $B(z_1)$, $B'(z_1)$, $B''(z_1)$. Comme on a

$$B' = \frac{\varphi'}{a} B_1'$$

d'après la propriété fondamentale de la fonction $B(z)$

$$B[\varphi(z)] = aB(z),$$

on aura en dérivant les deux membres par rapport à z

$$\frac{B''}{B'} = \frac{\varphi''}{\varphi'} + \varphi'\frac{B_1''}{B_1'}$$

$$\frac{B'''}{B'} - \left(\frac{B''}{B'}\right)^2 = \frac{\varphi'''}{\varphi'} - \left(\frac{\varphi''}{\varphi'}\right)^2 + \varphi''\frac{B_1''}{B_1'} + \varphi'^2\left[\frac{B_1'''}{B_1'} - \left(\frac{B_1''}{B_1'}\right)^2\right].$$

Portant ces valeurs de $\frac{B'''}{B'}$ et $\frac{B''}{B'}$ dans l'expression de $\Pi(z)$, on trouve après réductions

$$\Pi(z) = \varphi'^2\left[\frac{3}{4}\frac{B_1''^2}{B_1'^2} - \frac{1}{2}\frac{B_1'''}{B_1'}\right] + \frac{3}{4}\frac{\varphi''^2}{\varphi'^2} - \frac{1}{2}\frac{\varphi'''}{\varphi'}.$$

Comme nous avons posé plus haut

$$\varpi(z) = \frac{3\varphi''^2 - 2\varphi'\varphi'''}{4\varphi'^4},$$

on aura

$$\frac{\Pi(z)}{[\varphi'(z)]^2} = \Pi(z_1) + \varpi(z).$$

En vertu de cette identité, il est aisé de former la somme de la série

$$f_1(z) = \sum_{n=0}^{n=\infty} [\varphi'(z)\varphi'(z_1)\ldots\varphi'(z_n)]^2\varpi(z_n)$$

qui définit $f_1(z)$. L'identité ci dessus donne on changeant z en z_n et par suite $z_1 = \varphi(z)$ en z_{n+1}

$$\varpi(z_n) = \frac{\Pi(z_n)}{[\varphi'(z_n)^2]} - \Pi(z_{n+1}).$$

D'après cela le terme générale v_n de la série $f_1(z)$ peut s'écrire

$$v_n = [\varphi'(z)\varphi'(z_1)\ldots\varphi'(z_{n-1})]^2\Pi(z_n) - [\varphi'(z)\varphi'(z_1)\ldots\varphi'(z_n)]^2\Pi(z_{n+1})$$

expression de la forme

$$v_n = w_n - w_{n+1}$$

en faisant

$$w_n = [\varphi'(z)\varphi'(z_1)\ldots\varphi'(z_{n-1})]^2 \Pi(z_n).$$

La somme S_n des n premiers termes sera donc

$$S_n = v_0 + v_1 + \ldots + v_n = w_0 - w_{n+1}.$$

Comme w_{n+1} tend vers zéro pour n infini, la somme S_n tend vers la la limite w_0; on a donc

$$f_1(z) = w_0 = \Pi(z) = \frac{3}{4}\frac{B''^2}{B'^2} - \frac{1}{2}\frac{B'''}{B'}.$$

C'est bien l'identité que nous voulions vérifier.

On pourrait encore un peu simplifier cette analyse en remarquant que l'équation

$$\varphi'(z) = a\frac{B'(z)}{B'(z_1)},$$

donne

$$\varphi'(z_n) = a\frac{B'(z_n)}{B'(z_{n+1})},$$

d'où

$$\varphi'(z)\varphi'(z_1)\ldots\varphi'(z_n) = a^{n+1}\frac{B'(z)}{B'(z_{n+1})}.$$

5. Nous avons vu dans le paragraphe 3 que si $\psi(x)$ n'est pas de la forme

$$\psi(x) = [\varphi'(x)]^n, \quad (n \text{ entier})$$

il n'existe pas de fonction holomorphe ou méromorphe autre que $F_1(z)$ vérifiant l'équation

$$(2) \qquad F[\varphi(z)] = \frac{1}{\psi(z)}F(z) - \varpi(z).$$

Si au contraire

$$\psi(x) = [\varphi'(x)]^n$$

le fonction méromorphe la plus générale vérifiant la relation considérée est $F_1(z) + \alpha G(z)[B(z)]^{-n}$, $G(z)$ étant une fonction holomorphe telle que

$$G[\varphi(z)] = \frac{\psi(x)}{\psi(z)}G(z)$$

et α désignant une constante. Or, dans l'application que nous venons de faire à l'équation différentielle

$$\frac{d^2u}{dz^2} - uf_1(z) = 0,$$

nous avons formé une fonction $f_1(z)$ holomorphe au point x vérifiant la relation

$$f_1[\varphi(z)] = \frac{1}{\varphi'^2(z)} f_1(z) - \varpi(z)$$

de la forme (2) ci-dessus où

$$\psi(z) = [\varphi'(z)]^2.$$

La condition

$$\psi(x) = [\varphi'(x)]^n$$

est donc vérifiée pour $n = 2$; la fonction $G(z)$ est $[B'(z)]^2$, et la fonction la plus générale méromorphe au point x vérifiant la relation

$$f[\varphi(z)] = \frac{1}{\varphi'^2} f(z) - \varpi(z),$$

est

$$f(z) = f_1(z) + \alpha\left[\frac{B'(z)}{B(z)}\right]^2.$$

L'équation du second ordre la plus générale remplissant les conditions que nous imposons à nos équations est donc

$$\frac{d^2u}{dz^2} - uf(z) = 0,$$

$f(z)$ ayant la forme que nous venons de trouver. Nous allons intégrer cette équation. La fonction $B(z)$ admettant le point limite $z = x$ pour zéro simple, la fonction $f(z)$ admettra ce point pour pôle double et, dans le voisinage de $z = x$, la partie principale de $f(z)$ sera $\frac{\alpha}{(z-x)^2}$. L'intégrale générale de l'équation linéaire est donc *régulière* au point x, suivant les expressions usitées dans la théorie des équations linéaires. L'équation fondamentale déterminante est

$$r(r-1) - \alpha = 0;$$

supposons ses racines distinctes et supposons que leur différence n'est pas un nombre entier. Si l'une de ces racines est r, l'autre sera $1 - r$ et, dans le domaine du point x, l'intégrale génerale de l'équation sera de la forme

$$u(z) = \lambda_1(z - x)^r g_1(z) + \lambda_2(z - x)^{1-r} g_2(z),$$

$g_1(z)$ et $g_2(z)$ étant deux fonctions holomorphes dans le domaine du point x et ne s'annulant pas en ce point. (Voyez les recherches de M. Fuchs ou le Mémoire de M. Tannery, Annales de l'Ecole normale, 1875, p. 165.) L'équation différentielle ne changeant pas quand on remplace z par $\varphi(z)$ et u par $u\sqrt{\varphi'(z)}$, admettra aussi dans le domaine du point x l'intégrale générale

$$U = \frac{1}{\sqrt{\varphi'(z)}} u[\varphi(z)] = \lambda_1 \frac{[\varphi(z) - x]^r g_1[\varphi(z)]}{\sqrt{\varphi'(z)}} + \lambda_2 \frac{[\varphi(z) - x]^{1-r} g_2[\varphi(z)]}{\sqrt{\varphi'(z)}}$$

que l'on peut écrire

$$\lambda_1(z - x)^r G_1(z) + \lambda_2(z - x)^{1-r} G_2(z)$$

avec

$$G_1(z) = \left[\frac{\varphi(z) - x}{z - x}\right]^r \frac{g_1[\varphi(z)]}{\sqrt{\varphi'(z)}}, \qquad G_2(z) = \left[\frac{\varphi(z) - x}{z - x}\right]^{1-r} \frac{g_2[\varphi(z)]}{\sqrt{\varphi'(z)}},$$

ces nouvelles fonctions G_1 et G_2 étant, ainsi que les premières g_1 et g_2, holomorphes au point x et différentes de zéro en ce point. Les deux formes u et U de l'intégrale générale devant être identiques, on a

$$G_1(z) = k_1 g_1(z), \qquad G_2(z) = k_2 g_2(z),$$

k_1 et k_2 désignant des constantes. On a donc

$$[\varphi(z) - x]^r g_1[\varphi(z)] = k_1 \sqrt{\varphi'(z)}[z - x]^r g_1(z),$$
$$[\varphi(z) - x]^{1-r} g_2[\varphi(z)] = k_2 \sqrt{\varphi'(z)}[z - x]^{1-r} g_2(z).$$

On en conclut que les deux intégrales particulières

$$F_1(z) = (z - x)^r g_1(z), \qquad F_2(z) = (z - x)^{1-r} g_2(z)$$

vérifient les deux équations

$$F_1[\varphi(z)] = k_1 \sqrt{\varphi'(z)} F_1(z), \qquad F_2[\varphi(z)] = k_2 \sqrt{\varphi'(z)} F_2(z).$$

Comme la fonction $B(z)$ de M. Koenigs admet le zéro simple $z = x$ et vérifie la relation

$$B[\varphi(z)] = \varphi'(x) B(z)$$

d'où

$$B'[\varphi(z)] = \frac{\varphi'(x)}{\varphi'(z)} B'(z),$$

le rapport

$$\frac{[B(z)]^r}{\sqrt{B'(z)}}$$

est, dans le voisinage du point x, égal à $(z - x)^r$ multiplié par une fonction holomorphe et vérifie la relation

$$\frac{[B[\varphi(z)]]^r}{\sqrt{B'[\varphi(z)]}} = a^{r-\frac{1}{2}} \sqrt{\varphi'(z)} \frac{[B(z)]^r}{\sqrt{B'(z)}}$$

où on a posé $\varphi'(x) = a$. La fonction

$$\Phi_1(z) = \frac{F_1(z)\sqrt{B'(z)}}{[B(z)]^r}$$

est donc holomorphe au point x et vérifie la relation

$$\Phi_1[\varphi(z)] = k_1 a^{\frac{1}{2}-r} \Phi_1(z);$$

elle est, d'après le théorème de M. Koenigs déjà cité, de la forme $[B(z)]^n$, n désignant un entier *positif* ou *nul*. Mais comme cette fonction $\Phi_1(z)$ ne s'annule pas au point x et que $B(z)$ admet le zéro simple $z = x$, il faut prendre $n = 0$. On trouve ainsi, pour l'intégrale $F_1(z)$ l'expression

$$F_1(z) = \frac{[B(z)]^r}{\sqrt{B'(z)}};$$

on trouve de même pour la seconde intégrale particulière

$$F_2(z) = \frac{[B(z)]^{1-r}}{\sqrt{B'(z)}}.$$

L'équation différentielle est donc intégrée.

En substituant ces fonctions F_1 et F_2 dans l'équation différentielle, on montrera que l'équation est vérifiée par l'une et l'autre quelque soit r, *c'est à dire même en laissant de côté les suppositions faites sur* r, à l'aide de l'identité

$$f_1(z) = \frac{3}{4}\frac{B''^2}{B'^2} - \frac{1}{2}\frac{B'''}{B'}$$

établie dans le numéro précédent.

Lorsque $r = \frac{1}{2}$, $\alpha = -\frac{1}{4}$ ces deux intégrales sont identiques. On en obtiendra alors une nouvelle par la méthode connue qui consiste à remplacer l'une des intégrales par la différence des deux divisée par $r - \frac{1}{2}$:

$$\frac{[B(z)]^r - [B(z)]^{1-r}}{\left(r - \frac{1}{2}\right)\sqrt{B'(z)}}$$

puis à faire tendre r vers $\frac{1}{2}$. On trouve ainsi, pour $\alpha = -\frac{1}{4}$, les deux solutions

$$\sqrt{\frac{B(z)}{B'(z)}}, \qquad \sqrt{\frac{B(z)}{B'(z)}}\log B(z)$$

qu'il est aisé de vérifier d'après l'identité ci-dessus.

Remarque. Le résultat général que nous venons de trouver sur l'expression des intégrales de l'équation

$$\frac{d^2u}{dz^2} - uf(z) = 0$$

peut s'énoncer ainsi. En faisant le changement de fonction et de variable

$$u = \frac{v}{\sqrt{B'(z)}}, \qquad e^t = B(z)$$

on transformera l'équation en une autre dont l'intégrale générale sera

$$c_1 e^{rt} + c_2 e^{(1-r)t}$$

et qui, par suite, aura la forme élémentaire:

$$\frac{d^2v}{dt^2} - \alpha v = 0$$

à coefficients constants.

6. Dans ce qui précède, nous avons supposé que la fonction

$$\varpi(z) = \frac{3\varphi''^2 - 2\varphi'\varphi'''}{4\varphi'^4} = \frac{1}{\varphi'^{\frac{3}{2}}}\left(\frac{1}{\sqrt{\varphi'}}\right)''$$

n'est pas *identiquement nulle;* pour qu'elle le soit, il faut et il suffit que $\varphi(z)$ soit le quotient de deux fonctions linéaires en z

$$z_1 = \varphi(z) = \frac{az + b}{cz + d}$$

a, b, c, d constants. On sait et il est facile de vérifier que, si l'équation du second degré

$$z - \varphi(z) = 0$$

a ses deux racines x et x' distinctes, la relation entre z et z_1 peut s'écrire

$$\frac{z_1 - x}{z_1 - x'} = K\frac{z - x}{z - x'},$$

K désignant une constante. La dérivée $\varphi'(x)$ est égale à K; il faut donc supposer $|K| < 1$. Alors, il est évident que le point x est un point limite pour la substitution

$$z_1 = \varphi(z);$$

le deuxième point x' serait limite pour la substitution inverse. D'après M. Koenigs,[1] la fonction $B(z)$ est dans le cas actuel

$$B(z) = \frac{z - x}{z - x'}$$

et l'équation ci-dessus entre z et z_1 exprime la propriété

$$B[\varphi(z)] = \varphi'(x)B(z)$$

puisque

$$\varphi'(x) = K.$$

Dans ce cas particulier la fonction appelée précédemment $f_1(z)$

$$f_1(z) = \sum_{n=0}^{n=\infty} [\varphi'(z)\varphi'(z_1) \ldots \varphi'(z_n)]^2 \varpi(z_n)$$

[1] Annales de l'Ecole normale, 1884, supplément page 24.

est identiquement nulle, et la fonction $f(z)$ devient

$$f(z) = f_1(z) + \alpha \frac{B'^2}{B^2} = \alpha \left[\frac{1}{z-x} - \frac{1}{z-x'} \right]^2.$$

L'équation différentielle

$$\frac{d^2u}{dz^2} - uf(z) = 0$$

devient

$$\frac{d^2u}{dz^2} - \alpha \left[\frac{1}{z-x} - \frac{1}{z-x'} \right]^2 u = 0,$$

elle admet les deux intégrales

$$u_1 = \frac{B^r(z)}{\sqrt{B'(z)}}, \qquad u_2 = \frac{B^{1-r}(z)}{\sqrt{B'(z)}}$$

où r et $1-r$ sont les racines supposées distinctes de l'équation $r(r-1) = \alpha$. Ces deux intégrales sont, en négligeant des facteurs constants

$$u_1 = \frac{(z-x)^r}{(z-x')^{r-1}}, \qquad u_2 = \frac{(z-x)^{1-r}}{(z-x')^{-r}},$$

ce qui est bien connu.[1] Si $r = \frac{1}{2}$, on aura les deux intégrales

$$u_1 = \sqrt{(z-x)(z-x')}, \qquad u_2 = u_1 \log \frac{z-x}{z-x'}.$$

Ce sont là des vérifications élémentaires de la méthode générale.

Si les points limites x et x' étaient des points singuliers essentiels de la fonction $f(z)$, les considérations précédentes ne s'appliqueraient plus. On obtiendrait alors une fonction $f(z)$ vérifiant la relation

$$f[\varphi(z)] = \frac{1}{\varphi'^2(z)} f(z)$$

où

$$\varphi(z) = \frac{az+b}{cz+d},$$

en prenant une fonction thétafuchsienne de M. Poincaré. On serait

[1] Voir une Note de M. Besge, Journal de Liouville, 1ère série, t. 9, p. 336.

ainsi conduit à des questions se rattachant à un ordre d'idées entièrement différent de celui que nous avons adopté dans ce mémoire.

Si les deux racines x et x' de l'équation $z = \varphi(z)$

$$z = \frac{az + b}{cz + d}$$

sont égales, $x' = x$, la substitution $z_1 = \varphi(z)$ peut s'écrire, comme il est connu

$$\frac{1}{z_1 - x} = \frac{1}{z - x} + C.$$

Dans ce cas x est encore un point limite, mais notre méthode ne s'applique plus car $\varphi'(x) = 1$ et nous supposons $|\varphi'(x)| < 1$.

Néammoins l'équation

$$\frac{d^2u}{dz^2} - \alpha\left(\frac{1}{z - x} - \frac{1}{z - x'}\right)^2 u = 0$$

dont nous venons de trouver l'intégrale conduit comme cas limite à l'intégration de l'équation

$$\frac{d^2u}{dz^2} - \frac{ku}{(z - x)^4} = 0.$$

Il suffit de poser

$$\alpha = \frac{k}{(x - x')^2}, \qquad r = \frac{\rho}{x - x'};$$

quand x' tend vers x, l'équation

$$r(r - 1) = \alpha$$

devient

$$\rho^2 = k$$

et l'intégrale

$$(z - x)\left(\frac{z - x'}{z - x}\right)^r = (z - x)\left[1 + \frac{x - x'}{z - x}\right]^{\frac{\rho}{x - x'}}$$

devient

$$(z - x)e^{\frac{\rho}{z - x}}, \qquad \rho = \pm\sqrt{k}.$$

Ce cas a été traité par SPITZER, *Vorlesungen über lineare Differentialgleichungen,* p. 98.

Ces dernières équations rentrent également dans le type d'équations différentielles linéaires binômes que nous avons étudié dans les Annales de l'Ecole normale (janvier 1883).

7. Si nous revenons un instant au cas général, nous pouvons faire cette remarque que l'équation différentielle

$$\frac{d^2u}{dz^2} - uf(z) = 0$$

conserve la même forme non seulement pour la substitution

$$u = v[\varphi'(z)]^{-\frac{1}{2}}, \qquad t = \varphi(z),$$

mais encore pour une infinité de substitutions du même genre.

En effet le coefficient $f(z)$ s'exprime comme nous l'avons vu en fonction rationnelle de la fonction $B(z)$ et de ses dérivées. Il restera donc le même si l'on altère la fonction $\varphi(z)$ de telle manière que la fonction $B(z)$ ne soit pas altérée. Or cela est possible d'une infinité de manières, comme l'a montré M. KOENIGS dans ses *Nouvelles recherches sur les équations fonctionnelles,* (Annales de l'Ecole normale, novembre 1885). M. KOENIGS a démontré que l'équation

$$B(Z) = kB(z)$$

dans laquelle k est une constante et $|k| < 1$ définit Z comme une fonction de z holomorphe dans le domaine de point x et se réduisant à x pour $z = x$. Soit $Z = \Phi(z, k)$ cette fonction; elle admet le point x comme point limite et sa dérivée $\Phi'(x, k)$ au point x a pour valeur k. On en conclut que toutes les fonctions $\Phi(z, k)$ où $|k| < 1$ donnent naissance à la même fonction $B(z)$ et que ce sont les seules fonctions jouissant de cette propriété. La fonction $\Phi(z, a)$ n'est autre chose que $\varphi(z)$.

En résumé, l'équation différentielle

$$\frac{d^2u}{dz^2} - uf(z) = 0$$

est transformable en elle-même par toutes les substitutions

$$u = v[\Phi'(z, k)]^{-\frac{1}{2}}, \qquad t = \Phi(z, k),$$

où k est une constante de module plus petit que l'unité. Ces substitutions forment, d'après les dénominations de M. S. Lie, un groupe continu de transformations.

C'est là qu'on peut trouver la raison de ce fait que l'équation est réductible à une autre à coefficients constants; car si l'on pose

$$Z = \log B(z), \qquad u = \left[\frac{B'(z)}{B(z)}\right]^{-\frac{1}{2}} U$$

on obtient une équation entre U et Z qui ne change pas quand, sans changer de fonction, on remplace Z par $Z + \log k$. Les coefficients de cette équation devront donc admettre la période $\log k$ et, comme k est arbitraire, ces coefficients seront des constantes.

Équations du troisième ordre.

8. Nous allons montrer rapidement que la même méthode avec les mêmes conséquences s'applique aux équations du troisième ordre dont les coefficients sont méromorphes au point limite x.

Soit

$$\frac{d^3u}{dz^3} - 4\frac{du}{dz}f(z) - 4ug(z) = 0$$

une équation de troisième ordre que l'on peut toujours supposer privée de second terme par un changement de fonction. Faisons le changement de fonction

$$u = v\lambda(z)$$

et de variable

$$t = \varphi(z), \qquad \frac{dt}{dz} = \varphi'(z);$$

nous aurons en désignant par u, u', u'', u''' les dérivées de u par rapport à z et par v, v', v'', v''' les dérivées de v par rapport à t, les formules

$$u = v\lambda,$$

$$u' = v\lambda' + v'\lambda\varphi',$$

$$u'' = v\lambda'' + v'(\lambda\varphi'' + 2\lambda'\varphi') + v''\lambda\varphi'^2,$$

$$u''' = v\lambda''' + v'(\lambda\varphi''' + 3\lambda'\varphi'' + 3\lambda''\varphi') + 3v''\varphi'(\lambda\varphi'' + \lambda'\varphi') + v'''\lambda\varphi'^3.$$

Supposons que l'on puisse déterminer λ et φ de façon que l'équation différentielle reprenne la même forme, avec cette seule différence que u sera remplacé par v et z par t. Le coefficient de v'' devant être nul on aura

$$\lambda\varphi'' + \lambda'\varphi' = 0, \qquad \lambda = \frac{1}{\varphi'(z)}$$

en particularisant la constante d'intégration, ce qui ne particularise pas la détermination des fonctions λ et φ, car deux déterminations de λ qui ne diffèrent que par un facteur constant doivent être regardées comme identiques. On devra avoir ensuite, en écrivant que le coefficient de v' est $-4f(t)$ ou $-4f[\varphi(z)]$ et celui de v, $-4g(t)$ ou $-4g[\varphi(z)]$:

$$-4f[\varphi(z)] = \frac{-4\lambda\varphi' f(z) + \lambda\varphi''' + 3\lambda'\varphi'' + 3\lambda''\varphi'}{\lambda\varphi'^3},$$

$$-4g[\varphi(z)] = \frac{-4\lambda g(z) - 4\lambda' f(z) + \lambda'''}{\lambda\varphi'^3}$$

ou en remplaçant λ par sa valeur $\frac{1}{\varphi'}$ et réduisant

$$f[\varphi(z)] = \frac{1}{\varphi'^2} f(z) + \frac{2\varphi'\varphi''' - 3\varphi''^2}{4\varphi'^4}, \tag{a}$$

$$g[\varphi(z)] = \frac{1}{\varphi'^3} g(z) - \frac{\varphi''}{\varphi'^4} f(z) - \frac{1}{4\varphi'^2}\left(\frac{1}{\varphi'}\right)'''. \tag{b}$$

Pour que la transformation soit possible, il faut et il suffit qu'il existe une fonction $\varphi(z)$ autre que z vérifiant ces deux conditions.

La première relation (a) étant identique à celle que nous avons rencontrée dans l'étude de l'équation du second ordre, la fonction $f(z)$ la plus générale vérifiant cette relation sera, comme nous avons vu

$$f(z) = f_1(z) + \alpha\left[\frac{B'(z)}{B(z)}\right]^2,$$

$f_1(z)$ étant une fonction holomorphe dont nous avons donné deux expressions.

La fonction $f(z)$ étant ainsi déterminée, il reste à déterminer la fonction $g(z)$ par la condition (b) dans le second membre de laquelle figure la fonction $f(z)$ qui n'est pas holomorphe au point x mais admet ce point pour pôle de second degré.

Rappelons nous que la fonction $B(z)$ admet le point x pour zéro simple et vérifie la relation

$$B[\varphi(z)] = \varphi'(x) B(z) = aB(z)$$

en faisant $\varphi'(x) = a$.

Multiplions le premier membre de la relation (b) par $B^2[\varphi(z)]$ et le second membre par la fonction identique $a^2 B^2(z)$, nous aurons

$$g[\varphi(z)] B^2[\varphi(z)] = \frac{a^2}{\varphi'^3} g(z) B^2(z) - \frac{a^2\varphi''}{\varphi'^4} f(z) B^2(z) - \frac{a^2}{4\varphi'^2}\left(\frac{1}{\varphi'}\right)''' B^2(z),$$

ou en posant

$$F(z) = g(z) B^2(z),$$

$$\chi(z) = \frac{a^2\varphi''}{\varphi'^4} f(z) B^2(z) + \frac{a^2}{4\varphi'^2}\left(\frac{1}{\varphi'}\right)''' B^2(z),$$

(d) $$F[\varphi(z)] = \frac{a^2}{\varphi'^3} F(z) - \chi(z)$$

où la fonction $\chi(z)$ est holomorphe au point x, car le produit $f(z)B^2(z)$ l'est. Cette dernière équation (d) rentre dans le type d'équations fonctionnelles traitées au paragraphe (3)

$$F[\varphi(z)] = \frac{1}{\psi(z)} F(z) - \varpi(z)$$

où

$$\psi(z) = \frac{\varphi'^3}{a^2}, \qquad \varpi(z) = \chi(z).$$

On obtient une solution particulière de cette équation à l'aide de la série

$$F_1(z) = \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{[\varphi'(z)\varphi'(z_1)\ldots\varphi'(z_n)]^3}{a^{2n+2}} \chi(z_n) = B'^3(z) \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{a^{n+1}\chi(z_n)}{B'^3(z_{n+1})};$$

série convergente car, la quantité $\psi(x)$ étant égale à a ou à $\varphi'(x)$, le module de $\psi(x)$ est moindre que l'unité. Comme

$$\psi(x) = \varphi'(x)$$

la fonction holomorphe ou méromorphe la plus générale vérifiant l'équation fonctionnelle est

$$F(z) = F_1(z) + \beta\frac{G(z)}{B(z)}$$

β désignant une constante arbitraire et $G(z)$ une fonction holomorphe au point x vérifiant la relation

$$G[\varphi(z)] = \frac{\psi(x)}{\psi(z)}G(z), \qquad G[\varphi(z)] = \left[\frac{\varphi'(x)}{\varphi'(z)}\right]^3 G(z).$$

Cette fonction est actuellement $[B'(z)]^3$ et l'on a

$$F(z) = F_1(z) + \beta\frac{B'^3}{B}$$

en écrivant $B, B', \ldots$ au lieu de $B(z), B'(z), \ldots$. Comme on a posé

$$F(z) = g(z)B^2,$$

on a enfin, pour l'expression de $g(z)$:

$$g(z) = \frac{F_1(z)}{B^2} + \beta\left(\frac{B'}{B}\right)^3$$

que nous rapprocherons de celle de $f(z)$

$$f(z) = f_1(z) + \alpha\left(\frac{B'}{B}\right)^2.$$

$f(z)$ admet le point x comme pôle du second ordre et $g(z)$ admet ce point comme pôle du troisième ordre; les parties principales de $f(z)$ et $g(z)$ dans le voisinage de $z = x$ sont respectivement

$$\frac{\alpha}{(z-x)^2}, \quad \frac{\beta}{(z-x)^3}.$$

9. En adoptant ces déterminations de $f(z)$ et $g(z)$, intégrons maintenant l'équation que nous avons écrite

$$\frac{d^3u}{dz^3} - 4\frac{du}{dz}f(z) - 4ug(z) = 0$$

dans le domaine C_x du point x. L'intégrale générale sera régulière dans le domaine du point x: elle sera composée linéairement avec les trois intégrales particulières

$$u_1(z) = (z - x)^{r_1} h_1(z), \qquad u_2(z) = (z - x)^{r_2} h_2(z),$$
$$u_3(z) = (z - x)^{r_3} h_3(z),$$

h_1, h_2, h_3 désignant trois fonctions de z holomorphes au point x et r_1, r_2, r_3 les racines de l'équation fondamentale déterminante

$$r(r-1)(r-2) - 4\alpha r - 4\beta = 0$$

supposées distinctes et telles qu'aucune des différences $r_1 - r_2$, $r_2 - r_3$, $r_3 - r_1$ ne soit un nombre entier. On sait en outre d'après M. Fuchs que, dans cette hypothèse, les fonctions holomorphes $h_1(z)$, $h_2(z)$, $h_3(z)$ ne s'annulent pas au point x.[1] L'équation différentielle reprenant la même forme quand on fait

$$u = \frac{v}{\varphi'(z)}, \qquad t = \varphi(z),$$

la nouvelle équation entre v et t admet les trois intégrales

$$(t - x)^{r_1} h_1(t), \ (t - x)^{r_2} h_2(t), \ (t - x)^{r_3} h_3(t),$$

d'où l'on déduit pour l'équation u les trois intégrales

$$\frac{[\varphi(z) - x]^{r_1} h_1[\varphi(z)]}{\varphi'(z)}, \ \frac{[\varphi(z) - x]^{r_2} h_2[\varphi(z)]}{\varphi'(z)}, \ \frac{[\varphi(z) - x]^{r_3} h_3[\varphi(z)]}{\varphi'(z)}.$$

Comme $\varphi(z) - x$ admet le zéro simple $z = x$, les quantités $[\varphi(z) - x]^{r_i}$ sont de la forme

$$(z - x)^{r_i} \left[\frac{\varphi(z) - x}{z - x}\right]^{r_i}$$

---

[1] Voir par exemple Tannery, Annales de l'Ecole normale, 1875, p. 165.

où le second facteur est holomorphe au point x; les trois nouvelles intégrales ci-dessus sont donc de la forme

$$(z-x)^{r_1}H_1(z)\,,\ (z-x)^{r_2}H_2(z)\,,\ (z-x)^{r_3}H_3(z),$$

$H_1(z)\,, H_2(z)\,, H_3(z)$ étant de fonctions de z holomorphes et non nulles au point x. Comme les premières intégrales $u_1(z)\,, u_2(z)\,, u_3(z)$ sont de cette même forme, elle sont identiques aux nouvelles à des facteurs constants près, et l'on a

$$\frac{[\varphi(z)-x]^{r_1}h_1[\varphi(z)]}{\varphi'(z)} = k_1(z-x)^{r_1}h_1(z)$$

c'est à dire

$$u_1[\varphi(z)] = k_1\varphi'(z)u_1(z)$$

de même

$$u_2[\varphi(z)] = k_2\varphi'(z)u_2(z),$$

$$u_3[\varphi(z)] = k_3\varphi'(z)u_3(z),$$

$k_1\,, k_2\,, k_3$ étant des constantes. La fonction $B(z)$ admet le zéro simple $z=x$ et vérifie l'équation

$$B[\varphi(z)] = aB(z), \qquad a=\varphi'(x)$$

d'où

$$B'[\varphi(z)] = \frac{a}{\varphi'(z)}B(z);$$

la fonction

$$\Phi(z) = \frac{u_1(z)B'(z)}{[B(z)]^{r_1}}$$

est donc holomorphe et *différente de zéro* au point x, et vérifie la relation

$$\Phi[\varphi(z)] = k_1a^{1-r_1}\Phi(z).$$

D'après M. Koenigs, les seules solutions holomorphes ou méromorphes de cette équation sont de la forme

$$\lambda B^n(z)$$

où n est un entier positif, négatif, ou nul. La fonction $\Phi(z)$ étant holomorphe au point x et ne pouvant pas s'annuler au point x, cet entier n est nul, $\Phi(z)$ est une constante, et $k_1 a^{1-r_1}$ est égal à l'unité. On aura donc, en négligeant un facteur constant

$$u_1(z) = \frac{[B(z)]^{r_1}}{B'(z)};$$

on trouvera de même

$$u_2(z) = \frac{[B(z)]^{r_2}}{B'(z)}, \qquad u_3(z) = \frac{[B(z)]^{r_3}}{B'(z)}.$$

L'équation différentielle peut donc être considérée comme intégrée dans le domaine du point x.

La notion de continuité permettra d'affirmer que ces trois fonctions sont encore des intégrales linéairement indépendantes, quand les racines r_1, r_2, r_3 restant distinctes, certaines des différences

$$r_1 - r_2,\ r_2 - r_3,\ r_3 - r_1$$

deviennent des nombres entiers.

On passe du cas général où les trois racines sont distinctes, au cas où deux ou trois deviennent égales par un procédé bien connu que nous avons employé pour l'équation du second ordre et sur lequel il est inutile d'insister.

10. La forme que nous venons de trouver pour l'intégrale générale de l'équation

$$\frac{d^3u}{dz^3} - 4\frac{du}{dz}f(z) - 4ug(z) = 0$$

montre que si l'on fait le changement de fonction et de variable

$$u = \frac{v}{B'(z)}, \qquad B(z) = e^t,$$

l'intégrale générale de l'équation en v est

$$C_1 e^{r_1 t} + C_2 e^{r_2 t} + C_3 e^{r_3 t},$$

et par suite cette équation en v prend la forme élémentaire

$$\frac{d^3v}{dt^3} - 4\alpha\frac{dv}{dt} - 4\beta v = 0,$$

à coefficients constants. Il serait aisé de vérifier toutes ces conséquences en supposant

$$\varphi(z) = \frac{az + b}{cz + d}$$

comme nous l'avons fait au n° 6 pour l'équation du second ordre. L'une des équations dont nos formules donnent l'intégrale dans cette hypothèse est l'équation

$$\frac{d^3u}{dz^3} - \beta\left[\frac{1}{z - x} - \frac{1}{z - x'}\right]^3 u = 0$$

déjà intégrée par HALPHEN (Mémoire Couronné, Savants Etrangers, t. 27, p. 143).

11. Si l'on exprime que les intégrales que nous venons de trouver vérifient l'équation différentielle

$$\frac{d^3u}{dz^3} - 4\frac{du}{dz}f(z) - 4ug(z) = 0,$$

on obtiendra les expressions des fonctions $f(z)$ et $g(z)$ à l'aide de la fonction $B(z)$ et de ses dérivées. La fonction $f(z)$ a déjà été exprimée antérieurement; on a

$$f(z) = f_1(z) + \alpha\left(\frac{B'}{B}\right)^2$$

où

$$f_1(z) = \frac{3}{4}\left(\frac{B''}{B'}\right)^2 - \frac{1}{2}\frac{B'''}{B'}.$$

Quant à $g(z)$, on peut également l'exprimer directement à l'aide de la fonction B en faisant la somme de la série qui donne $g_1(z)$ par une méthode analogue à celle que nous avons suivie pour la série $f_1(z)$, ou mieux comme il suit. Les fonctions f et g sont assujetties à vérifier les deux relations

$$f[\varphi(z)] = \frac{1}{\varphi'^2}f(z) + \frac{2\varphi'\varphi''' - 3\varphi''^2}{4\varphi'^4},$$

$$g[\varphi(z)] = \frac{1}{\varphi'^3}g(z) + \frac{\varphi''}{\varphi'^4}f(z) - \frac{1}{4\varphi'^2}\left(\frac{1}{\varphi'}\right)'''.$$

Introduisons l'invariant de MM. LAGUERRE et BRIOSCHI

$$g(z) - \frac{1}{2}f'(z);$$

nous avons en différentiant la première relation

$$f'[\varphi(z)]\varphi' = \frac{1}{\varphi'^2}f'(z) - \frac{2\varphi''}{\varphi'^3}f(z) + \left(\frac{2\varphi'\varphi''' - 3\varphi''^2}{4\varphi'^4}\right)'.$$

Formant la différence

$$g[\varphi(z)] - \frac{1}{2}f'[\varphi(z)]$$

on trouve

$$g[\varphi(z)] - \frac{1}{2}f'[\varphi(z)] = \frac{1}{\varphi'^3}\left[g(z) - \frac{1}{2}f'(z)\right];$$

les autres termes disparaissent, comme on le vérifiera sans peine en effectuant les différentiations.

La différence

$$g(z) - \frac{1}{2}f'(z)$$

est donc une solution de l'équation fonctionnelle

$$\Xi[\varphi(z)] = \frac{1}{\varphi'^3}\Xi(z)$$

admettant le point limite x comme pôle d'ordre 3, car $f(z)$ admet ce point comme pôle d'ordre 2. D'après M. KOENIGS la seule fonction Ξ remplissant ces conditions est

$$\gamma\left(\frac{B'}{B}\right)^3,$$

γ désignant une constante.

On a donc

$$g(z) = \frac{1}{2}f'(z) + \gamma\left(\frac{B'}{B}\right)^3$$

d'où, d'après l'expression de $f(z)$

$$g(z) = \frac{1}{2}f_1'(z) + \frac{\alpha}{2}\frac{d}{dz}\left(\frac{B'}{B}\right)^2 + \gamma\left(\frac{B'}{B}\right)^3,$$

$$g(z) = \frac{1}{2}f_1'(z) + \alpha\frac{B'B''}{B^2} + \beta\left(\frac{B'}{B}\right)^3$$

avec

$$\beta = \gamma - \alpha;$$

sous cette dernière forme la partie principale de $g(z)$ dans le voisinage du pôle x est

$$\beta \frac{1}{(z - x)^3}$$

comme il doit arriver.

En partant de ces deux expressions de f et g jointes à celles de $f_1(z)$, on pourra aisément vérifier que les trois intégrales trouvées satisfont à l'équation différentielle.

Les coefficients de l'équation $f(z)$ et $g(z)$ étant des fonctions rationnelles de $B(z)$ et de ses dérivées, l'équation ne change pas non seulement quand on fait

$$u = \frac{v}{\varphi'(z)}, \qquad t = \varphi(z)$$

mais quand on fait la substitution plus générale

$$u = \frac{v}{\Phi'(z, k)}, \qquad t = \Phi(z, k),$$

comme nous l'avons vu pour les équations du second ordre.

Équations d'ordre quelconque.

12. Soit une équation d'ordre q que nous écrivons comme HALPHEN, avec les coefficients du binôme

$$\frac{d^q u}{dz^q} + \frac{q(q-1)}{1 . 2} P_2(z) \frac{d^{q-2} u}{dz^{q-2}} + \frac{q(q-1)(q-2)}{1 . 2 . 3} P_3(z) \frac{d^{q-3} u}{dz^{q-3}} +$$
$$\ldots + q P_{q-1}(z) \frac{du}{dz} + P_q(z) u = 0$$

en admettant qu'on aît fait disparaître le second terme par un changement de fonction.

Supposons que cette équation reprenne la même forme quand on fait

$$u = v\lambda(z), \qquad t = \varphi(z)$$

c'est à dire devienne

$$\frac{d^q v}{dt^q} + \frac{q(q-1)}{1 \cdot 2} P_2(t) \frac{d^{q-2} v}{dt^{q-2}} + \frac{q(q-1)(q-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} P_3(t) \frac{d^{q-3} v}{dt^{q-3}} +$$

$$\ldots + \frac{q}{1} P_{q-1}(t) \frac{dv}{dt} + P_q(t) v = 0.$$

Un calcul facile montre que pour faire disparaître le second terme dans l'équation en v, il faut prendre

$$\lambda(z) = [\varphi'(z)]^{\frac{1-q}{2}}.$$

Une fois $\lambda(z)$ déterminé, on aura par les formules générales données par HALPHEN dans son Mémoire couronné les expressions des fonctions $P_2(t)$, $P_3(t), \ldots, P_q(t)$ c'est à dire de $P_2[\varphi(z)], P_3[\varphi(z)], \ldots, P_q[\varphi(z)]$ en fonction linéaire de $P_2(z), P_3(z), \ldots, P_q(z)$, les coefficients de ces expressions contenant les dérivées de $\varphi(z)$. A l'aide de ces relations et en s'appuyant sur l'analyse du n° 3, on pourra de proche en proche former les expressions les plus générales des fonctions $P_2(z), P_3(z), \ldots, P_q(z)$ sous la condition que ces fonctions soient méromorphes au point limite x. La première fonction $P_2(z)$ ne différera que par un facteur constant de la fonction appelée $f(z)$ dans l'étude des équations du second et du troisième ordre.

13. Mais il est plus simple d'avoir recours à la théorie des invariants. Prenons d'abord l'invariant V_3 d'HALPHEN (Mémoire couronné, Savants étrangers, t. 28, n° 1, p. 124 et suiv.) qui est actuellement

$$V_3(z) = 3P_2'(z) - 2P_3(z)$$

puisque P_1 est nul. Si l'on forme ce même invariant sur l'équation transformée on aura, en l'appelant v_3

$$v_3(t) = 3P_2'(t) - 2P_3(t) = V_3(t).$$

La relation

$$v_3 = \frac{1}{\varphi'^3} V_3$$

donne donc

$$V_3[\varphi(z)] = \frac{1}{\varphi'^3} V_3(z).$$

La fonction $V_3(z)$ étant méromorphe au point x, on aura nécessairement d'après les théorèmes de M. KOENIGS

$$V_3(z) = \alpha^3\left[\frac{B'(z)}{B(z)}\right]^3,$$

α^3 étant une constante arbitraire. Tous les autres invariants rationnels et entiers par rapport aux coefficients et à leurs dérivées s'exprimeront de même par des puissances de $\frac{B'}{B}$ égales à leur poids. Par exemple, l'invariant qu'HALPHEN appelle Δ et qui forme le numérateur de l'invariant absolu h

$$\Delta = 27V_3^2P_2 + \frac{7(q+1)}{4}V_3'^2 - \frac{3(q+1)}{2}V_3V_3''$$

étant de poids 8, on aura

$$\Delta[\varphi(z)] = \frac{1}{\varphi'^8}\Delta(z), \qquad \Delta = \beta\left(\frac{B'}{B}\right)^8,$$

β désignant une constante. Résolvant l'expression de Δ par rapport à P_2 on aura

$$27P_2 = \frac{\Delta}{V_3^2} - \frac{(q+1)}{4}\left[7\left(\frac{V_3'}{V_3}\right)^2 - 6\frac{V_3''}{V_3}\right]$$

d'où, en remplaçant Δ et V_3 par leurs expressions

$$27P_2 = \gamma\left(\frac{B'}{B}\right)^2 - \frac{9(q+1)}{4}\left[\frac{3B''^2}{B'^2} - 2\frac{B'''}{B'}\right],$$

γ étant une constante. On a ainsi l'expression générale du second coefficient P_2 et on peut vérifier, comme nous l'avons dit, que ce coefficient ne diffère que par un facteur constant de la fonction $f(z)$ trouvée plus haut

$$f(z) = \alpha\left(\frac{B'}{B}\right)^2 + \frac{3}{4}\frac{B''^2}{B'^2} - \frac{1}{2}\frac{B'''}{B'}.$$

Il est inutile de répéter encore une fois les raisonnements faits dans les cas particuliers $q = 2$, $q = 3$ pour trouver la forme de l'intégrale générale. Nous nous bornerons à montrer que l'équation différentielle peut être ramenée à avoir des coefficients constants. Pour cela, nous allons démontrer que la *forme canonique* donnée par HALPHEN (loc. cit. p. 128) est à *coefficients constants.* En effet cette forme canonique étant

$$\frac{d^q v}{dt^q} + \frac{q(q-1)}{2}\frac{h}{3}\frac{d^{q-2}v}{dt^{q-2}} + \frac{q(q-1)(q-2)}{1.2.3}\frac{1}{2}\left(\frac{dh}{dt} - 1\right)\frac{d^{q-3}v}{dt^{q-3}}$$
$$+ \frac{q(q-1)(q-2)(q-3)}{1.2.3.4} s_4 \frac{d^{q-4}v}{dt^{q-4}} + \ldots + s_q v = 0,$$

le coefficient h a pour expression

$$h = \frac{1}{9}\frac{\Delta}{V_3^{\frac{8}{3}}},$$

et, en vertu des valeurs ci-dessus de Δ et V_3, il est constant et égal à $\frac{\beta}{9\alpha^8}$. En général l'invariant absolu s_m a pour expression

$$s_m = \frac{1}{V_3^{\frac{4m}{3}}} t_m$$

où t_m est un invariant fonction *entière* des coefficients de l'équation proposée et de leurs dérivées. Comme le poids de cet invariant t_m est $4m$ on a

$$t_m = \partial . \left(\frac{B'}{B}\right)^{4m}$$

où ∂ est une constante. L'on en conclut que s_m a la valeur constante

$$s_m = \frac{\partial}{\alpha^{4m}}.$$

Le théorème est donc démontré.

La transformation propre à ramener l'équation primitive à cette forme canonique où les coefficients sont constants est, d'après HALPHEN

$$\frac{dt}{dz} = V_3^{\frac{1}{3}} = \alpha\frac{B'(z)}{B(z)}, \qquad t = \alpha \log B(z),$$
$$v = u V_3^{\frac{q-1}{6}} e^{\int P_1 dz}, \qquad v = u\left(\frac{B'}{B}\right)^{\frac{q-1}{2}},$$

où nous négligeons un facteur constant dans l'expression de v.

Comme nous l'avons indiqué en détail pour le cas du second ordre, il existe encore ici une infinité de substitutions contenant un paramètre et transformant l'équation en elle-même.

Remarque. Lorsqu'on prend le cas particulier où

$$\varphi(z) = \frac{az + b}{cz + d},$$

les équations que l'on obtient sont celles qui ont été intégrées par HALPHEN (Comptes rendus, t. 92, p. 779).

Équations non linéaires.

14. On peut étendre une partie des résultats précédents à des équations non linéaires; par exemple aux équations considérées par ABEL,[1] par M. R. LIOUVILLE,[2] par M. ELLIOT,[3] par M. RIVEREAU,[4] et par nous-même.[5]

Ainsi, les équations homogènes mais non linéaires par rapport à la fonction inconnue u et à ses dérivées $\frac{du}{dz}, \frac{d^2u}{dz^2}, \ldots$, conservent la même forme quand on fait le changement de fonction et de variable

$$u = v\lambda(z), \qquad t = \varphi(z).$$

Il pourra arriver qu'un choix convenable des fonctions $\lambda(z)$ et $\varphi(z)$ les transforme en elles-mêmes. Si la fonction $\varphi(z)$ remplit les conditions supposées par M. KOENIGS et si les coefficients de l'équations sont holomorphes ou méromorphes au point limite x, la considération des invariants permettra d'étendre à ces équations une notable partie des résultats précédents. C'est ce que l'on verifiera en suivant une méthode analogue à celle du § 13.

---

[1] Oeuvres, t. 2, p. 19 et 26.

[2] Comptes rendus, 1886 et 1887.

[3] Ibid. 1890, premier semestre.

[4] *Sur les invariants de certaines classes d'équations différentielles homogènes par rapport à la fonction inconnue et à ses dérivées,* Thèse présentée à la Faculté des sciences de Paris, 1890. Gauthier-Villars.

[5] Journal de mathématiques de M. JORDAN, 4ième série, t. 5, 1889.