ÜBER EINE NUMERISCHE BERECHNUNG
DER ARGUMENTE DER CYKLISCHEN, HYPERBOLISCHEN UND ELLIPTISCHEN FUNCTIONEN

VON

C. RUNGE
in HANNOVER.

Die Methode, durch welche ARCHIMEDES seinen Näherungswerth der Zahl π fand, ist einer Vervollkommnung fähig, auf welche meines Wissens bisher nicht aufmerksam gemacht worden ist.[1] In ihrer verbesserten Form bietet sie ein geeignetes Mittel dar, um die Argumente der Exponential- und Kreis-Functionen so wie der hyperbolischen und elliptischen Functionen zu berechnen, wenn die Werthe der Functionen gegeben sind.

ARCHIMEDES berechnete an Stelle des Umfanges eines Kreises mit dem Radius 1 den Umfang eines eingeschriebenen und den eines umschriebenen regulären Vielecks. Der Umfang des Kreises liegt zwischen diesen beiden Werthen, welche beliebig nahe an einander rücken, wenn die Seitenzahl hinreichend gesteigert wird. Den Umfang eines regulären Vielecks mit grosser Seitenzahl fand er, indem er successive aus dem Umfang des Sechsecks, welcher gleich 6 ist, den Umfang des Zwölfecks, aus diesem den des Vierundzwanzigecks u. s. w. berechnete. Die Seite des eingeschriebenen regulären n-Ecks ist gleich $2\sin u$, wenn mit u der n^{te} Theil von π bezeichnet wird, und die Seite des umschriebenen regulären n-Ecks ist gleich $2\tan u$. Aus den Werthen von $\sin u$ und $\tan u$ kann man $\sin\frac{u}{2}$ und $\tan\frac{u}{2}$ finden, welche verdoppelt die Seiten des eingeschriebenen und umschriebenen $2n$-Ecks darstellen.

[1] Vgl. Nachschrift.

Acta mathematica. 15. Imprimé le 8 août 1891.

Diese Methode lässt sich auf jede Function anwenden, sobald es möglich ist, aus dem Werthe der Function für ein gegebenes Argument den Werth derselben für die Hälfte des Arguments zu berechnen.

Sei nämlich $f(u)$ eine beliebige Function von u, welche in eine convergente Reihe nach Potenzen von u entwickelt werden kann

$$f(u) = a_0 + a_1 u + a_2 u^2 + \dots .$$

Wenn es möglich ist aus $f(u)$ den Werth von $f\left(\frac{u}{2}\right)$ und mithin den Werth von $f\left(\frac{u}{2^n}\right)$ für jeden ganzzahligen Werth von n zu berechnen, so kann man daraus den Werth von u finden. Denn es ist:

$$f\left(\frac{u}{2^n}\right) = a_0 + a_1 \frac{u}{2^n} + a_2 \frac{u^2}{2^{2n}} + \dots$$

und folglich

$$2^n\left[f\left(\frac{u}{2^n}\right) - a_0\right] = a_1 u + a_2 \frac{u^2}{2^n} + \dots .$$

Für grosse Werthe von n werden auf der rechten Seite alle Glieder ausser dem ersten sehr klein, und man erhält einen Näherungswerth für $a_1 u$, aus dem durch Division mit a_1 die Grösse u gefunden wird, vorausgesetzt dass a_1 von Null verschieden ist. Wäre a_1 gleich Null, so müsste man mit 2^{2n} statt mit 2^n multipliciren und es würde

$$2^{2n}\left[f\left(\frac{u}{2^n}\right) - a_0\right]$$

ein Näherungswerth für $a_2 u^2$ sein. Würde auch a_2 verschwinden, so könnte man durch Multiplication mit 2^{3n} einen Näherungswerth für $a_3 u^3$ gewinnen u. s. w.

Dieses Verfahren ist das nämliche, welches Legendre zur Berechnung elliptischer Integrale angewendet hat.

Ist

$$u = \int_0^{\varphi} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2\varphi}}, \qquad \text{so ist} \qquad \frac{u}{2} = \int_0^{\varphi_1} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2\varphi}},$$

wo φ_1 aus den Gleichungen

$$\sin\varphi_1 = \frac{\sin\frac{1}{2}\varphi}{\cos\frac{1}{2}\gamma}, \qquad \sin\gamma = k\sin\varphi$$

gefunden wird.

Denkt man sich φ als Function von u dargestellt $\varphi = f(u)$, so kann man also $\varphi_1 = f\left(\frac{u}{2}\right)$ berechnen. Aus φ_1 findet man auf dieselbe Weise $\varphi_2 = f\left(\frac{u}{4}\right)$ u. s. f. Setzt man das Verfahren n Mal fort, so liefert $2^n\varphi_n$ einen Näherungswerth für u. Statt φ kann man auch $\sin\varphi$ als Function von u betrachten. Die Abhängigkeit zwischen $\sin\varphi$ und $\sin\varphi_1$ ist eine algebraische durch Quadratwurzeln darstellbare, was in den Fällen ein Vorzug ist, wo etwa der zu erreichenden Genauigkeit wegen trigonometrische Tafeln nicht zu Gebote stehn.

Gegen diese Art der Berechnung ist einzuwenden, dass die Zahl der Schritte manchmal beträchtlich ist, um eine nennenswerthe Genauigkeit zu erzielen. Man kann aber dieses Verfahren des Archimedes, wie wir es nennen wollen, so modificiren, dass die berechneten Näherungswerthe sich viel schneller dem gesuchten Werthe nähern.

Es sei wieder

$$f(u) = a_0 + a_1 u + a_2 u^2 + \ldots + a_n u^n + \ldots.$$

Dann ist

$$f\left(\frac{u}{2^\alpha}\right) = a_0 + a_1\frac{u}{2^\alpha} + a_2\frac{u^2}{2^{2\alpha}} + \ldots + a_n\frac{u^n}{2^{n\alpha}} + \ldots.$$

Um keine Nenner schreiben zu müssen, möge $a_\lambda = 2^{\lambda n} b_\lambda$ gesetzt werden. Dann hat man

$$f\left(\frac{u}{2^n}\right) = a_0 + b_1 u + b_2 u^2 + \ldots + b_{n+1}u^{n+1} + b_{n+2}u^{n+2} + \ldots,$$

$$f\left(\frac{u}{2^{n-1}}\right) = a_0 + b_1 2u + b_2 2^2 u^2 + \ldots + b_{n+1}2^{n+1}u^{n+1} + b_{n+2}2^{n+2}u^{n+2} + \ldots,$$

. . . .

$$f(u) = a_0 + b_1 2^n u + b_2 2^{2n}u^2 + \ldots + b_{n+1}2^{(n+1)n}u^{n+1} + b_{n+2}2^{(n+2)n}u^{n+2} + \ldots.$$

Diese Gleichungen sollen mit Constanten multiplicirt und addirt werden, und zwar sollen die Constanten so gewählt sein, dass auf der rechten Seite in der Summe alle Glieder fortfallen, welche $u^2, u^3, \ldots, u^{n+1}$ enthalten. Bezeichnet man die Constanten der Reihe nach mit $C_0, C_1, C_2, \ldots, C_n$ und bezeichnet mit $\varphi(x)$ die ganze Function n^{ten} Grades

$$\varphi(x) = C_0 + C_1 x + C_2 x^2 + \ldots + C_n x^n,$$

so kann man die Summe

$$C_0 f\left(\frac{u}{2^n}\right) + C_1 f\left(\frac{u}{2^{n-1}}\right) + \ldots + C_n f(u)$$

folgendermassen schreiben:

$$a_0\varphi(1) + b_1\varphi(2)u + b_2\varphi(2^2)u^2 + \ldots + b_{n+1}\varphi(2^{n+1})u^{n+1} + b_{n+2}\varphi(2^{n+2})u^{n+2} + \ldots.$$

Um die Coefficienten von $u^2, u^3, \ldots, u^{n+1}$ zum Verschwinden zu bringen, hat man $C_0, C_1, \ldots, C_n$ so zu bestimmen, dass

$$\varphi(2^2) = \varphi(2^3) = \ldots = \varphi(2^{n+1}) = 0.$$

D. h. $C_0, C_1, \ldots, C_n$ müssen den Coefficienten von

$$(x - 2^2)(x - 2^3)\ldots(x - 2^{n+1})$$

proportional sein.

Der Proportionalitätsfactor werde so bestimmt, dass $\varphi(2) = 2^n$ ist. Man setze also:

$$\varphi(x) = 2^n \frac{(x - 2^2)(x - 2^3)\ldots(x - 2^{n+1})}{(2 - 2^2)(2 - 2^3)\ldots(2 - 2^{n+1})}$$

oder

$$\varphi(x) = \frac{x - 2^2}{1 - 2} \cdot \frac{x - 2^3}{1 - 2^2} \cdot \frac{x - 2^4}{1 - 2^3} \cdots \frac{x - 2^{n+1}}{1 - 2^n}.$$

Dann ist

$$C_0 f\left(\frac{u}{2^n}\right) + C_1 f\left(\frac{u}{2^{n-1}}\right) + \ldots + C_n f(u) - a_0\varphi(1)$$

oder, was dasselbe ist

$$C_0\left[f\left(\frac{u}{2^n}\right) - a_0\right] + C_1\left[f\left(\frac{u}{2^{n-1}}\right) - a_0\right] + \ldots + C_n[f(u) - a_0]$$

ein Näherungswerth für $a_1 u$ und die Abweichung von $a_1 u$ ist gleich:

$$b_{n+2}\varphi(2^{n+2})u^{n+2} + b_{n+3}\varphi(2^{n+3})u^{n+3} + \dots$$

oder, wenn man statt der Grössen b wieder die ursprünglichen Coefficienten der Entwicklung von $f(u)$ einführt,

$$a_{n+2}\frac{\varphi(2^{n+2})}{2^{n(n+2)}}u^{n+2} + a_{n+3}\frac{\varphi(2^{n+3})}{2^{n(n+3)}}u^{n+3} + \dots .$$

Hebt man aus jedem der Factoren des Zählers von $\varphi(2^{n+\alpha})$ $2^{n+\alpha}$ heraus, so wird:

$$\varphi(2^{n+\alpha}) = 2^{n(n+\alpha)}\frac{1-2^{-n-\alpha+2}}{1-2}\,\frac{1-2^{-n-\alpha+3}}{1-2^2}\cdots\frac{1-2^{-\alpha+1}}{1-2^n}.$$

Und schreibt man zur Abkürzung

$$\delta_{\alpha-1} = (1-2^{-\alpha+1})(1-2^{-\alpha})\dots(1-2^{-\alpha-n+2}),$$

so nimmt der Ausdruck für die Abweichung des Näherungswerthes die Gestalt an:

$$\frac{1}{(1-2)(1-2^2)\dots(1-2^n)}\left[a_{n+2}\delta_1 u^{n+2} + a_{n+3}\delta_2 u^{n+3} + \dots\right].$$

Die Grössen δ sind sämmtlich positiv, nehmen mit wachsendem Index zu und nähern sich der Grenze 1. Daraus erhellt, dass die unendliche Reihe zugleich mit der unendlichen Reihe für $f(u)$ convergirt und divergirt. Die Gleichung ist mithin nur für solche Werthe von u richtig, für welche die Reihe für $f(u)$ convergirt. Für solche Werthe erhält man aber bald sehr genaue Näherungswerthe, selbst wenn die Convergenz der Reihe $f(u)$ langsam ist. Denn bezeichnet r die Summe der absoluten Beträge von $a_{n+2}u^{n+2}$, $a_{n+3}u^{n+3}, \dots$, so ist die Abweichung des Näherungswerthes absolut genommen kleiner als

$$\frac{r}{(2-1)(2^2-1)\dots(2^n-1)}.$$

Es ist aber der natürliche Logarithmus des unendlichen Productes $(1-2^{-1})(1-2^{-2})\dots$ gleich

$$\Sigma l(1-2^{-n}) = -\sum\sum \frac{1}{\lambda} 2^{-\lambda n}$$
$$= -\sum \frac{1}{\lambda} \frac{2^{-\lambda}}{1-2^{-\lambda}}$$
$$= -\sum \frac{1}{\lambda} \frac{1}{2^{\lambda}-1}$$
$$= -\sum \frac{1}{\lambda}\frac{1}{2^{\lambda}} - \sum \frac{1}{\lambda}\left(\frac{1}{2^{\lambda}-1} - \frac{1}{2^{\lambda}}\right)$$
$$= -l(2) - \sum \frac{1}{\lambda} \frac{1}{2^{\lambda}(2^{\lambda}-1)}.$$

Also wie man leicht findet

$$-\Sigma l(1-2^{-n}) < l(2) + 0{,}6.$$

Mithin ist die Abweichung des Näherungswerthes kleiner als

$$2^{-\frac{n(n+1)}{2}} . 2e^{0,6} . r$$

oder auch kleiner als

$$r 2^{-\frac{n(n+1)}{2}+2}.[1]$$

Man sieht aus dieser Form, dass die Genauigkeit des Verfahrens selbst bei langsamer Convergenz d. h. wenn r mit wachsendem n nur langsam abnimmt, beträchtlich ist. Denn für $n = 10$ ist z. B. schon $2^{-\frac{n(n+1)}{2}+2}$ kleiner als 10^{-16}. In besonderen Fällen wird man eine noch etwas kleinere Grenze für die Genauigkeit ableiten können, wenn man nicht, wie es hier der Einfachheit wegen geschah, die Grössen δ gleich 1 setzt.

Sind von den Coefficienten der Reihe $f(u)$ einige Null, so kann man die Constanten $C_0, C_1, \ldots, C_n$ zweckmässiger bestimmen. Denn es verschwinden alsdann in der Entwicklung

$$a_0\varphi(1) + b_1\varphi(2)u + b_2\varphi(2^2)u^2 + \ldots$$

[1] Zur Berechnung von $\prod(1-2^{-k})$ kann man sich auch der EULER'schen Formel bedienen $\prod(1-x^k) = \Sigma(-1)^k x^{\frac{3k^2 \pm k}{2}}$ und findet so $\prod(1-2^{-k}) = 0{,}288788\ldots.$

einige Glieder von selbst, und für diese braucht dann natürlich φ nicht gleich Null zu sein. Statt dessen lassen sich dann eben so viel weitere Glieder zum Verschwinden bringen, wodurch eine grössere Genauigkeit des Näherungsverfahrens erreicht wird. Ehe diese Betrachtungen durchgeführt werden, soll indessen ein Beispiel die Methode erläutern.

Man findet leicht

$$\begin{aligned} &\text{für } n = 1 & \varphi(x) &= 4 - x, \\ &\text{für } n = 2 & 3\varphi(x) &= 32 - 12x + x^2, \\ &\text{für } n = 3 & 21\varphi(x) &= 512 - 224x + 28x^2 - x^3, \\ &\text{für } n = 4 & 315\varphi(x) &= 16384 - 7680x + 1120x^2 - 60x^3 + x^4 \end{aligned}$$

und

$$\varphi(1) = 2^{n+1} - 1.$$

Will man nun z. B. den natürlichen Logarithmus von 2 berechnen, so ist zu setzen $f(u) = e^u = 2$, $f\left(\frac{u}{2}\right) = \sqrt{2}$, $f\left(\frac{u}{4}\right) = \sqrt[4]{2}$ u. s. w. Für $n = 4$ ist, da u kleiner als 1 sein muss, $r < \frac{1}{\underline{|6}} + \frac{1}{\underline{|7}} + \ldots < \frac{7}{6\underline{|6}} < 17.10^{-4}$. Die Abweichung ergiebt sich mithin kleiner als

$$2^{-8}.17.10^{-4} < 7.10^{-6}.$$

Will man den Näherungswerth auf 6 Stellen berechnen, so sind $\sqrt{2}$, $\sqrt[4]{2}$, $\sqrt[8]{2}$, $\sqrt[16]{2}$ noch etwas genauer als auf 6 Stellen in die Rechnung einzuführen. Denn der Fehler von $\sqrt[16]{2}$ wird ja auch mit C_0 multiplicirt der von $\sqrt[8]{2}$ mit C_1 u. s. w. Da die Summe der absoluten Beträge von C_0, $C_1, \ldots, C_4$ oder $\varphi(-1)$ etwa gleich 80 ist, so genügt es jedenfalls mit acht Decimalen zu rechnen.

Bedient man sich der Thomas'schen Rechenmaschine so braucht ein einigermassen geübter Rechner nicht mehr als 8 Minuten um den Näherungswerth 0,6931473 zu finden. Mit Benutzung dieses Werthes kann man zeigen, dass die Genauigkeit noch grösser ist als oben überschlagen wurde. Denn da $l(2)$ hiernach kleiner als 0,7 ist, so wird $r < \frac{1}{\underline{|6}} \cdot \frac{10}{9} (0{,}7)^6$. Die oben gefundene Grenze reducirt sich dadurch auf weniger als 0,12 ihres früheren Betrages und ergiebt sich demnach kleiner als 84.10^{-8}.

Wesentlich kürzer gestaltet sich die Rechnung, wenn in der Entwicklung von $f(u)$ eine Reihe von Coefficienten Null sind. Es sollen für den Fall, dass nur ungerade Potenzen vorkommen und für den Fall, dass nur gerade Potenzen vorkommen, die Formeln ausführlich entwickelt werden.

Ist

$$f(u) = a_1 u + a_2 u^3 + a_3 u^5 + \dots + a_{n+1} u^{2n+1} + a_{n+2} u^{2n+3} + \dots$$

so sind die Multiplicatoren $C_0, C_1, \dots, C_n$ den Coefficienten von

$$(x - 2^3)(x - 2^5)\dots(x - 2^{2n+1})$$

proportional zu setzen. Und damit in dem Ausdrucke für

$$C_0 f\left(\frac{u}{2^n}\right) + C_1 f\left(\frac{u}{2^{n-1}}\right) + \dots + C_n f(u)$$

der Coefficient von u gleich a_1 sei, bestimmt man den Proportionalitätsfactor so, dass $\varphi(2) = 2^n$ und setzt demnach

$$\varphi(x) = 2^n \frac{x - 2^3}{2 - 2^3}\frac{x - 2^5}{2 - 2^5}\dots\frac{x - 2^{2n+1}}{2 - 2^{2n+1}} = \frac{x - 2^3}{1 - 2^2}\frac{x - 2^5}{1 - 2^4}\dots\frac{x - 2^{2n+1}}{1 - 2^{2n}}.$$

Die Abweichung des Näherungswerthes ergiebt sich gleich

$$a_{n+2}\frac{\varphi(2^{2n+3})}{2^{n(2n+3)}}u^{2n+3} + a_{n+3}\frac{\varphi(2^{2n+5})}{2^{n(2n+5)}}u^{2n+5} + \dots.$$

Nun ist aber

$$\frac{\varphi(2^{2n+2\alpha+1})}{2^{n(2n+2\alpha+1)}} = \frac{(1 - 2^{-2n-2\alpha+2})(1 - 2^{-2n-2\alpha+4})\dots(1 - 2^{-2\alpha})}{(1 - 2^2)(1 - 2^4)\dots(1 - 2^{2n})}.$$

Schreibt man zur Abkürzung

$$\varepsilon_\alpha = (1 - 2^{-2\alpha})(1 - 2^{-2\alpha-2})\dots(1 - 2^{-2\alpha-2(n-1)})$$

so wird daher die Abweichung des Näherungswerthes

$$\frac{1}{(1 - 2^2)(1 - 2^4)\dots(1 - 2^{2n})}\left[a_{n+2}\varepsilon_1 u^{2n+3} + a_{n+3}\varepsilon_2 u^{2n+5} + \dots\right]$$

Die Grössen ε sind positiv und kleiner als 1, wachsen mit wachsendem

Index und nähern sich der Grenze 1. Bezeichnet man die Summe der absoluten Beträge von $a_{n+2}u^{2n+3}$, $a_{n+3}u^{2n+5}$ u. s. w. mit r, so ergiebt sich der absolute Betrag der Abweichung kleiner als

$$\frac{r}{2^{n(n+1)}} \cdot \frac{1}{(1-2^{-2})(1-2^{-4})\dots(1-2^{-2n})}.$$

Nun ist

$$l\frac{1}{(1-2^{-2})(1-2^{-4})\dots(1-2^{-2n})\dots} = \sum\sum \frac{1}{\lambda}2^{-2\lambda\mu} = \sum \frac{1}{\lambda}\frac{2^{-2\lambda}}{1-2^{-2\lambda}}$$

$$= \sum \frac{1}{\lambda}\frac{1}{4^\lambda - 1} = \sum \frac{1}{\lambda}\frac{1}{4^\lambda} + \sum \frac{1}{\lambda}\left(\frac{1}{4^\lambda - 1} - \frac{1}{4^\lambda}\right)$$

$$= l\left(\frac{4}{3}\right) + \sum \frac{1}{\lambda}\frac{1}{4^\lambda(4^\lambda - 1)} < l\left(\frac{4}{3}\right) + 0{,}086.$$

Also

$$\frac{1}{(1-2^{-2})(1-2^{-4})\dots(1-2^{-2n})} < \frac{4}{3}\cdot 1{,}1 < 1{,}5.$$

Mithin ist die Abweichung des Näherungswerthes absolut genommen kleiner als

$$1{,}5r2^{-n(n+1)}.$$ [1]

Enthält andrerseits $f(u)$ nur gerade Potenzen von u

$$f(u) = a_0 + a_1u^2 + a_2u^4 + \dots + a_{n+1}u^{2n+2} + a_{n+2}u^{2n+4} + \dots$$

so wird man die Multiplicatoren so wählen, dass in der Summe

$$C_0 f\left(\frac{u}{2^n}\right) + C_1 f\left(\frac{u}{2^{n-1}}\right) + \dots + C_n f(u)$$

die Potenzen $u^4, u^6, \dots, u^{2n+2}$ wegfallen, d. h. man nimmt $C_0, C_1, \dots, C_n$ den Coefficienten von

$$(x-2^4)(x-2^6)\dots(x-2^{2n+2})$$

---

[1] Mit Hilfe der oben erwähnten EULER'schen Formel erhält man

$$\Pi(1-4^{-k}) = 0{,}68854.$$

Darnach ist die Abweichung kleiner als $1{,}46r2^{-n(n+1)}$.

proportional. Den Proportionalitätsfactor wählt man so, dass in der Summe u^2 nur mit a_1 multiplicirt erscheint, dass also $\varphi(2^2) = 2^{2n}$ ist. Demnach hat man zu setzen

$$\varphi(x) = 2^{2n}\frac{x-2^4}{2^2-2^4}\frac{x-2^6}{2^2-2^6}\cdots\frac{x-2^{2n+2}}{2^2-2^{2n+2}} = \frac{x-2^4}{1-2^2}\frac{x-2^6}{1-2^4}\cdots\frac{x-2^{2n+2}}{1-2^{2n}},$$

$\varphi(1)$ ist dann gleich $\dfrac{2^{2n+2}-1}{3}$ und es wird der Näherungswerth gleich

$$C_0 f\left(\frac{u}{2^n}\right) + C_1 f\left(\frac{u}{2^{n-1}}\right) + \ldots + C_n f(u) - \frac{2^{2n+2}-1}{3}a_0$$

oder auch, da $\varphi(1) = C_0 + C_1 + \ldots + C_n$

$$C_0\left[f\left(\frac{u}{2^n}\right) - a_0\right] + C_1\left[f\left(\frac{u}{2^{n-1}}\right) - a_0\right] + \ldots + C_n[f(u) - a_0].$$

Dieser Näherungswerth weicht von $a_1 u^2$ ab um

$$a_{n+2}\frac{\varphi(2^{2n+4})}{2^{n(2n+4)}}u^{2n+4} + a_{n+3}\frac{\varphi(2^{2n+6})}{2^{n(2n+6)}}u^{2n+6} + \ldots$$

oder in anderer Form um

$$\frac{1}{(1-2^2)(1-2^4)\ldots(1-2^{2n})}\left[a_{n+2}\varepsilon_1 u^{2n+4} + a_{n+3}\varepsilon_2 u^{2n+6} + \ldots\right]$$

wo $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots$ dieselbe Bedeutung haben wie oben. Bezeichnet wieder r die Summe der absoluten Beträge von $a_{n+2}u^{2n+4}$, $a_{n+3}u^{2n+6}$ u. s. w. so ist die Abweichung des Näherungswerthes absolut genommen kleiner als

$$1{,}5 r 2^{-n(n+1)}.$$

Die Functionen $\varphi(x)$ für die beiden Fälle einer geraden und ungeraden Function $f(u)$ hängen in der folgenden Weise zusammen. Setzt man im ersteren Falle $2x$ statt x ein, so geht $\varphi(x)$ über in

$$\frac{2x-2^4}{1-2^2}\frac{2x-2^6}{1-2^4}\cdots\frac{2x-2^{2n+2}}{1-2^{2n}},$$

und hebt man hier aus jedem Factor des Zählers 2 heraus, so geht der

Ausdruck in die Function $\varphi(x)$ für den Fall einer ungeraden Function $f(u)$ über. Für diesen Fall haben wir

$$n = 1 \qquad 3\varphi(x) = 8 - x,$$

$$n = 2 \qquad 45\varphi(x) = 256 - 40x + x^2,$$

$$n = 3 \qquad 2835\varphi(x) = 32768 - 5376x + 168x^2 - x^3,$$

$$n = 4 \qquad 722925\varphi(x) = 16777216 - 2785280x + 91392x^2 - 680x^3 + x^4.$$

Für den Fall einer geraden Function $f(u)$ hat man

$$n = 1 \qquad 3\varphi(x) = 16 - x,$$

$$n = 2 \qquad 45\varphi(x) = 1024 - 80x + x^2,$$

$$n = 3 \qquad 2835\varphi(x) = 262144 - 21504x + 336x^2 - x^3,$$

$$n = 4 \qquad 722925\varphi(x) = 268435456 - 22282240x + 365568x^2 - 1360x^3 + x^4.$$

Die Genauigkeit, mit welcher die Werthe von $f(u)$, $f\left(\frac{u}{2}\right)$ u. s. w. in die Rechnung eingeführt werden, muss, wie schon oben bei dem numerischen Beispiele bemerkt wurde, grösser sein, als die Genauigkeit, mit der man den Näherungswerth zu berechnen beabsichtigt. Denn der Fehler von $f(u)$ multiplicirt sich mit C_n, der von $f\left(\frac{u}{2}\right)$ mit C_{n-1} u. s. w. Sind die Fehler von $f(u)$, $f\left(\frac{u}{2}\right)$ u. s. w. alle kleiner als δ, so ist der Fehler in der Summe kleiner als δ multiplicirt mit der Summe der absoluten Beträge von $C_0, C_1, \ldots, C_n$, d. i. kleiner als $\delta\varphi(-1)$. Es ist nun, wenn in $f(u)$ alle Potenzen von u vorkommen

$$\varphi(-1) = \frac{(2^2+1)(2^3+1)\ldots(2^{n+1}+1)}{(2-1)(2^2-1)\ldots(2^n-1)} < 2^{n+3},$$

wenn $f(u)$ ungerade

$$\varphi(-1) = \frac{(2^3+1)(2^5+1)\ldots(2^{2n+1}+1)}{(2^2-1)(2^4-1)\ldots(2^{2n}-1)} < 2^{n+1},$$

und wenn $f(u)$ gerade

$$\varphi(-1) = \frac{(2^4+1)(2^6+1)\ldots(2^{2n+2}+1)}{(2^2-1)(2^4-1)\ldots(2^{2n}-1)} < 1{,}7 \cdot 2^{2n}.$$

Darnach kann man für jeden Fall überschlagen, mit wie viel Decimalen es genügt $f(u)$, $f\left(\frac{u}{2}\right)$ u. s. w. in die Rechnung einzuführen, wenn man bei allen mit der gleichen Anzahl von Decimalen rechnen will.

Für ungerade und gerade Functionen soll die Methode an einigen Beispielen durchgeführt werden.

1. *Berechnung von* arc sin x *und* arc cos x.

Man kann sich offenbar auf den Fall beschränken, wo der Bogen nicht grösser als $\frac{\pi}{4}$ ist. Dann ist z. B. für $n = 2$ beim Sinus $r < 0{,}4 \,.\, 10^{-5}$ beim Cosinus $r < 0{,}4 \,.\, 10^{-6}$. Mithin ist für $n = 2$ der Näherungswerth für arc sin bis auf 10^{-7} genau und der Näherungswerth für das halbe Quadrat von arc cos bis auf 10^{-8}. Mit dieser Genauigkeit ist also

$$45u = 256 \sin\frac{u}{4} - 40 \sin\frac{u}{2} + \sin u,$$

$$45\frac{u^2}{2} = 1024\left(1 - \cos\frac{u}{4}\right) - 80\left(1 - \cos\frac{u}{2}\right) + (1 - \cos u).$$

Die zweite Formel ist vorzuziehn, weil sie erstens etwas genauer ist und zweitens, wenn $\cos u$ gegeben ist, nur 3 Quadratwurzeln auszuziehn verlangt. Rechnet man mit 9 Decimalen, so wird der Näherungswerth von $\frac{u^2}{2}$ mit einer Genauigkeit von 1,4 Einheiten der 8ten Stelle gefunden also $\frac{u^2}{2}$ selbst auf 2,4 Einheiten der 8ten Stelle. So findet man z. B. für $\sin u = 0{,}5$

$$\sin u = 0{,}5 \qquad \cos u = 0{,}8660254404$$

$$\cos\frac{u}{2} = \sqrt{\frac{1 + \cos u}{2}} = 0{,}965925826$$

$$\cos\frac{u}{4} = \sqrt{\frac{1 + \cos\frac{u}{2}}{2}} = 0{,}991444861$$

$$\frac{u^2}{2} = 0{,}137077845, \qquad u = 0{,}523598786$$

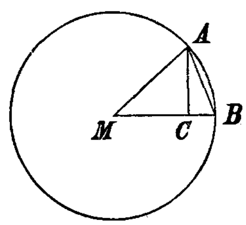
während der wahre Werth $\frac{\pi}{6}$ auf neun Decimalen abgekürzt gleich

$$0,523598776$$

ist. Auch für $n = 1$ ist die Genauigkeit nicht unbedeutend. Für $u = \frac{\pi}{4}$ hat man für den Sinus $1,5r2^{n(n+1)} < 10^{-3}$ und für den Cosinus

$$1,5r2^{n(n+1)} < 1,4.10^{-4}.$$

Die relative Genauigkeit (Abweichung im Verhältniss zu u) ist für den Sinus kleiner als $1,3.10^{-3}$ für den Cosinus kleiner als $1,8.10^{-4}$. Die Formel für den Sinus liefert eine einfache graphische Rectification des Kreisbogens. Ist nämlich $< AMB = u$, so ist $AC = \sin u$, $AB = 2 \sin\frac{u}{2}$, vorausgesetzt, dass der Radius zur Längeneinheit gemacht ist. Der Näherungswerth ist dann $\frac{1}{3}(4AB - AC)$ oder $AB + \frac{1}{3}(AB - AC)$.



ARCHIMEDES fand aus dem Umfang des eingeschriebenen und umschriebenen 96-Ecks für π die Grenzen $3^1/_7$ und $3^{10}/_{71}$, welche bis auf 2 Einheiten der vierten Stelle genau sind. Mit Benutzung der abgeleiteten Formel für $n = 4$ würde man aus den Seiten des 6-, 12-, 24-, 48-, 96-Ecks die Zahl $\frac{\pi}{6}$ mit der Genauigkeit

$$1,5\left(\frac{\pi}{6}\right)^{11}\frac{1}{\underline{|11}}\,2^{-20} < 3.10^{-17}.$$

berechnen können.

2. *Berechnung der Argumente des hyperbolischen Sinus und des hyperbolischen Cosinus.*

Die Genauigkeit ist dieselbe wie die für Sinus und Cosinus berechnete, da die absoluten Beträge der Glieder in den Potenzreihen für den trigonometrischen und den hyperbolischen Sinus und ebenso in denen für den Cosinus dieselben sind. Die Formel für den Cosinus ist auch hier im Allgemeinen vorzuziehn.

Wenn das Argument gross ist, so thut man besser statt der Formel für n, die Formel für $n - 1$ aber mit $f\left(\frac{u}{2}\right) f\left(\frac{u}{2^2}\right) \cdots f\left(\frac{u}{2^n}\right)$ zu benutzen.

Es ist nämlich die Genauigkeitsgrenze für $\frac{u^2}{2}$ etwa gleich

$$1{,}5 \frac{u^{2n+4}}{\underline{|2n+4}} 2^{-n(n+1)}.$$

Wendet man dagegen die vorhergehende Formel für $n - 1$ auf $f\left(\frac{u}{2}\right)$ an, so ist die Genauigkeitsgrenze etwa

$$4 \frac{1{,}5}{\underline{|2n+2}} \left(\frac{u}{2}\right)^{2n+2} 2^{-(n-1)n} = 1{,}5 \frac{u^{2n+2}}{\underline{|2n+2}} 2^{-n(n+1)}.$$

Die obige Genauigkeitsgrenze geht aus dieser durch Multiplication mit $\frac{u^2}{(2n+3)(2n+4)}$ hervor. Wenn also $u^2 > (2n+3)(2n+4)$ so ist die letztere kleiner. Sei z. B. $\cos_h u = 10$, dann ist:

$$\cos_h \frac{u}{2} = \sqrt{\frac{1 + \cos_h u}{2}} = 2{,}345207880,$$

$$\cos_h \frac{u}{4} = 1{,}293291901,$$

$$\cos_h \frac{u}{8} = 1{,}070815554,$$

$$\cos_h \frac{u}{16} = 1{,}017549889.$$

Die Formel $n = 3$ auf die letzten vier Zahlen angewandt liefert:

$$u = 2{,}99322282.$$

Die Abweichung des Näherungswerthes für $\frac{1}{2}\left(\frac{u}{2}\right)^2$ ist etwa $1{,}2 \cdot 10^{-8}$, aber da mit 9 Decimalen gerechnet ist, so könnte ein Fehler von 6 Einheiten der 8ten Stelle hinzukommen.

3. *Berechnung eines elliptischen Integrals erster Gattung.*

Sei

$$u = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}, \qquad \text{wo} \quad k = \sin 75^\circ = 0{,}96592583,$$

so hat man

$$x = \operatorname{sn} u, \qquad x_1 = \operatorname{sn}\frac{u}{2} = \sqrt{\frac{1}{1+\sqrt{1-k^2}}} = 0{,}88566098,$$

$$x_2 = \operatorname{sn}\frac{u}{4} = \sqrt{\frac{1-\sqrt{1-x_1^2}}{1+\sqrt{1-k^2x_1^2}}} = 0{,}60188393,$$

. . . .

$$x_3 = 0{,}33325174,$$

$$x_4 = 0{,}17135481,$$

$$x_5 = 0{,}08629406.$$

Wendet man auf die letzten 4 Zahlen die Formel $n = 3$ für eine ungerade Function an, so ergiebt sich $u = 2{,}76806308$, was bis auf weniger als 7 Einheiten der letzten Stelle richtig ist. Die mögliche Abweichung des Resultats in Folge der Abkürzung aller Zahlen auf 8 Decimalen beträgt 3 Einheiten der siebenten Stelle.

Man erleichtert das Verfahren und erreicht eine schnellere Convergenz, wenn man statt $\operatorname{sn} u$ die Functionen $\frac{\operatorname{cn} u}{\operatorname{dn} u}$ und $\frac{1}{\operatorname{dn} u}$ der Rechnung zu Grunde legt. Zur Abkürzung werde geschrieben:

$$f(u) = \frac{\operatorname{cn} u}{\operatorname{dn} u}, \qquad g(u) = \frac{1}{\operatorname{dn} u}.$$

Dann ist:

$$f\left(\frac{u}{2}\right) = \sqrt{\frac{f(u)+g(u)}{1+g(u)}}, \qquad g\left(\frac{u}{2}\right) = \sqrt{\frac{f(u)+g(u)}{1+f(u)}}.$$

Man findet also aus $f(u)$ und $g(u)$ durch zwei Quadratwurzelausziehungen

$f\left(\frac{u}{2}\right)$ und $g\left(\frac{u}{2}\right)$. Wiederholt man diese Rechnung einige Male, so kann die oben entwickelte Formel sowohl auf $f(u)$ als auf $g(u)$ angewendet werden. Die Entwicklungen von $f(u)$ und $g(u)$ fangen folgendermassen an:

$$f(u) = 1 - \frac{k'^2}{2} u^2 + \ldots,$$

$$g(u) = 1 + \frac{k^2}{2} u^2 + \ldots.$$

Man erhält also durch Anwendung der Formel auf $f(u)$ einen Näherungswerth von $-\frac{k'^2}{2}u^2$ und durch Anwendung derselben auf $g(u)$ einen solchen von $\frac{k^2}{2}u^2$. Was die Genauigkeit des Verfahrens betrifft, so wurde oben dafür der Ausdruck

$$1,5\, r\, 2^{-n(n+1)}$$

aufgestellt, wo r die Summe der absoluten Beträge von $a_{n+2}u^{2n+4}$, $a_{n+3}u^{2n+6}, \ldots$ der Glieder in der Entwicklung von $f(u)$ resp. $g(u)$ bedeutet. Es kommt also darauf an für r eine obere Grenze zu finden. $f(u)$ und $g(u)$ werden beide nur an den Stellen

$$u = K + K'i + 2mK + 2nK'i$$

unendlich und die Entwicklungen nach Potenzen von u convergiren daher beide für $|u| < |K + K'i|$ und a fortiori für $u = \frac{K}{2}$ und $u = \frac{K'}{2}$. Bezeichnet nun m den grössten Werth der absoluten Beträge einer der Potenzreihen, welche dieselbe für $|u| = \frac{K}{2}$ annimmt, so ist bekanntlich [1]

$$\left(\frac{K}{2}\right)^{2\lambda} |a_\lambda| < m$$

und mithin für $|u| < \frac{K}{2}$

$$r < m \frac{K^2}{K^2 - 4|u|^2} \left|\frac{2u}{K}\right|^{2n+4}.$$

[1] Der Beweis ist unmittelbar aus dem CAUCHY'schen Integral $f^{(n)}(0) = \frac{|\underline{n}}{2\pi i}\int \frac{f(z)}{z^{n+1}}dz$ zu entnehmen.

Ebenso folgt, wenn m' der grösste absolute Betrag für $|u| = \frac{K'}{2}$ ist, für $|u| < \frac{K'}{2}$:

$$r < m' \frac{K'^2}{K'^2 - 4|u|^2} \left|\frac{2u}{K'}\right|^{2n+4}.$$

Der grösste absolute Betrag, welchen eine analytische Function in einem Gebiet annimmt, in dem sie sich regulär verhält, wird immer auf dem Rande des Gebietes angenommen. Wenn daher um den Kreis mit dem Radius $\frac{K}{2}$ resp. $\frac{K'}{2}$ ein anderes Gebiet abgegrenzt wird, welches den Kreis einschliesst, so wird der grösste absolute Betrag auf dem Rande desselben statt m resp. m' in dem Ausdruck für die obere Grenze von r geschrieben werden können.

Dieses Gebiet lässt sich so wählen, dass der grösste absolute Betrag von $f(u)$ resp. $g(u)$ auf dem Rande desselben angegeben werden kann. Für den Kreis mit dem Radius $\frac{K}{2}$ grenze man das Gebiet folgendermaassen ab. Es sei dasselbe ein Rechteck, dessen verticale Seiten in die beiden parallel zur y Achse durch $\pm\frac{K}{2}$ gezogenen Geraden fallen. Die horizontalen Seiten sollen durch $\pm\, 2nK'i$ laufen, wo n eine ganze Zahl und so gross gewählt ist, dass $2nK' > \frac{K}{2}$. Das Gebiet, welches den Kreis mit dem Radius $\frac{K'}{2}$ enthält, soll ein Rechteck sein, dessen horizontale Seiten in die beiden parallel zur x Achse durch $\pm\frac{K'i}{2}$ gezogenen Geraden fällt und dessen verticale Seiten durch $\pm\, 2n'K$ laufen, wo n' eine ganze Zahl und so gross gewählt ist, dass $2n'K > \frac{K'}{2}$. Die grössten absoluten Beträge von $f(u)$ und $g(u)$ auf dem Rande dieser Gebiete, findet man durch Anwendung der Formeln für $f^2\left(\frac{u}{2}\right)$ und $g^2\left(\frac{u}{2}\right)$:

$$f^2\left(\frac{u}{2}\right) = \frac{f(u) + g(u)}{1 + g(u)} = \frac{\operatorname{cn} u + 1}{\operatorname{dn} u + 1}, \qquad g^2\left(\frac{u}{2}\right) = \frac{f(u) + g(u)}{1 + f(u)} = \frac{\operatorname{cn} u + 1}{\operatorname{cn} u + \operatorname{dn} u}.$$

Wenn $\frac{u}{2}$ den Rand der beiden Gebiete durchläuft, so nimmt u solche

Werthe an, für welche die Werthe von $\operatorname{cn} u$ und $\operatorname{dn} u$ bekannt sind, und man überzeugt sich von der Richtigkeit der folgenden kleinen Tabelle:

	m	m'
$f(u)$	$(1-k')^{-\frac{1}{2}}$	$k^{-\frac{1}{2}}$
$g(u)$	$k'^{-\frac{1}{2}}$	$(1-k)^{-\frac{1}{2}}$

Man erhält demnach bei der Rechnung mit $f(u)$ für u^2 einen Näherungswerth, dessen Fehler kleiner als jede der beiden folgenden Grössen:

$$3k'^{-2}(1-k')^{-\frac{1}{2}}K^2(K^2-4u^2)^{-1}\left(\frac{2u}{K}\right)^{2n+4}2^{-n(n+1)}$$

und

$$3k'^{-2}k^{-\frac{1}{2}}K'^2(K'^2-4u^2)^{-1}\left(\frac{2u}{K'}\right)^{2n+4}2^{-n(n+1)}.$$

Bei der Rechnung mit $g(u)$ ist der Fehler kleiner als:

$$3k^{-2}k'^{-\frac{1}{2}}K^2(K^2-4u^2)^{-1}\left(\frac{2u}{K}\right)^{2n+4}2^{-n(n+1)}$$

und

$$3k^{-2}(1-k)^{-\frac{1}{2}}K'^2(K'^2-4u^2)^{-1}\left(\frac{2u}{K'}\right)^{2n+4}2^{-n(n+1)}.$$

Man ersieht aus diesen Ausdrücken, dass für $k<k'$ und mithin $K<K'$ die Rechnung mit $f(u)$ die grössere Genauigkeit gewährt, für $k>k'$ und mithin $K>K'$ dagegen die Rechnung mit $g(u)$. Ist jedes Mal u kleiner als der 4^{te} Theil der grösseren von den beiden Grössen K und K', so ist der Fehler des Näherungswerthes von u^2 für $k<k'$ und bei der Rechnung mit $f(u)$ kleiner als

$$k'^{-2}k^{-\frac{1}{2}}2^{-(n+1)(n+2)}$$

für $k'<k$ und bei der Rechnung mit $g(u)$ kleiner als

$$k^{-2}k'^{-\frac{1}{2}}2^{-(n+1)(n+2)}.$$

Will man z. B. K berechnen und ist $k > k'$ so findet man beim ersten Schritt aus $f(K) = 0$, $g(K) = \frac{1}{k'}$, die Werthe von $f\left(\frac{K}{2}\right)$ und $g\left(\frac{K}{2}\right)$, beim zweiten Schritt $f\left(\frac{K}{4}\right)$ und $g\left(\frac{K}{4}\right)$.

Wenn man jetzt noch 3 weitere Schritte macht und die Formel für $n = 3$ auf $g(u)$ anwendet, so wird $\frac{K}{4}$ mit der Genauigkeitsgrenze gefunden:

$$k^{-2} k'^{-\frac{1}{2}} 2^{-20} < 1{,}05 k^{-2} k'^{-\frac{1}{2}} . 10^{-6}.$$

Bei $n = 4$ ergiebt sich die Genauigkeitsgrenze

$$k^{-2} k'^{-\frac{1}{2}} 2^{-34} < 1{,}1 k^{-2} k'^{-\frac{1}{2}} 10^{-9}.$$

So findet man z. B., wenn man

$$K = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}}, \qquad k^2 = 0{,}933012701$$

berechnen will

n	$f\left(\frac{K}{2^n}\right)$	$g\left(\frac{K}{2^n}\right)$
0	0	3,863703279
1	0,891288591	1,965630504
2	0,981500332	1,229051488
3	0,995841682	1,056217296
4	0,998988331	1,013985805
5		1,003492123

Die vier letzten Zahlen der zweiten Colonne liefern:

$$K = 2{,}76806309.$$

Dieser Werth ist etwa um 6 Einheiten der 8ten Stelle zu klein. Die oben aufgestellte Genauigkeitsgrenze ergiebt für $\frac{K^2}{4}$

$$2,2.10^{-6},$$

also für K^2

$$8,8.10^{-6}.$$

Dazu könnte wegen der Vernachlässigung der zehnten Stelle und der folgenden ein Fehler von etwa 2 Einheiten der 7ten Stelle kommen. K selbst wird also jedenfalls auf $1,7.10^{-6}$ richtig sein.

Wenn eine Rechenmaschine nicht zur Verfügung steht, so kann man die Rechnung auch mit Hilfe einer logarithmisch-trigonometrischen Tafel auf die folgende Weise ausführen:

Setzt man:

$$\operatorname{sn} u = \sin\varphi, \qquad k \operatorname{sn} u = \sin\gamma$$

so ist:

$$\operatorname{cn} u = \cos\varphi, \qquad \operatorname{dn} u = \cos\gamma.$$

Berechnet man zwei neue Winkel φ_1 und γ_1 aus den Gleichungen:

$$\frac{\sin\frac{1}{2}\varphi}{\cos\frac{1}{2}\gamma} = \sin\varphi_1, \qquad k\sin\varphi_1 = \sin\gamma_1$$

so ist:

$$\operatorname{sn}\frac{u}{2} = \sin\varphi_1, \qquad \operatorname{cn}\frac{u}{2} = \cos\varphi_1, \qquad \operatorname{dn}\frac{u}{2} = \cos\gamma_1.$$

Auf diese Weise kann man fortfahren und $f\left(\frac{u}{2^n}\right)$ und $g\left(\frac{u}{2^n}\right)$ oder vielmehr die Logarithmen dieser Grössen finden. Denn nur diese braucht man bei der Anwendung der aufgestellten Formel. Wenn n rein imaginär ist, so muss man andere trigonometrische Hilfsfunctionen einführen.

Man setze:

$$\operatorname{sn} u = i\tan\varphi, \qquad k'\sin\varphi = \sin\gamma,$$

so ist:

$$\operatorname{cn} u = \frac{1}{\cos\varphi}, \qquad \frac{\operatorname{dn} u}{\operatorname{cn} u} = \cos\gamma.$$

Berechnet man zwei neue Winkel φ_1 und γ_1 durch die Gleichungen:

$$\frac{\sin\frac{\varphi}{2}}{\cos\frac{\gamma}{2}} = \sin\varphi_1, \qquad k'\sin\varphi_1 = \sin\gamma_1,$$

so ist:

$$\operatorname{sn}\frac{u}{2} = i\tan\varphi_1, \qquad \operatorname{cn}\frac{u}{2} = \frac{1}{\cos\varphi_1}, \qquad \frac{\operatorname{dn}\frac{u}{2}}{\operatorname{cn}\frac{u}{2}} = \cos\gamma_1.$$

Es ist bei der logarithmischen Rechnung vortheilhafter statt einer der Functionen $f(u) = \frac{\operatorname{cn} u}{\operatorname{dn} u}$ oder $g(u) = \frac{1}{\operatorname{dn} u}$ die ungrade Function $\frac{\operatorname{sn} u}{\operatorname{dn} u}$ zu Grunde zu legen. Man braucht alsdann $\operatorname{cn} u$ gar nicht mit zu berechnen. Die Berechnung ist ebenso bequem wie die von $f(u)$ und $g(u)$. Die Genauigkeit ist, wie wir sogleich sehn werden ungefähr dieselbe. Ein wesentlicher Vortheil aber liegt darin, dass diese Function für kleine Argumente klein ist. Bei der Rechnung mit n-stelligen Logarithmen ist der Fehler in Folge der Vernachlässigung der $n+1^{\text{ten}}$ und der weiteren Stellen etwa 10^{-n} des Betrages der Zahl. Wenn also die Zahl eine negative Charakteristik hat, so bestimmt der Logarithmus sie weiter als bis zur n^{ten} Decimale. Ein Beispiel wird den Vortheil am Besten zeigen. Vorher soll aber noch eine Genauigkeitsgrenze für die Rechnung mit $\frac{\operatorname{sn} u}{\operatorname{dn} u}$ aufgestellt werden.

Der grösste absolute Betrag von $\frac{\operatorname{sn} u}{\operatorname{dn} u}$ auf einem Kreis um den Nullpunkt mit dem Radius $\frac{K}{2}$ ergiebt sich auf dem oben auseinandergesetzten Wege nicht grösser als $k^{-1}k'^{-\frac{1}{2}}(1+k')^{\frac{1}{2}}$, auf einem Kreis mit dem Radius $\frac{K'}{2}$ nicht grösser als $k'^{-1}k^{-\frac{1}{2}}(1+k)^{\frac{1}{2}}$. Daraus folgt ganz ähnlich wie oben für das Verfahren die Genauigkeitsgrenze:

$$1.5\,k^{-1}k'^{-\frac{1}{2}}(1+k')^{\frac{1}{2}}\frac{K^2}{K^2-4|u|^2}\left|\frac{2u}{K}\right|^{2n+4}2^{-n(n+1)}$$

oder auch

$$1,5k'^{-1}k^{-\frac{1}{2}}(1+k)^{\frac{1}{2}}\frac{K'^2}{K'^2-4|u|^2}\left|\frac{2u}{K'}\right|^{2n+4}2^{-n(n+1)}.$$

Hierbei ist $|u|<\frac{K}{2}$ resp. $|u|<\frac{K'}{2}$ vorausgesetzt. Wird $|u|$ nicht grösser als der vierte Theil von K resp. K' angenommen, so ist die Genauigkeitsgrenze

$$k^{-1}k'^{-\frac{1}{2}}(1+k')^{\frac{1}{2}}2^{-(n+1)(n+2)-1} \quad \text{resp.} \quad k'^{-1}k^{-\frac{1}{2}}(1+k)^{\frac{1}{2}}2^{-(n+1)(n+2)-1}.$$

Sei z. B.

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}, \qquad k=\sin 75^\circ$$

zu berechnen, so findet man

n	$\log\sin\varphi_r$	$\log\cos\gamma_r$	φ_r	γ_r
0	0,0000000		90°	75°
1	9,9500183		63° 2′ 8,2″	59° 25′ 11,6″
2	9,7795127	9,9104299	37° 0′ 17,8″	35° 32′ 50,4″
3	9,5227724	9,9762467	19° 27′ 58,55″	18° 46′ 39,55″
4	9,2338962	9,9939681	9° 51′ 59,76″	9° 31′ 37,96″
5	8,9359809	9,9984860		4° 46′ 52,9″

Nun berechnet man den Ausdruck der oben abgeleiteten Formel

$$\frac{32768}{2835}\frac{\sin\varphi_5}{\cos\gamma_5}-\frac{5376}{2835}\frac{\sin\varphi_4}{\cos\gamma_4}+\frac{168}{2835}\frac{\sin\varphi_3}{\cos\gamma_3}-\frac{1}{2835}\frac{\sin\varphi_2}{\cos\gamma_2},$$

in welcher man die Logarithmen der Coefficienten aus einer ein für alle Mal berechneten Tabelle entnehmen kann. Der Ausdruck ist ein Näherungswerth für den vierten Theil des Integrales. Er ergiebt sich gleich 0,6920154 mit der Genauigkeitsgrenze $1,2 \cdot 10^{-6}$. Hierzu kann ein Fehler kommen durch den Gebrauch siebenstelliger Logarithmen. Wir können annehmen, dass sich $\log \sin \varphi$ und $\log \cos \gamma$ bis auf eine Einheit der siebenten Stelle genau ergeben. Die Logarithmen der Producte von $\frac{\sin \varphi_r}{\cos \gamma_r}$ in den betreffenden Coefficienten, werden alsdann bis auf 2,5 Einheiten der 7^{ten} Stelle sicher sein, die zugehörigen Zahlen also etwa auf $6 . 10^{-7}$ ihres Betrages. Das macht in dem gegebenen Falle höchstens etwa 8 Einheiten der 7^{ten} Stelle aus. Der gefundene Näherungswerth muss also weniger als $2 . 10^{-6}$ von dem wahren Werth abweichen. In der That ist er bis auf etwa 4 Einheiten der 7^{ten} Stelle richtig.

Es muss zugegeben werden, dass die Berechnung der Perioden schneller mit Hilfe der Thetafunctionen ausgeführt werden kann, indem man die Theilung einer Periode durch 4 benutzt, besonders dann, wenn beide Perioden doch berechnet werden müssen.

Wenn aber nur eine Periode zu berechnen ist, oder wenn nur ein Werth des Integrals für besondere Grenzen gefunden werden soll, oder endlich wenn die Perioden bereits bekannt sind, so mag das auseinandergesetzte Verfahren wohl am schnellsten zum Ziele führen. Für die Ausführung mit Logarithmen seien hier noch für die Fälle $n = 1, 2, 3, 4$ die Logarithmen der Multiplicatoren auf sieben Stellen angegeben.

n	C_0	$-C_1$	C_2	$-C_3$	C_4
1	0,4259687	9,5228787			
2	0,7550275	9,9488475	8,3467875		
3	1,0628969	0,2779062	8,7727562	6,5474470	
4	1,3656267	0,5857756	9,1018150	6,9734157	4,1409068
1	0,7269987	9,5228787			
2	1,3570874	0,2498775	8,3467875		
3	1,9659869	0,8799662	9,0737862	6,5474470	
4	2,5697467	1,4888656	9,7038750	7,2744457	4,1409068

Bei den Logarithmen, welche die Charakteristik 4, 6, 7, 8, 9 haben, ist

— 10 zu ergänzen. Diese Werthe werden für die meisten practischen Zwecke ausreichen.

Um aber auch den Gebrauch grösserer Werthe von n zu ermöglichen, sollen die Coefficienten für ein beliebiges n angegeben werden. Die Entwickelung der Functionen $\varphi(x)$ ist enthalten in der von EULER gegebenen Entwickelung von

$$(1 + az)(1 + a^2 z) \ldots (1 + a^n z).$$

Bezeichnet man dieses Product mit $P_n(a, z)$, so hat man in Folge der Definition die beiden Gleichungen:

$$(1 + az) P_n(a, az) = P_{n+1}(a, z),$$
$$(1 + a^{n+1} z) P_n(a, z) = P_{n+1}(a, z),$$

folglich

$$(1 + az) P_n(a, az) = (1 + a^{n+1} z) P_n(a, z).$$

Bedeutet $f_\alpha(a)$ den Coefficienten von z^α in der Entwickelung von $P_n(a, z)$ nach Potenzen von z, so folgt aus der Vergleichung der Coefficienten von z^α $(\alpha = 1, 2, \ldots, n)$

$$f_\alpha(a) a^\alpha + f_{\alpha-1}(a) a^\alpha = f_\alpha(a) + f_{\alpha-1}(a) a^{n+1}$$

oder

$$f_\alpha(a)(a^\alpha - 1) = f_{\alpha-1}(a)(a^{n+1} - a^\alpha),$$

Da $f_0(a) = 1$ und $f_n(a) = a^{\frac{n(n+1)}{2}}$, so folgt:

$$f_\alpha(a) = \frac{a^{n+1} - a^\alpha}{a^\alpha - 1} f_{\alpha-1}(a) = \frac{a^{n+1} - a^\alpha}{a^\alpha - 1} \frac{a^{n+1} - a^{\alpha-1}}{a^{\alpha-1} - 1} f_{\alpha-2}(a) = \ldots$$

$$= \frac{a^{n+1} - a^\alpha}{a^\alpha - 1} \frac{a^{n+1} - a^{\alpha-1}}{a^{\alpha-1} - 1} \cdots \frac{a^{n+1} - a}{a - 1} = \frac{a^n - 1}{a - 1} \frac{a^{n-1} - 1}{a^2 - 1} \cdots \frac{a^{n-\alpha+1} - 1}{a^\alpha - 1} a^{\frac{\alpha(\alpha+1)}{2}},$$

oder auch

$$f_\alpha(a) = \frac{a^{\alpha+1} - 1}{a^{n+1} - a^{\alpha+1}} f_{\alpha+1}(a) = \frac{a^{\alpha+1} - 1}{a^{n+1} - a^{\alpha+1}} \frac{a^{\alpha+2} - 1}{a^{n+1} - a^{\alpha+2}} f_{\alpha+2}(a) = \ldots$$

$$= \frac{a^{\alpha+1} - 1}{a^{n+1} - a^{\alpha+1}} \frac{a^{\alpha+2} - 1}{a^{n+1} - a^{\alpha+2}} \cdots \frac{a^n - 1}{a^{n+1} - a^n} a^{\frac{n(n+1)}{2}} = \frac{a^n - 1}{a - 1} \frac{a^{n-1} - 1}{a^2 - 1} \cdots \frac{a^{\alpha+1} - 1}{a^{n-\alpha} - 1} a^{\frac{\alpha(\alpha+1)}{2}}.$$

Für die Functionen $\varphi(x)$ wurden nun oben die folgenden Ausdrücke gefunden. Im ersten Fall, wo in der Entwicklung der Function $f(u)$ alle Potenzen vertreten waren, ergab sich

$$\varphi(x) = \frac{x - 2^2}{1 - 2} \frac{x - 2^3}{1 - 2^2} \cdots \frac{x - 2^{n+1}}{1 - 2^n}$$

im zweiten Falle, wo $f(u)$ nur ungerade Potenzen enthielt

$$\varphi(x) = \frac{x - 2^3}{1 - 2^2} \frac{x - 2^5}{1 - 2^4} \cdots \frac{x - 2^{2n+1}}{1 - 2^{2n}}$$

endlich im dritten Falle, wo in der Entwickelung nur gerade Potenzen vorkamen:

$$\varphi(x) = \frac{x - 2^4}{1 - 2^2} \frac{x - 2^6}{1 - 2^4} \cdots \frac{x - 2^{2n+2}}{1 - 2^{2n}}.$$

Alle drei Functionen lassen sich durch $P_n(a\,, z)$ ausdrücken.

Es ist im ersten Falle:

$$\varphi(x) = x^n \frac{P_n(2\,, -2x^{-1})}{P_n(2\,, -1)}$$

im zweiten Falle:

$$\varphi(x) = x^n \frac{P_n(4\,, -2x^{-1})}{P_n(4\,, -1)}$$

im dritten Falle:

$$\varphi(x) = x^n \frac{P_n(4\,, -4x^{-1})}{P_n(4\,, -1)}.$$

Darnach ist im ersten Falle:

$$C_{n-a} = (-1)^{n-a} \frac{2^{-\frac{(n-a)(n-a+1)}{2}+a}}{(1-2^{-1})(1-2^{-2})\ldots(1-2^{-a})(1-2^{-1})(1-2^{-2})\ldots(1-2^{-n+a})},$$

im zweiten Falle:

$$C_{n-a} = (-1)^{n-a} \frac{4^{-\frac{(n-a)(n-a+1)}{2}} \cdot 2^a}{(1-4^{-1})(1-4^{-2})\ldots(1-4^{-a})(1-4^{-1})(1-4^{-2})\ldots(1-4^{-n+a})},$$

im dritten Falle:

$$C_{n-a} = (-1)^{n-a} \frac{4^{-\frac{(n-a)(n-a+1)}{2}+a}}{(1-4^{-1})(1-4^{-2})\ldots(1-4^{-a})(1-4^{-1})(1-4^{-2})\ldots(1-4^{-n+a})}.$$

Jedes Mal haben $C_{n-\alpha}$ und C_α denselben Nenner und können sich nur durch das Vorzeichen und die Potenz von 2 resp. 4 im Zähler unterscheiden.

Zur Berechnung der Zahlen

$$\frac{1}{(1-2^{-1})(1-2^{-2})\ldots(1-2^{-\alpha})} \quad \text{resp.} \quad \frac{1}{(1-4^{-1})(1-4^{-2})\ldots(1-4^{-\alpha})}$$

welche in den Ausdrücken für die Grössen C vorkommen, kann man für grössere Werthe von α die von Euler gegebene Entwickelung benutzen:

$$\prod_{k=1,2,\ldots,\infty}(1-a^k) = \sum_{k=-\infty\ldots+\infty}(-1)^k a^{\frac{3k^2+k}{2}}.$$

Es ist:

$$\frac{1}{(1-a)(1-a^2)\ldots(a-a^\alpha)} = \frac{(1-a^{\alpha+1})(1-a^{\alpha+2})\ldots}{(1-a)(1-a^2)\ldots}$$
$$= \frac{(1-a^{\alpha+1})(1-a^{\alpha+2})\ldots}{\sum(-1)^k a^{\frac{3k^2+k}{2}}}.$$

Der Zähler kann auch in eine bequem zu berechnende Reihe entwickelt werden mit Hilfe der ebenfalls von Euler gegebenen Formel

$$(1+xz)(1+x^2z)\ldots \text{ in inf. } = \sum \frac{x^{\frac{n(n+1)}{2}}}{(1-x)(1-x^2)\ldots(1-x^n)} z^n.$$

Setzt man $z = -a^\alpha$, $x = a$, so ergiebt sich der Zähler des obigen Ausdruckes gleich

$$1 - \frac{a^{\alpha+1}}{1-a} + \frac{a^{2\alpha+3}}{(1-a)(1-a^2)} - \frac{a^{3\alpha+6}}{(1-a)(1-a^2)(1-a^3)} + \cdots.$$

Für $a = \frac{1}{4}$ ist

$$\sum(-1)^k a^{\frac{3k^2+k}{2}} = 1 - a - a^2 + a^5 + a^7 - a^{12} - a^{15}$$

bis auf einen Fehler von weniger als 10^{-13}.

Es ergiebt sich:

$$\sum(-1)^k a^{\frac{3k^2+k}{2}} = 0{,}6885375371203.$$

Nun berechne man direct

$$\frac{1}{1-a}, \frac{1}{1-a}\frac{1}{1-a^2}, \frac{1}{1-a}\frac{1}{1-a^2}\frac{1}{1-a^3}.$$

Für $\alpha = 4$ werden die vier Glieder

$$1 - \frac{a^{\alpha+1}}{1-a} + \frac{a^{2\alpha+3}}{(1-a)(1-a^2)} - \frac{a^{3\alpha+6}}{(1-a)(1-a^2)(1-a^3)}$$

den gesuchten Werth jenes Zählers schon bis auf 15 Stellen genau angeben. Für grössere Werthe von α werden noch weniger Glieder genügen.

Man erhält so für $\frac{1}{(1-a)(1-a^2)\ldots(1-a^\alpha)}$ den folgenden Ausdruck, welcher für $\alpha \geqq 4$ den Werth auf 13 Decimalen angiebt

$$1{,}4523536424496 - \frac{1{,}89108547194 \,.\, 10^{-3}}{4^{\alpha-4}} + \frac{4{,}924702 \,.\, 10^{-7}}{4^{2(\alpha-4)}} - \frac{3{,}053 \,.\, 10^{-11}}{4^{3(\alpha-4)}}.$$

NACHSCHRIFT.

Wie Herr PHRAGMÉN mir mittheilt ist die oben vorgeschlagene Modification des Verfahrens von ARCHIMEDES, was die Berechnung von π betrifft, bereits bekannt und in dem Lehrbuch von SAIGEY: *Problèmes d'Arithmétique* (Paris 1859), auseinandergesetzt worden. Es ist mir nicht möglich gewesen, dieses Buch einzusehn und ich habe nicht verfolgen können, wer der Urheber des Verfahrens ist, und wie weit es ausser zur Berechnung von π noch angewendet worden.

C. R.