



Pour éviter toute confusion, nous dirons que les équations (2) représentent la *solution générale* des équations (1) si les constantes  $C$  y restent arbitraires et qu'elles représentent une *solution particulière* si on y donne aux  $C$  des valeurs numériques. Nous dirons d'autre part que dans les équations (3),  $F_1, F_2, \dots, F_n$  sont  $n$  *intégrales particulières* des équations (1). Le sens des mots *solution* et *intégrale* se trouve ainsi entièrement fixé.

Supposons que l'on connaisse une solution particulière des équations (1) qui s'écrira:

$$(4) \quad x_1 = \varphi_1(t), \quad x_2 = \varphi_2(t), \quad \dots, \quad x_n = \varphi_n(t).$$

On peut se proposer d'étudier les solutions particulières de (1) qui diffèrent peu de la solution (4). Pour cela posons:

$$x_1 = \varphi_1 + \xi_1, \quad x_2 = \varphi_2 + \xi_2, \quad \dots, \quad x_n = \varphi_n + \xi_n$$

et prenons pour nouvelles fonctions inconnues  $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ . Si la solution que l'on veut étudier diffère peu de la solution (4), les  $\xi$  sont très petits et nous en pouvons négliger les carrés. Les équations (1) deviennent alors, en négligeant les puissances supérieures des  $\xi$ :

$$(5) \quad \frac{d\xi_i}{dt} = \frac{dX_i}{dx_1} \xi_1 + \frac{dX_i}{dx_2} \xi_2 + \dots + \frac{dX_i}{dx_n} \xi_n. \quad (i=1, 2, \dots, n)$$

Dans les dérivées  $\frac{dX_i}{dx_k}$ , les quantités  $x_1, x_2, \dots, x_n$  doivent être remplacées par  $\varphi_1(t), \varphi_2(t), \dots, \varphi_n(t)$ , de sorte que ces dérivées peuvent être regardées comme des fonctions connues du temps.

Les équations (5) s'appelleront les *équations aux variations* des équations (1). On voit que les équations aux variations sont linéaires.

Les équations (1) sont dites *canoniques* lorsque les variables  $x$  sont en nombre pair  $n = 2p$ , se répartissant en deux séries

$$x_1, x_2, \dots, x_p,$$

$$y_1, y_2, \dots, y_p,$$

et que les équations (1) peuvent s'écrire:

$$\frac{dx_i}{dt} = \frac{dF}{dy_i}, \quad \frac{dy_i}{dt} = -\frac{dF}{dx_i}. \quad (i=1, 2, \dots, p)$$

Elles ont alors la forme des équations de la dynamique et nous dirons, à l'exemple des Anglais, que le système d'équations (6) comporte  $p$  degrés de liberté.

On sait que ce système (6) admet une intégrale dite des forces vives:

$$F = \text{const.}$$

et que si l'on en connaît  $p - 1$  autres, on peut considérer les équations canoniques comme complètement intégrées.

Considérons en particulier le cas de  $n = 3$ ; nous pourrons alors regarder  $x_1$ ,  $x_2$  et  $x_3$  comme les coordonnées d'un point  $P$  dans l'espace. Les équations:

$$(6) \quad \frac{dx_1}{dt} = X_1, \quad \frac{dx_2}{dt} = X_2, \quad \frac{dx_3}{dt} = X_3$$

définissent alors la vitesse de ce point  $P$  en fonction de ses coordonnées. Considérons une solution particulière des équations (1)

$$x_1 = \varphi_1(t), \quad x_2 = \varphi_2(t), \quad x_3 = \varphi_3(t).$$

Lorsque nous ferons varier le temps  $t$ , le point  $P$  décrira une certaine courbe dans l'espace; nous l'appellerons une *trajectoire*. A chaque solution particulière des équations (1) correspond donc une trajectoire et réciproquement.

Si les fonctions  $X_1$ ,  $X_2$  et  $X_3$  sont uniformes, par chaque point de l'espace passe une trajectoire et une seule. Il n'y a d'exception que si l'une de ces trois fonctions devient infinie ou si elles s'annulent toutes les trois. Les points où ces cas d'exception se présenteraient s'appelleraient *points singuliers*.

Considérons une courbe gauche quelconque. Par chacun des points de cette courbe passe une trajectoire; l'ensemble de ces trajectoires constitue une surface que j'appellerai *surface-trajectoire*.

Comme deux trajectoires ne peuvent se couper sinon en un point singulier, une surface-trajectoire qui ne passe en aucun point singulier ne peut être coupée par aucune trajectoire.

Nous aurons fréquemment dans la suite à nous occuper de la question de la stabilité. Il y aura *stabilité*, si les trois quantités  $x_1$ ,  $x_2$ ,  $x_3$  restent

inférieures à certaines limites quand le temps  $t$  varie depuis  $-\infty$  jusqu'à  $+\infty$ ; ou en d'autres termes, si la trajectoire du point  $P$  reste tout entière dans une région limitée de l'espace.

Supposons qu'il existe une surface-trajectoire fermée  $S$ ; cette surface partagera l'espace en deux régions, l'une intérieure, l'autre extérieure, et aucune trajectoire ne pourra passer d'une de ces régions dans l'autre. Si donc la position initiale du point  $P$  est dans la région intérieure, ce point y restera éternellement; sa trajectoire sera tout entière à l'intérieur de  $S$ . Il y aura donc stabilité.

Ainsi la question de stabilité se ramène à la recherche des surfaces trajectoires fermées.

On peut varier ce mode de représentation géométrique; supposons par exemple que l'on pose:

$$\begin{aligned}x_1 &= \phi_1(z_1, z_2, z_3), \\x_2 &= \phi_2(z_1, z_2, z_3), \\x_3 &= \phi_3(z_1, z_2, z_3),\end{aligned}$$

les  $\phi$  étant des fonctions de  $z$  qui sont uniformes pour toutes les valeurs réelles des  $z$ . Nous pourrions considérer non plus  $x_1, x_2, x_3$ , mais  $z_1, z_2, z_3$  comme les coordonnées d'un point dans l'espace. Quand on connaîtra la position de ce point, on connaîtra  $z_1, z_2, z_3$  et par conséquent  $x_1, x_2, x_3$ . Tout ce que nous avons dit plus haut reste exact.

Il suffit même que les trois fonctions  $\phi$  restent uniformes dans un certain domaine, pourvu qu'on ne sorte pas de ce domaine.

Si  $n > 3$ , ce mode de représentation ne peut plus être employé en général, à moins qu'on ne se résigne à envisager l'espace à plus de trois dimensions. Il est pourtant un cas où la difficulté peut être tournée.

Supposons par exemple que  $n = 4$  et qu'on connaisse une des intégrales des équations (1). Soit:

$$(7) \quad F(x_1, x_2, x_3, x_4) = C$$

cette intégrale. Nous regarderons la constante d'intégration  $C$  comme une donnée de la question. Nous pourrions alors tirer de l'équation (7) une des quatre quantités  $x_1, x_2, x_3, x_4$  en fonction des trois autres, ou

bien encore trouver trois variables auxiliaires  $z_1, z_2, z_3$  telles qu'en faisant:

$$\begin{aligned} x_1 &= \phi_1(z_1, z_2, z_3), & x_3 &= \phi_3(z_1, z_2, z_3), \\ x_2 &= \phi_2(z_1, z_2, z_3), & x_4 &= \phi_4(z_1, z_2, z_3), \end{aligned}$$

on satisfasse à l'équation (7) quelles que soient les valeurs de  $z_1, z_2, z_3$ . Il arrivera souvent qu'on pourra choisir ces variables auxiliaires  $z$  de façon que les quatre fonctions  $\phi$  soient uniformes, sinon pour toutes les valeurs réelles des  $z$ , au moins dans un domaine d'où on n'aura pas à sortir.

On pourra alors représenter la situation du système par un point dont les coordonnées dans l'espace seront  $z_1, z_2$  et  $z_3$ .

Supposons par exemple que l'on ait des équations canoniques avec deux degrés de liberté:

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= \frac{dF}{dy_1}, & \frac{dx_2}{dt} &= \frac{dF}{dy_2}, \\ \frac{dy_1}{dt} &= -\frac{dF}{dx_1}, & \frac{dy_2}{dt} &= -\frac{dF}{dx_2}. \end{aligned}$$

Nous aurons quatre variables  $x_1, x_2, y_1, y_2$ , mais ces variables seront liées par l'équation des forces vives:

$$F = C,$$

de sorte que si nous regardons la constante des forces vives  $C$  comme connue, il n'y aura plus que trois variables indépendantes et que la représentation géométrique sera possible.

Nous distinguerons parmi les variables  $x_1, x_2, \dots, x_n$ , les variables *linéaires* et les variables *angulaires*. Il pourra arriver que les fonctions  $X_1, X_2, \dots, X_n$  soient toutes périodiques par rapport à l'une des variables  $x_i$  et ne changent pas quand cette variable augmente de  $2\pi$ . La variable  $x_i$  et celles qui jouissent de la même propriété seront alors *angulaires*; les autres seront *linéaires*.

Je dirai que la situation du système n'a pas changé si toutes les variables angulaires ont augmenté d'un multiple de  $2\pi$  et si toutes les variables linéaires ont repris leurs valeurs primitives.

Nous adopterons alors un mode de représentation tel que le point représentatif  $P$  revienne au même point de l'espace quand une ou plu-

sieurs des variables angulaires aura augmenté de  $2\pi$ . Nous en verrons des exemples dans la suite.

Parmi les solutions particulières des équations (1), nous distinguerons les *solutions périodiques*. Soit

$$x_1 = \varphi_1(t), \quad x_2 = \varphi_2(t), \quad \dots, \quad x_n = \varphi_n(t)$$

une solution particulière des équations (1). Supposons qu'il existe une quantité  $h$  telle que:

$$\varphi_i(t + h) = \varphi_i(t)$$

quand  $x_i$  est une variable linéaire et:

$$\varphi_i(t + h) = \varphi_i(t) + 2k\pi, \quad (k \text{ étant entier})$$

quand  $x_i$  est une variable angulaire. Nous dirons alors que la solution considérée est *périodique* et que  $h$  est la période.

Si l'on adopte un mode de représentation géométrique tel que le point représentatif reste le même quand une des variables angulaires augmente de  $2\pi$ , toute solution périodique sera représentée par une trajectoire fermée.

## § 2. Calcul des limites.

L'une des plus belles découvertes de CAUCHY (Comptes rendus, tome 14, page 1020), quoiqu'elle ait été peut-être peu remarquée de son temps, est celle qu'il a appelée le calcul des limites et à laquelle nous conserverons ce nom, quelque mal justifié qu'il puisse être.

Considérons un système d'équations différentielles

$$(1) \quad \begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= f_1(x, y, z), \\ \frac{dz}{dx} &= f_2(x, y, z). \end{aligned}$$

Si  $f_1$  et  $f_2$  peuvent être développés suivant les puissances croissantes de  $x, y$  et  $z$ , ces équations admettront une solution de la forme suivante

$$y = \varphi_1(x), \quad z = \varphi_2(x),$$

$\varphi_1$  et  $\varphi_2$  étant des séries développées suivant les puissances croissantes de  $x$  et s'annulant avec  $x$ .

Pour le démontrer, CAUCHY remplace les deux fonctions  $f_1$  et  $f_2$  par une expression de la forme:

$$f'(x, y, z) = \frac{M}{(1 - \alpha x)(1 - \beta y)(1 - \gamma z)},$$

en choisissant  $M, \alpha, \beta, \gamma$  de façon que chaque terme de  $f'$  ait un plus grand coefficient (en valeur absolue) que le terme correspondant de  $f_1$  et de  $f_2$ . En remplaçant ainsi  $f_1$  et  $f_2$  par  $f'$ , on augmente les coefficients de  $\varphi_1$  et de  $\varphi_2$  et comme ces deux séries sont convergentes après ce changement, elles devaient l'être également avant ce changement.

Tel est le principe fondamental du calcul des limites dont CAUCHY a fait d'ailleurs beaucoup d'autres applications et que plusieurs géomètres ont notablement perfectionné depuis.

Le plus grand de ces perfectionnements est dû à M. WEIERSTRASS qui a remplacé la fonction  $f'(x, y, z)$  de CAUCHY par une autre plus simple qui peut jouer le même rôle.

Ecrivons les équations (1) sous la forme:

$$(1') \quad \begin{aligned} \frac{dy}{dt} &= f_1(x, y, z), \\ \frac{dz}{dt} &= f_2(x, y, z), \\ \frac{dx}{dt} &= f(x, y, z) = 1. \end{aligned}$$

Remplaçons-y ensuite  $f, f_1$  et  $f_2$  par la fonction de M. WEIERSTRASS

$$f'(x, y, z) = \frac{M}{1 - a(x + y + z)};$$

elles deviendront:

$$(2') \quad \frac{dx}{dt} = \frac{dy}{dt} = \frac{dz}{dt} = \frac{M}{1 - a(x + y + z)}.$$

Les équations (1') sont satisfaites formellement par des séries:

$$x = \varphi(t) = t, \quad y = \varphi_1(t), \quad z = \varphi_2(t)$$

développées suivant les puissances croissantes de  $t$  et s'annulant avec  $t$ .

De même les équations (2') seront satisfaites par des séries

$$x = \varphi'(t), \quad y = \varphi'_1(t), \quad z = \varphi'_2(t)$$

développées suivant les puissances croissantes de  $t$  et s'annulant avec  $t$ . (On voit facilement d'ailleurs que  $\varphi'(t) = \varphi'_1(t) = \varphi'_2(t)$ .)

Si  $M$  et  $\alpha$  sont convenablement choisis, les coefficients des séries  $\varphi'$  sont plus grands que ceux des séries  $\varphi$ ; or les séries  $\varphi'$  convergent; donc les séries  $\varphi$  convergent également.

C. Q. F. D.

Je n'insiste pas sur ces démonstrations qui sont devenues tout à fait classiques et qui se trouvent développées dans tous les traités un peu complets d'analyse, par exemple dans le Cours d'Analyse de M. JORDAN (tome 3, page 87).

Mais on peut aller plus loin.

**Théorème I.** Imaginons que les fonctions  $f_1$  et  $f_2$  dépendent, non seulement de  $x$ ,  $y$  et  $z$ , mais d'un certain paramètre arbitraire  $\mu$  et qu'elles puissent se développer suivant les puissances croissantes de  $x$ ,  $y$ ,  $z$  et  $\mu$ . Ecrivons alors les équations (1) sous la forme:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= f(x, y, z, \mu) = 1, \\ (1'') \quad \frac{dy}{dt} &= f_1(x, y, z, \mu), \\ \frac{dz}{dt} &= f_2(x, y, z, \mu). \end{aligned}$$

On peut trouver trois séries

$$\begin{aligned} x &= \varphi(t, \mu, x_0, y_0, z_0) = t + x_0, & y &= \varphi_1(t, \mu, x_0, y_0, z_0), \\ & & z &= \varphi_2(t, \mu, x_0, y_0, z_0) \end{aligned}$$

qui satisfassent formellement aux équations (1''), qui soient développées suivant les puissances croissantes de  $t$ , de  $\mu$  et de trois constantes d'intégration  $x_0$ ,  $y_0$ ,  $z_0$  et qui enfin se réduisent respectivement à  $x_0$ ,  $y_0$  et  $z_0$  pour  $t = 0$ .



Je dis que ces séries convergent pourvu que  $t, \mu, x_0, y_0$  et  $z_0$  soient suffisamment petits.

En effet remplaçons  $f, f_1$  et  $f_2$  par la fonction:

$$f'(x, y, z, \mu) = \frac{M}{(1 - \beta\mu)[1 - \alpha(x + y + z)]}.$$

Cette fonction  $f'$  peut être développée suivant les puissances de  $x, y, z$  et  $\mu$ . On peut prendre  $M, \alpha$  et  $\beta$  assez grands pour que chaque terme de  $f'$  soit plus grand que le terme correspondant de  $f, f_1$  et de  $f_2$ .

Nous obtiendrons ainsi les équations

$$(2'') \quad \frac{dx}{dt} = \frac{dy}{dt} = \frac{dz}{dt} = \frac{M}{(1 - \beta\mu)[1 - \alpha(x + y + z)]}.$$

On peut trouver trois séries

$$\begin{aligned} x &= \varphi'(t, \mu, x_0, y_0, z_0), & y &= \varphi_1'(t, \mu, x_0, y_0, z_0) \\ z &= \varphi_2'(t, \mu, x_0, y_0, z_0) \end{aligned}$$

développées suivant les puissances de  $t, \mu, x_0, y_0, z_0$ , satisfaisant aux équations (2'') et se réduisant respectivement à  $x_0, y_0, z_0$  pour  $t = 0$ .

En raisonnant comme le faisait CAUCHY, on démontrerait que chaque terme des séries  $\varphi'$  est plus grand que le terme correspondant des séries  $\varphi$ . Or les séries  $\varphi'$  convergent, si  $t, \mu, x_0, y_0$  et  $z_0$  sont assez petits. Donc les séries  $\varphi$  convergent également.

C. Q. F. D.

On peut tirer de là diverses conséquences.

**Théorème II.** Nous venons de voir que  $x, y$  et  $z$  peuvent être développés suivant les puissances de  $t, \mu, x_0, y_0$  et  $z_0$  pourvu que ces cinq variables,  $y$  compris  $t$ , soient suffisamment petites.

Je dis que  $x, y$  et  $z$  pourront encore être développées suivant les puissances des quatre variables  $\mu, x_0, y_0$  et  $z_0$ , quelque grand que soit  $t$  pourvu que les quatre variables  $\mu, x_0, y_0$  et  $z_0$  soient assez petites. Il y a toutefois un cas d'exception sur lequel je reviendrai.

En effet nous trouvons d'abord trois séries

$$\begin{aligned} x &= \varphi(t, \mu, x_0, y_0, z_0), & y &= \varphi_1(t, \mu, x_0, y_0, z_0), \\ z &= \varphi_2(t, \mu, x_0, y_0, z_0) \end{aligned}$$

qui définissent  $x, y$  et  $z$  pour les valeurs suffisamment petites de  $\mu, x_0, y_0, z_0$  et quand

$$|t| < \rho,$$

$\rho$  étant le rayon de convergence de ces séries. Si donc  $t_1$  est un point intérieur au cercle de convergence et si  $x_1, y_1$  et  $z_1$  sont les valeurs de  $x, y$  et  $z$  pour  $t = t_1$ , on voit que  $x_1, y_1$  et  $z_1$  sont des fonctions holomorphes de  $\mu, x_0, y_0$  et  $z_0$ , c'est à dire développables suivant les puissances de ces variables si elles sont assez petites.

Soient ensuite  $x_1^0, y_1^0$  et  $z_1^0$  les valeurs de  $x_1, y_1$  et  $z_1$  pour

$$\mu = x_0 = y_0 = z_0 = 0.$$

Cela posé, on aura dans le voisinage du point  $t = t_1$

$$(3) \quad \begin{aligned} x &= \varphi'(t - t_1, \mu, x_1 - x_1^0, y_1 - y_1^0, z_1 - z_1^0), \\ y &= \varphi_1'(t - t_1, \mu, x_1 - x_1^0, y_1 - y_1^0, z_1 - z_1^0), \\ z &= \varphi_2'(t - t_1, \mu, x_1 - x_1^0, y_1 - y_1^0, z_1 - z_1^0). \end{aligned}$$

Les séries  $\varphi', \varphi_1'$  et  $\varphi_2'$ , tout à fait analogues aux séries  $\varphi, \varphi_1$  et  $\varphi_2$ , sont définies comme il suit.

Elles satisfont aux équations différentielles; elles sont développées suivant les puissances de  $t - t_1, \mu, x_1 - x_1^0, y_1 - y_1^0$  et  $z_1 - z_1^0$ ; elles se réduisent à  $x_1, y_1$  et  $z_1$  pour  $t = t_1$ .

Elles convergeront si  $\mu, x_1 - x_1^0, y_1 - y_1^0, z_1 - z_1^0$  sont assez petits et si

$$|t - t_1| < \rho_1,$$

$\rho_1$  étant le rayon du nouveau cercle de convergence  $C_1$ .

Si  $t$  est un point intérieur à ce nouveau cercle de convergence  $C_1$ , on voit que  $x, y$  et  $z$  seront fonctions holomorphes de  $\mu, x_1 - x_1^0, y_1 - y_1^0$  et  $z_1 - z_1^0$ . Mais  $x_1 - x_1^0, y_1 - y_1^0, z_1 - z_1^0$  sont déjà fonctions holomorphes de  $\mu, x_0, y_0, z_0$ . Donc, pour tout point  $t$  intérieur au cercle

$C_1$ , les trois quantités  $x, y$  et  $z$  sont des fonctions holomorphes de  $\mu, x_0, y_0, z_0$  développables selon les puissances de ces variables si elles sont assez petites.

Supposons maintenant que le point  $t$  soit extérieur au cercle  $C_1$ , le théorème sera encore vrai; il est clair en effet qu'il suffit pour le démontrer pour une valeur quelconque de  $t$ , de répéter le raisonnement précédent un nombre suffisant de fois, pourvu que les rayons  $\rho_1, \rho_2, \dots$  des cercles de convergence envisagés successivement restent supérieurs à une quantité donnée.

Cette convergence sera d'ailleurs uniforme pour toute valeur de  $t$  inférieure à  $t_0$ , quelque grand que soit  $t_0$ .

On ne serait arrêté que dans un cas.

Le théorème de CAUCHY cesse d'être vrai si les fonctions  $f_1$  et  $f_2$  ne sont plus holomorphes en  $x, y, z$ ; par exemple si elles deviennent infinies, ou cessent d'être uniformes.

Si on ne peut pas développer les fonctions  $f, f_1$  et  $f_2$  suivant les puissances croissantes de  $\mu$ , de  $x - x_1^0, y - y_1^0, z - z_1^0$ , il n'existera pas en général trois séries  $\varphi', \varphi_1'$  et  $\varphi_2'$  de la forme (3) satisfaisant aux équations différentielles.

On dit alors que le point

$$x = x_1^0, \quad y = y_1^0, \quad z = z_1^0$$

est un point singulier.

Si donc, en faisant varier  $t$ , on voyait le point mobile  $(x, y, z)$  passer par un point singulier, notre théorème serait en défaut. Si  $t$  variant depuis  $t = 0$  jusqu'à  $t = t_0$ , le point mobile  $(x, y, z)$  ne passe par aucun point singulier, le rayon de convergence de la série de CAUCHY ne pourra s'annuler et on pourra lui assigner une limite inférieure, de sorte que les trois fonctions  $x, y, z$  seront développables suivant les puissances de  $\mu, x_0, y_0, z_0$  pour toute valeur de  $t$  inférieure à  $t_0$ . Mais si pour  $t = t_0$ , le point  $(x, y, z)$  se confond avec un point singulier, le théorème cessera d'être vrai pour les valeurs de  $t$  supérieures à  $t_0$ .

Notre théorème comporte donc un cas d'exception. Mais ce cas ne se présentera pas dans le problème des trois corps et nous n'avons pas à nous en inquiéter. Soient en effet:

$$(x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2), (x_3, y_3, z_2)$$

les coordonnées des trois corps,  $r_{23}$ ,  $r_{13}$ ,  $r_{12}$  leurs distances mutuelles,  $m_1$ ,  $m_2$  et  $m_3$  leurs masses. Les équations du problème seront de la forme suivante:

$$\frac{d^2x_1}{dt^2} = \frac{m_2(x_2 - x_1)}{r_{12}^3} + \frac{m_3(x_3 - x_1)}{r_{13}^3}.$$

Le second membre de cette équation ne pourrait cesser d'être holomorphe en  $x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2, x_3, y_3, z_3$  que si l'une des trois distances  $r_{23}, r_{13}, r_{12}$  venait à s'annuler, c'est à dire si deux corps venaient à se choquer. Or nous n'appliquerons jamais notre théorème que quand on sera certain qu'un pareil choc ne peut se produire.

Le même résultat peut encore être établi d'une autre manière. Reprenons les équations:

$$\frac{dx}{dt} = f(x, y, z, \mu),$$

$$\frac{dy}{dt} = f_1(x, y, z, \mu),$$

$$\frac{dz}{dt} = f_2(x, y, z, \mu).$$

Les fonctions  $f, f_1, f_2$  pourront en général être développées suivant les puissances croissantes de  $x - x_0, y - y_0, z - z_0, \mu - \mu_0$ , pour les valeurs de  $x, y, z$  et  $\mu$  suffisamment voisines de  $x_0, y_0, z_0$  et  $\mu_0$ . S'il existe un système de valeurs de  $x_0, y_0, z_0, \mu_0$  pour lequel cela n'ait pas lieu, je dirai que ce système de valeurs est *un des points singuliers* de nos équations différentielles.

Cela posé, ces équations admettront une solution telle que  $x, y$  et  $z$  s'annulent avec  $t$ ; et cette solution dépendra manifestement de  $\mu$ . Soit:

$$x = \omega_1(t, \mu), \quad y = \omega_2(t, \mu), \quad z = \omega_3(t, \mu)$$

cette solution. Il résulte de la définition même de cette solution que l'on a, quel que soit  $\mu$ :

$$\omega_1(0, \mu) = \omega_2(0, \mu) = \omega_3(0, \mu) = 0.$$

Dans la plupart des applications, on pourra effectuer l'intégration pour  $\mu = 0$ , de telle sorte que les fonctions  $\omega_1(t, 0), \omega_2(t, 0), \omega_3(t, 0)$  seront

connues. Je suppose que, pour aucune des valeurs de  $t$  comprises entre  $0$  et  $t_1$ , le système de valeurs

$$\omega_1(t, 0), \omega_2(t, 0), \omega_3(t, 0), 0$$

ne soit un point singulier de nos équations différentielles.

Pour employer un langage incorrect, mais commode, je dirai que la solution particulière

$$x = \omega_1(t, 0), \quad y = \omega_2(t, 0), \quad z = \omega_3(t, 0)$$

ne passe par aucun point singulier.

Si cela n'avait pas lieu, nous nous trouverions dans le cas d'exception dont j'ai parlé plus haut.

Si au contraire cela a lieu, ce que je supposerai, je dis que les expressions  $\omega_1(t_1, \mu)$ ,  $\omega_2(t_1, \mu)$ ,  $\omega_3(t_1, \mu)$  sont des fonctions de  $\mu$  développables suivant les puissances croissantes de cette variable.

Posons en effet

$$x = \xi + \omega_1(t, 0), \quad y = \eta + \omega_2(t, 0), \quad z = \zeta + \omega_3(t, 0),$$

les équations différentielles deviendront:

$$(4) \quad \begin{aligned} \frac{d\xi}{dt} &= \varphi(\xi, \eta, \zeta, t, \mu), \\ \frac{d\eta}{dt} &= \varphi_1(\xi, \eta, \zeta, t, \mu), \\ \frac{d\zeta}{dt} &= \varphi_2(\xi, \eta, \zeta, t, \mu). \end{aligned}$$

Il résulte de l'hypothèse que nous avons faite que pour toutes les valeurs de  $t$  comprises entre  $0$  et  $t_1$ , les fonctions  $\varphi$ ,  $\varphi_1$  et  $\varphi_2$  peuvent être développées suivant les puissances de  $\xi$ ,  $\eta$ ,  $\zeta$  et  $\mu$ , les coefficients du développement étant des fonctions du temps.

J'observe de plus que pour  $\mu = 0$ , les équations différentielles doivent être satisfaites pour

$$\xi = \eta = \zeta = 0,$$

ce qui veut dire que  $\varphi$ ,  $\varphi_1$  et  $\varphi_2$  s'annulent quand  $\mu$ ,  $\xi$ ,  $\eta$ ,  $\zeta$  s'annulent à la fois.

On pourra alors trouver deux nombres positifs  $M$  et  $\alpha$  tels que, pour toutes les valeurs de  $t$  comprises entre 0 et  $t_1$ , chaque coefficient du développement de  $\varphi$ ,  $\varphi_1$  ou  $\varphi_2$  suivant les puissances croissantes de  $\xi$ ,  $\eta$ ,  $\zeta$  et  $\mu$  soit plus petit en valeur absolue que le coefficient correspondant du développement de:

$$\frac{M(\xi + \eta + \zeta + \mu)}{1 - \alpha(\xi + \eta + \zeta + \mu)}$$

ou a fortiori que le coefficient correspondant du développement de:

$$\psi(\xi, \eta, \zeta, \mu) = \frac{M(\xi + \eta + \zeta + \mu)[1 + \alpha(\xi + \eta + \zeta + \mu)]}{1 - \alpha(\xi + \eta + \zeta + \mu)}.$$

Comparons donc les équations (4) aux suivantes:

$$(5) \quad \frac{d\xi}{dt} = \frac{d\eta}{dt} = \frac{d\zeta}{dt} = \psi(\xi, \eta, \zeta, \mu).$$

La solution des équations (4), qui est telle que  $\xi$ ,  $\eta$  et  $\zeta$  s'annulent à la fois pour  $t = 0$ , s'écrit:

$$\begin{aligned} \xi &= \omega_1(t, \mu) - \omega_1(t, 0), & \eta &= \omega_2(t, \mu) - \omega_2(t, 0), \\ \zeta &= \omega_3(t, \mu) - \omega_3(t, 0). \end{aligned}$$

D'un autre côté les équations (5) admettent une solution:

$$\xi = \eta = \zeta = \omega'(t, \mu)$$

telle que  $\xi$ ,  $\eta$ ,  $\zeta$  s'annulent avec  $t$ .

En raisonnant comme l'a fait CAUCHY, on verrait que si  $\omega'(t, \mu)$  est développable suivant les puissances croissantes de  $\mu$ , il doit en être de même de  $\omega_1(t, \mu) - \omega_1(t, 0)$ ,  $\omega_2(t, \mu) - \omega_2(t, 0)$ ,  $\omega_3(t, \mu) - \omega_3(t, 0)$ , et que chaque coefficient du développement de ces trois dernières fonctions est plus petit en valeur absolue que le coefficient correspondant de  $\omega'(t, \mu)$ , au moins pour toutes les valeurs de  $t$  telles que

$$0 < t < t_1.$$

Or les équations (5) sont faciles à intégrer et on vérifie aisément que

$\omega'(t, \mu)$  peut se développer suivant les puissances de  $\mu$ . Donc  $\xi$ ,  $\eta$  et  $\zeta$  sont également développables suivant les puissances de  $\mu$  pourvu que

$$0 < t < t_1.$$

C. Q. F. D.

**Théorème III.** Cela posé, soit:

$$\begin{aligned} x &= \omega_1(t, \mu, x_0, y_0, z_0), & y &= \omega_2(t, \mu, x_0, y_0, z_0), \\ z &= \omega_3(t, \mu, x_0, y_0, z_0) \end{aligned}$$

celle des solutions de nos équations différentielles, qui est telle que:

$$x = x_0, \quad y = y_0, \quad z = z_0$$

pour  $t = 0$ .

Considérons les fonctions:

$$\begin{aligned} \omega_1(t_1 + \tau, \mu, x_0, y_0, z_0), & \quad \omega_2(t_1 + \tau, \mu, x_0, y_0, z_0), \\ \omega_3(t_1 + \tau, \mu, x_0, y_0, z_0). \end{aligned}$$

Je dis qu'elles sont développables suivant les puissances de  $\mu$ ,  $x_0$ ,  $y_0$ ,  $z_0$  et  $\tau$  pourvu que ces quantités soient suffisamment petites.

Posons en effet

$$\begin{aligned} x &= x' + x_0, & y &= y' + y_0, & z &= z' + z_0, \\ t &= t' \frac{t_1 + \tau}{t_1}. \end{aligned}$$

Nos équations deviendront:

$$\begin{aligned} \frac{dx'}{dt'} &= \left(1 + \frac{\tau}{t_1}\right) f(x' + x_0, y' + y_0, z' + z_0, \mu), \\ \frac{dy'}{dt'} &= \left(1 + \frac{\tau}{t_1}\right) f_1(x' + x_0, y' + y_0, z' + z_0, \mu), \\ \frac{dz'}{dt'} &= \left(1 + \frac{\tau}{t_1}\right) f_2(x' + x_0, y' + y_0, z' + z_0, \mu). \end{aligned}$$

Ces équations contiennent cinq paramètres arbitraires à savoir

$$\mu, x_0, y_0, z_0, \tau.$$





si les  $f$  sont développables suivant les puissances des  $x$  et des  $y$  et s'annulent avec ces  $n + p$  variables;

si enfin le déterminant fonctionnel des  $f$  par rapport aux  $y$  n'est pas nul quand les  $x$  et les  $y$  s'annulent à la fois;

on pourra tirer des équations (7) les  $n$  inconnues  $y$  sous la forme de séries développées suivant les puissances croissantes de  $x_1, x_2, \dots, x_p$ .

Considérons en effet  $x_1$  comme la seule variable indépendante  $x_2, x_3, \dots, x_p$  comme des paramètres arbitraires, nous pourrions remplacer les équations (7) par les  $n$  équations différentielles:

$$(8) \quad \frac{df_i}{dy_1} \frac{dy_1}{dx_1} + \frac{df_i}{dy_2} \frac{dy_2}{dx_1} + \dots + \frac{df_i}{dy_n} \frac{dy_n}{dx_1} + \frac{df_i}{dx_1} = 0. \quad (i=1, 2, \dots, n)$$

Nous sommes ainsi ramenés au cas dont nous venons de nous occuper.

En particulier si  $f(y, x_1, x_2, \dots, x_n)$  est une fonction développable suivant les puissances de  $y, x_1, x_2, \dots, x_n$ ; si quand les  $x$  et  $y$  s'annulent à la fois on a:

$$f = 0, \quad \frac{df}{dy} > 0;$$

si enfin  $y$  est défini par l'égalité

$$f = 0,$$

$y$  sera développable suivant les puissances de  $x$ .

Il nous resterait à examiner ce qui se passe quand le déterminant fonctionnel des  $f$  par rapport aux  $y$  est nul. Cette question a fait l'objet de recherches nombreuses sur lesquelles je ne puis insister ici, mais au premier rang desquelles il convient de citer les travaux de M. PUISEUX sur les racines des équations algébriques. J'ai eu moi-même l'occasion de m'occuper de recherches analogues dans la première partie de ma thèse inaugurale (Paris, Gauthier-Villars, 1879). Je me bornerai donc à énoncer les théorèmes suivants, en me bornant à renvoyer pour les démonstrations, soit aux traités classiques, soit à ma thèse.

**Théorème V.** Soit  $y$  une fonction de  $x$  définie par l'équation

$$(9) \quad f(y, x) = 0$$

où  $f$  est développable suivant les puissances de  $x$  et de  $y$ .

Je suppose que pour  $x = y = 0$ ,  $f$  s'annule ainsi que:

$$\frac{df}{dy}, \frac{d^2f}{dy^2}, \dots, \frac{d^{m-1}f}{dy^{m-1}},$$

mais que  $\frac{d^m f}{dy^m}$  ne s'annule pas.

Il existera  $m$  séries de la forme suivante:

$$(10) \quad y = a_1 x^{\frac{1}{n}} + a_2 x^{\frac{2}{n}} + a_3 x^{\frac{3}{n}} + \dots$$

(où  $n$  est entier positif et où  $a_1, a_2, \dots$  sont des coefficients constants) qui satisferont à l'équation (9).

*Corollaire I.* Si la série (10) satisfait à l'équation (9) il en est de même de la série:

$$y = a_1 \alpha x^{\frac{1}{n}} + a_2 \alpha^2 x^{\frac{2}{n}} + a_3 \alpha^3 x^{\frac{3}{n}} + \dots$$

ou  $\alpha$  est une racine  $n^{\text{e}}$  de l'unité.

*Corollaire II.* Le nombre des séries de la forme (10) développées suivant les puissances de  $x^{\frac{1}{n}}$ , (sans pouvoir être développées suivant les puissances de  $x^{\frac{1}{p}}$ ,  $p < n$ ) est divisible par  $n$ .

*Corollaire III.* Si  $k_1 n_1$  est le nombre des séries (10) développables suivant les puissances de  $x^{\frac{1}{n_1}}$ , si  $k_2 n_2$  est le nombre des séries (10) développables suivant les puissances de  $x^{\frac{1}{n_2}}$ , ..., si  $k_p n_p$  est le nombre des séries (10) développables suivant les puissances de  $x^{\frac{1}{n_p}}$  on aura:

$$k_1 n_1 + k_2 n_2 + \dots + k_p n_p = m,$$

d'où l'on conclut que si  $m$  est impair, l'un au moins des nombres  $n_1, n_2, \dots, n_p$  est aussi impair.

**Théorème VI.** Si l'on a les équations

$$(11) \quad \begin{aligned} f_1(y_1, y_2, \dots, y_p, x) &= 0, \\ f_2(y_1, y_2, \dots, y_p, x) &= 0, \\ \dots & \\ f_p(y_1, y_2, \dots, y_p, x) &= 0, \end{aligned}$$

dont les premiers membres sont développables suivant les puissances des  $y$  et de  $x$  et s'annulent avec ces variables, on pourra toujours éliminer entre ces équations

$$y_2, y_3, \dots, y_p$$

et arriver à une équation unique:

$$f(y_1, x) = 0$$

de même forme que l'équation (9) du théorème précédent.

Il n'y aurait d'exception que si les équations (11) cessaient d'être distinctes.

*Corollaire des théorèmes V et VI.* Le théorème IV s'applique toutes les fois que le déterminant fonctionnel des  $f$  n'est pas nul, c'est à dire toutes les fois que quand les  $x$  s'annulent, les équations

$$(7) \quad f_1 = f_2 = \dots = f_n = 0$$

admettent

$$y_1 = y_2 = \dots = y_n = 0$$

comme une solution *simple*.

Il résulte des théorèmes V et VI et de leurs corollaires énoncés plus haut que le théorème IV est encore vrai si cette solution est multiple, *pourvu que l'ordre de multiplicité soit impair*.

### § 3. *Applications du calcul des limites aux équations aux dérivées partielles.*

CAUCHY avait déjà appliqué le procédé du calcul des limites aux équations aux dérivées partielles. Madame KOWALEVSKI a considérablement simplifié la démonstration de CAUCHY et a donné au théorème sa forme définitive.

Voici en quoi consiste le théorème de Madame KOWALEVSKI (Journal de Crelle, tome 80).

Considérons un système d'équations aux dérivées partielles définissant  $n$  inconnues  $z_1, z_2, \dots, z_n$  en fonctions de  $p$  variables indépendantes.



Je me suis attaché en particulier à l'équation:

$$(2) \quad X_1 \frac{dz}{dx_1} + X_2 \frac{dz}{dx_2} + \dots + X_n \frac{dz}{dx_n} = \lambda_1 z,$$

où  $X_1, X_2, \dots, X_n$  sont développés suivant les puissances de  $x_1, x_2, \dots, x_n$ ; je suppose de plus que dans le développement de  $X_1, X_2, \dots, X_n$ , il n'y ait pas de terme tout connu et que les termes du 1<sup>er</sup> degré se réduisent respectivement à  $\lambda_1 x_1, \lambda_2 x_2, \dots, \lambda_n x_n$ , de telle sorte que

$$X_i = \lambda_i x_i - Y_i,$$

$Y_i$  désignant une suite de termes du 2<sup>d</sup> degré au moins par rapport à  $x_1, x_2, \dots, x_n$ .

J'ai démontré qu'à certaines conditions cette équation admet une intégrale holomorphe développable suivant les puissances de  $x_1, x_2, \dots, x_n$ .

Pour que cette intégrale existe, il suffit:

1° que le polygone convexe qui contient les  $n$  points  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$  ne contienne pas l'origine,

2° que l'on n'ait aucune relation de la forme

$$m_2 \lambda_2 + \dots + m_n \lambda_n = \lambda_1$$

où les  $m$  sont des entiers positifs dont la somme est plus grande que 1.<sup>1</sup>

Je vais chercher à généraliser le résultat obtenu dans ma thèse.

Au lieu de l'équation (2) envisageons l'équation suivante:

$$(3) \quad \frac{dz}{dt} + X_1 \frac{dz}{dx_1} + X_2 \frac{dz}{dx_2} + \dots + X_n \frac{dz}{dx_n} = \lambda_1 z.$$

<sup>1</sup> Dans ma thèse, je n'énonce pas cette restriction et je ne suppose pas que la somme des  $m$  soit plus grande que 1. Il semblerait donc que le théorème est en défaut quand on a par exemple  $\lambda_2 = \lambda_1$ . Il n'en est rien. Si l'on avait

$$m_2 \lambda_2 + \dots + m_n \lambda_n = \lambda_1 \quad (m_2 + m_3 + \dots + m_n > 1)$$

certains coefficients du développement prendraient la forme  $\frac{A}{0}$  et deviendraient infinis.

C'est pour cette raison que nous avons dû supposer qu'une pareille relation n'a pas lieu.

Si l'on avait au contraire  $\lambda_2 = \lambda_1$  certains coefficients prendraient la forme  $\frac{0}{0}$ .

Nous avons encore

$$X_i = \lambda_i x_i - Y_i,$$

$Y_i$  désignant une fonction développée suivant les puissances de  $x_1, x_2, \dots, x_n$  et ne comprenant que des termes du 2<sup>d</sup> degré au moins par rapport à ces  $n$  variables. Mais  $Y_i$  ne dépend pas seulement des  $x$ , il dépend aussi de  $t$ , de sorte que les coefficients du développement de  $Y_i$  suivant les puissances des  $x$  sont des fonctions de  $t$ . Nous supposerons que ce sont des fonctions périodiques de  $t$  de période  $2\pi$  développées suivant les sinus et cosinus des multiples de  $t$ .

Je me propose de chercher dans quel cas l'équation (3) admettra une intégrale holomorphe développée suivant les puissances de  $x_1, x_2, \dots, x_n$  et telle que les coefficients du développement soient des fonctions périodiques de  $t$ .

Voyons d'abord qu'elle va être la forme de  $Y_i$ . Nous allons développer  $Y_i$  suivant les puissances croissantes de  $x_1, x_2, \dots, x_n$ ; considérons le terme en

$$x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \dots x_n^{\alpha_n}.$$

Le coefficient de ce terme étant une fonction périodique de  $t$  pourra se développer suivant les sinus et cosinus des multiples de  $t$ , ou ce qui revient au même suivant les puissances positives et négatives de  $e^{i\nu t}$ .

Nous pourrions donc écrire

$$Y_i = \sum C_{i,\beta,\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n} e^{\beta i \nu t} x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \dots x_n^{\alpha_n}.$$

Les  $C$  sont des coefficients constants;  $\beta$  est un entier positif ou négatif;  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$  sont des entiers positifs tels que

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n \geq 2.$$

J'écrirai aussi quelquefois en supprimant les indices:

$$Y_i = \sum C e^{\beta i \nu t} x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \dots x_n^{\alpha_n}.$$

Posons maintenant:

$$Y'_i = \sum |C| e^{\beta i \nu t} x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \dots x_n^{\alpha_n}$$

et envisageons l'équation suivante:

$$(4) \quad (\lambda'_1 x_1 - Y'_1) \frac{dz}{dx_1} + (\lambda'_2 x_2 - Y'_2) \frac{dz}{dx_2} + \dots + (\lambda'_n x_n - Y'_n) \frac{dz}{dx_n} = \lambda'_1 z.$$

Dans cette équation  $\frac{dz}{dt}$  n'entre plus; nous pouvons donc regarder  $t$  comme un paramètre arbitraire et  $x_1, x_2, \dots, x_n$  comme les seules variables indépendantes. Si donc les quantités  $\lambda'_1, \lambda'_2, \dots, \lambda'_n$  satisfont aux conditions que nous avons énoncées plus haut, l'équation (4) (qui est de même forme que l'équation (2)) admettra une intégrale holomorphe.

Nous supposons

$$\lambda'_1 = \lambda'_2 = \dots = \lambda'_n.$$

Nous supposons de plus  $\lambda'_1$  réel et positif.

Cela posé, soit

$$(5) \quad z = \sum A_{\beta, \alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n} e^{\beta t \sqrt{-1}} x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \dots x_n^{\alpha_n}$$

une série satisfaisant formellement à l'équation (3). Comment pourra-t-on calculer les coefficients  $A$  par récurrence.

En écrivant l'équation (3) sous la forme

$$\frac{dz}{dt} + \lambda_1 x_1 \frac{dz}{dx_1} + \dots + \lambda_n x_n \frac{dz}{dx_n} - \lambda_1 z = Y_1 \frac{dz}{dx_1} + Y_2 \frac{dz}{dx_2} + \dots + Y_n \frac{dz}{dx_n}$$

et en identifiant les deux membres on trouve:

$$A_{\beta, \alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n} [\beta \sqrt{-1} + \lambda_1 \alpha_1 + \lambda_2 \alpha_2 + \dots + \lambda_n \alpha_n - \lambda_1] = P[C, A],$$

$P[C, A]$  étant un polynôme entier à coefficients positifs par rapport aux  $C$  et aux coefficients  $A$  déjà calculés.

Soit maintenant

$$(6) \quad z = \sum A'_{\beta, \alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n} e^{\sqrt{-1} \beta t} x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \dots x_n^{\alpha_n}$$

une série satisfaisant à l'équation (4). Pour calculer les coefficients  $A'$  nous écrirons l'équation (4) sous la forme:

$$\lambda'_1 x_1 \frac{dz}{dx_1} + \lambda'_2 x_2 \frac{dz}{dx_2} + \dots + \lambda'_n x_n \frac{dz}{dx_n} - \lambda'_1 z = Y'_1 \frac{dz}{dx_1} + Y'_2 \frac{dz}{dx_2} + \dots + Y'_n \frac{dz}{dx_n}.$$

En identifiant les deux membres, nous trouverons:

$$A'_{\beta, a_1 a_2 \dots a_n} [\lambda'_1 \alpha_1 + \lambda'_2 \alpha_2 + \dots + \lambda'_n \alpha_n - \lambda'_1] = P[|C|, A'].$$

$P[|C|, A']$  ne diffère de  $P[C, A]$  que parce que les  $C$  sont remplacés par leurs modules et les  $A$  par les  $A'$ .

Les  $\lambda'$  étant réels positifs ainsi que les coefficients du polynôme  $P$ , les  $A'$  seront aussi réels et positifs.

Pour que l'on ait ensuite:

$$|A_{\beta, a_1 a_2 \dots a_n}| < A'_{\beta, a_1 a_2 \dots a_n},$$

il suffit que l'on ait toujours:

$$\lambda'_1 \alpha_1 + \lambda'_2 \alpha_2 + \dots + \lambda'_n \alpha_n - \lambda'_1 < |\beta \sqrt{-1} + \lambda_1 \alpha_1 + \lambda_2 \alpha_2 + \dots + \lambda_n \alpha_n - \lambda_1|$$

ou

$$(7) \quad \lambda'_1 < \left| \frac{\beta \sqrt{-1} + \lambda_1 (\alpha_1 - 1) + \lambda_2 \alpha_2 + \dots + \lambda_n \alpha_n}{(\alpha_1 - 1) + \alpha_2 + \dots + \alpha_n} \right|.$$

Si l'on a choisi  $\lambda'_1$  de façon à satisfaire à l'inégalité (7), on aura donc

$$|A| < A'.$$

Or la série (6) converge, donc il en sera de même de la série (5).

Ainsi donc pour que la série (5) converge, il suffit qu'on puisse trouver une quantité positive  $\lambda'_1$  satisfaisant à l'inégalité (7) pour toutes les valeurs entières et positives des  $\alpha$ , et pour toutes les valeurs entières positives et négatives de  $\beta$ .

Commençons par remarquer que le second membre de l'inégalité (7) est toujours plus grand que:

$$(8) \quad \left| \frac{\beta \sqrt{-1} + \lambda_1 (\alpha_1 - 1) + \lambda_2 \alpha_2 + \dots + \lambda_n \alpha_n}{|\beta| + (\alpha_1 - 1) + \alpha_2 + \dots + \alpha_n} \right|.$$

Il suffira donc que  $\lambda'_1$  soit plus petit que l'expression (8). Or cette expression (8) est le module d'une certaine quantité imaginaire représentée par un certain point  $G$ . Or il est aisé de voir que ce point  $G$  n'est autre chose que le centre de gravité des  $n + 2$  masses suivantes:

1°  $n$  masses égales respectivement à  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$  et situées respectivement aux points  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ ;



2° une masse égale à  $|\beta|$  et située soit au point  $+\sqrt{-1}$  soit au point  $-\sqrt{-1}$ ;

3° une masse égale à  $-1$  située au point  $\lambda_1$ .

Toutes ces masses sont positives à l'exception de la dernière.

Il faut chercher la condition pour que la distance  $OG$  soit toujours supérieure à une certaine limite  $\lambda'_1$ .

Composons d'abord les  $n + 1$  premières masses; nous obtiendrons une masse:

$$M = \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n + |\beta|$$

située en un certain point  $G'$  et comme ces  $n + 1$  premières masses sont positives, le point  $G'$  sera située à l'intérieur de l'un ou de l'autre des deux polygones convexes qui enveloppent, le premier les  $n + 1$  points

$$\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \quad \text{et} \quad +\sqrt{-1},$$

et le second les  $n + 1$  points

$$\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \quad \text{et} \quad -\sqrt{-1}.$$

Si aucun de ces polygones convexes ne contient l'origine, on pourra assigner à la distance  $OG'$  une limite inférieure  $\mu$  et écrire:

$$OG' > \mu.$$

Il reste à composer la masse  $M$  située en  $G'$  et la masse  $-1$  située en  $\lambda_1$ . On obtiendra ainsi une masse  $M - 1$  située en  $G$ . On aura évidemment:

$$OG > OG' - GG',$$

$$GG' = \frac{G'\lambda_1}{M-1} < \frac{OG'}{M-1} + \frac{O\lambda_1}{M-1},$$

d'où

$$OG > OG' \frac{M-2}{M-1} - \frac{O\lambda_1}{M-1} > \mu \frac{M-2}{M-1} - \frac{O\lambda_1}{M-1}.$$

Si donc:

$$M > \frac{3\mu + 2O\lambda_1}{\mu}$$

l'inégalité

$$(9) \quad OG > \frac{\mu}{2}$$

sera satisfaite.

Il n'y a donc qu'un nombre fini de combinaisons des nombres entiers:

$$\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n, \beta$$

pour lesquelles l'inégalité (9) pourrait ne pas être satisfaite.

Si pour aucune de ces combinaisons  $OG$  n'est nul, nous serons certains de pouvoir assigner à  $OG$  une limite inférieure  $\lambda_1$ .

Nous sommes donc conduits à la règle suivante:

*Pour que l'équation (3) admette une intégrale développable suivant les puissances des  $x$  et périodique par rapport à  $t$ , il suffit:*

1° qu'aucun des deux polygones convexes circonscrits, le premier aux points  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$  et  $+\sqrt{-1}$ , le second aux points  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$  et  $-\sqrt{-1}$ , ne contienne l'origine,

2° qu'il n'y ait entre les quantités  $\lambda$  aucune relation de la forme

$$\beta\sqrt{-1} + \alpha_1\lambda_1 + \alpha_2\lambda_2 + \dots + \alpha_n\lambda_n = \lambda_1,$$

les  $\alpha$  étant entiers positifs et  $\beta$  entier positif ou négatif.

C'est là une généralisation du théorème démontré dans ma thèse. Or de ce théorème découlaient un certain nombre de conséquences. Voyons si on pourra en tirer de semblables du théorème généralisé.

Nous allons pour cela suivre absolument la même marche que dans la thèse citée.

Considérons l'équation:

$$(10) \quad \frac{dz}{dt} + X_1 \frac{dz}{dx_1} + X_2 \frac{dz}{dx_2} + \dots + X_n \frac{dz}{dx_n} = 0,$$

obtenue en supprimant le second membre de l'équation (3).

Considérons en outre l'équation:

$$(3) \quad \frac{dz}{dt} + X_1 \frac{dz}{dx_1} + X_2 \frac{dz}{dx_2} + \dots + X_n \frac{dz}{dx_n} = \lambda_1 z$$

et l'équation:

$$(11) \quad \frac{dz}{dt} + X_1 \frac{dz}{dx_1} + X_2 \frac{dz}{dx_2} + \dots + X_n \frac{dz}{dx_n} = \lambda_2 z.$$

Si les  $\lambda$  satisfont aux conditions que nous venons d'énoncer, l'équation (3) admettra une intégrale

$$z = T_1$$

où  $T_1$  est ordonné suivant les puissances des  $x$  et périodique par rapport à  $t$ .

De même l'équation (11) admettra une intégrale

$$z = T_2$$

où  $T_2$  est de même forme que  $T_1$ .

On en conclut que l'équation (10) admet comme intégrale particulière:

$$T_1^{\frac{1}{\lambda_1}} T_2^{-\frac{1}{\lambda_2}}.$$

Comme on peut dans le second membre de (3) remplacer successivement  $\lambda_1 z$ , par  $\lambda_2 z$ ,  $\lambda_3 z$ , ...,  $\lambda_n z$  et qu'on obtient ainsi  $n - 1$  équations analogues à l'équation (11), on peut conclure que l'équation (10) admet  $n - 1$  intégrales particulières

$$T_1^{\frac{1}{\lambda_1}} T_2^{-\frac{1}{\lambda_2}}, T_1^{\frac{1}{\lambda_1}} T_3^{-\frac{1}{\lambda_3}}, \dots, T_1^{\frac{1}{\lambda_1}} T_n^{-\frac{1}{\lambda_n}}$$

où  $T_2, T_3, \dots, T_n$  sont de même forme que  $T_1$ .

Pour avoir l'intégrale générale de (10), il faudrait posséder encore une  $n^e$  intégrale particulière. Pour cela considérons l'équation:

$$(12) \quad \frac{dz}{dt} + X_1 \frac{dz}{dx_1} + \dots + X_n \frac{dz}{dx_n} = z.$$

Cette équation admettra comme intégrale particulière  $z = e^t$ .

Nous en concluons que l'équation (10) admet comme intégrales particulières

$$T_1 e^{-\lambda_1 t}, T_2 e^{-\lambda_2 t}, \dots, T_n e^{-\lambda_n t},$$



Prenons en particulier:

$$\varphi_1 = T_1 e^{-\lambda_1 t}, \quad \varphi_2 = T_2 e^{-\lambda_2 t}, \quad \dots, \quad \varphi_p = T_p e^{-\lambda_p t}.$$

Les équations (14) s'écriront:

$$(14') \quad T_1 = T_2 = \dots = T_p = 0.$$

Des équations (14') on pourra tirer  $x_1, x_2, \dots, x_p$  en fonctions de  $x_{p+1}, x_{p+2}, \dots, x_n$  et  $t$  et on verra que ce sont des fonctions holomorphes par rapport à  $x_{p+1}, x_{p+2}, \dots, x_n$  et périodiques par rapport à  $t$ .

Donc les équations (13) admettent une solution développable suivant les puissances croissantes de  $x_{p+1}, x_{p+2}, \dots, x_n$  et suivant les sinus et cosinus des multiples de  $t$ .

Ce théorème est démontré quand les  $\lambda$  satisfont aux conditions énoncées plus haut; voyons comment on pourra l'étendre aux cas où ces conditions ne sont pas remplies. Je suivrai pour cela la même marche que dans la 4<sup>me</sup> partie de mes recherches sur les *courbes définies par les équations différentielles* (Journal de Liouville, 4<sup>me</sup> série, T. 2, pages 156—157).

Proposons-nous de calculer les coefficients de l'intégrale holomorphe des équations (13) (à supposer que cette intégrale existe) et à cet effet écrivons ces équations (13) sous la forme suivante:

$$(13') \quad \frac{dx_i}{dt} + \lambda_{p+1} x_{p+1} \frac{dx_i}{dx_{p+1}} + \lambda_{p+2} x_{p+2} \frac{dx_i}{dx_{p+2}} + \dots + \lambda_n x_n \frac{dx_i}{dx_n} - \lambda_i x_i \\ = Y_{p+1} \frac{dx_i}{dx_{p+1}} + Y_{p+2} \frac{dx_i}{dx_{p+2}} + \dots + Y_n \frac{dx_i}{dx_n} - Y_i. \quad (i=1, 2, \dots, p)$$

Soit:

$$Y_i = \sum C_{i,\beta,\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n} e^{i\beta v} x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \dots x_n^{\alpha_n}$$

une quelconque des fonctions  $Y_1, Y_2, \dots, Y_n$ , ainsi que nous l'avons supposé plus haut, et proposons-nous de calculer les  $p$  fonctions

$$x_1, x_2, \dots, x_p$$

sous la forme

$$(15) \quad x_i = \sum A_{i,\beta,\alpha_{p+1},\alpha_{p+2},\dots,\alpha_n} e^{i\beta v} x_{p+1}^{\alpha_{p+1}} x_{p+2}^{\alpha_{p+2}} \dots x_n^{\alpha_n}.$$

Pour calculer les coefficients  $A$  par récurrence, substituons les séries (15) dans les équations (13') et identifions les deux membres. Nous aurons pour calculer  $A_{i,\beta,\alpha_{p+1}\dots\alpha_n}$  l'équation suivante:

$$\begin{aligned} A_{i,\beta,\alpha_{p+1}\alpha_{p+2}\dots\alpha_n}(\beta\sqrt{-1} + \alpha_{p+1}\lambda_{p+1} + \alpha_{p+2}\lambda_{p+2} + \dots + \alpha_n\lambda_n - \lambda_i) \\ = P[C, (-C'), A], \end{aligned}$$

$P[C, (-C'), A]$  étant un polynôme entier à coefficients positifs par rapport aux coefficients  $C$  de

$$Y_{p+1}, Y_{p+2}, \dots, Y_n,$$

aux coefficients  $C'$  de  $Y_i$  changés de signe et aux coefficients  $A$  déjà calculés.

Pour qu'aucun des coefficients  $A$  ne devienne infini nous devons donc d'abord supposer qu'il n'y ait entre les  $\lambda$  aucune relation de la forme:

$$(16) \quad \beta\sqrt{-1} + \alpha_{p+1}\lambda_{p+1} + \alpha_{p+2}\lambda_{p+2} + \dots + \alpha_n\lambda_n - \lambda_i = 0$$

où les  $\alpha$  sont entiers positifs et  $\beta$  entier positif ou négatif.

Cela posé soit  $\lambda'$  une quantité positive que nous déterminerons plus complètement dans la suite.

Soit ensuite:

$$Y'_i = \sum |C_{i,\beta,\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_n}| e^{i\beta\sqrt{-1}} x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \dots x_n^{\alpha_n}$$

pour

$$i = p + 1, p + 2, \dots, n$$

et

$$Y'_i = - \sum |C_{i,\beta,\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_n}| e^{i\beta\sqrt{-1}} x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \dots x_n^{\alpha_n}$$

pour  $i = 1, 2, \dots, p$ .

Formons les équations

$$\begin{aligned} (13'') \quad \lambda' x_{p+1} \frac{dx_i}{dx_{p+1}} + \lambda' x_{p+2} \frac{dx_i}{dx_{p+2}} + \dots + \lambda' x_n \frac{dx_i}{dx_n} - \lambda' x_i \\ = Y'_{p+1} \frac{dx_i}{dx_{p+1}} + Y'_{p+2} \frac{dx_i}{dx_{p+2}} + \dots + Y'_n \frac{dx_i}{dx_n} - Y'_i. \quad (i=1, 2, \dots, p) \end{aligned}$$



les  $\varphi$  étant développables suivant les puissances de  $x_{p+1}, x_{p+2}, \dots, x_n$  et les sinus et cosinus des multiples de  $t$ .

Cela posé, envisageons les équations:

$$(10'') \quad dt = \frac{dx_1}{X_1} = \frac{dx_2}{X_2} = \dots = \frac{dx_n}{X_n}.$$

Ces équations sont de même forme que les équations (10'); la seule différence, c'est que les  $\lambda$  n'ont pas des valeurs qui satisfont aux conditions suffisantes énoncées plus haut pour que l'équation (13) ait une intégrale holomorphe.

Nous allons nous proposer de trouver non pas la solution générale des équations (10''), mais une solution contenant  $n - p$  constantes arbitraires.

Parmi les équations (10''), je considère en particulier les suivantes:

$$(17) \quad \frac{dx_{p+1}}{dt} = X_{p+1}, \quad \frac{dx_{p+2}}{dt} = X_{p+2}, \quad \dots, \quad \frac{dx_n}{dt} = X_n.$$

J'écris en outre les équations:

$$(18) \quad x_i = \varphi_i(x_{p+1}, x_{p+2}, \dots, x_n, t), \quad (i=1, 2, \dots, p)$$

les  $\varphi_i$  étant les intégrales holomorphes des équations (13) définies plus haut.

Il est évident que si  $x_1, x_2, \dots, x_n$  sont  $n$  fonctions de  $t$  qui satisfont aux équations (17) et (18), elles satisferont également aux équations (10'').

Dans les équations (17) substituons à la place de  $x_1, x_2, \dots, x_p$  leurs valeurs (18), ces équations deviendront:

$$\begin{aligned} \frac{dx_{p+1}}{dt} &= \lambda_{p+1}x_{p+1} + Z_{p+1}, & \frac{dx_{p+2}}{dt} &= \lambda_{p+2}x_{p+2} + Z_{p+2}, & \dots \\ & & \dots, & \frac{dx_n}{dt} &= \lambda_n x_n + Z_n, \end{aligned}$$

$Z_{p+1}, Z_{p+2}, \dots, Z_n$  étant des séries développées suivant les puissances de  $x_{p+1}, x_{p+2}, \dots, x_n$ , dont tous les termes sont du 2<sup>d</sup> degré au moins et dont les coefficients sont des fonctions périodiques de  $t$ .



Ces équations (19) sont de la même forme que les équations (10'); leur intégrale générale sera donc de la forme suivante:

$$T'_{p+1} = K_{p+1} e^{\lambda_{p+1} t}, \quad T'_{p+2} = K_{p+2} e^{\lambda_{p+2} t}, \quad \dots, \quad T'_n = K_n e^{\lambda_n t},$$

où  $K_{p+1}, \dots, K_n$  sont des constantes d'intégration, où  $T'_{p+1}, \dots, T'_n$  sont des séries développées suivant les puissances des  $x$  et les sinus et cosinus des multiples de  $t$ .

Les équations

$$(20) \quad \begin{aligned} T_i &= 0, & (i=1, 2, \dots, p) \\ T'_q &= K_q e^{\lambda_q t}, & (q=p+1, p+2, \dots, n) \end{aligned}$$

nous donnent donc une intégrale des équations (10'') dépendant des  $n-p$  constantes arbitraires  $K_{p+1}, K_{p+2}, \dots, K_n$ .

Pour obtenir cette intégrale sous forme explicite, il faut résoudre ces équations (20) par rapport à  $x_1, x_2, \dots, x_n$ ; on trouve ainsi:

$$\begin{aligned} x_1 &= \phi_1(t, K_{p+1}, \dots, K_n), \\ x_2 &= \phi_2(t, K_{p+1}, \dots, K_n), \\ &\dots \\ x_n &= \phi_n(t, K_{p+1}, \dots, K_n), \end{aligned}$$

les  $\phi$  étant des séries développées suivant les puissances de

$$K_{p+1} e^{\lambda_{p+1} t}, K_{p+2} e^{\lambda_{p+2} t}, \dots, K_n e^{\lambda_n t}$$

et suivant les sinus et cosinus des multiples de  $t$ .

Ces séries sont convergentes, pourvu qu'aucun des deux polygones convexes circonscrits, le premier aux points  $\lambda_{p+1}, \lambda_{p+2}, \dots, \lambda_n$  et  $+\sqrt{-1}$ , et le second aux points  $\lambda_{p+1}, \lambda_{p+2}, \dots, \lambda_n$  et  $-\sqrt{-1}$ , ne contienne l'origine et qu'il n'y ait entre les  $\lambda$  aucune relation de la forme (16).

Cette démonstration fait ressortir l'analogie de ce théorème avec ceux que j'ai énoncés dans ma thèse et en particulier avec celui-ci:

Dans le voisinage d'un point singulier, les solutions d'une équation différentielle sont développables suivant les puissances de  $t, t^{\lambda_1}, t^{\lambda_2}, \dots, t^{\lambda_n}$ .

J'avais d'abord démontré ce théorème (que j'ai ensuite rattaché aux idées générales qui ont inspiré ma thèse) par une voie assez différente dans le 45<sup>e</sup> Cahier du Journal de l'École polytechnique et M. PICARD y avait été conduit indépendamment par d'autres considérations (Comptes rendus 1878).

**§ 4. Intégration des équations linéaires à coefficients périodiques.**

On sait qu'une fonction de  $x$  périodique et de période  $2\pi$  peut se développer en une série de la forme suivante

$$(1) \quad f(x) = A_0 + A_1 \cos x + A_2 \cos 2x + \dots + A_n \cos nx + \dots \\ + B_1 \sin x + B_2 \sin 2x + \dots + B_n \sin nx + \dots$$

J'ai montré dans le Bulletin astronomique (novembre 1886) que si la fonction  $f(x)$  est finie et continue ainsi que ses  $p - 2$  premières dérivées et si sa  $p - 1^{\text{e}}$  dérivée est finie, mais peut devenir discontinue en un nombre limité de points, on peut trouver un nombre positif  $K$  tel que l'on ait, quelque grand que soit  $n$ ,

$$|n^p A_n| < K, \quad |n^p B_n| < K.$$

Si  $f(x)$  est une fonction analytique, elle sera finie et continue ainsi que toutes ses dérivées. On pourra donc trouver un nombre  $K$  tel que:

$$|n^2 A_n| < K, \quad |n^2 B_n| < K.$$

Il résulte de là que la série

$$|A_0| + |A_1| + |A_2| + \dots + |A_n| + \dots \\ + |B_1| + |B_2| + \dots + |B_n| + \dots$$

converge et par conséquent que la série (1) est absolument et uniformément convergente.



On aura d'ailleurs de même (avec les mêmes coefficients)

$$\psi_{1,2}(t + 2\pi) = A_{1,1}\psi_{1,2}(t) + A_{1,2}\psi_{2,2}(t) + \dots + A_{1,n}\psi_{n,2}(t)$$

etc.

Cela posé formons l'équation en  $S$ :

$$(5) \quad \begin{vmatrix} A_{1,1} - S & A_{1,2} & \dots & A_{1,n} \\ A_{2,1} & A_{2,2} - S & \dots & A_{2,n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{n,1} & A_{n,2} & \dots & A_{n,n} - S \end{vmatrix} = 0.$$

Soit  $S_1$  l'une des racines de cette équation. D'après la théorie des substitutions linéaires, il existera toujours  $n$  coefficients constants

$$B_1, B_2, \dots, B_n$$

tels que si l'on pose:

$$\theta_{1,1}(t) = B_1\psi_{1,1}(t) + B_2\psi_{2,1}(t) + \dots + B_n\psi_{n,1}(t)$$

et de même:

$$\theta_{1,i}(t) = B_1\psi_{1,i}(t) + B_2\psi_{2,i}(t) + \dots + B_n\psi_{n,i}(t)$$

on ait:

$$\theta_{1,1}(t + 2\pi) = S_1\theta_{1,1}(t)$$

et de même:

$$\theta_{1,i}(t + 2\pi) = S_1\theta_{1,i}(t).$$

Posons:

$$S_1 = e^{2a_1\pi},$$

il viendra:

$$e^{-a_1(t+2\pi)}\theta_{1,1}(t + 2\pi) = S_1 e^{-2a_1\pi} e^{-a_1 t} \theta_{1,1}(t) = e^{-a_1 t} \theta_{1,1}(t).$$

Cette équation exprime que:

$$e^{-a_1 t} \theta_{1,1}(t)$$

est une fonction périodique que nous pourrons développer en une série trigonométrique:

$$\lambda_{1,1}(t).$$



il viendra :

$$x_1 = e^{a_1 t} \left[ C_1' \lambda_{1.1}(t) + C_2' \frac{e^{(a_2 - a_1)t} \lambda_{2.1}(t) - \lambda_{1.1}(t)}{a_2 - a_1} \right].$$

Il est clair que la différence

$$\lambda_{2.1}(t) - \lambda_{1.1}(t)$$

s'annulera pour  $\alpha_2 = \alpha_1$ . Nous pourrions donc poser :

$$\lambda_{2.1}(t) = \lambda_{1.1}(t) + (\alpha_2 - \alpha_1) \lambda'(t).$$

Il vient ainsi :

$$x_1 = e^{a_1 t} \left[ C_1' \lambda_{1.1} + C_2' \lambda_{1.1} \frac{e^{(a_2 - a_1)t} - 1}{a_2 - a_1} + C_2' \lambda'(t) e^{(a_2 - a_1)t} \right]$$

et à la limite (pour  $\alpha_2 = \alpha_1$ ) :

$$x_1 = C_1' e^{a_1 t} \lambda_{1.1} + C_2' e^{a_1 t} [t \lambda_{1.1} + \lim \lambda'(t)].$$

On verrait que la limite de  $\lambda'(t)$  pour  $\alpha_2 = \alpha_1$  est encore une série trigonométrique absolument et uniformément convergente.

Ainsi l'effet de la présence d'une racine double dans l'équation (5) a été d'introduire dans la solution des termes de la forme suivante :

$$e^{a_1 t} t \lambda(t),$$

$\lambda(t)$  étant une série trigonométrique.

On verrait sans peine qu'une racine triple introduirait des termes de la forme :

$$e^{a_1 t} t^2 \lambda(t)$$

et ainsi de suite.

Je n'insiste pas sur tous ces points de détail. Ces résultats sont bien connus par les travaux de MM. FLOQUET, CALLANDREAU, BRUNS, STIELTJES et si j'ai donné ici la démonstration in extenso pour le cas général, c'est que son extrême simplicité me permettait de la faire en quelques mots.