CHAPITRE II.

Théorie des invariants intégraux.

§ 5. *Propriétés diverses des équations de la dynamique.*

Soit F une fonction d'une double série de variables:

$$x_1, x_2, \ldots, x_n,$$
$$y_1, y_2, \ldots, y_n$$

et du temps t.

Supposons que l'on ait les équations différentielles:

$$\frac{dx_i}{dt} = \frac{dF}{dy_i}, \qquad \frac{dy_i}{dt} = -\frac{dF}{dx_i}. \tag{1}$$

Considérons deux solutions infiniment voisines de ces équations:

$$x_1, x_2, \ldots, x_n, y_1, y_2, \ldots, y_n,$$
$$x_1 + \xi_1, x_2 + \xi_2, \ldots, x_n + \xi_n, y_1 + \eta_1, y_2 + \eta_2, \ldots, y_n + \eta_n,$$

les ξ et les η étant assez petits pour qu'on puisse négliger leurs carrés.

Les ξ et les η satisferont alors aux équations différentielles linéaires

$$\begin{aligned} \frac{d\xi_i}{dt} &= \sum_k \frac{d^2F}{dy_i dx_k}\xi_k + \sum_k \frac{d^2F}{dy_i dy_k}\eta_k, \\ \frac{d\eta_i}{dt} &= -\sum_k \frac{d^2F}{dx_i dx_k}\xi_k - \sum_k \frac{d^2F}{dx_i dy_k}\eta_k, \end{aligned} \tag{2}$$

qui sont les équations aux variations des équations (1).

Soit ξ'_i, η'_i une autre solution de ces équations linéaires de sorte que:

$$\begin{aligned} \frac{d\xi'_i}{dt} &= \sum_k \frac{d^2F}{dy_i dx_k}\xi'_k + \sum_k \frac{d^2F}{dy_i dy_k}\eta'_k, \\ \frac{d\eta'_i}{dt} &= -\sum_k \frac{d^2F}{dx_i dx_k}\xi'_k - \sum_k \frac{d^2F}{dx_i dy_k}\eta'_k. \end{aligned} \tag{2'}$$

Multiplions les équations (2) et (2') respectivement par η'_i, $-\xi'_i$, $-\eta_i$, ξ_i et faisons la somme de toutes ces équations, il viendra:

$$\sum_i \left(\eta'_i \frac{d\xi_i}{dt} - \xi'_i \frac{d\eta_i}{dt} - \eta_i \frac{d\xi'_i}{dt} + \xi_i \frac{d\eta'_i}{dt}\right) =$$

$$\sum_i \sum_k \left(\xi_k \eta'_i \frac{d^2F}{dy_i dx_k} + \eta_k \eta'_i \frac{d^2F}{dy_i dy_k} + \xi_k \xi'_i \frac{d^2F}{dx_i dx_k} + \eta_k \xi'_i \frac{d^2F}{dx_i dy_k}\right)$$

$$-\sum_i \sum_k \left(\eta_i \xi'_k \frac{d^2F}{dy_i dx_k} + \eta_i \eta'_k \frac{d^2F}{dy_i dy_k} + \xi_i \xi'_k \frac{d^2F}{dx_i dx_k} + \xi_i \eta'_i \frac{d^2F}{dx_i dy_k}\right)$$

ou

$$\sum \frac{d}{dt}[\eta'_i \xi_i - \xi'_i \eta_i] = 0$$

ou enfin

$$(3) \qquad \eta'_1 \xi_1 - \xi'_1 \eta_1 + \eta'_2 \xi_2 - \xi'_2 \eta_2 + \ldots + \eta'_n \xi_n - \xi'_n \eta_n = \text{constante.}$$

Voilà une relation qui lie entre elles deux solutions quelconques des équations linéaires (2).

Il est aisé de trouver d'autres relations analogues.

Considérons quatre solutions des équations (2)

$$\xi_i, \xi'_i, \xi''_i, \xi'''_i,$$

$$\eta_i, \eta'_i, \eta''_i, \eta'''_i.$$

Considérons ensuite la somme des déterminants:

$$\sum_i \sum_k \begin{vmatrix} \xi_i & \xi'_i & \xi''_i & \xi'''_i \\ \eta_i & \eta'_i & \eta''_i & \eta'''_i \\ \xi_k & \xi'_k & \xi''_k & \xi'''_k \\ \eta_k & \eta'_k & \eta''_k & \eta'''_k \end{vmatrix},$$

où les indices i et k varient depuis 1 jusqu'à n. On vérifierait sans peine que cette somme est encore une constante.

Plus généralement si l'on forme à l'aide de $2p$ solutions des équations (2) la somme de déterminants:

$$\sum_{\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_p} |\xi_{\alpha_1} \eta_{\alpha_1} \xi_{\alpha_2} \eta_{\alpha_2} \ldots \xi_{\alpha_p} \eta_{\alpha_p}|,$$

$$(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p = 1, 2, \ldots, n)$$

cette somme sera une constante.

En particulier, le déterminant formé par les valeurs des $2n$ quantités ξ et η dans $2n$ solutions des équations (2) sera une constante.

Ces considérations permettent de trouver une solution des équations (2) quand on en connaît une intégrale et réciproquement.

Supposons en effet que

$$\xi_i = \alpha_i, \qquad \eta_i = \beta_i$$

soit une solution particulière des équations (2) et désignons par ξ_i et η_i une solution quelconque de ces mêmes équations. On devra avoir:

$$\Sigma \xi_i \beta_i - \eta_i \alpha_i = \text{const.}$$

ce qui sera une intégrale des équations (2).

Réciproquement soit

$$\Sigma A_i \xi_i + \Sigma B_i \eta_i = \text{const.}$$

une intégrale des équations (2), on devra avoir:

$$\sum_i \frac{dA_i}{dt}\xi_i + \sum_i \frac{dB_i}{dt}\eta_i + \sum_i A_i \left[\sum_k \frac{d^2F}{dy_i dx_k}\xi_k + \sum_k \frac{d^2F}{dy_i dy_k}\eta_k\right]$$
$$-\sum_i B_i \left[\sum_k \frac{d^2F}{dx_i dx_k}\xi_k + \sum_k \frac{d^2F}{dx_i dy_k}\eta_k\right] = 0,$$

d'où en identifiant

$$\frac{dA_i}{dt} = -\sum_k \frac{d^2F}{dy_k dx_i}A_k + \sum_k \frac{d^2F}{dx_k dx_i}B_k,$$
$$\frac{dB_i}{dt} = -\sum_k \frac{d^2F}{dy_k dy_i}A_k + \sum_k \frac{d^2F}{dx_k dy_i}B_k,$$

ce qui montre que:

$$\xi_i = B_i, \qquad \eta_i = -A_i$$

est une solution particulière des équations (2).

Si maintenant:

$$\Phi(x_i, y_i, t) = \text{const.}$$

est une intégrale des équations (1),

$$\sum \frac{d\Phi}{dx_i}\xi_i + \sum \frac{d\Phi}{dy_i}\eta_i = \text{const.}$$

sera une intégrale des équations (2), et par conséquent:

$$\xi_i = \frac{d\Phi}{dy_i}, \qquad \eta_i = -\frac{d\Phi}{dx_i}$$

sera une solution particulière de ces équations.

Si $\Phi = \text{const.}$, $\Phi_1 = \text{const.}$ sont deux intégrales des équations (1), on aura

$$\sum\left(\frac{d\Phi}{dx_i}\frac{d\Phi_1}{dy_i} - \frac{d\Phi}{dy_i}\frac{d\Phi_1}{dx_i}\right) = \text{const.}$$

C'est le théorème de POISSON.

Considérons le cas particulier où les x désignent les coordonnées rectangulaires de n points dans l'espace; nous les désignerons par la notation à double indice:

$$x_{1i}\,,\ x_{2i}\,,\ x_{3i}\,,$$

le premier indice se rapportant aux trois axes rectangulaires de coordonnées et le second indice aux n points matériels. Soit m_i la masse du i^e point matériel. On aura alors:

$$m_i \frac{d^2 x_{ki}}{dt^2} = \frac{dV}{dx_{ki}},$$

V étant la fonction des forces.

On aura alors pour l'équation des forces vives:

$$F = \sum \frac{m_i}{2}\left(\frac{dx_{ki}}{dt}\right)^2 - V = \text{const.}$$

Posons ensuite:

$$y_{ki} = m_i \frac{dx_{ki}}{dt},$$

d'où

$$F = \sum \frac{y_{ki}^2}{2m_i} - V = \text{const.} \tag{4}$$

et

$$\frac{dx_{ki}}{dt} = \frac{dF}{dy_{ki}}, \qquad \frac{dy_{ki}}{dt} = -\frac{dF}{dx_{ki}}. \tag{1'}$$

Soit:

(5) $$x_{ki} = \varphi_{ki}(t), \qquad y_{ki} = m_i \varphi'_{ki}(t)$$

une solution de ces équations (1′), une autre solution sera:

$$x_{ki} = \varphi_{ki}(t+h), \qquad y_{ki} = m_i \varphi'_{ki}(t+h),$$

h étant une constante quelconque.

En regardant h comme infiniment petit, on obtiendra une solution des équations (2′) qui correspondent à (1′) comme les équations (2) correspondent à (1):

$$\xi_{ki} = h\varphi'_{ki}(t) = h\frac{y_{ki}}{m_i}, \qquad \eta_{ki} = hm_i\varphi''_{ki}(t) = h\frac{dV}{dx_{ki}},$$

h désignant un facteur constant très petit que l'on peut supprimer quand on ne considère que les équations linéaires (2′).

Connaissant une solution:

$$\xi = \frac{y}{m}, \qquad \eta = \frac{dV}{dx}$$

de ces équations, on peut déduire une intégrale:

$$\sum \frac{y\eta}{m} - \sum \frac{dV}{dx}\xi = \text{const.}$$

Mais cette même intégrale s'obtient très aisément en différentiant l'équation des forces vives (4).

Si les points matériels sont soustraits à toute action extérieure, on peut déduire de la solution (5) une autre solution:

$$\begin{aligned}
x_{1i} &= \varphi_{1i}(t) + h + kt, & y_{1i} &= m_i\varphi'_{1i}(t) + m_i k,\\
x_{2i} &= \varphi_{2i}(t), & y_{2i} &= m_i\varphi'_{2i}(t),\\
x_{3i} &= \varphi_{3i}(t), & y_{3i} &= m_i\varphi'_{3i}(t),
\end{aligned}$$

h et k étant des constantes quelconques. En regardant ces constantes comme infiniment petites, on obtient deux solutions des équations (2′)

$$\xi_{1i} = 1, \qquad \xi_{2i} = \xi_{3i} = \eta_{1i} = \eta_{2i} = \eta_{3i} = 0,$$

$$\xi_{1i} = t, \qquad \xi_{2i} = \xi_{3i} = \eta_{2i} = \eta_{3i} = 0, \qquad \eta_{1i} = m_i.$$

On obtient ainsi deux intégrales de (2')

$$\Sigma_i \eta_{1i} = \text{const.},$$

$$\Sigma \eta_{1i} t - \Sigma m_i \xi_{1i} = \text{const.}$$

On peut obtenir ces intégrales en différentiant les équations du mouvement du centre de gravité:

$$\Sigma m_i x_{1i} = t \Sigma y_{1i} + \text{const.},$$

$$\Sigma y_{1i} = \text{const.}$$

Si l'on fait tourner la solution (5) d'un angle ω autour de l'axe des z, on obtient une autre solution:

$$x_{1i} = \varphi_{1i} \cos\omega - \varphi_{2i} \sin\omega, \qquad \frac{y_{1i}}{m_i} = \varphi'_{1i} \cos\omega - \varphi'_{2i} \sin\omega,$$

$$x_{2i} = \varphi_{1i} \sin\omega + \varphi_{2i} \cos\omega, \qquad \frac{y_{2i}}{m_i} = \varphi'_{1i} \sin\omega + \varphi'_{2i} \cos\omega,$$

$$x_{3i} = \varphi_{3i}, \qquad \frac{y_{3i}}{m_i} = \varphi'_{3i}.$$

En regardant ω comme infiniment petit, on trouve comme solution de (2')

$$\xi_{1i} = -x_{2i}, \qquad \eta_{1i} = -y_{2i},$$

$$\xi_{2i} = x_{1i}, \qquad \eta_{2i} = y_{1i},$$

$$\xi_{3i} = 0, \qquad \eta_{3i} = 0,$$

d'où l'intégrale de (2')

$$\Sigma_i (x_{1i} \eta_{2i} - y_{1i} \xi_{2i} - x_{2i} \eta_{1i} + y_{2i} \xi_{1i}) = \text{const.}$$

que l'on pouvait obtenir aussi en différentiant l'intégrale des aires de (1')

$$\Sigma (x_{1i} y_{2i} - x_{2i} y_{1i}) = \text{const.}$$

Supposons maintenant que la fonction V soit homogène et de degré -1 par rapport aux x ce qui est le cas de la nature.

Les équations (1') ne changeront pas quand on multipliera t par λ^3, les x par λ^2 et les y par λ^{-1}, λ étant une constante quelconque. De la solution (4) on déduira donc la solution suivante:

$$x_{ki} = \lambda^2 \varphi_{ki}\left(\frac{t}{\lambda^3}\right), \qquad y_{ki} = \lambda^{-1} m_i \varphi'_{ki}\left(\frac{t}{\lambda^3}\right).$$

Si l'on regarde λ comme très voisin de l'unité, on obtiendra comme solution des équations (2')

$$\xi_{ki} = 2\varphi_{ki} - 3t\varphi'_{ki}, \qquad \eta_{ki} = -m_i\varphi'_{ki} - 3m_i t\varphi''_{ki},$$

ou

$$(6) \qquad \xi_{ki} = 2x_{ki} - 3t\frac{y_{ki}}{m_i}, \qquad \eta_{ki} = -y_{ki} - 3t\frac{dV}{dx_{ki}},$$

d'où l'intégrale suivante des équations (2'), laquelle, à la différence de celles que nous avons envisagées jusqu'ici, ne peut être obtenue en différentiant une intégrale connue des équations (1'):

$$\sum(2x_{ki}\eta_{ki} + y_{ki}\xi_{ki}) = 3t\left[\sum\left(\frac{y_{ki}\eta_{ki}}{m_i} - \frac{dV}{dx_{ki}}\xi_{ki}\right)\right] + \text{const.}$$

§ 6. *Définition des invariants intégraux.*

Considérons un système d'équations différentielles:

$$\frac{dx_i}{dt} = X_i,$$

X_i étant une fonction donnée de $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Si l'on a:

$$F(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \text{const.},$$

cette relation s'appelle une intégrale des équations données. Le premier membre de cette relation peut s'appeler un invariant puisqu'il n'est pas altéré quand on augmente les x_i d'accroissements infiniment petits dx_i compatibles avec les équations différentielles.

Soit maintenant

$$x'_1, x'_2, \ldots, x'_n$$

une autre solution des mêmes équations différentielles, de telle façon que l'on ait:

$$\frac{dx'_i}{dt} = X'_i,$$

X'_i étant une fonction formée avec $x'_1, x'_2, \ldots, x'_n$ comme X_i l'était avec $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

Il pourra se faire qu'on ait entre les $2n$ quantités x et x', une relation:

$$F_1(x_1, x_2, \ldots, x_n, x'_1, x'_2, \ldots, x'_n) = \text{const.}$$

Le premier membre F_1 pourra encore s'appeler un invariant de nos équations différentielles, mais au lieu de dépendre d'une seule solution de ces équations, il dépendra de deux solutions.

On peut supposer que $x_1, x_2, \ldots, x_n$ représentent les coordonnées d'un point dans l'espace à n dimensions et que les équations différentielles données définissent la loi du mouvement de ce point. Si l'on considère deux solutions de ces équations, on aura deux points mobiles différents, se mouvant d'après une même loi définie par nos équations différentielles. L'invariant F_1 sera alors une fonction des coordonnées de ces deux points, qui dans le mouvement de ces deux points conservera sa valeur initiale.

On pourrait évidemment de même, au lieu de deux points mobiles, en envisager trois ou même un plus grand nombre.

Supposons maintenant que l'on considère une infinité de points mobiles et que les positions initiales de ces points forment un certain arc de courbe C dans l'espace à n dimensions.

Quand on se donne la position initiale d'un point mobile et les équations différentielles qui définissent la loi de son mouvement, la position du point à un instant quelconque se trouve entièrement déterminée.

Si donc nous savons que nos points mobiles, en nombre infini, forment à l'origine des temps un arc C, nous connaîtrons leurs positions à un instant t quelconque et nous verrons que les points mobiles à l'instant t forment dans l'espace à n dimensions un nouvel arc de courbe C'. Nous sommes donc en présence d'un arc de courbe qui se déplace en se déformant parce que ses différents points se meuvent conformément à la loi définie par les équations différentielles données.

Supposons maintenant que dans ce déplacement et cette déformation l'intégrale suivante:

$$\int (Y_1 dx_1 + Y_2 dx_2 + \ldots + Y_n dx_n) = \int \Sigma Y_i dx_i$$

(où les Y sont des fonctions données des x et qui est étendue à tout l'arc de courbe) ne change pas de valeur. Cette intégrale sera encore pour nos équations différentielles un invariant, dépendant non plus d'un, de deux ou de trois, mais d'une infinité de points mobiles. Pour indiquer quelle en est la forme, je l'appellerai un invariant intégral.

De même on pourrait imaginer qu'une intégrale de la forme:

$$\int \sqrt{\Sigma Y_{ik} dx_i dx_k},$$

étendue à tout l'arc de courbe, demeure invariable; ce serait encore un invariant intégral.

On peut imaginer également des invariants intégraux qui soient definis par des intégrales doubles ou multiples.

Imaginons qu'on considère un fluide en mouvement permanent et de telle sorte que les trois composantes X, Y, Z de la vitesse d'une molécule quelconque soient des fonctions données des trois coordonnées x, y, z de cette molécule. Alors on pourra dire que la loi du mouvement d'une quelconque des molécules du fluide est définie par les équations différentielles:

$$\frac{dx}{dt} = X, \qquad \frac{dy}{dt} = Y, \qquad \frac{dz}{dt} = Z.$$

On sait que l'équation aux dérivées partielles

$$\frac{dX}{dx} + \frac{dY}{dy} + \frac{dZ}{dz} = 0$$

exprime que le fluide est incompressible. Supposons donc que les fonctions X, Y, Z satisfassent à cette équation et considérons un ensemble de molécules occupant à l'origine des temps un certain volume. Les molécules se déplaceront, mais, en vertu de l'incompressibilité du fluide le volume qu'elles occuperont demeurera invariable. En d'autres termes le volume, c'est à dire l'intégrale triple:

$$\iiint dx\,dy\,dz$$

sera un invariant intégral. Plus généralement si l'on envisage les équations:

$$\frac{dx_i}{dt} = X_i \qquad (i=1,2,\ldots,n)$$

et que l'on ait la relation:

$$\sum_{i=1}^{i=n} \frac{dX_i}{dx_i} = 0,$$

l'intégrale d'ordre n

$$\int dx_1 dx_2 \ldots dx_n$$

que je continuerai à appeler le volume, sera un invariant intégral.

C'est ce qui arrivera en particulier pour les équations générales de la dynamique; car si l'on considère ces équations:

$$\frac{dx_i}{dt} = \frac{dF}{dy_i}, \qquad \frac{dy_i}{dt} = -\frac{dF}{dx_i},$$

il est aisé de voir que

$$\sum \frac{d\left(\frac{dF}{dy_i}\right)}{dx_i} + \sum \frac{d\left(-\frac{dF}{dx_i}\right)}{dy_i} = 0.$$

Mais en ce qui concerne ces équations générales de la dynamique, il y a outre le volume, un autre invariant intégral qui nous sera encore plus utile. Nous avons vu en effet que:

$$\Sigma(\xi_i \eta_i' - \xi_i' \eta_i) = \text{const.}$$

Cela traduit dans notre nouveau langage signifie que l'intégrale double

$$\iint \Sigma_i dx_i dy_i$$

est un invariant intégral, ainsi que je le démontrerai plus loin.

Pour exprimer ce résultat d'une autre manière, prenons le cas du problème des n corps.

Nous représenterons la situation du système des n corps par la position de $3n$ points dans un plan. Le premier point aura pour abscisse l'x du premier corps et pour ordonnée la projection sur l'axe des x de la quantité de mouvement de ce corps; le second point aura pour abscisse l'y de ce même corps et pour ordonnée la projection sur l'axe des y de sa quantité de mouvement et ainsi de suite.

Imaginons une double infinité de situations initiales du système. A chacune d'elles correspond une position de nos $3n$ points et si l'on considère l'ensemble de ces situations, on verra que ces $3n$ points remplissent $3n$ aires planes.

Si maintenant le système se déplace conformément à la loi de l'attraction, les $3n$ points qui représentent sa situation vont aussi se déplacer; les $3n$ aires planes que je viens de définir vont donc se déformer, mais *leur somme demeurera constante.*

Le théorème sur la conservation du volume n'est qu'une conséquence de celui qui précède.

Il y a dans le cas du problème des n corps, un autre invariant intégral sur lequel je veux attirer l'attention.

Considérons une simple infinité de positions initiales du système formant un arc de courbe dans l'espace à $6n$ dimensions. Soient C_0 et C_1 les valeurs de la constante des forces vives aux deux extrémités de cet arc. Je démontrerai plus loin que l'expression

$$\int \Sigma (2x_i dy_i + y_i dx_i) + 3(C_1 - C_0)t$$

(où l'intégrale est étendue à l'arc de courbe tout entier et où le temps n'entre plus si $C_1 = C_0$) est encore un invariant intégral; on peut d'ailleurs en déduire aisément les autres invariants intégraux dont il a été question plus haut.

Nous dirons qu'un invariant intégral est du 1er ordre, du 2^{d} ordre, ... ou du n^e ordre selon qu'il sera une intégrale simple, double, ... ou d'ordre n.

Parmi les invariants intégraux nous distinguerons les *invariants positifs* que nous définirons comme il suit.

L'invariant intégral d'ordre n

$$\int M dx_1 dx_2 \ldots dx_n$$

sera un invariant positif dans un certain domaine, si M est une fonction de $x_1, x_2, \ldots, x_n$ qui reste positive, finie et uniforme dans ce domaine.

Il me reste à démontrer les divers resultats que je viens d'énoncer; cette démonstration peut se faire par un calcul très simple.

Soit:

$$(1) \qquad \frac{dx_1}{dt} = X_1, \qquad \frac{dx_2}{dt} = X_2, \quad \ldots, \quad \frac{dx_n}{dt} = X_n$$

un système d'équations différentielles où $X_1, X_2, \ldots, X_n$ sont des fonctions de $x_1, x_2, \ldots, x_n$ telles que:

$$(2) \qquad \frac{dX_1}{dx_1} + \frac{dX_2}{dx_2} + \ldots + \frac{dX_n}{dx_n} = 0.$$

Soit une solution de ce système d'équations dépendant de n constantes arbitraires:

$$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n.$$

Cette solution écrira:

$$\begin{aligned} x_1 &= \varphi_1(t, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n), \\ x_2 &= \varphi_2(t, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_n &= \varphi_n(t, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n). \end{aligned}$$

Il s'agit de démontrer que l'intégrale

$$J = \int dx_1 dx_2 \ldots dx_n = \int \Delta d\alpha_1 d\alpha_2 \ldots d\alpha_n$$

où

$$\Delta = \begin{vmatrix} \frac{dx_1}{d\alpha_1} & \frac{dx_2}{d\alpha_1} & \ldots & \frac{dx_n}{d\alpha_1} \\ \frac{dx_1}{d\alpha_2} & \frac{dx_2}{d\alpha_2} & \ldots & \frac{dx_n}{d\alpha_2} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \frac{dx_1}{d\alpha_n} & \frac{dx_2}{d\alpha_n} & \ldots & \frac{dx_n}{d\alpha_n} \end{vmatrix}$$

est une constante.

On a en effet:

$$\frac{dJ}{dt} = \int \frac{d\Delta}{dt} d\alpha_1 d\alpha_2 \ldots d\alpha_n$$

et

$$\frac{d\Delta}{dt} = \Delta_1 + \Delta_2 + \ldots + \Delta_n,$$

Δ_k étant le déterminant Δ dans la k^e colonne duquel on a remplacé:

$$\frac{dx_k}{d\alpha_1}, \frac{dx_k}{d\alpha_2}, \ldots, \frac{dx_k}{d\alpha_n}$$

par

$$\frac{d^2x_k}{d\alpha_1 dt}, \frac{d^2x_k}{d\alpha_2 dt}, \ldots, \frac{d^2x_k}{d\alpha_n dt}.$$

Mais on a

$$\frac{dx_k}{dt} = X_k,$$

d'où:

$$\frac{d^2x_k}{d\alpha_i dt} = \frac{dX_k}{dx_1}\frac{dx_1}{d\alpha_i} + \frac{dX_k}{dx_2}\frac{dx_2}{d\alpha_i} + \ldots + \frac{dX_k}{dx_n}\frac{dx_n}{d\alpha_i}.$$

On déduit de là:

$$\Delta_k = \Delta \frac{dX_k}{dx_k},$$

d'où

$$\frac{dJ}{dt} = \int (\Delta_1 + \Delta_2 + \ldots + \Delta_n) d\alpha_1 d\alpha_2 \ldots d\alpha_n$$

$$= \int \left(\frac{dX_1}{dx_1} + \frac{dX_2}{dx_2} + \ldots + \frac{dX_n}{dx_n}\right) \Delta d\alpha_1 d\alpha_2 \ldots d\alpha_n = 0.$$

C. Q. F. D.

Supposons maintenant qu'au lieu de la relation (2) nous ayons:

$$(2') \qquad \frac{dMX_1}{dx_1} + \frac{dMX_2}{dx_2} + \ldots + \frac{dMX_n}{dx_n} = 0,$$

M étant une fonction quelconque de $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

Je dis que

$$J = \int M dx_1 dx_2 \dots dx_n = \int M \Delta d\alpha_1 d\alpha_2 \dots d\alpha_n$$

est une constante.

On a en effet:

$$\frac{dJ}{dt} = \int \left(\Delta \frac{dM}{dt} + M \frac{d\Delta}{dt} \right) d\alpha_1 d\alpha_2 \dots d\alpha_n.$$

Il faut montrer que:

$$\Delta \frac{dM}{dt} + M \frac{d\Delta}{dt} = 0.$$

On a en effet (en vertu des équations (1))

$$\frac{dM}{dt} = X_1 \frac{dM}{dx_1} + X_2 \frac{dM}{dx_2} + \dots + X_n \frac{dM}{dx_n}$$

et (d'après ce que nous venons de voir):

$$\frac{d\Delta}{dt} = \Delta \left(\frac{dX_1}{dx_1} + \frac{dX_2}{dx_2} + \dots + \frac{dX_n}{dx_n} \right).$$

Il vient donc:

$$\Delta \frac{dM}{dt} + M \frac{d\Delta}{dt} = \Delta \left(\frac{dMX_1}{dx_1} + \frac{dMX_2}{dx_2} + \dots + \frac{dMX_n}{dx_n} \right) = 0.$$

C. Q. F. D.

Passons maintenant aux équations de la dynamique.

Soient les équations

$$(1') \qquad \frac{dx_i}{dt} = \frac{dF}{dy_i}, \qquad \frac{dy_i}{dt} = -\frac{dF}{dx_i}. \qquad {\scriptstyle (i=1,2,\dots,n)}$$

Soit une solution contenant deux constantes arbitraires α et β et s'écrivant:

$$x_i = \varphi_i(t, \alpha, \beta),$$
$$y_i = \psi_i(t, \alpha, \beta).$$

Je dis que:

$$J = \int (dx_1 dy_1 + dx_2 dy_2 + \dots + dx_n dy_n) = \int \sum_{i=1}^{i=n} \left(\frac{dx_i}{d\alpha}\frac{dy_i}{d\beta} - \frac{dx_i}{d\beta}\frac{dy_i}{d\alpha}\right) d\alpha d\beta$$

est une constante.

Il vient en effet:

$$\frac{dJ}{dt} = \int \sum \left(\frac{d^2 x_i}{dt\,d\alpha}\frac{dy_i}{d\beta} + \frac{d^2 y_i}{dt\,d\beta}\frac{dx_i}{d\alpha} - \frac{d^2 x_i}{dt\,d\beta}\frac{dy_i}{d\alpha} - \frac{d^2 y_i}{dt\,d\alpha}\frac{dx_i}{d\beta}\right) d\alpha d\beta.$$

Il vient ensuite:

$$\frac{d^2 x_i}{dt\,d\alpha} = \sum_k \frac{d^2 F}{dy_i dx_k}\frac{dx_k}{d\alpha} + \sum_k \frac{d^2 F}{dy_i dy_k}\frac{dy_k}{d\alpha},$$

$$\frac{d^2 x_i}{dt\,d\beta} = \sum_k \frac{d^2 F}{dy_i dx_k}\frac{dx_k}{d\beta} + \sum_k \frac{d^2 F}{dy_i dy_k}\frac{dy_k}{d\beta},$$

$$\frac{d^2 y_i}{dt\,d\alpha} = -\sum_k \frac{d^2 F}{dx_i dx_k}\frac{dx_k}{d\alpha} - \sum_k \frac{d^2 F}{dx_i dy_k}\frac{dy_k}{d\alpha},$$

$$\frac{d^2 y_i}{dt\,d\beta} = -\sum_k \frac{d^2 F}{dx_i dx_k}\frac{dx_k}{d\beta} - \sum_k \frac{d^2 F}{dx_i dy_k}\frac{dy_k}{d\beta}.$$

On conclut de là que:

$$\sum \left(\frac{d^2 x_i}{dt\,d\alpha}\frac{dy_i}{d\beta} - \frac{d^2 y_i}{dt\,d\alpha}\frac{dx_i}{d\beta}\right)$$

$$= \sum\sum \left(\frac{d^2 F}{dy_i dx_k}\frac{dx_k}{d\alpha}\frac{dy_i}{d\beta} + \frac{d^2 F}{dy_i dy_k}\frac{dy_k}{d\alpha}\frac{dy_i}{d\beta} + \frac{d^2 F}{dx_i dx_k}\frac{dx_k}{d\alpha}\frac{dx_i}{d\beta} + \frac{d^2 F}{dx_i dy_k}\frac{dx_i}{d\beta}\frac{dy_k}{d\alpha}\right).$$

Le second membre ne change pas quand on permute α et β, on a donc:

$$\sum \left(\frac{d^2 x_i}{dt\,d\alpha}\frac{dy_i}{d\beta} - \frac{d^2 y_i}{dt\,d\alpha}\frac{dx_i}{d\beta}\right) = \sum \left(\frac{d^2 x_i}{dt\,d\beta}\frac{dy_i}{d\alpha} - \frac{d^2 y_i}{dt\,d\beta}\frac{dx_i}{d\alpha}\right).$$

Cette égalité exprime que la quantité sous le signe $\int$ dans l'expression de $\frac{dJ}{dt}$ est nulle et par conséquent que

$$\frac{dJ}{dt} = 0.$$

C. Q. F. D.

Il me reste à envisager le dernier des invariants intégraux qui se présente dans le cas du problème des n corps.

Reprenons les équations de la dynamique, mais en posant:

$$F = T + U,$$

T ne dependant que des y et U des x seulement. De plus T est homogène de degré 2 et U homogène de degré -1.

Prenons une solution

$$x_i = \varphi_i(t, \alpha), \qquad y_i = \psi_i(t, \alpha)$$

ne dépendant que d'une seule constante arbitraire α.

Considérons l'intégrale simple:

$$J = \int \sum \left(2x_i \frac{dy_i}{da} + y_i \frac{dx_i}{da}\right) da + 3(C_1 - C_0)t,$$

C_1 et C_0 étant les valeurs constantes de la fonction F aux extrémités de l'arc le long duquel on intègre.

Il vient:

$$\frac{dJ}{dt} = \int \sum \left(2 \frac{dx_i}{dt}\frac{dy_i}{da} + \frac{dy_i}{dt}\frac{dx_i}{da} + 2x_i \frac{d^2 y_i}{dt\,da} + y_i \frac{d^2 x_i}{dt\,da}\right) da + 3(C_1 - C_0).$$

Il vient:

$$\frac{dx_i}{dt} = \frac{dF}{dy_i} = \frac{dT}{dy_i}, \qquad \frac{dy_i}{dt} = -\frac{dU}{dx_i},$$

$$\frac{d^2 x_i}{dt\,da} = \sum_k \frac{d^2 T}{dy_i\,dy_k}\frac{dy_k}{da}, \qquad \frac{d^2 y_i}{dt\,da} = -\sum_k \frac{d^2 U}{dx_i\,dx_k}\frac{dx_k}{da},$$

d'où

$$\frac{dJ}{dt} = \int \sum \sum \left(2 \frac{dT}{dy_i}\frac{dy_i}{da} + y_i \frac{d^2 T}{dy_i\,dy_k}\frac{dy_k}{da} - \frac{dx_i}{da}\frac{dU}{dx_i} - 2x_i \frac{d^2 U}{dx_i\,dx_k}\frac{dx_k}{da}\right) da + 3(C_1 - C_0).$$

Mais en vertu du théorème des fonctions homogènes on a:

$$\sum_i y_i \frac{d^2 T}{dy_i\,dy_k} = \frac{dT}{dy_k}, \qquad \sum_i x_i \frac{d^2 U}{dx_i\,dx_k} = -2\frac{dU}{dx_k},$$

d'où

$$\frac{dJ}{dt} = \int \sum \left(3\frac{dT}{dy_i}\frac{dy_i}{da} + 3\frac{dU}{dx_i}\frac{dx_i}{da}\right) d\alpha + 3(C_1 - C_0)$$

ou

$$\frac{dJ}{dt} = 3\int (dT + dU) + 3(C_1 - C_0).$$

Or d'après la définition de C_1 et C_0 on a

$$C_0 - C_1 = \int dF = \int (dT + dU).$$

Il vient donc

$$\frac{dJ}{dt} = 0.$$

C. Q. F. D.

§ 7. *Transformation des invariants intégraux.*

Reprenons nos équations différentielles

$$(1) \qquad \frac{dx_1}{dt} = X_1, \quad \frac{dx_2}{dt} = X_2, \quad \ldots, \quad \frac{dx_n}{dt} = X_n$$

et supposons que l'on ait

$$(2) \qquad \frac{d(MX_1)}{dx_1} + \frac{d(MX_2)}{dx_2} + \ldots + \frac{d(MX_n)}{dx_n} = 0,$$

de telle sorte que l'intégrale d'ordre n

$$J = \int M dx_1 dx_2 \ldots dx_n$$

soit un invariant intégral.

Changeons de variables en posant:

$$(3) \qquad \begin{aligned} x_1 &= \psi_1(z_1, z_2, \ldots, z_n), \\ x_2 &= \psi_2(z_1, z_2, \ldots, z_n), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_n &= \psi_n(z_1, z_2, \ldots, z_n), \end{aligned}$$

et appelons Δ le déterminant fonctionnel des n fonctions ψ par rapport aux n variables z.

Nous aurons après le changement de variables:

$$J = \int M \Delta dz_1 dz_2 \dots dz_n .$$

Si l'invariant J était positif avant le changement de variables, il restera positif aprés ce changement, pourvu que Δ soit toujours positif, fini et uniforme.

Comme en permutant deux des variables z, on change le signe de Δ, il nous suffira de supposer que Δ est toujours de même signe ou qu'il ne s'annule jamais. Il devra de plus être toujours fini et uniforme. Cela arrivera si le changement de variables (3) est doublement univoque, c'est à dire si dans le domaine considéré les x sont fonctions uniformes des z et les z fonctions uniformes des x.

Ainsi aprės un changement de variables doublement univoque, les invariants positifs restent positifs.

Voici un cas particulier intéressant:

Supposons que l'on connaisse une intégrale des équations (1)

$$F(x_1, x_2, \dots, x_n) = C.$$

Prenons pour variables nouvelles $z_n = C$ d'une part et d'autre part $n - 1$ autres variables $z_1, z_2, \dots, z_{n-1}$. Il arrivera souvent qu'on pourra choisir $z_1, z_2, \dots, z_{n-1}$ de telle sorte que ce changement de variables soit doublement univoque dans le domaine considéré.

Après le changement de variables, les équations (1) deviendront:

$$(4) \qquad \frac{dz_1}{dt} = Z_1, \quad \frac{dz_2}{dt} = Z_2, \quad \dots, \quad \frac{dz_{n-1}}{dt} = Z_{n-1}, \quad \frac{dz_n}{dt} = Z_n = 0,$$

$Z_1, Z_2, \dots, Z_{n-1}$ étant des fonctions connues de $z_1, z_2, \dots, z_n$. Si l'on regarde la constante $C = z_n$ comme une donnée de la question, les équations sont réduites à l'ordre $n - 1$ et s'écrivent:

$$(4') \qquad \frac{dz_1}{dt} = Z_1, \quad \dots, \quad \frac{dz_{n-1}}{dt} = Z_{n-1},$$

les fonctions Z ne dépendant plus que de $z_1, z_2, \dots, z_{n-1}$ puisque z_n y a été remplacé par sa valeur numérique.

Si les équations (1) admettent un invariant positif

$$\int M dx_1 dx_2 \ldots dx_n,$$

les équations (4) admettront également un invariant positif:

$$J = \int \mu dz_1 dz_2 \ldots dz_{n-1} dz_n.$$

Je dis maintenant que les équations (4') qui sont d'ordre $n-1$ admettent également un invariant intégral positif qui devra être d'ordre $n-1$.

En effet, dire que J est un invariant intégral c'est dire que

$$\frac{d(\mu Z_1)}{dz_1} + \frac{d(\mu Z_2)}{dz_2} + \ldots + \frac{d(\mu Z_n)}{dz_n} = 0$$

ou puisque Z_n est nul,

$$\frac{d(\mu Z_1)}{dz_1} + \frac{d(\mu Z_2)}{dz_2} + \ldots + \frac{d(\mu Z_{n-1})}{dz_{n-1}} = 0,$$

ce qui prouve que l'intégrale d'ordre $n-1$

$$\int \mu dz_1 dz_2 \ldots dz_{n-1}$$

est un invariant pour les équations (4').

Jusqu'ici nous avons fait porter les changements de variables sur les fonctions inconnues $x_1, x_2, \ldots, x_n$, mais nous avons conservé le temps t qui est notre variable indépendante. Nous allons supposer maintenant que l'on pose:

$$t = \varphi(t_1)$$

et que nous prenions t_1 comme nouvelle variable indépendante.

Les équations (1) deviennent alors:

$$\frac{dx_i}{dt_1} = X_i' = X_i \frac{d\varphi}{dt_1} = X_i \frac{dt}{dt_1}. \qquad (i=1,2,\ldots,n) \tag{5}$$

Si les équations (1) ont un invariant intégral d'ordre n

$$\int M dx_1 dx_2 \ldots dx_n$$

on devra avoir

$$\sum \frac{d}{dx_i}(MX_i) = 0,$$

ce qui peut s'écrire

$$\sum \frac{d}{dx_i}\left(M\frac{dt_1}{dt}X'_i\right) = 0.$$

Cela montre que

$$\int M\frac{dt_1}{dt}dx_1 dx_2 \dots dx_n$$

est un invariant intégral pour les équations (5).

Pour que cette transformation puisse être utile, il faut que t et t_1 soient liés de telle sorte que $\frac{dt_1}{dt}$ puisse être regardé comme une fonction connue, finie, continue et uniforme de $x_1, x_2, \dots, x_n$.

Supposons par exemple que nous prenions pour nouvelle variable indépendante:

$$x_n = t_1.$$

Il vient alors

$$\frac{dt_1}{dt} = X_n$$

et les équations (5) s'écrivent

$$\frac{dx_1}{dt_1} = \frac{X_1}{X_n}, \qquad \frac{dx_2}{dt_1} = \frac{X_2}{X_n}, \quad \dots, \quad \frac{dx_{n-1}}{dt_1} = \frac{X_{n-1}}{X_n}, \qquad \frac{dx_n}{dt_1} = 1,$$

et elles admettent comme invariant intégral:

$$\int MX_n dx_1 dx_2 \dots dx_n.$$

De même si nous prenons pour nouvelle variable indépendante:

$$t_1 = \theta(x_1, x_2, \dots, x_n),$$

θ étant une fonction quelconque de $x_1, x_2, \dots, x_n$, le nouvel invariant intégral s'écrira:

$$\int M\left(\frac{d\theta}{dx_1}X_1 + \frac{d\theta}{dx_2}X_2 + \dots + \frac{d\theta}{dx_n}X_n\right)dx_1 dx_2 \dots dx_n.$$

Il est à remarquer que la forme et la signification d'un invariant intégral est beaucoup plus profondément modifiée quand on change la variable indépendante appelée temps que quand le changement de variables porte seulement sur les fonctions inconnues $x_1, x_2, \ldots, x_n$, car alors les lois du mouvement du point représentatif P se trouvent complètement transformées.

Supposons $n = 3$ et regardons x_1, x_2, x_3 comme les coordonnées d'un point P dans l'espace. L'équation:

$$\theta(x_1, x_2, x_3) = 0$$

représentera une surface. Considérons une portion quelconque de cette surface et appelons S cette portion de surface.

Je supposerai qu'en tous les points de S on a

$$\frac{d\theta}{dx_1} X_1 + \frac{d\theta}{dx_2} X_2 + \frac{d\theta}{dx_3} X_3 \lessgtr 0.$$

Il en résulte que la portion de surface S n'est tangente à aucune trajectoire. Je dirai alors que S est une surface sans contact.

Soit P_0 un point de S; par ce point passe une trajectoire. Si cette trajectoire prolongée vient recouper S en un point P_1, je dirai que P_1 est le *conséquent* de P_0. A son tour P_1 peut avoir un conséquent P_2 que j'appellerai le *second conséquent* de P_0 et ainsi de suite.

Si on considère une courbe C tracée sur S, les n^{es} conséquents des divers points de cette courbe formeront une autre courbe C' que j'appellerai la n^e *conséquente* de C. On définirait de la même façon l'aire qui est n^e conséquente d'une aire donnée faisant partie de S.

Cela posé, soit une portion de surface sans contact S ayant pour équation $\theta = 0$; soit C une courbe fermée tracée sur cette surface et limitant une aire A; soient C' et A' les premières conséquentes, C^n et A^n les n^{es} conséquentes de C et de A.

Par chacun des points de C passe une trajectoire que je prolonge depuis sa rencontre avec C jusqu'à sa rencontre avec C'. L'ensemble de ces trajectoires formera une surface trajectoire T.

Je considère le volume V limité par la surface trajectoire T et par les deux aires A et A'. Supposons qu'il y ait un invariant positif

$$J = \int M dx_1 dx_2 dx_3.$$

J'étends cet invariant au volume V et j'écris que $\frac{dJ}{dt}$ est nul.

Soit $d\omega$ un élément de la surface S. Menons la normale à cet élément, prenons sur cette normale une longueur infiniment petite dn. Soit $\theta + \frac{d\theta}{dn} dn$ la valeur de θ à l'extrémité de cette longueur. Si l'on a mené la normale dans le sens des θ croissants, on aura

$$\frac{d\theta}{dn} > 0.$$

Posons:

$$\frac{\frac{d\theta}{dx_1} X_1 + \frac{d\theta}{dx_2} X_2 + \frac{d\theta}{dx_3} X_3}{\frac{d\theta}{dn}} = H,$$

on aura alors

$$\frac{dJ}{dt} = \int_{A'} MH d\omega - \int_{A} MH d\omega,$$

la première intégrale étant étendue à l'aire A' et la seconde à l'aire A.

L'intégrale

$$\int MH d\omega$$

conserve la même valeur qu'on l'étende à l'aire A, ou à A', ou par conséquent à A''. C'est donc un invariant intégral d'une nature particulière qui conserve la même valeur pour une aire quelconque ou pour l'une de ses conséquentes.

Cet invariant est d'ailleurs positif, car par hypothèse, M, H et par conséquent MH sont positifs.

§ 8. *Usage des invariants intégraux.*

Ce qui fait l'intérêt des invariants intégraux, ce sont les théorèmes suivants dont nous ferons un fréquent usage.

Nous avons défini plus haut la stabilité en disant que le point mobile P doit rester à distance finie; on l'entend quelquefois dans un autre sens. Pour qu'il y ait stabilité, il faut que le point P revienne au bout d'un temps suffisamment long sinon à sa position initiale, du moins dans une position aussi voisine que l'on veut de cette position initiale.

C'est dans ce dernier sens que Poisson entendait la stabilité. Lorsqu'il a démontré que, si l'on tient compte des secondes puissances des masses, les grands axes des orbites demeurent invariables, il s'est seulement attaché à établir que les développements de ces grands axes en séries ne contiennent que des termes périodiques de la forme $\sin \alpha t$ ou $\cos \alpha t$, ou des termes mixtes de la forme $t \sin \alpha t$ ou $t \cos \alpha t$, sans contenir aucun terme séculaire de la forme t ou t^2. Cela ne signifie pas que les grands axes ne peuvent jamais dépasser une certaine valeur, car un terme mixte $t \cos \alpha t$ peut croître au delà de toute limite; cela veut dire seulement que les grands axes repasseront une infinité de fois par leur valeur primitive.

La stabilité, au sens de Poisson, peut-elle appartenir à toutes les solutions? Poisson ne le croyait pas, car sa démonstration suppose expressément que les moyens mouvements ne sont pas commensurables; elle ne s'applique donc pas quelles que soient les conditions initiales du mouvement.

L'existence des solutions asymptotiques, que nous établirons plus loin, montre suffisamment que si la position initiale du point P est convenablement choisie, ce point P ne repassera pas une infinité de fois aussi près que l'on voudra de cette position initiale.

Mais je me propose d'établir que, dans un des cas particuliers du problème des trois corps, on peut choisir la position initiale du point P (et cela d'une infinité de manières) de telle façon que ce point P repasse une infinité de fois aussi près que l'on voudra de sa position initiale.

En d'autres termes, il y aura une infinité de solutions particulières du problème qui ne jouiront pas de la stabilité au second sens du mot, c'est à dire au sens de Poisson; mais il y en aura une infinité qui en jouiront. J'ajouterai que les premières peuvent être regardées comme exceptionnelles et je chercherai plus loin à faire comprendre le sens précis que j'attache à ce mot.

Supposons $n = 3$ et imaginons que x_1, x_2, x_3 représentent les coordonnées d'un point P dans l'espace.

Théorème I. Supposons que le point P reste à distance finie, et que le volume $\int dx_1 dx_2 dx_3$ soit un invariant intégral; si l'on considère une région r_0 quelconque, quelque petite que soit cette région, il y aura des trajectoires qui la traverseront une infinité de fois.

En effet le point P restant à distance finie, ne sortira jamais d'une région limitée R. J'appelle V le volume de cette région R.

Imaginons maintenant une région très petite r_0, j'appelle v le volume de cette région. Par chacun des points de r_0 passe une trajectoire que l'on peut regarder comme parcourue par un point mobile suivant la loi définie par nos équations différentielles. Considérons donc une infinité de points mobiles remplissant au temps o la région r_0 et se mouvant ensuite conformément à cette loi. Au temps τ ils rempliront une certaine région r_1, au temps 2τ une région r_2, etc. au temps $n\tau$ une région r_n. Je puis supposer que τ est assez grand et r_0 assez petit pour que r_0 et r_1 n'aient aucun point commun.

Le volume étant un invariant intégral, ces diverses régions $r_0, r_1, \ldots, r_n$ auront même volume v. Si ces régions n'avaient aucun point commun, le volume total serait plus grand que nv; mais d'autre part toutes ces régions sont intérieures à R, le volume total est donc plus petit que V. Si donc on a:

$$n > \frac{V}{v},$$

il faut que deux au moins de nos régions aient une partie commune. Soient r_p et r_q ces deux régions $(q > p)$. Si r_p et r_q ont une partie commune, il est clair que r_0 et r_{q-p} devront avoir une partie commune.

Plus généralement, si on ne pouvait trouver k régions ayant une partie commune, aucun point de l'espace ne pourrait appartenir à plus de $k - 1$ des régions $r_0, r_1, \ldots, r_n$. Le volume total occupé par ces régions serait donc plus grande que $\frac{nv}{k-1}$. Si donc on a

$$n > (k-1)\frac{V}{v},$$

il faut que l'on puisse trouver k régions ayant une partie commune. Soient:

$$r_{p_1}, r_{p_2}, \ldots, r_{p_k}$$

ces régions. Alors

$$r_0\,,\; r_{p_2-p_1}\,,\; r_{p_3-p_1}\,,\; \ldots\,,\; r_{p_k-p_1}$$

auront aussi une partie commune.

Mais reprenons la question à un autre point de vue. Par analogie avec la nomenclature du paragraphe précédent nous conviendrons de dire que la région r_n est la n^e conséquente de r_0 et que r_0 est la n^e antécédente de r_n.

Supposons alors que r_p soit la première des conséquentes successives de r_0 qui ait une partie commune avec r_0. Soit r'_0 cette partie commune; soit s'_0 la p^e antécédente de r'_0 qui fera aussi partie de r_0 puisque sa p^e conséquente fait partie de r_p.

Soit ensuite r'_{p_1} la première des conséquentes de r'_0 qui ait une partie commune avec r'_0; soit r''_0 cette partie commune; sa p_1^e antécédente fera partie de r'_0 et par conséquent de r_0, et sa $p + p_1^e$ antécédente que j'appellerai s''_0 fera partie de s'_0 et par conséquent de r_0.

Ainsi s''_0 fera partie de r_0 ainsi que ses p^e et $p + p_1^e$ conséquentes.

Et ainsi de suite.

Avec r''_0 nous formerons r'''_0 comme nous avons formé r''_0 avec r'_0 et r'_0 avec r_0; nous formerons ensuite $r_0^{\mathrm{IV}}\,, \ldots\,, r_0^n\,, \ldots$.

Je supposerai que la première des conséquentes successives de r_0^n qui ait une partie commune avec r_0^n soit celle d'ordre p_n.

J'appellerai s_0^n l'antécédente d'ordre $p + p_1 + p_2 + \ldots + p_{n-1}$ de r_0^n.

Alors s_0^n fera partie de r_0 ainsi que ses n conséquentes d'ordre:

$$p\,,\, p + p_1\,,\, p + p_1 + p_2\,, \ldots,\, p + p_1 + p_2 + \ldots + p_{n-1}.$$

De plus s_0^n fera partie de s_0^{n-1}, s_0^{n-1} de s_0^{n-2}, ...

Il y aura alors des points qui appartiendront à la fois aux régions $r_0\,, s'_0\,, s''_0\,, \ldots\,, s_0^n\,, s_0^{n+1}\,, \ldots$ ad. inf. L'ensemble de ces points formera une région σ qui pourra d'ailleurs se réduire à un ou à plusieurs points.

Alors la région σ fera partie de r_0 ainsi que ses conséquentes d'ordre $p\,, p + p_1\,, \ldots\,, p + p_1 + \ldots + p_n\,, p + p_1 + \ldots + p_n + p_{n+1}\,, \ldots$ ad. inf.

En d'autres termes, toute trajectoire issue d'un des points de σ traversera une infinité de fois la région r_0.

C. Q. F. D.

Corollaire. Il résulte de ce qui précède qu'il existe une infinité de trajectoires qui traversent une infinité de fois la région r_0; mais il peut en exister d'autres qui ne traversent cette région qu'un nombre fini de fois. Je me propose maintenant d'expliquer pourquoi ces dernières trajectoires peuvent être regardées comme exceptionnelles.

Cette expression n'ayant par elle-même aucun sens précis, je suis obligé d'abord d'en compléter la définition.

Nous conviendrons de dire que la probabilité pour que la position initiale du point mobile P appartienne à une certaine région r_0 est à la probabilité pour que cette position initiale appartienne à une autre région r_0' dans le même rapport que le volume de r_0 au volume de r_0'.

Les probabilités étant ainsi définies, je me propose d'établir que la probabilité pour qu'une trajectoire issue d'un point de r_0 ne traverse pas cette région plus de k fois est nulle, quelque grand que soit k et quelque petite que soit la région r_0. C'est là ce que j'entends quand je dis que les trajectoires qui ne traversent r_0 qu'un nombre fini de fois sont exceptionnelles.

Je suppose que la position initiale du point P appartienne à r_0 et je me propose de calculer la probabilité pour que la trajectoire issue de ce point ne traverse pas $k + 1$ fois la région r_0 depuis l'époque o jusqu'à l'époque $n\tau$.

Nous avons vu que si le volume v de r_0 est tel que:

$$n > \frac{kV}{v}$$

on pourra trouver $k + 1$ régions que j'appellerai

$$r_0, r_{\alpha_1}, r_{\alpha_2}, \ldots, r_{\alpha_k}$$

et qui auront une partie commune. Soit s_{α_k} cette partie commune, soit s_0 son antécédente d'ordre α_k; et désignons par s_p la p^e conséquente de s_0.

Je dis que si la position initiale du point P appartient à s_0, la trajectoire issue de ce point traversera $k + 1$ fois au moins la région r_0 entre l'époque o et l'époque $n\tau$.

En effet le point mobile qui décrit cette trajectoire se trouvera à l'époque o dans la région s_0, à l'époque $p\tau$ dans la région s_p, à l'époque

$n\tau$ dans la région s_n. Il traversera donc nécessairement, entre les époques o et $n\tau$, les régions suivantes:

$$s_0\,,\ s_{\alpha_k-\alpha_{k-1}}\,,\ s_{\alpha_k-\alpha_{k-2}}\,,\ \ldots\,,\ s_{\alpha_k-\alpha_2}\,,\ s_{\alpha_k-\alpha_1}\,,\ s_{\alpha_k}.$$

Or je dis que toutes ces régions font partie de r_0. En effet s_{α_k} fait partie de r_0 par définition; s_0 fait partie de r_0 parce que sa α_k^e conséquente s_{α_k} fait partie de r_{α_k}, et en général $s_{\alpha_k-\alpha_i}$ fera partie de r_0 parce que sa α_i^e conséquente s_{α_k} fait partie de r_{α_i}.

Donc le point mobile traversera $k+1$ fois au moins la région r_0.

C. Q. F. D.

Soit maintenant σ_0 la portion de r_0 qui n'appartient ni à s_0, ni à aucune région analogue, de telle façon que les trajectoires issues des divers points de σ_0 ne traversent pas la région r_0 au moins $k+1$ fois entre les époques o et $n\tau$. Soit w le volume de σ_0.

La probabilité cherchée, c'est à dire la probabilité pour que notre trajectoire ne traverse pas $k+1$ fois r_0 entre ces deux époques sera alors $\frac{w}{v}$.

Or par hypothèse aucune trajectoire issue de σ_0 ne traverse $k+1$ fois r_0 ni a fortiori σ_0 entre ces deux époques. On a donc:

$$w < \frac{kV}{n}$$

et notre probabilité sera plus petite que

$$\frac{kV}{nv}.$$

Quelque grand que soit k, quelque petit que soit v, on pourra toujours prendre n assez grand pour que cette expression soit aussi petite que nous le voudrons. Donc il y a une probabilité nulle pour que notre trajectoire, que nous savons issue d'un point de r_0, ne traverse pas cette région plus de k fois depuis l'époque o jusqu'à l'époque $+\infty$.

C. Q. F. D.

Extension du théorème I. Nous avons supposé:

1° que $n = 3$,

2° que le volume est un invariant intégral,

3° que le point P est assujetti à rester à distance finie.

Le théorème est encore vrai si le volume n'est pas un invariant intégral, pourvu qu'il existe un invariant positif quelconque:

$$\int M dx_1 dx_2 dx_3.$$

Il est encore vrai si $n > 3$, s'il existe un invariant positif:

$$\int M dx_1 dx_2 \dots dx_n$$

et si $x_1, x_2, \dots, x_n$, coordonnées du point P dans l'espace à n dimensions, sont assujetties à rester finies.

Mais il y a plus.

Supposons que $x_1, x_2, \dots, x_n$ ne soient plus assujetties à rester finies, mais que l'invariant intégral positif

$$\int M dx_1 dx_2 \dots dx_n$$

étendu à l'espace à n dimensions tout entier ait une valeur finie. Le théorème sera encore vrai.

Voici un cas qui se présentera plus fréquemment.

Supposons que l'on connaisse une intégrale des équations (1)

$$F(x_1, x_2, \dots, x_n) = \text{const.}$$

Si $F = \text{const.}$ est l'équation générale d'un système de surfaces fermées dans l'espace à n dimensions, si en d'autres termes F est une fonction uniforme qui devient infinie quand une quelconque des variables $x_1, x_2, \dots, x_n$ cesse d'être finie, il est clair que $x_1, x_2, \dots, x_n$ resteront toujours finies, puisque F conserve une valeur constante finie; on se trouve donc dans les conditions de l'énoncé du théorème.

Mais supposons que les surfaces $F = \text{const.}$ ne soient pas fermées; il pourra se faire néanmoins que l'invariant intégral positif

$$\int M dx_1 dx_2 \dots dx_n$$

étendu à tous les systèmes de valeurs des x tels que:

$$C_1 < F < C_2$$

ait une valeur finie; le théorème sera encore vrai.

C'est ce qui arrive en particulier dans le cas suivant.

M. Hill dans sa théorie de la lune a négligé dans une première approximation la parallaxe du soleil, l'excentricité du soleil et l'inclinaison des orbites; il est ainsi arrivé aux équations suivantes:

$$\frac{dx}{dt} = x', \qquad \frac{dx'}{dt} = 2n'y' - x\left(\frac{\mu}{\sqrt{(x^2+y^2)^3}} - 3n'^2\right),$$

$$\frac{dy}{dt} = y', \qquad \frac{dy'}{dt} = -2n'x' - \frac{\mu y}{\sqrt{(x^2+y^2)^3}},$$

qui admettent l'intégrale:

$$F = \frac{x'^2+y'^2}{2} - \frac{\mu}{\sqrt{x^2+y^2}} - \frac{3}{2}n'^2x^2 = \text{const.}$$

et l'invariant intégral

$$\int dx\,dy\,dx'dy'.$$

Si l'on regarde x, y, x' et y' comme les coordonnées d'un point dans l'espace à 4 dimensions, l'équation $F = \text{const.}$ représente un système de surfaces qui ne sont pas fermées. Mais l'invariant intégral étendu à tous les points compris entre deux de ces surfaces est fini, comme nous allons le montrer.

Le théorème I est donc encore vrai; c'est à dire qu'il existe des trajectoires qui traversent une infinité de fois toute région de l'espace à 4 dimensions, quelque petite que soit cette région.

Soit donc à calculer l'intégrale quadruple

$$J = \int dx\,dy\,dx'dy',$$

cette intégrale étant étendue à tous les systèmes de valeurs tels que

$$C_1 < F < C_2.$$

Changeons de variables et transformons notre intégrale quadruple, en posant:

$$x' = \cos\varphi\sqrt{2r}, \qquad y' = \sin\varphi\sqrt{2r},$$

$$x = \rho\cos\omega, \qquad y = \rho\sin\omega;$$

cette intégrale devient:

$$J = \int \rho d\rho dr d\omega d\varphi$$

et il vient d'autre part:

$$F = r - \frac{\mu}{\rho} - \frac{3}{2} n'^2 \rho^2 \cos^2 \omega.$$

Nous devons intégrer d'abord par rapport à φ entre les limites o et 2π, ce qui donne:

$$J = 2\pi \int \rho d\rho dr d\omega$$

et l'intégration doit être étendue à tous les systèmes de valeurs de ρ, r et ω qui satisfont aux inégalités:

$$(1) \qquad \begin{gathered} r > 0\,, \ r > C_1 + \frac{\mu}{\rho} + \frac{3}{2} n'^2 \rho^2 \cos^2 \omega, \\ r < C_2 + \frac{\mu}{\rho} + \frac{3}{2} n'^2 \rho^2 \cos^2 \omega. \end{gathered}$$

De ces inégalités on peut déduire la suivante:

$$C_2 + \frac{\mu}{\rho} + \frac{3}{2} n'^2 \rho^2 \cos^2 \omega > 0.$$

Regardons ρ et ω comme les coordonnées polaires d'un point et construisons la courbe

$$C_2 + \frac{\mu}{\rho} + \frac{3}{2} n'^2 \rho^2 \cos^2 \omega = 0.$$

Nous verrons que si C_2 est plus petit que $-\frac{1}{2}(9n'\mu)^{\frac{2}{3}}$ cette courbe se compose d'une ovale fermée située tout entière à l'intérieur du cercle

$$\rho = \sqrt[3]{\frac{\mu}{3n'^2}}$$

et de deux branches infinies situées tout entières à l'extérieur de ce cercle.

Le lecteur fera facilement cette construction; s'il y éprouvait quelque difficulté, je le renverrais au mémoire original de M. Hill dans le tome I de l'American Journal of Mathematics.

M. Hill conclut de là que si le point ρ, ω est à l'origine des temps à l'intérieur de cette ovale fermée, il y restera toujours; que par conséquent ρ restera toujours plus petit que $\sqrt[3]{\frac{\mu}{3n'^2}}$. Ainsi si l'on négligeait la parallaxe du soleil, son excentricité et les inclinaisons, il serait permis d'assigner une limite supérieure au rayon vecteur de la lune. En ce qui concerne la lune en effet, la constante C_2 est plus petite que $-\frac{1}{2}(9n'\mu)^{\frac{2}{3}}$.

C'est ce remarquable résultat de M. Hill que je me propose de compléter en montrant que, dans ces conditions, la lune jouirait également de la stabilité au sens de Poisson; je veux dire par là que, si les conditions initiales du mouvement ne sont pas exceptionnelles, la lune repassera une infinité de fois aussi près que l'on voudra de sa position primitive. C'est pour cela, comme je l'ai expliqué plus haut, que je me propose de démontrer que l'intégrale J est finie.

Comme ρ est plus petit que $\sqrt[3]{\frac{\mu}{3n'^2}}$ et par conséquent limité, l'intégrale:

$$J = 2\pi \int \rho \, d\rho \, dr \, d\omega$$

ne peut devenir infinie que si r croît indéfiniment, et r ne peut devenir infini, en vertu des inégalités (1) que si ρ s'annule.

Posons donc:

$$J = J' + J'',$$

J' représentant l'intégrale étendue à tous les systèmes de valeurs tels que

$$(2) \qquad r > 0\,,\ \rho > \rho_0\,,\ C_1 < F < C_2$$

et J'' représentant l'intégrale étendue à tous les systèmes de valeurs tels que:

$$(3) \qquad r > 0\,,\ \rho < \rho_0\,,\ C_1 < F < C_2.$$

Quand les inégalités (2) sont satisfaites ρ ne peut s'annuler; donc r ne peut devenir infini. Donc la première intégrale J' est finie.

Examinons maintenant J''. Je puis supposer que ρ_0 a été pris assez petit pour que

$$C_1 + \frac{\mu}{\rho_0} > 0.$$

Les inégalités $F > C_1$, $\rho < \rho_0$ entrainent alors $r > 0$. Nous devons donc intégrer par rapport à r entre les limites:

$$C_1 + \frac{\mu}{\rho} + \frac{3}{2}n'^2\rho^2\cos^2\omega \quad \text{et} \quad C_2 + \frac{\mu}{\rho} + \frac{3}{2}n'^2\rho^2\cos^2\omega.$$

Il vient alors:

$$J'' = 2\pi(C_2 - C_1)\int_0^{2\pi} d\omega \int_0^{\rho_0} \rho d\rho = 2\pi^2\rho_0^2(C_2 - C_1).$$

J'' et par conséquent J est donc fini.

C. Q. F. D.

M. Bohlin a généralisé de la manière suivante le résultat de M. Hill. Considérons le cas particulier suivant du problème des trois corps. Soit A un corps de masse $1 - \mu$, B un corps de masse μ et C un corps de masse infiniment petite. Imaginons que les deux corps A et B (dont le mouvement doit être Képlerien, puisqu'il n'est pas troublé par la masse de C) décrivent autour de leur centre de gravité commun supposé fixe deux circonférences concentriques, et que C se meuve dans le plan de ces deux circonférences. Je prendrai pour unité de longueur la distance constante AB, de telle façon que les rayons de ces deux circonférences soient $1 - \mu$ et μ. Je supposerai que l'unité de temps ait été choisie de telle sorte que la vitesse angulaire des deux points A et B sur leurs circonférences soit égale à 1 (ou ce qui revient au même que la constante de Gauss soit égale à 1).

Choisissons alors deux axes mobiles ayant leur origine au centre de gravité des deux masses A et B; le premier de ces axes sera la droite AB, et le second sera perpendiculaire au premier.

Les coordonnées de A par rapport à ces deux axes sont $-\mu$ et 0; celles de B sont $1 - \mu$ et 0; quant à celles de C je les appelle x et y; j'ai alors pour les équations du mouvement:

$$\frac{dx}{dt} = x', \qquad \frac{dx'}{dt} = \quad 2y' + \frac{dV}{dx} + x,$$

$$\frac{dy}{dt} = y', \qquad \frac{dy'}{dt} = -2x' + \frac{dV}{dy} + y,$$

en posant

$$V = \frac{1-\mu}{AC} + \frac{\mu}{BC}.$$

On a d'ailleurs:

$$\overline{AC}^2 = (x+\mu)^2 + y^2, \qquad \overline{BC}^2 = (x+\mu-1)^2 + y^2.$$

Ces équations admettent une intégrale:

$$F = \frac{x'^2 + y'^2}{2} - V - \frac{x^2+y^2}{2} = K$$

et un invariant intégral:

$$J = \int dx dy dx' dy'.$$

M. Bohlin, dans le tome 10 des Acta mathematica, a généralisé le résultat de M. Hill, en montrant que si la constante K a une valeur convenable (ce que nous supposerons) et si les valeurs initiales de x et de y sont assez petites, ces quantités x et y resteront limitées.

Je me propose maintenant de montrer que l'intégrale J étendue à tous les systèmes de valeurs tels que

$$K_1 < F < K_2$$

est finie; d'où nous pourrons conclure, comme nous l'avons fait plus haut, que la stabilité au sens de Poisson subsiste encore dans ce cas.

Si les constantes K_1 et K_2 sont convenablement choisies, le théorème de M. Bohlin montre que x et y seront limités. Quant à x' et y' ils ne pourront devenir infinis que si V devient infini, c'est à dire si AC s'annule, ou si BC s'annule.

Posons alors:

$$J = J' + J'' + J''',$$

l'intégrale J' étant étendue à tous les systèmes de valeurs tels que:

$$K_1 < F < K_2\,,\ \overline{AC}^2 > \rho_0^2\,,\ \overline{BC}^2 > \rho_0^2, \qquad \left(\rho_0 < \frac{1}{2}\right)$$

l'intégrale J'' à tous les systèmes de valeurs tels que:

$$K_1 < F < K_2\,,\ \overline{AC}^2 < \rho_0^2, \qquad (\text{d'où } \overline{BC}^2 > \rho_0^2),$$

et l'intégrale J''' à tous les systèmes de valeurs tels que:

$$K_1 < F < K_2\ ,\ \overline{BC}^2 < \rho_0^2\ , \qquad (\text{d'où } \overline{AC}^2 > \rho_0^2).$$

Comme pour aucun des systèmes de valeurs auxquels l'intégrale J' est étendue, AC ou BC ne s'annule, cette intégrale J' est finie.

Examinons maintenant l'intégrale J''. Je puis supposer que ρ_0 ait été choisi assez petit pour que

$$\frac{1-\mu}{\rho_0} + K_1 > 0\ ,\ \frac{\mu}{\rho_0} + K_1 > 0.$$

Dans ce cas $\frac{x'^2 + y'^2}{2}$ peut varier entre les limites

$$L_1 = K_1 + \frac{1-\mu}{AC} + \frac{\mu}{BC} + \frac{x^2 + y^2}{2} \quad \text{et} \quad K_2 + \frac{1-\mu}{AC} + \frac{\mu}{BC} + \frac{x^2 + y^2}{2} = L_2,$$

car la plus petite de ces deux limites est positive.

Posons alors comme plus haut:

$$x' = \sqrt{2r}\cos\varphi, \qquad y' = \sqrt{2r}\sin\varphi, \quad \text{d'où} \quad r = \frac{x'^2 + y'^2}{2};$$

l'intégrale deviendra

$$J'' = \int dx\,dy\,dr\,d\varphi$$

et on devra intégrer par rapport à φ entre les limites 0 et 2π et par rapport à r entre les limites L_1 et L_2; il viendra donc:

$$J'' = 2\pi(K_2 - K_1)\int dx\,dy.$$

L'intégrale double $\int dx\,dy$ devra être étendue à tous les systèmes de valeurs tels que $\overline{AC}^2 < \rho_0^2$; elle est donc égale à $\pi\rho_0^2$; de sorte qu'il vient:

$$J'' = 2\pi^2\rho_0^2(K_2 - K_1).$$

J'' est donc fini, et il en est de même de J''' et de J.

C. Q. F. D.

Nous devons donc conclure que (si les conditions initiales du mouvement ne sont pas exceptionnelles au sens donné à ce mot dans le corollaire du théorème I) le troisième corps C repassera une infinité de fois aussi près que l'on voudra de sa position initiale.

Dans le cas général du problème des trois corps, on ne peut plus affirmer qu'il en sera encore de même.

Théorème II. Si $n = 3$ et que x_1, x_2, x_3 représentent les coordonnées d'un point dans l'espace ordinaire, et s'il y a un invariant positif, il ne peut pas y avoir de surface *fermée* sans contact.

Soit en effet

$$J = \int M dx_1 dx_2 dx_3$$

un invariant intégral positif. Supposons qu'il existe une surface S fermée et sans contact, ayant pour équation

$$F(x_1, x_2, x_3) = 0.$$

Soit V le volume limité par cette surface; nous étendrons l'invariant J à ce volume tout entier.

La surface S étant sans contact, l'expression:

$$\frac{dF}{dx_1} X_1 + \frac{dF}{dx_2} X_2 + \frac{dF}{dx_3} X_3$$

ne pourra s'annuler et par conséquent changer de signe; nous la supposerons positive pour fixer les idées.

Soit $d\omega$ un élément de la surface S; menons la normale à cet élément du côté des F croissants; prenons sur cette normale un segment infiniment petit dn. Soit $\frac{dF}{dn} dn$ la valeur de F à l'extrémité de ce segment. On aura:

$$\frac{dF}{dn} > 0.$$

J étant un invariant, on devrait avoir

$$\frac{dJ}{dt} = 0.$$

Mais nous trouvons

$$\frac{dJ}{dt} = \int M \frac{\frac{dF}{dx_1} X_1 + \frac{dF}{dx_2} X_2 + \frac{dF}{dx_3} X_3}{\frac{dF}{dn}} d\omega.$$

L'intégrale du second membre, étendue à toute la surface S, est positive puisque la fonction sous le signe $\int$ est toujours positive.

Nous arrivons donc à deux résultats contradictoires et nous devons conclure qu'il ne peut exister de surface fermée sans contact.

Extension du théorème II. Il est facile d'étendre ce théorème au cas de $n > 3$; il suffit pour cela, puisque la représentation géométrique n'est plus possible, de la traduire dans le langage analytique et de dire:

S'il y a un invariant intégral positif, il ne peut pas exister une fonction uniforme $F(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ qui soit positive, qui devienne infinie toutes les fois que l'un des x cesse d'être fini et qui soit telle que

$$\frac{dF}{dt} = \frac{dF}{dx_1} X_1 + \frac{dF}{dx_2} X_2 + \ldots + \frac{dF}{dx_n} X_n$$

soit toujours de même signe quand F est nul.

Pour faire comprendre l'importance de ce théorème, je me bornerai à faire observer que c'est une généralisation de celui dont je me suis servi pour démontrer la légitimité de la belle méthode de M. LINDSTEDT.

Je préfère toutefois, au point de vue des applications ultérieures, lui donner une forme un peu différente en y introduisant une notion nouvelle, celle des courbes invariantes.

Nous avons à la fin du paragraphe précédent envisagé une portion de surface S, définie par l'équation

$$\theta(x_1, x_2, x_3) = 0$$

et telle que l'on ait pour tous les points de S

$$\frac{d\theta}{dx_1} X_1 + \frac{d\theta}{dx_2} X_2 + \frac{d\theta}{dx_3} X_3 > 0,$$

de telle sorte que S soit une portion de surface sans contact.

Nous avons défini ensuite ce qu'on doit entendre par le n^{e} conséquent d'un point de S ou par la n^{e} conséquente d'une courbe ou d'une aire appartenant à S. J'entends maintenant et j'entendrai désormais le mot conséquent, dans le sens du paragraphe précédent, et non dans le sens employé plus haut dans la démonstration du théorème I.

Nous avons vu que s'il existe un invariant positif

$$\iiint M dx_1 dx_2 dx_3,$$

il existe également une autre intégrale

$$\int MH d\omega$$

que l'on doit étendre à tous les éléments $d\omega$ d'une aire appartenant à S et qui jouit des propriétés suivantes:

1°. La quantité sous le signe $\int$, MH est toujours positive.

2°. L'intégrale a la même valeur pour une aire quelconque appartenant à S et pour toutes celles de ses conséquentes qui existent.

Cela posé, j'appellerai *courbe invariante* du n^e ordre, toute courbe tracée sur S et qui coïncidera avec sa n^e conséquente.

Dans la plupart des questions de dynamique il entre certains paramètres très petits de sorte qu'on est naturellement conduit à développer les solutions suivant les puissances croissantes de ces paramètres. Telles sont les masses en mécanique céleste.

Nous imaginerons donc que nos équations différentielles

$$\frac{dx_1}{dt} = X_1, \qquad \frac{dx_2}{dt} = X_2, \qquad \frac{dx_3}{dt} = X_3$$

dépendent d'un paramètre μ. Nous supposerons que X_1, X_2, X_3 sont des fonctions données de x_1, x_2, x_3 et μ, susceptibles d'être développées selon les puissances croissantes de μ et que μ est très petit.

Considérons alors une fonction quelconque de μ; je suppose que cette fonction tende vers 0 quand μ tend vers 0, de telle façon que le rapport de cette fonction à μ^n tende vers une limite finie. Je dirai que cette fonction de μ est une quantité très petite du n^e ordre.

Il importe de remarquer qu'il n'est pas nécessaire que cette fonction de μ soit susceptible d'être développée suivant les puissances de μ.

Cela posé, soient A_0 et B_0 deux points d'une surface sans contact S, et soient A_1 et B_1 leurs conséquents. Si la position de A_0 et B_0 dépend de μ suivant une loi quelconque il en sera de même de la position de A_1 et B_1. Je me propose de démontrer les lemmes suivants:

Lemme I. Si on envisage une portion de surface sans contact S, passant par le point a_0, b_0, c_0; si x_0, y_0, z_0 sont les coordonnées d'un point de S et si x_1, y_1, z_1 sont les coordonnées de son conséquent, on pourra développer x_1, y_1, z_1 suivant les puissances de $x_0 - a_0$, $y_0 - b_0$, $z_0 - c_0$ et μ pourvu que ces quantités soient suffisamment petites.

Je puis toujours prendre pour origine le point a_0, b_0, c_0 de telle façon que

$$a_0 = b_0 = c_0 = 0.$$

Si alors

$$z = \varphi(x, y)$$

est l'équation de la surface S; cette surface passera par l'origine O et on aura:

$$\varphi(0, 0) = 0.$$

Je supposerai de plus qu'en tous les points de la portion de surface S envisagée la fonction $\varphi(x, y)$ est holomorphe. Par l'origine O passe une trajectoire; imaginons que quand $\mu = 0$ cette trajectoire vienne au temps $t = \tau$ recouper la surface S en un point P dont les coordonnées seront:

$$x = a, \qquad y = b, \qquad z = c.$$

D'après la terminologie que nous avons adopté, le point P sera *quand on suppose* $\mu = 0$ le conséquent du point O.

Soit maintenant x_0, y_0, z_0 un point A très voisin de O et appartenant à la surface S. Si l'on fait passer par ce point A une trajectoire, si on suppose que μ cesse d'être nul, mais reste très petit, on verra que cette trajectoire viendra, à une époque t très peu différente de τ couper la surface S en un point B très voisin de P.

Ce point B dont j'appellerai les coordonnées x_1, y_1, z_1 sera d'après notre terminologie le conséquent du point A.

Ce que je me propose de démontrer, c'est que x_1, y_1, z_1 peuvent se développer suivant les puissances croissantes de x_0, y_0, z_0 et μ.

En effet, d'après le théorème III § 2, si x, y, z sont les coordonnées au temps t du point mobile qui décrit la trajectoire issue du point A, si de plus x_0, y_0, z_0, μ et $t-\tau$ sont suffisamment petits, on aura:

$$(4)\qquad \begin{aligned} x &= \psi_1(t-\tau, \mu, x_0, y_0, z_0), \\ y &= \psi_2(t-\tau, \mu, x_0, y_0, z_0), \\ z &= \psi_3(t-\tau, \mu, x_0, y_0, z_0), \end{aligned}$$

ψ_1, ψ_2 et ψ_3 étant des séries ordonnées suivant les puissances de $t-\tau$, μ, x_0, y_0, z_0.

Ces séries se réduiront respectivement à a, b, c pour

$$t-\tau = \mu = x_0 = y_0 = z_0 = 0.$$

Comme $\varphi(x, y)$ est développable suivant les puissances de $x-a$ et $y-b$, si $x-a$ et $y-b$ sont assez petits, nous aurons également:

$$\varphi(x, y) = \psi_4(t-\tau, \mu, x_0, y_0, z_0),$$

ψ_4 étant une série de même forme que ψ_1, ψ_2 et ψ_3.

Ecrivons que le point x, y, z se trouve sur la surface S, nous aurons:

$$(5)\qquad \psi_3 = \psi_4.$$

La relation (5) peut être regardée comme une équation entre $t-\tau$, μ, x_0, y_0 et z_0 et on peut chercher à la résoudre par rapport à $t-\tau$.

Pour:

$$t-\tau = \mu = x_0 = y_0 = z_0 = 0$$

cette relation est satisfaite, car on a

$$\psi_3 = \psi_4 = 0.$$

D'après un théorème de CAUCHY, que nous avons démontré dans un des paragraphes qui précèdent, on pourra tirer de la relation (5) $t-\tau$ sous la forme suivante:

$$(6)\qquad t-\tau = \theta(\mu, x_0, y_0, z_0),$$

θ étant une série ordonnée suivant les puissances de μ, x_0, y_0 et z_0.

Il n'y aurait d'exception que si pour

$$t - \tau = \mu = x_0 = y_0 = z_0 = 0$$

on avait

$$\frac{d\psi_3}{dt} = \frac{d\psi_4}{dt}.$$

Or cette équation exprime que la trajectoire issue du point O pour $\mu = 0$ va *toucher* la surface S au point P.

Mais il n'en sera pas ainsi, parce que nous supposerons toujours que S est une surface ou une portion de surface sans contact.

Dans les équations (4) remplaçons $t - \tau$ par θ et x, y, z par x_1, y_1, z_1; il viendra:

$$x_1 = \theta_1(\mu, x_0, y_0, z_0),$$
$$y_1 = \theta_2(\mu, x_0, y_0, z_0),$$
$$z_1 = \theta_3(\mu, x_0, y_0, z_0),$$

θ_1, θ_2 et θ_3 étant des séries développées selon les puissances de μ, x_0, y_0 et z_0.

C. Q. F. D.

Lemme II. Si la distance de deux points A_0 et B_0 appartenant à la portion de surface sans contact S est une quantité très petite d'ordre n, il en sera de même de la distance de leurs conséquents A_1 et B_1.

Soient en effet a_1, a_2, a_3 les coordonnées d'un point fixe P_0 de S très voisin de A_0 et de B_0; a_1', a_2', a_3' les coordonnées de son conséquent P_1.

Soient x_1, x_2, x_3; x_1', x_2', x_3'; y_1, y_2, y_3; y_1', y_2', y_3' les coordonnées de A_0, A_1, B_0 et B_1.

D'après le lemme I $x_1' - a_1', x_2' - a_2', x_3' - a_3'$ peuvent se développer selon les puissances croissantes de $x_1 - a_1, x_2 - a_2, x_3 - a_3$ et μ.

L'expression de $y_1' - a_1', y_2' - a_2', y_3' - a_3'$ en fonctions de $y_1 - a_1$, $y_2 - a_2, y_3 - a_3$ et μ sera évidemment la même que celle de $x_1' - a_1'$, $x_2' - a_2', x_3' - a_3'$ en fonctions de $x_1 - a_1, x_2 - a_2, x_3 - a_3$ et μ.

On déduit de là que l'on peut écrire:

$$\begin{aligned} x_1' - y_1' &= (x_1 - y_1)F_1 + (x_2 - y_2)F_2 + (x_3 - y_3)F_3, \\ x_2' - y_2' &= (x_1 - y_1)F_1' + (x_2 - y_2)F_2' + (x_3 - y_3)F_3', \\ x_3' - y_3' &= (x_1 - y_1)F_1'' + (x_2 - y_2)F_2'' + (x_3 - y_3)F_3'', \end{aligned} \tag{7}$$

les F étant des séries développées suivant les puissances de:

$$\mu\,,\ x_1 - a_1\,,\ x_2 - a_2\,,\ x_3 - a_3\,,\ y_1 - a_1\,,\ y_2 - a_2\,,\ y_3 - a_3.$$

Les quantités F_1, F_2, etc. sont finies; si donc $x_1 - y_1$, $x_2 - y_2$ et $x_3 - y_3$ sont des quantités très petites d'ordre n, il en sera de même de $x_1' - y_1'$, $x_2' - y_2'$, $x_3' - y_3'$.

C. Q. F. D.

Théorème III. Soit A_1AMB_1B une courbe invariante, de telle façon que A_1 et B_1 soient les conséquents de A et B.

Je suppose que les arcs AA_1 et BB_1 soient très petits (c'est à dire tendent vers 0 avec μ) mais que leur courbure soit finie.

Je suppose que cette courbe invariante et la position des points A et B dépendent de μ suivant une loi quelconque. Je suppose qu'il existe un invariant intégral positif. Si la distance AB est très petite du n^e ordre et que la distance AA_1 ne soit pas très petite du n^e ordre, l'arc AA_1 coupe l'arc BB_1.

Fig. 1.

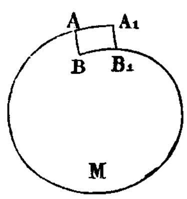
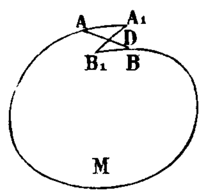


Fig. 2.



Je puis toujours joindre les points A et B par un arc de courbe AB situé tout entier sur la portion de surface sans contact S et dont la longueur totale soit du même ordre de grandeur que la distance AB, c'est à dire une quantité très petite du n^e ordre. Soit A_1B_1 un arc de courbe qui soit le conséquent de AB, il sera aussi très petit du n^e ordre d'après le lemme II.

Voici maintenant les diverses hypothèses que l'on peut concevoir:

1ère hypothèse. Les deux arcs AA_1 et BB_1 se coupent. Je me propose d'établir que c'est cette hypothèse qui est réalisée.

2e hypothèse. Le quadrilatère curviligne AA_1B_1B est tel que les quatre arcs qui lui servent de côtés n'ont d'autre point commun que les quatre sommets A, A_1, B et B_1. C'est le cas de la figure 1.

3^e hypothèse. Les deux arcs AB et A_1B_1 se coupent. C'est le cas de la figure 2.

4^e hypothèse. L'un des arcs AB ou A_1B_1 coupe l'un des arcs AA_1 ou BB_1; mais les arcs AA_1 et BB_1 ne se coupent pas, non plus que les deux arcs AB et A_1B_1.

S'il y a un invariant positif il existera d'après le paragraphe précédent une certaine intégrale

$$\int MHd\omega$$

dont tous les éléments seront positifs et qui devra avoir la même valeur pour l'aire ABB_1MA et pour sa conséquente AA_1B_1MA.

Cette intégrale étendue à l'aire

$$ABA_1B_1 = AA_1B_1MA - ABB_1MA$$

doit donc être nulle et comme tous les éléments de l'intégrale sont positifs, la disposition ne peut être celle de la figure 1 où l'aire ABA_1B_1 est convexe.

La seconde hypothèse doit donc être rejetée.

La disposition ne peut non plus être celle de la figure 2.

En effet dans le triangle ADA_1, les distances AD et A_1D sont très petites du n^e ordre car elles sont plus petites que les arcs AD et A_1D, lesquels sont plus petits que les arcs AB et A_1B_1 qui sont du n^e ordre. De plus on a:

$$AA_1 < AD + A_1D.$$

La distance AA_1 devrait donc être une quantité très petite du n^e ordre, ce qui est contraire à l'énoncé du théorème.

La 3^e hypothèse doit donc être rejetée.

Je dis que la 4^e hypothèse ne peut non plus être acceptée. Supposons en effet par exemple que l'arc AB coupe l'arc AA_1 en un point A'. Soit ANA_1 la portion de l'arc AB qui va de A en A'; soit APA' la portion de l'arc AA_1 qui va de A en A'.

Je dis qu'on pourra remplacer l'arc $ANA'B$ par l'arc $APA'B$; et que le nouvel arc $APA'B$ sera comme l'arc primitif $ANA'B$ une quantité très petite du n^e ordre.

En effet l'arc ANA' est plus petit que AB, il est donc du n^e ordre;

la distance AA' est donc elle-même du n^e ordre; l'arc APA' est plus petit que AA_1 qui est très petit, c'est à dire qui tend vers o avec μ; l'arc APA' est donc très petit et sa courbure est finie; on peut donc assigner une limite au rapport de l'arc APA' à sa corde AA'; ce rapport est fini et AA' est du n^e ordre; donc APA' est du n^e ordre, c. q. f. d.

D'ailleurs le nouvel arc $APA'B$ ne coupe plus l'arc AA_1, il a seulement avec lui une partie commune APA'.

On retombe donc sur la 2e hypothèse qui a déjà été rejetée.

La 1ère hypothèse est donc seule acceptable et le théorème est démontré.

Remarque. — Nous avons supposé dans l'énoncé du théorème que les arcs AA_1 et BB_1 sont très petits et que leur courbure est finie. En réalité nous ne nous sommes servis de cette hypothèse que pour montrer que si la corde AA' est très petite du n^e ordre, il en est de même de l'arc APA'.

Le théorème sera donc encore vrai quand même l'arc AA_1 ne serait pas très petit et sa courbure finie, pourvu qu'on puisse assigner une limite supérieure au rapport d'un arc quelconque (faisant partie de AA_1 ou de BB_1) à sa corde.

CHAPITRE III.

Théorie des solutions périodiques.

§ 9. *Existence des solutions périodiques.*

Considérons un système d'équations différentielles

$$\frac{dx_i}{dt} = X_i \qquad (1) \qquad (i=1,2,\ldots,n)$$

où les X sont des fonctions des x et d'un paramètre μ. Les X pourront aussi dépendre de t, mais ce seront alors des fonctions périodiques de cette variable et la période sera 2π.