CHAPITRE IV.

Tentatives de généralisation.

§ 23. *Problème des n corps.*

Est-il permis d'espérer qu'on puisse étendre les résultats précédents aux cas où les équations de la dynamique comportent plus de deux degrés de liberté et par conséquent au cas général du problème des n corps?

C'est possible, mais ce ne sera pas sans un nouvel effort.

Je croyais, en commençant ce travail, que la solution du problème, une fois trouvée pour le cas particulier que j'ai traité, se généraliserait immédiatement sans qu'on ait à vaincre aucune difficulté nouvelle en dehors de celles qui sont dues au nombre plus grand des variables et à l'impossibilité d'une représentation géométrique. Je me trompais.

Aussi crois-je devoir insister un peu ici sur la nature des obstacles qui s'opposent à cette généralisation.

S'il y a p degrés de liberté, la situation du système peut être représentée par la position d'un point dans l'espace à $2p - 1$ dimensions. La plupart des conclusions de la première partie sont encore vraies et n'ont à subir aucun changement. Il existe donc une infinité de solutions périodiques représentées par des trajectoires fermées et se classant en stables et en instables, ou même en catégories plus nombreuses, d'après la nature de leurs exposants caractéristiques. Il existe aussi une infinité de solutions asymptotiques.

J'ai cherché également à étendre au cas général le calcul du § 17 en laissant de côté la question de convergence. Les séries qu'on obtient de la sorte peuvent en effet, même lorsqu'elles divergent, être utiles dans certains cas aux astronomes et peut-être guider les géomètres vers la solution définitive.

Supposons trois degrés de liberté et reprenons les équations (1) du § 11 en faisant les mêmes hypothèses que dans ce paragraphe.

Cherchons ensuite trois fonctions de y_1, y_2, y_3:

$$x_1 = \Phi_1(y_1, y_2, y_3),$$

$$x_2 = \Phi_2(y_1, y_2, y_3),$$

$$x_3 = \Phi_3(y_1, y_2, y_3),$$

satisfaisant aux équations:

$$\frac{dx_1}{dy_1}\frac{dF}{dx_1} + \frac{dx_1}{dy_2}\frac{dF}{dx_2} + \frac{dx_1}{dy_3}\frac{dF}{dx_3} + \frac{dF}{dy_1} = 0,$$

$$\frac{dx_2}{dy_1}\frac{dF}{dx_1} + \frac{dx_2}{dy_2}\frac{dF}{dx_2} + \frac{dx_2}{dy_3}\frac{dF}{dx_3} + \frac{dF}{dy_2} = 0,$$

$$\frac{dx_3}{dy_1}\frac{dF}{dx_1} + \frac{dx_3}{dy_2}\frac{dF}{dx_2} + \frac{dx_3}{dy_3}\frac{dF}{dx_3} + \frac{dF}{dy_3} = 0,$$

ou, ce qui revient au même, aux équations:

$$F = C, \qquad \frac{dx_1}{dy_2} = \frac{dx_2}{dy_1}, \qquad \frac{dx_3}{dy_2} = \frac{dx_2}{dy_3}, \qquad \frac{dx_1}{dy_3} = \frac{dx_3}{dy_1}.$$

Nous supposerons que x_1, x_2, x_3 peuvent se développer suivant les puissances de μ ou de $\sqrt{\mu}$ et que pour $\mu = 0$, elles se réduisent à des constantes x_1^0, x_2^0, x_3^0.

Nous poserons ensuite comme plus haut:

$$\frac{dF_0}{dx_1^0} = -n_1, \qquad \frac{dF_0}{dx_2^0} = -n_2, \qquad \frac{dF_0}{dx_3^0} = -n_3.$$

Si entre n_1, n_2, n_3 il n'y a aucune relation linéaire à coefficients entiers, on peut développer x_1, x_2 et x_3 suivant les puissances de μ; chaque terme est périodique à la fois par rapport à y_1, à y_2 et à y_3. Mais il s'introduit de petits diviseurs.

Si entre n_1, n_2 et n_3 il y a une relation linéaire et une seule à coefficients entiers:

$$m_1 n_1 + m_2 n_2 + m_3 n_3 = 0,$$

les calculs peuvent se poursuivre absolument comme dans le § 18. Les trois fonctions x_1, x_2 et x_3 se développent suivant les puissances de $\sqrt{\mu}$ et elles sont au moins doublement périodiques, je veux dire qu'elles ne changent pas quand y_1, y_2 et y_3 augmentent d'un multiple de 2π de telle façon que $m_1 y_1 + m_2 y_2 + m_3 y_3$ ne change pas; il y a encore de petits diviseurs.

Il reste un troisième cas, le plus intéressant de tous, qui est celui où il y a entre n_1, n_2, n_3 deux relations linéaires à coefficients entiers:

$$m_1 n_1 + m_2 n_2 + m_3 n_3 = 0,$$
$$m'_1 n_1 + m'_2 n_2 + m'_3 n_3 = 0.$$

On peut alors développer x_1, x_2 et x_3 suivant les puissances de $\sqrt{\mu}$ et de façon que ces fonctions soient périodiques, je veux dire qu'elles ne changent pas quand y_1, y_2 et y_3 augmentent d'un multiple de 2π et de telle sorte que $m_1 y_1 + m_2 y_2 + m_3 y_3$ et $m'_1 y_1 + m'_2 y_2 + m'_3 y_3$ ne changent pas. Il n'y a plus de petits diviseurs, mais le calcul de ces fonctions n'est pas sans certaines difficultés.

En première approximation, la détermination de ces fonctions dépend de l'intégration d'un système d'équations différentielles qui ont la forme canonique des équations de la dynamique, *mais avec deux degrés de liberté seulement.* Dans presque toutes les applications, ces équations dépendront d'un paramètre très petit par rapport auquel on pourra développer, de manière qu'on pourra leur appliquer les conclusions des chapitres I et II (1ère partie).

Dans les approximations suivantes, on n'aura plus à effectuer que des quadratures.

Ce n'est pas tout; le problème des n corps présente des difficultés spéciales qu'on ne rencontre pas dans le cas général. Sans doute ces difficultés ne sont pas aussi essentielles que celles dont j'ai signalé plus haut l'existence, et un peu d'attention doit permettre d'en triompher.

Mais j'en dois dire ici quelques mots.

Dans le problème des n corps, F_0 ne dépend pas de toutes les variables linéaires x_i; par conséquent, non seulement le hessien de F_0 par rapport aux variables x_i est nul, mais le hessien d'une fonction arbitraire de F_0 est encore nul. (Cf. page 121.) Cela vient du fait suivant: si $\mu = 0$, c'est à dire dans le mouvement Képlerien, les périhélies sont fixes.

Cette difficulté n'existait pas dans le cas que nous avons traité (1er exemple, § 15) parce que nous avions pris pour variable, non pas g longitude du périhélie, mais $g - t$. Elle n'existerait pas non plus avec une loi d'attraction autre que la newtonienne.

Voici quelles en sont les étranges conséquences:

Nous avons vu qu'il y a deux sortes de solutions périodiques: les solutions du 1er genre, dont nous avons parlé dans le chapitre III (1ère partie) et qui subsistent quelque petit que soit μ, et les solutions du 2^{d} genre dont nous avons parlé dans le § 20 et qui disparaissent l'une après l'autre quand on fait décroître μ.

Dans le cas du problème des trois corps, si l'on fait $\mu = 0$, les orbites des deux petits corps se réduisent à deux ellipses Képleriennes. Que deviennent alors les solutions périodiques du 1er genre quand on fait $\mu = 0$? En d'autres termes quelles sont les solutions périodiques des équations du mouvement Képlerien? Les unes correspondent au cas où les deux moyens mouvements sont commensurables. Mais il en est d'autres qu'il est plus malaisé d'apercevoir et sur lesquelles je dois insister.

Si $\mu = 0$, c'est que les masses des deux planètes sont infiniment petites et qu'elles ne peuvent agir l'une sur l'autre d'une manière sensible, *à moins d'être à une distance infiniment petite l'une de l'autre*. Mais si ces planètes passent infiniment près l'une de l'autre, leurs orbites vont être brusquement modifiées comme si elles s'étaient choquées. On peut disposer des conditions initiales de telle façon que ces chocs se produisent périodiquement et on obtient ainsi des solutions discontinues qui sont de véritables solutions périodiques du problème du mouvement Képlerien et *que nous n'avons pas le droit de laisser de côté.*

Telles sont les raisons pour lesquelles j'ai renoncé, au moins momentanément, à étendre au cas général les résultats obtenus. Non seulement le temps me fait défaut, mais je crois qu'une pareille tentative serait prématurée.

En effet, je n'ai pu faire encore du cas particulier même auquel je me suis restreint une étude suffisamment approfondie. Ce n'est qu'après bien des recherches et des efforts que les géomètres connaîtront complètement ce domaine, où je n'ai pu faire qu'une simple reconnaissance, et qu'ils y trouveront un terrain solide d'où ils puissent s'élancer à de nouvelles conquêtes.