SUR UNE TRANSCENDANTE REMARQUABLE TROUVÉE PAR M. FREDHOLM.

Extrait d'une lettre de M. Mittag-Leffler à M. Poincaré.

»Permettez-moi de vous exposer un résultat assez remarquable qui a été trouvé par un de mes élèves, M. FREDHOLM.

»Autant que je sache, toutes les fonctions qui n'existent que dans un certain domaine du plan et qui ont été étudiées jusqu'ici cessent d'exister, parce que les fonctions elles-mêmes ou leurs dérivées deviennent discontinues sur la frontière. M. FREDHOLM a trouvé, dans un des champs les plus connus de l'Analyse, une fonction qui est continue, ainsi que toutes ses dérivées, sur toute la frontière qui limite le domaine d'existence de la fonction.

»Ecrivez la fonction θ sous la forme

$$\sum_{\nu=-\infty}^{\nu=+\infty} e^{\nu^2 t+\nu v} = \sum_{\nu=-\infty}^{\nu=-1} e^{\nu^2 t+\nu v} + \sum_{\nu=0}^{\infty} e^{\nu^2 t+\nu v},$$

et mettez

$$\varphi(t,v) = \sum_{\nu=0}^{\infty} e^{\nu^2 t+\nu v}.$$

Si la partie réelle de v est négative, la fonction est une fonction uniforme de t pour toutes les valeurs de t dont la partie réelle est négative. La fonction, ainsi que toutes ses dérivees, sont des fonctions continues de t sur l'axe imaginaire. Mais cet axe imaginaire forme la limite du domaine d'existence de la fonction. Pour voir cela, vous n'avez qu'à faire l'observation que la fonction $\varphi(t,v)$ satisfait à l'égalité

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t} = \frac{\partial^2\varphi}{\partial v^2},$$

et de mettre

$$\begin{aligned}\varphi(t,\upsilon) &= p(t-t_0)\\ &= \varphi(t_0,\upsilon) + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right)_{t=t_0}\frac{t-t_0}{\underline{|1}} + \left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}\right)_{t=t_0}\frac{(t-t_0)^2}{\underline{|2}} + \dots\\ &= \varphi(t_0,\upsilon) + \left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial \upsilon^2}\right)_{t=t_0}\frac{t-t_0}{\underline{|1}} + \left(\frac{\partial^4\varphi}{\partial \upsilon^4}\right)_{t=t_0}\frac{(t-t_0)^2}{\underline{|2}} + \dots\end{aligned}$$

où t_0 est un point sur l'axe imaginaire.

»D'après le théorème connu de M^me^ Kowalevski[1] la série $p(t-t_0)$ ne peut être convergente, à moins que $\varphi(t_0,\upsilon)$ soit une fonction entière rationnelle ou transcendante de υ. Cela n'a pas lieu, et la fonction $\varphi(t,\upsilon)$ considérée comme fonction de t n'existe donc, pourvu que υ soit une constante dont la partie réelle est négative, qu'à l'intérieur du domaine: partie réelle de $t < 0$.

»En mettant

$$e^t = x, \ e^\upsilon = a, \ |a| < 1,$$

vous obtenez une fonction de x,

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} a^\nu x^{\nu^2},$$

qui n'existe que pour $|x| < 1$ et qui reste continue, ainsi que toutes ses dérivées, pour $|x| = 1$.

»Il est facile de voir qu'on peut beaucoup généraliser ce résultat obtenu par M. Fredholm.»

[1] Journal für Mathematik, t. 80.