DIE BEIDEN HAUPTSÄTZE DER WERTVERTEILUNGSTHEORIE BEI FUNKTIONEN MEHRERER KOMPLEXER VERÄNDERLICHEN (I).

Von

WILHELM STOLL

Tübingen.

Einleitung.

In der Wertverteilungstheorie wird der Werteverlauf meromorpher Funktionen untersucht. Zunächst möge an den Fall einer Veränderlichen erinnert werden. Hier macht bereits der Hauptsatz der Algebra drei wichtige Aussagen über den Werteverlauf eines Polynomes vom Grad n, nämlich:

1. *Eine Invarianzaussage.* Jeder Wert $a \neq \infty$ wird genau n-mal angenommen, das heisst, die a-Stellenanzahl n hängt nicht von $a \neq \infty$ ab.
2. *Eine Wachstumsaussage.* Der Grad misst das Wachstum des Polynomes beim Grenzübergang $z \to \infty$.
3. Die a-Stellenanzahl, oder wie man auch sagen kann, das a-Stellenmass ist gleich dem Wachstumsmass.

Diese drei Aussagen bilden bereits die beiden Hauptsätze in ihrer einfachsten Gestalt. In der Wertverteilungstheorie wird nun gezeigt, wie sich diese drei Aussagen auf meromorphe Funktionen verallgemeinern lassen. Ist die Funktion $f(z)$ für $|z| < J \leq \infty$ meromorph, so zählt man ihre a-Stellen im Kreis $|z| \leq t$ mit ihrer Vielfachheit $\nu(z, a)$, was

$$n(t, a) = \sum_{|z| \leq t} \nu(t, a) \tag{0.1}$$

ergibt. Als a-Stellenmass wählt man die *Anzahlfunktion*

$$N(r, a) = \int_{r_0}^{r} n(t, a) \frac{dt}{t} \geq 0 \qquad (0 < r_0 < r < J). \tag{0.2}$$

Um eine Invarianzaussage zu erhalten, muss man noch ein Restglied, die sogenannte *Schmiegungsfunktion*, einführen. Dazu setzt man $a = -\frac{\alpha_2}{\alpha_1}$ und $f = \frac{w_1}{w_2}$, wobei w_1 und w_2 in $|z| < J$ analytisch sind und $a = \infty$ durch $(\alpha_1, \alpha_2) = (0,1)$ gegeben wird. Die Schmiegungsfunktion ist

$$m(r, a) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{|z|=r} \log \frac{\sqrt{|w_1|^2 + |w_2|^2}\,\sqrt{|\alpha_1|^2 + |\alpha_2|^2}}{|w_1 \alpha_1 + w_2 \alpha_2|} \, d\varphi \geq 0. \tag{0.3}$$

Unter dem Logarithmus steht das Reziproke des im Raum gemessenen Abstandes, den der Wert a vom Funktionswert f auf der Riemannschen Zahlenkugel hat.

Der *erste Hauptsatz*[1] besagt nun, dass die *Charakteristik*

$$T(r) = N(r, a) + m(r, a) - m(r_0, a) \tag{0.4}$$

unabhängig vom Wert a ist. Das ist die Invarianzaussage. Die Charakteristik ist auch ein Wachstumsmass. Bei ganzen Funktionen f wächst sie nämlich wie $\operatorname*{Max}_{|z| \leq r} \log |f(z)|$. Bei meromorphen Funktionen, also allgemein, ist

$$T(r) = \int\limits_{r_0}^{r} A(t) \frac{dt}{t} \geq 0, \tag{0.5}$$

wobei

$$\pi A(t) = \int\limits_{|z| \leq t} \frac{\left| \begin{vmatrix} w_1 & w_2 \\ w_1' & w_2' \end{vmatrix} \right|^2}{(|w_1|^2 + |w_2|^2)^2} \, dz \, d\bar{z} = \int\limits_{|z| \leq t} \frac{df \, d\bar{f}}{(1 + |f|^2)^2} \tag{0.6}$$

der Flächeninhalt des (vielleich mehrfach zu zählenden) Teiles der Zahlenkugel ist, der bei der Abbildung des Kreises $|z| \leq t$ durch f (vielleicht mehrmals) überdeckt wird. Dieser Flächeninhalt und damit die Charakteristik misst das Wachstum der meromorphen Funktion f. Da neben einem unbedeutenden Glied $m(r_0, a)$ im 1. Hauptsatz noch die positive Schmiegungsfunktion $m(r, a)$ auftritt, lässt sich die 3. Aussage nur unvollkommen verallgemeinern:

$$N(r, a) \leq T(r) + \text{const.} \tag{0.7}$$

Das a-Stellenmass ist nicht grösser als das Wachstumsmass.

---

[1] Zu den beiden Hauptsätzen siehe NEVANLINNA [36]. Dabei bezieht sich „NEVANLINNA [36]" auf die Literaturangabe am Schluss der Arbeit. Die Zahl „36" ist das Erscheinungsjahr der Arbeit. Die Arbeit „HERMANN WEYL und JOACHIM WEYL [43]" werde kurz mit W [43] und die Arbeit STOLL [52] mit [I] zitiert.

Der 1. Hauptsatz gibt keinerlei Aufschluss darüber, wie gut sich die Anzahlfunktion $N(r, a)$ der Charakteristik $T(r)$ anschmiegt, das heisst, wie klein die Schmiegungsfunktion $m(r, a)$ ist. Dass nur in wenigen Ausnahmefällen die Schmiegungsfunktion gross wird, das besagt der *zweite Hauptsatz:*[1]

Sind q paarweise verschiedene Zahlen a_ν gegeben, ist die nichtkonstante Funktion $f(z)$ in $|z| < J \leq \infty$ meromorph und ist im Falle $J < \infty$ ausserdem $\log \frac{1}{J-r} = o(T(r))$ für $r \to J$, so besteht für jedes $\varepsilon > 0$ die Abschätzung

$$\sum_{\nu=1}^{q} m(r, a_\nu) \leq (2+\varepsilon)\, T(r) \tag{0.8}$$

vielleicht mit Ausnahme einer Menge $\Delta = \Delta_\varepsilon$ von Radien r, für die im Falle $J = \infty$ das Integral $\int\limits_{\Delta} \frac{dr}{r}$ bzw. im Falle $J < \infty$ das Integral $\int\limits_{\Delta} \frac{dr}{J-r}$ existiert. Die Schmiegungsfunktion ist nun prozentual gross gegenüber der Charakteristik, wenn der Defekt

$$\delta(a) = \varliminf_{r \to \infty} \frac{m(r, a)}{T(r)} \tag{0.9}$$

positiv ist. Nach dem 2. Hauptsatz gibt es unter seinen Voraussetzungen höchstens abzählbar viele Werte a mit positivem Defekt. Es gilt

$$\sum_{a} \delta(a) \leq 2. \tag{0.10}$$

Lässt beispielsweise die Funktion f den Wert a aus, so ist $\delta(a) = 1$; also lässt eine in $|z| < \infty$ meromorphe, nichtkonstante Funktion höchstens zwei Werte aus. Das ist der Satz von Picard, wovon der 2. Hauptsatz eine weitgehende Verallgemeinerung ist.

Der 2. Hauptsatz kann noch verschärft werden. Ist die Funktion f an der Stelle z regulär, so sei $v(z) \geq 0$ die Vielfachheit der Nullstelle z ihrer Ableitung f', hat aber f an der Stelle z einen Pol, so sei $v(z) \geq 0$ die Vielfachheit der Nullstelle z von $\left(\frac{1}{f}\right)'$. Setzt man

$$V(r) = \int_{r_0}^{r} \Big\{ \sum_{|z| \leq t} v(z) \Big\} \frac{dt}{t}, \tag{0.11}$$

so gilt unter den erwähnten Voraussetzungen

$$\sum_{\nu=1}^{q} m(r, a_\nu) + V(r) \leq (2+\varepsilon)\, T(r) \tag{0.12}$$

mit Ausnahme einer Menge Δ der obigen Art. Mittels $V(r)$ kann man Verzweigtheitsaussagen machen.

Gelten nun diese beiden Hauptsätze auch für Funktionen mehrerer Veränderlichen? Nach verschiedenen anderen Ansätzen, wurde der 1. Hauptsatz von H. KNESER[2] auf eine in $|\mathfrak{z}| < J \leq \infty$ meromorphe Funktion $f(\mathfrak{z}) = f(z_1, \ldots, z_n)$ übertragen, indem er ihn für die Funktion $f(z\mathfrak{b})$ der einen Veränderlichen z aufschreibt und über die Einheitskugel $|\mathfrak{b}| = 1$ integriert und durch deren Inhalt teilt. Er erhält

$$T(r) = N(r, a) + m(r, a) - m(r_0, a). \tag{0.13}$$

Interessant ist dabei besonders die Gestalt, die H. KNESER den Funktionen T, N und m durch einige Integralumformungen gibt. Ist $n(t, a)$ der Flächeninhalt der a-Stellenfläche von f, soweit diese in der Kugel $|\mathfrak{z}| \leq t$ liegt, geteilt durch den Inhalt einer $(2n-2)$ dimensionalen Kugel vom Radius t, so ist

$$N(r, a) = \int_{r_0}^{r} n(t, a) \frac{dt}{t} \geq 0. \tag{0.14}$$

Ist $V_{2n-1}(r)$ der Oberflächeninhalt der Sphäre mit dem Radius r, ist $\partial v_{2n-1}(\mathfrak{z})$ ihr euklidisches Oberflächenelement, ist $a = -\frac{\alpha_2}{\alpha_1}$ und ist $f = \frac{w_1}{w_2}$ Quotient zweier analytischer Funktionen w_1, w_2, so ist

$$m(r, a) = \frac{1}{V_{2n-1}(r)} \int_{|\mathfrak{z}|=r} \log \frac{\sqrt{|w_1|^2 + |w_2|^2}\,\sqrt{|\alpha_1|^2 + |\alpha_2|^2}}{|w_1 \alpha_1 + w_2 \alpha_2|} \partial v_{2n-1}(\mathfrak{z}). \tag{0.15}$$

In der Schreibweise der alternierenden Differentiale sei

$$\partial v_{2n-2}(\mathfrak{z}) = \left(\frac{i}{2}\right)^{n-1} \sum_{\nu=1}^{n} \partial z_1 \partial \bar{z}_1 \ldots \partial z_{\nu-1} \partial \bar{z}_{\nu-1} \partial z_{\nu+1} \partial \bar{z}_{\nu+1} \ldots \partial z_n \partial \bar{z}_n. \tag{0.16}$$

Dann ist

$$T(r) = \int_{r_0}^{r} A(t) \frac{dt}{t} \geq 0, \tag{0.17}$$

$$A(t) = \frac{1}{\pi} \int_{|\mathfrak{z}| \leq t} \frac{i}{2} \frac{\partial f \partial \bar{f}}{(1 + |f|^2)^2} \partial v_{2n-2} = \frac{1}{\pi} \int_{|\mathfrak{z}| \leq t} \frac{i}{2} \frac{\left|\begin{vmatrix} w_1 & w_2 \\ \partial w_1 & \partial w_2 \end{vmatrix}\right|^2}{(|w_1|^2 + |w_2|^2)^2} \partial v_{2n-2}, \tag{0.18}$$

wobei ∂f, $\partial \bar{f}$, ∂w_ν, $\partial \bar{w}_\nu$ alternierende Differentiale sind.

---

[2] Siehe H. KNESER [38] und H. KNESER [36].

Wenn so auch der 1. Hauptsatz eine sehr schöne und vollkommen analoge Verallgemeinerung gefunden hat, so dürfte er gerade bei mehreren Veränderlichen doch noch zu speziell sein. Zwei Gründe seien genannt:

a) Bei einer Veränderlichen kann man die Wertverteilungstheorie auf einer einfachzusammenhängenden komplexen Mannigfaltigkeit mittels des Riemannschen Abbildungssatzes auf die oben erwähnte Theorie von R. NEVANLINNA zurückführen. Das ist bei mehreren Veränderlichen unmöglich, da es keinen Riemannschen Abbildungssatz gibt.

Daraus folgt, dass bei mehreren Veränderlichen die beiden Hauptsätze sofort für beliebige komplexe Mannigfaltigkeiten der Dimension $2n$ aufgestellt werden müssen.

b) Eine analytische Funktion einer Veränderlichen ist zugleich eine eineindeutige analytische Abbildung auf eine Riemannsche Fläche. Bei mehreren Veränderlichen ist das nie der Fall. Eine eineindeutige analytische Abbildung wird (zumindestens lokal) durch n Funktionen $f_1, \ldots, f_n$ gegeben.

Verlangt man nun von einer Wertverteilungstheorie, dass sie sowohl den Fall einer Funktion als auch den Fall einer Abbildung als Spezialfälle umfasst, so darf man die beiden Hauptsätze nicht nur für eine einzelne Funktion aufstellen, sondern muss sie für einen ganzen Satz von Funktionen $f_1, \ldots, f_k$ mit $k = 2, 3, \ldots$, also für Vektorfunktionen, beweisen. Bei solchen Vektorfunktionen versagt nun die Beweismethode von H. KNESER, da diese nur für eine Funktion gilt und sehr von der speziellen geometrischen Gestalt des Vektorraumes abhängt. Hier kann jedoch die Theorie der *meromorphen Kurven*[3], die von H. WEYL, J. WEYL und L. AHLFORS entwickelt wurde, als Vorbild dienen. In dieser Theorie werden die beiden Hauptsätze auf meromorphe Vektorfunktionen $\mathfrak{w}(P)$ übertragen, die eine 2 dimensionale Riemannsche Fläche $\mathfrak{M}^2$ in den komplex-projektiven Raum $\mathfrak{P}^{2k-2}$ der Dimension $2k-2$ abbilden. Da sich diese Theorie aus der folgenden Darstellung als der Spezialfall $n = 1$ ergibt, soll sie nicht mehr besonders geschildert werden.

In dieser Arbeit soll nun die Theorie der *meromorphen Kurven* zur Theorie der *meromorphen Flächen* erweitert werden. Die beiden Hauptsätze werden für meromorphe Abbildungen einer $2n$ dimensionalen, komplexen Mannigfaltigkeit $\mathfrak{M}^{2n}$ in den projektiven Raum $\mathfrak{P}^{2k-2}$ der Dimension $2k-2$ bewiesen werden. Die Ergebnisse der folgenden Untersuchungen seien hier kurz geschildert.

Eine Abbildung von $\mathfrak{M}^{2n}$ in den projektiven Raum $\mathfrak{P}^{2k-2}$ wird durch Koordinatenverhältnisse

[3] Die Theorie der meromorphen Kurven ist zusammenhängend in W [43] dargestellt. Man vergleiche ausserdem H. WEYL und J. WEYL [38], AHLFORS [41] und J. WEYL [41].

(0.19) $$w_1(P) : w_2(P) : \cdots : w_k(P)$$

gegeben. Bei einer Veränderlichen, also in der WEYLschen Theorie, kann man dabei $w_1(P), \ldots, w_k(P)$ als auf $\mathfrak{M}^2$ analytische, überall teilerfremde Funktionen ohne gemeinsame Nullstellen wählen, falls $\mathfrak{M}^2$ nicht kompakt ist. Das ist bei mehreren Veränderlichen nicht immer möglich. Daher werde unter einer *meromorphen Fläche* folgendes verstanden:

Es sei $\mathfrak{U}$ eine Überdeckung von $\mathfrak{M}^{2n}$ durch offene Mengen U; zu jedem $U \in \mathfrak{U}$ gibt es eine in U meromorphe Vektorfunktion

(0.20) $$\mathfrak{w}(P) = (w_1(P), \ldots, w_k(P)).$$

Sind U_1, U_2 zwei offene Mengen aus $\mathfrak{U}$ mit $U_1 \cap U_2 \neq \emptyset$, und sind $\mathfrak{w}_1(P)$, $\mathfrak{w}_2(P)$ die zugehörigen Vektorfunktionen, so gilt

(0.21) $$\mathfrak{w}_1(P) = \lambda(P)\, \mathfrak{w}_2(P) \qquad \text{für } P \in U_1 \cap U_2,$$

wobei $\lambda(P) \not\equiv 0$ und meromorph in jedem Teilgebiet von $U_1 \cap U_2$ ist. Nachträglich werde $\mathfrak{U}$ zu einer maximalen Überdeckung erweitert. Jede dabei erhaltene Vektorfunktion $\mathfrak{w}(P)$ heisse eine Darstellung der meromorphen Fläche auf U, und zwar eine analytische, falls $\mathfrak{w}(P)$ analytisch ist, eine im Punkt P_0 reduzierte, falls $\mathfrak{w}(P)$ in P_0 analytisch ist und die Koordinaten $w_\mu(P)$ in P_0 den grössten gemeinsamen Teiler 1 haben. Die Nullstellen einer reduzierten Darstellung heissen Unbestimmtheitsstellen. Eine meromorphe Fläche definiert, abgesehen von ihren Unbestimmtheitsstellen, eine Abbildung der Mannigfaltigkeit $\mathfrak{M}^{2n}$ in den projektiven Raum $\mathfrak{P}^{2k-2}$. Da einer meromorphen Funktion f eineindeutig die meromorphe Fläche $(f, 1)$ zugeordnet ist, ist der Fall einer Funktion miterfasst.

Dem projektiven Raum $\mathfrak{P}^{2k-2}$ ist ein dualer Raum ${}^*\mathfrak{P}^{2k-2}$ so zugeordnet, dass das innere Produkt

(0.22) $$(\mathfrak{w}, \vec{\alpha}) = \sum_{\mu=1}^{k} w_\mu \alpha_\mu \text{ für } \mathfrak{w} \in \mathfrak{P}^{2k-2},\ \vec{\alpha} \in {}^*\mathfrak{P}^{2k-2}$$

unabhängig von der Wahl des Koordinatensystems ist. Das Analogon einer a-Stelle P_0 und ihrer Vielfachheit wird nun so definiert. Man setzt in (0.22) eine in P_0 reduzierte Darstellung $\mathfrak{w}(P)$ ein und erhält eine in P_0 analytische Funktion $(\mathfrak{w}(P), \vec{\alpha})$. Die Vielfachheit ihrer Nullstelle P_0 sei $\nu(P_0, \vec{\alpha})$ und[4]

(0.23) $$\mathfrak{N}(\vec{\alpha}) = \{P_0 \mid \nu(P_0, \vec{\alpha}) > 0\}$$

die zugehörige „*Schnittstellenfläche*". Durch die Abbildung $\mathfrak{w}(P)$ wird sie auf den Schnitt der Ebene $(\mathfrak{w}, \vec{\alpha}) = 0$ mit der meromorphen Fläche abgebildet.

---

[4] Mit $\{P \mid \mathfrak{A}\}$ werde die Menge aller Gegenstände P bezeichnet, die die Eigenschaft $\mathfrak{A}$ haben.

Um die $\vec{\alpha}$-Stellen zu messen, muss man, wie die Ergebnisse von H. KNESER zeigen, den Flächeninhalt von $\mathfrak{N}(\vec{\alpha})$ berechnen. Dies geschieht hier mittels eines alternierenden Differentiales[5]

$$\partial \chi_{2n-2} = \frac{1}{4}\left(\frac{i}{2}\right)^{n-1}\left\{\sum_{\substack{\mu,\nu=1\\ \mu\neq\nu}}^{n} a_{\mu\nu}\,\partial \bar{z}_\mu\,\partial z_\nu\,\partial z_1\,\partial \bar{z}_1 \ldots \overset{\mu}{\|} \ldots \overset{\nu}{\|} \ldots \partial z_n\,\partial \bar{z}_n + \sum_{\mu=1}^{n} a_{\mu\mu}\,\partial z_1\,\partial \bar{z}_1 \ldots \overset{\mu}{\|} \ldots \partial z_n\,\partial \bar{z}_n\right\} \tag{0.24}$$

mit veränderlichen Koeffizienten $a_{\mu\nu}$, das jeder Nullstellenfläche eine positive Massenbelegung erteilt, oder, was dasselbe ist, für das

$$\sum_{\mu,\nu=1}^{n} a_{\mu\nu}\,x_\mu\,\bar{x}_\nu \tag{0.25}$$

eine positiv definite HERMITEsche Form ist, und dessen äussere Ableitung $\partial\partial\chi_{2n-2}=0$ ist, das heisst

$$\sum_{\mu=1}^{n} a_{\mu\nu z_\mu} \equiv 0 \qquad \text{für } \nu = 1, \ldots, n. \tag{0.26}$$

Ist speziell $\mathfrak{M}^{2n}$ eine KÄHLERsche Mannigfaltigkeit mit der KÄHLERshen Metrik $g_{\mu\nu}$ und wird

$$\partial s_2 = \frac{i}{2}\sum_{\mu,\nu=1}^{n} g_{\mu\nu}\,\partial z_\mu\,\partial \bar{z}_\nu \qquad \text{mit } \partial\partial s_2 = 0 \tag{0.27}$$

gesetzt, so kann man $\partial\chi_{2n-2} = (\partial s_2)^{n-1}$ wählen. Ausdrücklich sei darauf aufmerksam gemacht, dass auf jeder KÄHLERschen Mannigfaltigkeit die folgende Theorie gilt. Insbesondere gelten die beiden Hauptsätze.

Analog zur WEYLschen Theorie bei einer Veränderlichen werde nun auf der komplexen Mannigfaltigkeit $\mathfrak{M}^{2n}$ eine offene Menge g als „*Kern*" festgehalten, die mit ihrem Rand γ vereinigt, eine kompakte Menge $\bar{g} = g \cup \gamma$ gibt. Ausserdem werde eine offene Menge $G \supset \bar{g}$, die mit ihrem Rand Γ vereinigt, eine kompakte Menge $\bar{G} = G \cup \Gamma$ gibt, gewählt. Die Menge G heisse *zulässig* und möge die Mannigfaltigkeit $\mathfrak{M}^{2n}$ nach und nach ausschöpfen. Setzt man

$$\partial^{\perp}\psi = i\sum_{\nu=1}^{n}(\psi_{z_\nu}\,\partial z_\nu - \psi_{\bar{z}_\nu}\,\partial \bar{z}_\nu), \tag{0.28}$$

so löse die „*Potentialfunktion*" $\psi = \psi(P, G)$ die Randwertaufgabe der elliptischen, selbstadjungierten Differentialgleichung

[5] Durch $\overset{\mu}{\|}$ werde das Fehlen des Faktors $\partial z_\mu\,\partial \bar{z}_\mu$ angezeigt.

$$(0.29)\qquad \begin{aligned} &\partial\, \partial^{\perp} \psi\, \partial\, \chi_{2n-2} = 0 \quad \text{in} \quad H = G - \bar{g}, \\ &\psi(P, G) = \begin{cases} 0 & \text{für } P \notin G, \\ R & \text{für } P \in \bar{g} = g \cup \gamma, \end{cases} \end{aligned}$$

wobei die *Spannung* $R = R(G)$ durch die Forderung

$$(0.30)\qquad \frac{1}{2\pi} \int_{\gamma} \partial^{\perp} \psi\, \partial\, \chi_{2n-2} = 1$$

eindeutig bestimmt ist. Ist $G_t = \{P \mid \psi(P, G) > R - t\}$, so seien die *Anzahlfunktionen* durch

$$(0.31)\qquad n(G_t, \vec{\alpha}) = \int_{\mathfrak{N}(\vec{\alpha}) \cap G_t} \nu(P, \vec{\alpha})\, \partial\, \chi_{2n-2}(P) \geq 0,$$

$$(0.32)\qquad N(G\ , \vec{\alpha}) = \int_0^{R(G)} n(G_t, \vec{\alpha})\, dt = \int_{\mathfrak{N}(\vec{\alpha})} \psi(P, G)\, \nu(P, \vec{\alpha})\, \partial\, \chi_{2n-2}(P) \geq 0$$

definiert. Die *Schmiegungsfunktionen* seien

$$(0.33)\qquad m(\Gamma, \vec{\alpha}) = \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} \log \frac{|\mathfrak{w}(P)|\, |\vec{\alpha}|}{|(\mathfrak{w}(P), \vec{\alpha})|}\, \partial^{\perp} \psi\, \partial\, \chi_{2n-2} \geq 0,$$

$$(0.34)\qquad m(\gamma, \vec{\alpha}) = \frac{1}{2\pi} \int_{\gamma} \log \frac{|\mathfrak{w}(P)|\, |\vec{\alpha}|}{|(\mathfrak{w}(P), \vec{\alpha})|}\, \partial^{\perp} \psi\, \partial\, \chi_{2n-2} \geq 0.$$

Mittels einer Verallgemeinerung der Jensenschen Formel, erhält man den 1. *Hauptsatz*.[6] Er besagt, dass die *Charakteristik*

$$(0.35)\qquad T(G) = N(G, \vec{\alpha}) + m(\Gamma, \vec{\alpha}) - m(\gamma, \vec{\alpha})$$

nicht vom Vektor $\vec{\alpha}$ abhängt. Das ist die Invarianzaussage. Die Charakteristik ist wiederum ein Wachstumsmass. Einmal gilt: „Ist $R(G)$ nicht beschränkt, aber $T(G)$ beschränkt, so ist die meromorphe Fläche $\mathfrak{w}(P) = \mathfrak{c}$ konstant.“ Dies ist eine Verallgemeinerung eines Satzes von Liouville: „Eine ganze ($J = \infty$), beschränkte ($T < M$) Funktion ist konstant.“ Im allgemeinen Fall ist ausserdem[7]

[6] Für $n = 1$ siehe W [43] Kap. IV § 3 S. 173. Für $n > 1$ siehe in dieser Arbeit Kap. II § 8 Satz 8.2.

[7] Für $n = 1$ siehe W [43] Kap. IV § 3 S. 174. Für $n > 1$ siehe in dieser Arbeit Kap. II § 9 Satz 9.4.

$$(0.36) \qquad T(G) = \int_0^{R(G)} A(G_t)\,dt = \frac{1}{\pi}\int_G \psi(P,G)\,\partial\omega_2(\mathfrak{w}(P))\,\partial\chi_{2n-2} \geq 0,$$

wobei $\partial\omega_2(\mathfrak{w})$ und $A(G_t)$ noch zu erklären sind. Es ist $\partial\omega_2$ die KÄHLERsche Metrik des projektiven Raumes $\mathfrak{P}^{2k-2}$. Führt man dort das schiefsymmetrische Tensorprodukt (äusseres Produkt, CARTAN-Produkt)

$$(0.37) \qquad [\mathfrak{a}_1, \ldots, \mathfrak{a}_p] = \sum_{i_1,\ldots,i_p=1}^{k} \begin{vmatrix} a_{1i_1} & \ldots & a_{1i_p} \\ \cdot & \cdots & \cdot \\ a_{pi_1} & \ldots & a_{pi_p} \end{vmatrix} \mathfrak{e}_{i_1} \ldots \mathfrak{e}_{i_p}$$

der Vektoren $\mathfrak{a}_\mu = \sum_{\nu=1}^{k} a_{\mu\nu}\,\mathfrak{e}_\nu$ ein, so ist

$$(0.38) \qquad \partial\omega_2(\mathfrak{w}) = \frac{i}{2}\frac{|[\mathfrak{w},\partial\mathfrak{w}]|^2}{|\mathfrak{w}|^4} = \frac{i}{2}\,\partial\frac{\mathfrak{w}}{|\mathfrak{w}|}\cdot\partial\frac{\overline{\mathfrak{w}}}{|\mathfrak{w}|}.$$

Im Produktraum $\mathfrak{P}^{2k-2}\times\mathfrak{M}^{2n}$ wird durch das Differential $\partial\omega_2(\mathfrak{w})\,\partial\chi_{2n-2}$ längs des Funktionsbildes $\tilde{W} = \{(\mathfrak{w},P)\,|\,\mathfrak{w}=\mathfrak{w}(P), P\in\mathfrak{M}^{2n}\}$ der meromorphen Fläche $\mathfrak{w}(P)$ eine nichtnegative Massenbelegung gegeben. Misst man den Teil von $\tilde{W}$ der über G_t liegt mit dieser Massenbelegung, so ist sein Flächeninhalt gerade

$$(0.39) \qquad \pi A(G_t) = \int_{G_t} \partial\omega_2(\mathfrak{w}(P))\,\partial\chi_{2n-2}.$$

Dieser Flächeninhalt und damit auch die Charakteristik ist ein Mass für das Wachstum der meromorphen Fläche.

Will man nun den 2. *Hauptsatz* auf mehrere Veränderliche übertragen, so ergibt sich eine neue grundsätzliche Schwierigkeit. Beim Beweis des 2. Hauptsatzes wird sowohl in der Theorie von R. NEVANLINNA, als auch in der Theorie von WEYL–AHLFORS wesentlich die Ableitung gebraucht. Bei mehreren Veränderlichen gibt es eine ganze Reihe von Ableitungsoperatoren, und es handelt sich darum den „richtigen" zu finden. Allerdings fällt es aber schwer, überhaupt einen brauchbaren zu finden! Bei einer Veränderlichen hat wegen

$$(0.40) \qquad \partial\mathfrak{w} = \mathfrak{w}'\,\partial z, \quad \partial\chi_{2n-2} = 1$$

die Charakteristik die Gestalt[7]

$$(0.41) \qquad T(G) = \frac{1}{\pi}\int_G \psi\,\frac{|[\mathfrak{w},\mathfrak{w}']|^2}{|\mathfrak{w}|^4}\,\frac{i}{2}\,\partial z\,\partial\bar{z},$$

was die Einführung der sogenannten *assoziierten Flächen*

$$\mathfrak{W}^p = [\mathfrak{w}, \mathfrak{w}', \mathfrak{w}'', \ldots \mathfrak{w}^{(p-1)}] \qquad (\mathfrak{W}^0 = 1) \tag{0.42}$$

veranlasst. Da sie sich bei einem Koordinatenwechsel von z zu x nach

$$\mathfrak{W}_z^p = \mathfrak{W}_x^p \left(\frac{d\,x}{d\,z}\right)^{\frac{p(p-1)}{2}} \tag{0.43}$$

transformieren, sind sie wieder meromorphe Flächen. Ihre *Charakteristik* ist[6]

$$T_p(G) = \frac{1}{\pi} \int_G \psi \frac{|\mathfrak{W}^{p-1}|^2 \, |\mathfrak{W}^{p+1}|^2}{|\mathfrak{W}^p|^4} \frac{i}{2} \partial z \, \partial \bar{z}. \tag{0.44}$$

Diese assoziierten Flächen und ihre Charakteristik spielen eine entscheidende Rolle beim Beweis des 2. Hauptsatzes. Um eine analoge Definition der assoziierten Flächen bei mehreren Veränderlichen zu erhalten, braucht man einen Ableitungsoperator $'$ für meromorphe Funktionen, der sich bei einem Koordinatenwechsel von $\mathfrak{z}$ zu $\mathfrak{x}$ mit der Funktionaldeterminante $\dfrac{\partial \mathfrak{x}}{\partial \mathfrak{z}} \neq 0$ multipliziert:

$$(f)'_{\mathfrak{z}} = (f)'_{\mathfrak{x}} \frac{\partial \mathfrak{x}}{\partial \mathfrak{z}} \tag{0.45}$$

und linear in den partiellen Ableitungen ist:

$$f' = \sum_{\nu=1}^{n} b_\nu f_{z_\nu} \tag{0.46}$$

wobei die Koeffizienten b_ν analytisch sind und sich so transformieren, dass

$$\partial B_{n-1} = \sum_{\nu=1}^{n} (-1)^{\nu-1} b_\nu \, \partial z_1 \ldots \partial z_{\nu-1} \, \partial z_{\nu+1} \ldots \partial z_n \tag{0.47}$$

ein analytisches, alternierendes Differential ist. Die Ableitung f' bedeutet die Ableitung in Richtung eines analytischen *Richtungsfeldes*, das durch ∂B_{n-1} gegeben wird. Mit dieser Ableitung kommt man ein gutes Stück Weges weiter, bis sich die Hindernisse immer mehr häufen. Schliesslich lassen sie sich anscheinend nur noch überwinden, wenn man gewaltsam verlangt, dass die Formen

$$\tfrac{1}{4} \sum_{\mu,\nu=1}^{n} a_{\mu\nu} x_\mu \bar{x}_\nu \equiv \sum_{\mu,\nu=1}^{n} b_\mu \bar{b}_\nu x_\mu \bar{x}_\nu \qquad \text{d.h.: } a_{\mu\nu} = b_\mu \bar{b}_\nu \tag{0.48}$$

identisch sind. Da aber $\sum_{\mu,\nu=1}^{n} a_{\mu\nu} x_\mu \bar{x}_\nu$ eine positiv definite HERMITEsche Form ist, ist diese Gewaltmassnahme unmöglich. Zwar würden einige Sätze auch noch für eine solche halbdefinite Form $\sum_{\mu,\nu=1}^{n} b_\mu \bar{b}_\nu x_\mu \bar{x}_\nu$ gelten; aber dann würde die Randwertaufgabe

(0.29) sehr verwickelt werden, es gäbe vielleicht nichtleere Nullstellenflächen mit dem Inhalt Null, und eine KÄHLERsche Metrik ∂s_2 könnte nicht mehr zur Definition der Massenbelegung $\partial \chi_{2n-2}$ dienen. Daher darf man die Gleichung (0.48) nicht fordern. Der eingeschlagene Weg führt also in eine Sackgasse, aus der sich jedoch erfreulicherweise ein Ausweg finden lässt. *Es reicht nämlich, nur*

$$\tfrac{1}{4} \sum_{\mu,\nu=1}^{n} a_{\mu\nu}\, x_\mu\, \bar{x}_\nu \geq \sum_{\mu,\nu=1}^{n} b_\mu\, \bar{b}_\nu\, x_\mu\, \bar{x}_\nu \tag{0.49}$$

zu verlangen. Damit sind die genannten Schwierigkeiten umgangen, und man kommt zum Ziel, wenn man sich von der WEYLschen Theorie leiten lässt.

Es sei $Y \not\equiv 0$ eine meromorphe Dichte, das heisst, beim Koordinatenwechsel von $\mathfrak{z}$ zu $\mathfrak{x}$ multipliziert sich Y mit der Funktionaldeterminante: $Y_{\mathfrak{z}} = Y_{\mathfrak{x}} \dfrac{\partial \mathfrak{x}}{\partial \mathfrak{z}}$. Die Vielfachheit der Nullstelle P weniger der Polstelle P sei $\nu(P)$ und $\mathfrak{N}$ sei die Vereinigung der Null- und Polstellenfläche von Y. Wird $\Delta = \sum_{\mu,\nu=1}^{n} a_{\mu\nu}\, \psi_{z_\mu}\, \psi_{\bar{z}_\nu}$ gesetzt, so ist

$$\eta(G) = \int_{\mathfrak{N}} \nu\, \psi\, \partial \chi_{2n-2} + \frac{1}{4\pi} \int_{\Gamma} \log \frac{\Delta}{|Y|^2}\, \partial^{\perp} \psi\, \partial \chi_{2n-2} - \frac{1}{4\pi} \int_{\gamma} \log \frac{\Delta}{|Y|^2}\, \partial^{\perp} \psi\, \partial \chi_{2n-2}$$

unabhängig von der Wahl der Dichte Y. In einer sehr groben Sprechweise ist $\eta(G)$ ein Mass für die Nullstellen des totalen Differentiales $\partial \psi$ der Potentialfunktion ψ.

Der 2. *Hauptsatz* gilt nun unter den folgenden Voraussetzungen:

1°. Für jedes $\varepsilon > 0$ und die „*meisten*" zulässigen Mengen G, das heisst, für alle G bis auf eine unbedeutende Ausnahmemenge, die durch $\|$ angezeigt werde und hier in der Einleitung nicht genauer definiert werden soll, gelte

$$\| \, \eta(G) \leq \varepsilon\, T(G). \tag{0.50}$$

2°. Ist $J = \overline{\text{fin}}\ R(G) \leq \infty$, so sei

$$\| \, \log \frac{1}{J - R(G)} \leq \varepsilon\, T(G). \tag{0.51}$$

3°. Es existiere ein analytisches, alternierendes Differential

$$\partial B_{n-1} = \sum_{\nu=1}^{n} (-1)^{\nu-1}\, b_\nu\, \partial z_1 \ldots \partial z_{\nu-1}\, \partial z_{\nu+1} \ldots \partial z_n \tag{0.52}$$

mit

$$\tfrac{1}{4} \sum_{\mu,\nu=1}^{n} a_{\mu\nu}\, x_\mu\, \bar{x}_\nu \geq \sum_{\mu,\nu=1}^{n} b_\mu\, \bar{b}_\nu\, x_\mu\, \bar{x}_\nu. \tag{0.53}$$

4°. Gewisse Ausdrücke, die mit dem Differential ∂B_{n-1} und der meromorphen Fläche gebildet werden, seien nicht identisch Null. Dies ist „im allgemeinen" richtig.

5°. Von den Vektoren $\vec{\mathfrak{a}}_1, \ldots, \vec{\mathfrak{a}}_k$ seien je k linear unabhängig. Sonst seien sie beliebig gewählt.

Dann besagt der 2. *Hauptsatz*[8], dass für jedes $\varepsilon > 0$ und die „meisten" zulässigen offenen Mengen G die Abschätzung

(0.54) $$\|\sum_{\nu=1}^{q} m(\Gamma, \vec{\mathfrak{a}}_\nu) \leq (k+\varepsilon)\, T(G)$$

gilt. Die Zahl k lässt sich nicht verbessern. Sofort folgt die Defektrelation

(0.55) $$\sum_{\nu=1}^{q} \delta(\vec{\mathfrak{a}}_\nu) \leq k.$$

Schneidet die meromorphe Fläche die Ebene $(\mathfrak{w}, \vec{\mathfrak{a}}) = 0$ nicht, so ist $\delta(\vec{\mathfrak{a}}) = 1$. Von $k+1$ Ebenen in allgemeiner Lage wird unter den gemachten Voraussetzungen wenigstens eine geschnitten.[8]

Bemerkenswert ist, dass die Behauptung nicht und die Voraussetzung in 3° und 4° nur schwach vom Richtungsfeld ∂B_{n-1} abhängt. Allerdings kann man den 2. Hauptsatz noch durch ein Glied $V(G) \geq 0$, das von ∂B_{n-1} abhängt, verbessern:

(0.56) $$\|\sum_{\nu=1}^{q} m(\Gamma, \vec{\mathfrak{a}}_\nu) + V(G) \leq (k+\varepsilon)\, T(G).$$

Dieses Glied $V(G)$ soll hier in der Einleitung nur für den Fall einer *meromorphen Funktion* f erklärt werden. Es sei $v(P_0)$ die Vielfachheit der Nullstelle P_0 von f', das heisst, von $\partial f\, \partial B_{n-1}$, falls die Funktion f in P_0 regulär ist; hat sie aber in P_0 einen Pol, so sei $v(P_0) \geq 0$ die Vielfachheit der Nullstelle P_0 von $\left(\frac{1}{f}\right)'$, das heisst von $\partial \frac{1}{f} \partial B_{n-1}$, ist P_0 eine Unbestimmtheitsstelle, so sei $v(P_0)$ irgendwie erklärt. Wird nun $\mathfrak{v} = \{P_0 \mid v(P_0) > 0\}$ gesetzt, so ist

(0.57) $$V(G) = \int_{\mathfrak{v} \cap G} v(P)\, \psi(P, G)\, \partial \chi_{2n-2} \geq 0.$$

Übrigens lautet die Voraussetzung 4° im Falle einer Funktion einfach so: $f' \not\equiv 0$, das heisst $\partial f\, \partial B_{n-1} \not\equiv 0$.

Für $n = 1$ sind alle diese Sätze schon bewiesen; jedoch treten hier gewisse we-

---

[8] Für $n = 1$ siehe W [43] Kap. V § 12 S. 268. Für $n > 1$ siehe in dieser Arbeit Kap. III § 23.

sentliche Vereinfachungen ein; so ist $\partial \chi_{2n-2}=1$, $\partial B_{n-1}=1$; die Funktion ψ ist harmonisch, was ein grosser Vorteil ist. Einem Integral $\int\limits_{\mathfrak{N}}$ über eine Nullstellenfläche $\mathfrak{N}$ entspricht eine Summe $\sum\limits_{\mathfrak{N}}$ über die Nullstellen.

Für mehrere Veränderliche werden alle diese Sätze in der folgenden Arbeit, die in zwei Teilen erscheint, bewiesen werden. Im ersten Teil werden in Kapitel I Vorbereitungen getroffen. In Kapitel II wird die JENSENsche Formel für Funktionen von mehreren Veränderlichen bewiesen. Dabei geben die nichtuniformisierbaren Verzweigungspunkte der Nullstellenflächen zu einem etwas verwickelten Beweis Anlass. Aus der JENSENschen Formel folgt der erste Hauptsatz. Anschliessend werden verschiedene Darstellungen und Eigenschaften der Charakteristik untersucht. In Kapitel III, also im zweiten Teil der Arbeit, wird der 2. Hauptsatz bewiesen werden. Dazu werden die assoziierten Flächen und das Differential ∂B_{n-1} als Hilfsmittel eingeführt. Am Schluss der Arbeit wird noch gezeigt, wie sich die bewiesenen Sätze im euklidischen Raum bei euklidischer Massbestimmung aussprechen. Dabei ergeben sich unter anderem die oben erwähnten Sätze von H. KNESER[2].

Der Leser möge die etwas lange Einleitung entschuldigen, aber vielleicht wird er sich im Gestrüpp der kommenden Beweise ihrer manchmal ganz gerne erinnern, oder falls er sich nicht dort hineinwagen will, doch einen gewissen Eindruck von der Theorie und ihren Ergebnissen erhalten haben. Im übrigen sei noch einmal ausdrücklich auf die WEYLsche Theorie der meromorphen Kurven verwiesen, wie sie im Buch von H. WEYL und J. WEYL [43] dargestellt ist.

I. KAPITEL.

Vorbereitungen.

§ 1. Vektoroperationen.

Da sie oft gebraucht werden, werden einige bekannte Begriffe und Sätze hier kurz und ohne Beweise zusammengestellt. Die Bezeichnungsweise wird von W [43] übernommen. Dort finden sich auch die zugehörigen Beweise.[9]

a) Vektoren und Polyaden.

Im k dimensionalen Vektorraum R^{2k} über dem Körper der komplexen Zahlen werden k linear unabhängige Vektoren $\mathfrak{e}_1, \ldots, \mathfrak{e}_k$ gewählt. Ihnen werden im Vek-

[9] Siehe W [43] Kap. I A S. 10—35.

torraum R^{2kp} für $p=2, 3, \ldots$ dann kp linear unabhängige Vektoren zugeordnet, die mit $\mathfrak{e}_{\nu_1}\mathfrak{e}_{\nu_2}\ldots\mathfrak{e}_{\nu_p}$ für $1\leq\nu_1\leq k, \ldots, 1\leq\nu_p\leq k$ bezeichnet werden. Diese Zuordnung möge für jeden Satz $\mathfrak{e}_1, \ldots, \mathfrak{e}_k$ linear unabhängiger Vektoren geschehen, und zwar so, dass dem Übergang

$$\mathfrak{e}'_\nu=\sum_{\mu=1}^{k}e_{\nu\mu}\,\mathfrak{e}_\mu\,,\quad \mathfrak{e}_\mu=\sum_{\nu=1}^{k}e'_{\mu\nu}\,\mathfrak{e}'_\nu \tag{1.1}$$

vom „Koordinatensystem $\mathfrak{e}_1, \ldots, \mathfrak{e}_k$" zum Koordinatensystem $\mathfrak{e}'_1, \ldots, \mathfrak{e}'_k$ ein Koordinatenwechsel

$$\begin{aligned}\mathfrak{e}'_{\nu_1}\ldots\mathfrak{e}'_{\nu_p}&=\sum_{\mu_1,\ldots,\mu_p=1}^{k}e_{\nu_1\mu_1}\ldots e_{\nu_p\mu_p}\,\mathfrak{e}_{\mu_1}\ldots\mathfrak{e}_{\mu_p}\,,\\ \mathfrak{e}_{\mu_1}\ldots\mathfrak{e}_{\mu_p}&=\sum_{\nu_1,\ldots,\nu_p=1}^{k}e'_{\mu_1\nu_1}\ldots e'_{\mu_p\nu_p}\,\mathfrak{e}'_{\mu_1}\ldots\mathfrak{e}'_{\nu_p}\end{aligned} \tag{1.2}$$

entspricht. Eine solche Zuordnung existiert und werde weiterhin festgehalten. Jedes Element von R^{2kp} hat die Gestalt

$$\mathfrak{A}^p=\sum_{\mu_1,\ldots,\mu_p=1}^{k}a_{\mu_1\ldots\mu_p}\,\mathfrak{e}_{\mu_1}\ldots\mathfrak{e}_{\mu_p}=\sum_{\nu_1,\ldots,\nu_p=1}^{k}a'_{\nu_1\ldots\nu_p}\,\mathfrak{e}'_{\nu_1}\ldots\mathfrak{e}'_{\nu_p}\,, \tag{1.3}$$

wobei die komplexen Koordinaten $a_{\mu_1\ldots\mu_p}$ (bzw. $a'_{\nu_1\ldots\nu_p}$) bezüglich des Koordinatensystemes $\mathfrak{e}_1, \ldots, \mathfrak{e}_k$ (bzw. $\mathfrak{e}'_1, \ldots, \mathfrak{e}'_k$) eindeutig bestimmt sind und dem Transformationsgesetz

$$\begin{aligned}a'_{\nu_1\ldots\nu_p}&=\sum_{\mu_1,\ldots,\mu_p=1}^{k}e'_{\mu_1\nu_1}\ldots e'_{\mu_p\nu_p}\,a_{\mu_1\ldots\mu_p}\,,\\ a_{\mu_1\ldots\mu_p}&=\sum_{\nu_1,\ldots,\nu_p=1}^{k}e_{\nu_1\mu_1}\ldots e_{\nu_p\mu_p}\,a'_{\nu_1\ldots\nu_p}\end{aligned} \tag{1.4}$$

gehorchen. $\mathfrak{A}^p$ heisst ein *k dimensionaler Tensor der Stufe p*. Zur Abkürzung setzt man

$$\delta^\mu_\nu=\begin{cases}0 \text{ für } \mu\neq\nu\\ 1 \text{ für } \mu=\nu,\end{cases}\quad \delta^{\mu_1\ldots\mu_p}_{\nu_1\ldots\nu_p}=\det_{i,j=1,\ldots,p}\left(\delta^{\mu_i}_{\nu_j}\right), \tag{1.5}$$

$$\sum_{\nu_1,\ldots,\nu_p=1}^{k}=\sum_{\nu\,|\,p}^{k},\quad \sum_{1\leq\nu_1<\ldots<\nu_p\leq k}=\sum_{\nu\,|\,p}^{k}{}'. \tag{1.6}$$

Ist $\mathfrak{A}^p$ schiefsymmetrisch, das heisst, gilt

$$a_{\mu_1\ldots\mu_p}=\delta^{\mu_1\ldots\mu_p}_{\nu_1\ldots\nu_p}\,a_{\nu_1\ldots\nu_p}\,, \tag{1.7}$$

so heisse $\mathfrak{A}^p$ eine *k dimensionale Polyade der Stufe p* oder auch eine *p-ade*. Diese Definition ist von der Wahl des Koordinatensystemes $\mathfrak{e}_1, \ldots, \mathfrak{e}_k$ unabhängig, das heisst, (1.7) gilt auch für $a'_{\nu_1 \ldots \nu_p}$. Der Raum R_p^{2k} der p-aden ist ein Teilmodul von R^{2kp} und isomorph $R^{2\binom{k}{p}}$.

Das *äussere Produkt* zweier Polyaden

$$\mathfrak{A}^p = \sum_{\mu|p}^{k} a_{\mu_1 \ldots \mu_p} \mathfrak{e}_{\mu_1} \ldots \mathfrak{e}_{\mu_p} \text{ und } \mathfrak{B}^q = \sum_{\nu|q}^{k} b_{\nu_1 \ldots \nu_q} \mathfrak{e}_{\nu_1} \ldots \mathfrak{e}_{\nu_q}$$

sei

$$(1.8) \qquad [\mathfrak{A}^p, \mathfrak{B}^q] = \sum_{\varrho|p+q}^{k} \frac{1}{p!\, q!} \sum_{\nu|q}^{k} \sum_{\mu|p}^{k} \delta^{\mu_1 \ldots \mu_p \nu_1 \ldots \nu_q}_{\varrho_1 \ldots \ldots \ldots \varrho_{p+q}} a_{\mu_1 \ldots \mu_p} b_{\nu_1 \ldots \nu_q} \mathfrak{e}_{\varrho_1} \ldots \mathfrak{e}_{\varrho_{p+q}}.$$

Es ist gegenüber einem Koordinatenwechsel (1.1) bis (1.4) invariant, gehört zu R_{p+q}^{2k}, ist distributiv, assoziativ und *alternierend*; letzteres besagt

$$(1.9) \qquad [\mathfrak{A}^p, \mathfrak{B}^q] = (-1)^{pq} [\mathfrak{B}^q, \mathfrak{A}^p].$$

Es ist $\mathfrak{A}^1 = \mathfrak{a}$ ein Vektor. Das äussere Produkt der p Vektoren $\mathfrak{a}_\mu = \sum_{\nu=1}^{k} a_{\mu\nu} \mathfrak{e}_\nu$ ist die „*spezielle*" p-ade

$$(1.10) \qquad [\mathfrak{a}_1, \ldots, \mathfrak{a}_p] = \sum_{\nu|p}^{k} \begin{vmatrix} a_{1\nu_1} & \ldots & a_{1\nu_p} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{p\nu_1} & \ldots & a_{p\nu_p} \end{vmatrix} \mathfrak{e}_{\nu_1} \ldots \mathfrak{e}_{\nu_p} \qquad (p > 1).$$

Sie ist dann und nur dann Null, wenn die Vektoren $\mathfrak{a}_1, \ldots, \mathfrak{a}_p$ linear abhängig sind. Ist $\mathfrak{A}^p = [\mathfrak{a}_1, \ldots, \mathfrak{a}_p] \neq 0$, so bezeichne $\{\mathfrak{A}^p\}$ den von den Vektoren $\mathfrak{a}_1, \ldots, \mathfrak{a}_p$ aufgespannten Unterraum $\{\mathfrak{x} \,|\, \mathfrak{x} = \sum_{\nu=1}^{p} x_\nu \mathfrak{a}_\nu\}$. Die speziellen Polyaden erzeugen den Modul R_p^{2k}; denn die Polyaden $[\mathfrak{e}_{\nu_1}, \ldots, \mathfrak{e}_{\nu_p}]$ mit $1 \leq \nu_1 \leq k, \ldots, 1 \leq \nu_p \leq k$ bilden eine Minimalbasis:

$$(1.11) \qquad \mathfrak{A}^p = \sum_{\nu|p}^{k}{}' a_{\nu_1 \ldots \nu_p} [\mathfrak{e}_{\nu_1}, \ldots, \mathfrak{e}_{\nu_p}] = \sum_{\nu|p}^{k} a_{\nu_1 \ldots \nu_p} \mathfrak{e}_{\nu_1} \ldots \mathfrak{e}_{\nu_p}.$$

Die Abbildung $\underline{\sigma}$ von R_p^{2k} in $R_p'^{2k}$ heisse *linear*, wenn

$$(1.12) \qquad \underline{\sigma}(a\,\mathfrak{A}^p + b\,\mathfrak{B}^p) = a\,\underline{\sigma}\,\mathfrak{A}^p + b\,\underline{\sigma}\,\mathfrak{B}^p$$

bzw. *antilinear*, wenn

$$(1.13) \qquad \underline{\sigma}(a\,\mathfrak{A}^p + b\,\mathfrak{B}^p) = \bar{a}\,\underline{\sigma}\,\mathfrak{A}^p + \bar{b}\,\underline{\sigma}\,\mathfrak{B}^p$$

ist. Wird der Raum R_1^{2k} mit dem Koordinatensystem $\mathfrak{e}_1, \ldots, \mathfrak{e}_k$ in den Raum $R_1'^{2k}$ mit dem Koordinatensystem $\mathfrak{e}'_1, \ldots \mathfrak{e}'_k$ durch $\underline{\sigma}_1$ linear (bzw. antilinear) abgebildet, so wird durch

$$\mathfrak{A}'^p = \underline{\sigma}_p\, \mathfrak{A}^p = \sum_{\nu|p}^{k} \sum_{\mu|p}^{k} e'_{\mu_1\nu_1} \ldots e'_{\mu_p\nu_p}\, a_{\mu_1\ldots\mu_p}\, \mathfrak{e}'_{\nu_1} \ldots \mathfrak{e}'_{\nu_p}, \qquad (p=1, 2, \ldots) \tag{1.14}$$

eine *lineare* (bzw. durch

$$\mathfrak{A}'^p = \underline{\sigma}_p\, \mathfrak{A}^p = \sum_{\nu|p}^{k} \sum_{\mu|p}^{k} e'_{\mu_1\nu_1} \ldots e'_{\mu_p\nu_p}\, \bar{a}_{\mu_1\ldots\mu_p}\, \mathfrak{e}'_{\nu_1} \ldots \mathfrak{e}'_{\nu_p}, \qquad (p=1, 2, \ldots) \tag{1.15}$$

eine *antilineare*) Abbildung unabhängig von der Wahl der Koordinatensysteme $\mathfrak{e}_1, \ldots, \mathfrak{e}_k$ und $\mathfrak{e}'_1, \ldots, \mathfrak{e}'_k$ definiert. Sie ist eineindeutig, wenn es $\underline{\sigma}_1$ ist. Es folgt

$$\underline{\sigma}_{p+q}\, [\mathfrak{A}^p, \mathfrak{B}^q] = [\underline{\sigma}_p\, \mathfrak{A}^p, \underline{\sigma}_q\, \mathfrak{B}^q]. \tag{1.16}$$

b) Das innere Produkt.

Jedem Raum R_p^{2k} wird ein zweiter Raum $^*R_p^{2k}$ und jedem Koordinatensystem $\mathfrak{e}_1, \ldots, \mathfrak{e}_k$ der Räume R_p^{2k} ein *duales Koordinatensystem* $\vec{\varepsilon}_1, \ldots, \vec{\varepsilon}_k$ der Räume $^*R_p^{2k}$ zugeordnet. Diese Zuordnung geschehe so, dass einem Koordinatenwechsel in R_p^{2k} gemäss (1.1) bis (1.4) ein Koordinatenwechsel in $^*R_p^{2k}$ gemäss

$$\begin{aligned} \vec{\varepsilon}\,'_{\nu_1} \vec{\varepsilon}\,'_{\nu_2} \ldots \vec{\varepsilon}\,'_{\nu_p} &= \sum_{\mu|p}^{k} \varepsilon_{\nu_1\mu_1} \ldots \varepsilon_{\nu_p\mu_p}\, \vec{\varepsilon}_{\mu_1} \vec{\varepsilon}_{\mu_2} \ldots \vec{\varepsilon}_{\mu_p}, \\ \vec{\varepsilon}_{\mu_1} \vec{\varepsilon}_{\mu_2} \ldots \vec{\varepsilon}_{\mu_p} &= \sum_{\mu|p}^{k} \varepsilon'_{\mu_1\nu_1} \ldots \varepsilon'_{\mu_p\nu_p}\, \vec{\varepsilon}\,'_{\nu_1} \vec{\varepsilon}\,'_{\nu_2} \ldots \vec{\varepsilon}\,'_{\nu_p} \end{aligned} \tag{1.17}$$

entspricht, wobei

$$\sum_{\mu=1}^{k} e_{\nu\mu}\, \varepsilon_{\lambda\mu} = \delta_\lambda^\nu \text{ und } \sum_{\mu=1}^{k} e'_{\mu\nu}\, \varepsilon'_{\mu\lambda} = \delta_\lambda^\nu \tag{1.18}$$

ist. Solche Zuordnungen existieren. Eine davon wird fest gewählt. Dann heisse der Raum $^*R_p^{2k}$ der zu R_p^{2k} duale Raum. Die Elemente von R_p^{2k} werden mit deutschen Buchstaben bezeichnet und heissen *kovariant*; die Elemente von $^*R_p^{2k}$ werden mit griechischen Buchstaben bezeichnet und heissen *kontravariant*. Den dualen Raum von $^*R_p^{2k}$ kann man so definieren, dass $^{**}R_p^{2k} = R_p^{2k}$ ist, und dass das duale Koordinatensystem des dualen Koordinatensystems von $\mathfrak{e}_1, \ldots, \mathfrak{e}_k$ wieder $\mathfrak{e}_1, \ldots, \mathfrak{e}_k$ ist.

Ist $\mathfrak{A}^p = \sum_{\nu|p}^{k} a_{\nu_1\ldots\nu_p}\, \mathfrak{e}_{\nu_1} \ldots \mathfrak{e}_{\nu_p} \in R_p^{2k}$ und $A^p = \sum_{\nu|p}^{k} \alpha_{\nu_1\ldots\nu_p}\, \vec{\varepsilon}_{\nu_1} \ldots \vec{\varepsilon}_{\nu_p} \in {^*R_p^{2k}}$ und sind $\mathfrak{e}_1, \ldots, \mathfrak{e}_k$, $\vec{\varepsilon}_1, \ldots, \vec{\varepsilon}_k$ duale Koordinatensysteme, so ist das *innere Produkt* von $\mathfrak{A}^p$ und A^p durch

$$(A^p, \mathfrak{A}^p) = \sum_{\nu|p}^{k}{}' \alpha_{\nu_1\ldots\nu_p}\, a_{\nu_1\ldots\nu_p} \tag{1.19}$$

unabhängig von der Wahl des Koordinatensystems definiert. Es ist distributiv und kommutativ. Ausserdem gilt

$$\det (\vec{\gamma}_\mu, \mathfrak{x}_\nu) = ([\vec{\gamma}_1, \ldots, \vec{\gamma}_p], [\mathfrak{x}_1, \ldots, \mathfrak{x}_p]). \tag{1.20}$$

Ist $\underline{\sigma}$ eine lineare Abbildung von R_p^{2k} auf R'^{2k}_p, so gibt es zu jeder Polyade $A^p \in {}^*R_p^{2k}$ genau eine Polyade ${}^*\underline{\sigma}\, A^p \in {}^*R'^{2k}_p$, sodass für alle $\mathfrak{X}^p \in R_p^{2k}$ gilt

$$(A^p, \mathfrak{X}^p) = ({}^*\underline{\sigma}\, A^p, \underline{\sigma}\, \mathfrak{X}^p). \tag{1.21}$$

Durch ${}^*\underline{\sigma}$ wird ${}^*R_p^{2k}$ linear auf ${}^*R'^{2k}_p$ abgebildet. Es ist

$$^{**}\underline{\sigma}\, \mathfrak{A}^p = \underline{\sigma}\, \mathfrak{A}^p. \tag{1.22}$$

Ist $\underline{\sigma}_p$ nach (1.14) erklärt, so ist $({}^*\underline{\sigma}_1)_p = {}^*(\underline{\sigma}_p)$. Mit (1.18) gilt

$${}^*\underline{\sigma}_p\, A^p = \sum_{\nu | p}^{k} \sum_{\mu | p}^{k} \varepsilon'_{\mu_1 \nu_1} \ldots \varepsilon'_{\mu_p \nu_p}\, \alpha_{\mu_1 \ldots \mu_p}\, \vec{\varepsilon}\,'_{\nu_1} \ldots \vec{\varepsilon}\,'_{\nu_p}. \tag{1.23}$$

Ist $\underline{\sigma}$ eine antilineare Abbildung von R_p^{2k} auf R'^{2k}_p, so definiert man entsprechend die antilineare Abbildung ${}^*\underline{\sigma}$ von ${}^*R_p^{2k}$ auf ${}^*R'^{2k}_p$ durch

$$\overline{(A^p, \mathfrak{X}^p)} = ({}^*\underline{\sigma}\, A^p, \underline{\sigma}\, \mathfrak{X}^p). \tag{1.24}$$

Es gilt (1.22). Ist $\underline{\sigma}_p$ nach (1.15) erklärt, so ist $({}^*\underline{\sigma}_1)_p = {}^*(\underline{\sigma}_p)$. Mit (1.18) gilt

$${}^*\underline{\sigma}_p\, A^p = \sum_{\nu | p}^{k} \sum_{\mu | p}^{k} \varepsilon'_{\mu_1 \nu_1} \ldots \varepsilon'_{\mu_p \nu_p}\, \bar{\alpha}_{\mu_1 \ldots \mu_p}\, \vec{\varepsilon}\,'_{\nu_1} \ldots \vec{\varepsilon}\,'_{\nu_p}. \tag{1.25}$$

Sind $\mathfrak{e}_1, \ldots, \mathfrak{e}_k$ und $\vec{\varepsilon}_1, \ldots, \vec{\varepsilon}_k$ duale Koordinatensysteme, so wird durch

$${}^*\mathfrak{A}^{k-p} = \sum_{\nu | \mu}^{k}{}' \sum_{\mu | k-p}^{k}{}' \delta^{1 \ldots \ldots \ldots \ldots k}_{\nu_1 \ldots \nu_p\, \mu_1 \ldots \mu_{k-p}}\, a_{\mu_1 \ldots \mu_{k-p}} [\vec{\varepsilon}_{\nu_1}, \ldots, \vec{\varepsilon}_{\nu_p}] \tag{1.26}$$

eine lineare, eineindeutige Abbildung von R_{k-p}^{2k} auf ${}^*R_p^{2k}$ gegeben, die die *duale Abbildung* bezüglich $\mathfrak{e}_1, \ldots, \mathfrak{e}_k$ heisse. Es ist

$$\begin{gathered} ^{**}\mathfrak{A}^{k-p} = (-1)^{k(k-p)}\, \mathfrak{A}^{k-p}, \\ ({}^*A^p, {}^*\mathfrak{X}) = (A^p, \mathfrak{X}^p). \end{gathered} \tag{1.27}$$

Dann und nur dann ist $A^p = {}^*\mathfrak{A}^{k-p}$, wenn für alle speziellen p aden die Beziehung

$$[\mathfrak{X}^p, \mathfrak{A}^{k-p}] = (\mathfrak{X}^p, A^p)\, [\mathfrak{e}_1, \ldots, \mathfrak{e}_k] \tag{1.28}$$

besteht. Ist ${}^*\underline{\sigma}_p$ die Sternabbildung zu $\underline{\sigma}_p$ so ist

(1.29) $$\underline{{}^*\sigma_p}\ {}^*\mathfrak{A}^{k-p} = {}^*\{\underline{\sigma}_{k-p}\,(\det\,(e_{\mu\nu})\,\mathfrak{A}^{k-p})\},$$

wobei sich $e_{\mu\nu}$ aus (1.14) (bzw. (1.15)) und (1.2) bestimmt. Geht man also mittels (1.1) bis (1.4) und (1.17), (1.18) zu einem anderen Paar dualer Koordinatensysteme $\mathfrak{e}_1', \ldots, \mathfrak{e}_k'$ und $\vec{\varepsilon}_1', \ldots, \vec{\varepsilon}_k'$ über, und bildet für dieses die duale Abbildung $\otimes$, so ist

(1.30) $${}^*\mathfrak{A}^{k-p} = \det\,(e_{\mu\nu})\otimes\mathfrak{A}^{k-p}$$

Die duale Abbildung hängt daher nur unwesentlich vom Koordinatensystem ab. Das duale Bild einer speziellen Polyade ist speziell. Es kann so erhalten werden: $\mathfrak{A}^{k-p} = [\mathfrak{a}_1, \ldots, \mathfrak{a}_{k-p}]$ sei nicht Null. Dem Raum $\{\mathfrak{A}^{k-p}\}$ wird durch das Gleichungssystem

(1.31) $$(\mathfrak{a}_\mu, \vec{\alpha}_\nu) = 0 \text{ für } \mu = 1, \ldots, k-p;\ \nu = 1, \ldots, p$$

eineindeutig ein Raum $\{A^p\}$ mit

(1.32) $$A^p = [\vec{\alpha}_1, \ldots, \vec{\alpha}_p] = e\ {}^*[\mathfrak{a}_1, \ldots, \mathfrak{a}_{k-p}]$$

zugeordnet, wobei die komplexe Zaht $e \neq 0$ durch geeignete Wahl von $\vec{\alpha}_1, \ldots, \vec{\alpha}_p$ zu 1 normiert werden kann.

c) Das skalare Produkt.

Erfüllt die Funktion $(\mathfrak{x}\,|\,\mathfrak{y})$ der Vektoren $\mathfrak{x} \in R_1^{2k}$, $\mathfrak{y} \in R_1^{2k}$ die Bedingungen

1°. $(\mathfrak{x}\,|\,\mathfrak{y})$ ist eine komplexe Zahl,

2°. $(\mathfrak{x}\,|\,\mathfrak{y}) = \overline{(\mathfrak{y}\,|\,\mathfrak{x})}$,

3°. $(\mathfrak{x}\,|\,\lambda\,\mathfrak{y} + \mu\,\mathfrak{z}) = \bar{\lambda}\,(\mathfrak{x}\,|\,\mathfrak{y}) + \bar{\mu}\,(\mathfrak{x}\,|\,\mathfrak{z})$,

4°. $(\mathfrak{x}\,|\,\mathfrak{x}) > 0$, wenn $\mathfrak{x} \neq 0$ ist,

so heisse $(\mathfrak{x}\,|\,\mathfrak{y})$ ein *skalares Produkt* in R_1^{2k}. Es gibt zu jedem Vektor $\mathfrak{y} \in R_1^{2k}$ genau einen Vektor $\underline{\mu}_1\,\mathfrak{y} \in {}^*R_1^{2k}$, sodass

(1.33) $$(\mathfrak{x}\,|\,\mathfrak{y}) = (\mathfrak{x}, \underline{\mu}_1\,\mathfrak{y})$$

für alle $\mathfrak{x} \in R_1^{2k}$ gilt. Diese antilineare Abbildung $\underline{\mu}_1$ induziert nach (1.15) eine antilineare Abbildung $\underline{\mu}_p$ von R_p^{2k} auf ${}^*R_p^{2k}$. Durch

(1.34) $$(\mathfrak{X}^p\,|\,\mathfrak{Y}^p) = (\mathfrak{X}^p, \underline{\mu}_p\,\mathfrak{Y}^p),\ |\mathfrak{X}^p| = \sqrt{(\mathfrak{X}^p\,|\,\mathfrak{X}^p)}$$

wird in R_p^{2k} die durch $(\mathfrak{x}\,|\,\mathfrak{y})$ *induzierte Metrik* eingeführt. Sie erfüllt die Forderungen 1° bis 4°. Im dualen Raum ${}^*R_p^{2k}$ wird durch

(1.35) $$(\Xi^p\,|\,H^p) = (\Xi^p, \underline{\mu}_p^{-1}\,H^p),\ |\Xi^p| = \sqrt{(\Xi^p\,|\,\Xi^p)}$$

die *duale Metrik* eingeführt. Sie erfüllt die Forderungen 1° bis 4°. Die duale Metrik der dualen Metrik ist die ursprüngliche Metrik. Es gilt

$$(1.36)\qquad (\underline{\mu}_p\, \mathfrak{X}^p \,|\, \underline{\mu}_p\, \mathfrak{Y}) = (\mathfrak{Y}^p \,|\, \mathfrak{X}^p), \quad |\mathfrak{X}^p| = |\underline{\mu}_p\, \mathfrak{X}^p|,$$

$$(1.37)\qquad \det(\mathfrak{x}_\mu \,|\, \mathfrak{y}_\nu) = ([\mathfrak{x}_1, \ldots, \mathfrak{x}_p] \,|\, [\mathfrak{y}_1, \ldots, \mathfrak{y}_p]).$$

Die Metrik ist unabhängig von der Wahl des Koordinatensystems.

Für ein Paar dualer Koordinatensysteme $\mathfrak{e}_1, \ldots, \mathfrak{e}_k$ und $\vec{\varepsilon}_1, \ldots, \vec{\varepsilon}_k$ gilt

$$(1.38)\qquad \begin{cases} \underline{\mu}_p\, \mathfrak{y}^p = \sum\limits_{\mu|p}^{k}{}' \sum\limits_{\nu|p}^{k}{}' g_{\mu_1\nu_1} \ldots g_{\mu_p\nu_p}\, \bar{y}_{\nu_1\ldots\nu_p}\, [\vec{\varepsilon}_{\mu_1}, \ldots, \vec{\varepsilon}_{\mu_p}], \\ \underline{\mu}_p^{-1} H^p = \sum\limits_{\mu|p}^{k}{}' \sum\limits_{\nu|p}^{k}{}' \gamma_{\mu_1\nu_1} \ldots \gamma_{\mu_p\nu_p}\, \bar{\eta}_{\nu_1\ldots\nu_p}\, [\mathfrak{e}_{\mu_1}, \ldots, \mathfrak{e}_{\mu_p}], \\ \sum\limits_{\nu=1}^{k} g_{\mu\nu}\, \gamma_{\varrho\nu} = \delta_\varrho^\mu, \quad \gamma_{\nu\varrho} = \bar{\gamma}_{\varrho\nu}, \quad g_{\mu\nu} = \bar{g}_{\nu\mu}, \end{cases}$$

$$(1.39)\qquad (\mathfrak{X}^p \,|\, \mathfrak{Y}^p) = \sum_{\mu|p}^{k}{}' \sum_{\nu|p}^{k}{}' g_{\mu_1\nu_1} \ldots g_{\mu_p\nu_p}\, x_{\mu_1\ldots\mu_p}\, \bar{y}_{\nu_1\ldots\nu_p},$$

$$(1.40)\qquad (\Xi \,|\, H) = \sum_{\mu|p}^{k}{}' \sum_{\nu|p}^{k}{}' \gamma_{\mu_1\nu_1} \ldots \gamma_{\mu_p\nu_p}\, \xi_{\mu_1\ldots\mu_p}\, \bar{\eta}_{\nu_1\ldots\nu_p}.$$

Bildet man zum Koordinatensystem $\mathfrak{e}_1, \ldots, \mathfrak{e}_k$ die duale Abbildung, so ist

$$(1.41)\qquad g\, \underline{\mu}_{k-p}^{-1}\, {}^*\mathfrak{X}^p = {}^*(\underline{\mu}_p\, \mathfrak{X}^p) \quad \text{mit } g = \det(g_{\varrho\sigma}) > 0,$$

$$(1.42)\qquad g\,({}^*\mathfrak{X}^p \,|\, {}^*\mathfrak{Y}^p) = (\mathfrak{X}^p \,|\, \mathfrak{Y}^p),$$

$$(1.43)\qquad |\mathfrak{X}^p| = \sqrt{g}\, |{}^*\mathfrak{X}^p|.$$

Ein Koordinatensystem heisse *normal,* wenn in ihm $g_{\mu\nu} = \delta_\nu^\mu$ ist. Es gibt normale Koordinatensysteme. Das duale Koordinatensystem eines normalen ist normal. *Sind die Vektoren* $\mathfrak{x}_1, \ldots, \mathfrak{x}_p$ *mit* $p \leq k$ *gegeben, so gibt es wenigstens ein normales Koordinatensystem* $\mathfrak{e}_1, \ldots, \mathfrak{e}_k$, *in dem gilt:*

$$(1.44)\qquad \mathfrak{x}_\mu = \sum_{\nu=1}^{\mu} x_{\mu\nu}\, \mathfrak{e}_\nu \quad \text{für } \mu = 1, \ldots, p.$$

Nun definiert man als *Abstand*

$$(1.45)\qquad \|\mathfrak{X}^p, \Xi^p\| = \frac{|(\mathfrak{X}^p, \Xi^p)|}{|\mathfrak{X}^p|\,|\Xi^p|}$$

und als *Distanz*

$$(1.46)\qquad \|\mathfrak{X}^p : \mathfrak{Y}^q\| = \frac{|[\mathfrak{X}^p, \mathfrak{Y}^q]|}{|\mathfrak{X}^p|\,|\mathfrak{Y}^q|}.$$

Beide sind unabhängig von der Wahl des Koordinatensystemes, kommutativ und invariant gegenüber unitären Abbildungen. Dabei heisst eine Abbildung $\underline{\sigma_1}$ unitär, wenn $(\underline{\sigma_1}\mathfrak{x} \mid \underline{\sigma_1}\mathfrak{y}) = (\mathfrak{x} \mid \mathfrak{y})$ ist. Es gilt

$$\|\mathfrak{X}^p : {}^*\Xi^p\| = \|\mathfrak{X}^p, \Xi^p\| = \|{}^*\mathfrak{X}^p : {}^*\Xi^p\| \tag{1.47}$$

und, falls $\mathfrak{Y}^q$ speziell ist,

$$0 \leq \|\mathfrak{X}^p, \Xi^p\| \leq 1,\ 0 \leq \|\mathfrak{X}^p : \mathfrak{Y}^q\| \leq 1, \tag{1.48}$$

wobei für $\mathfrak{X}^p = [\mathfrak{x}_1, \ldots, \mathfrak{x}_p] \neq 0$, $\mathfrak{Y}^q = [\mathfrak{y}_1, \ldots, \mathfrak{y}_q]$ dann und nur dann $\|\mathfrak{X}^p : \mathfrak{Y}^q\| = 1$, wenn $(\mathfrak{x}_\mu \mid \mathfrak{y}_\nu) = 0$ für alle μ, ν gilt, das heisst, wenn $\{\mathfrak{X}^p\}$ und $\{\mathfrak{Y}^q\}$ aufeinander senkrecht stehen. Sind $\mathfrak{X}^p$, $\mathfrak{Y}^q$, $\mathfrak{Z}^h$ nicht Null und speziell, so ist

$$\|\mathfrak{X}^p : \mathfrak{Y}^q\| \leq \|\mathfrak{X}^p : \mathfrak{Z}^h\| \text{ für } \{\mathfrak{Z}^h\} \subseteq \{\mathfrak{Y}^q\}. \tag{1.49}$$

d) Übergang zu einer anderen Metrik.

Ist $(\mathfrak{x} \mid \mathfrak{y})_0$ eine Metrik, $(\mathfrak{x} \mid \mathfrak{y})$ eine andere, so gibt es ein Koordinatensystem, in dem

$$(\mathfrak{x} \mid \mathfrak{y})_0 = \sum_{\mu=1}^{k} x_\mu \bar{y}_\mu,\ (\mathfrak{x} \mid \mathfrak{y}) = \sum_{\mu=1}^{k} e_\mu x_\mu \bar{y}_\mu \tag{1.50}$$

mit $0 < e_\mu \leq e_{\mu+1}$ gilt. Die Zahlen e_μ sind eindeutig bestimmt. Es ist

$$m_p = \operatorname*{Min}_{|[\mathfrak{x}_1, \ldots, \mathfrak{x}_p]|_0 = 1} |[\mathfrak{x}_1, \ldots, \mathfrak{x}_p]|^2 = e_1 \ldots e_p, \tag{1.51}$$

$$M_p = \operatorname*{Max}_{|[\mathfrak{x}_1, \ldots, \mathfrak{x}_p]|_0 = 1} |[\mathfrak{x}_1, \ldots, \mathfrak{x}_p]|^2 = e_{k-p+1} \ldots e_k, \tag{1.52}$$

$$m_p |\mathfrak{X}^p|_0^2 \leq |\mathfrak{X}^p|^2 \leq M_p |\mathfrak{X}^p|_0^2, \tag{1.53}$$

$$\frac{1}{M_p} |\Xi^p|_0^2 \leq |\Xi^p|^2 \leq \frac{1}{m_p} |\Xi^p|_0^2, \tag{1.54}$$

$$\frac{1}{\lambda_p} \|\mathfrak{X}^p, \Xi^p\|_0 \leq \|\mathfrak{X}^p, \Xi^p\| \leq \lambda_p \|\mathfrak{X}^p, \Xi^p\|_0 \text{ mit } \lambda_p = \sqrt{\frac{M_p}{m_p}}. \tag{1.55}$$

Sind die Polyaden $\mathfrak{X}^p$, $\mathfrak{Y}^q$ speziell und ist $h = \operatorname{Min}(p, q)$, so ist

$$\frac{1}{\lambda_h} \|\mathfrak{X}^p : \mathfrak{Y}^q\|_0 \leq \|\mathfrak{X}^p : \mathfrak{Y}^q\| \leq \lambda_h \|\mathfrak{X}^p : \mathfrak{Y}^q\|_0. \tag{1.56}$$

e) Konjugiert-komplexe Polyaden.

Bisher wurden keine *konjugiert-komplexen p-aden* definiert. Es seien $\mathfrak{e}_1, \ldots \mathfrak{e}_k$, und $\vec{\varepsilon}_1, \ldots, \vec{\varepsilon}_k$ ein Paar dualer Koordinatensysteme. Dann werde

$$\bar{\mathfrak{X}}^p = \sum_{\nu|p}^{k} \bar{x}_{\nu_1 \ldots \nu_p} \mathfrak{e}_{\nu_1} \ldots \mathfrak{e}_{\nu_p}, \quad \bar{\Xi}^p = \sum_{\nu|p}^{k} \bar{\xi}_{\nu_1 \ldots \nu_p} \vec{\varepsilon}_{\nu_1} \ldots \vec{\varepsilon}_{\nu_p} \tag{1.57}$$

gesetzt. Es ist $\bar{\mathfrak{X}}^p$ eine antilineare Abbildung mit $\bar{\bar{\mathfrak{X}}}^p = \mathfrak{X}^p$. Dasselbe gilt im dualen Raum. Es gilt

$$(\bar{\mathfrak{X}}^p, \bar{\Xi}^p) = \overline{(\mathfrak{X}^p, \Xi^p)} \tag{1.58}$$

$$[\bar{\mathfrak{X}}^p, \bar{\mathfrak{Y}}^q] = \overline{[\mathfrak{X}^p, \mathfrak{Y}^q]}, \quad [\bar{\Xi}^p, \bar{H}^q] = \overline{[\Xi^p, H^q]}. \tag{1.59]}$$

Ist $\mathfrak{X}^p = \bar{\mathfrak{X}}^p$, so heisse $\mathfrak{X}^p$ *reell*. Es ist $\mathfrak{X}^p = \mathfrak{X}^p_{\mathrm{Re}} + i\,\mathfrak{X}^p_{\mathrm{Im}}$, wobei die reellen Polyaden $\mathfrak{X}^p_{\mathrm{Re}}$, $\mathfrak{X}^p_{\mathrm{Im}}$ eindeutig bestimmt sind. Ein Koordinatensystem $\mathfrak{e}_1, \ldots, \mathfrak{e}_k$ heisse *reell*, wenn $\bar{\mathfrak{e}}_\mu = \mathfrak{e}_\mu$ für $\mu = 1, \ldots, k$ ist. Ist $\mathfrak{e}_1, \ldots, \mathfrak{e}_k$ ein reelles Koordinatensystem, so auch $\mathfrak{e}_{\mu_1} \mathfrak{e}_{\mu_2} \ldots \mathfrak{e}_{\mu_k}$. Das duale Koordinatensystem ist dann ebenfalls reell. Die Formeln (1.1) führen ein reelles Koordinatensystem dann und nur dann in ein reelles über, falls die Koeffizienten $e_{\mu\nu}$ reell sind. Bildet man das Konjugiert-Komplexe gemäss (1.57) für ein anderes Koordinatensystem, so erhält man dann und nur dann dasselbe, wenn der Koordinatenwechsel (1.1) mit reellen Koeffizienten $e_{\mu\nu}$ erfolgt.

§ 2. Mannigfaltigkeiten.

In [I] wurden bereits verschiedene bekannte Tatsachen so dargestellt, wie sie in dieser Arbeit gebraucht werden. Um es dem Leser einfacher zu machen, sollen diese Tatsachen hier noch einmal kurz und ohne Beweise erwähnt werden.

(1). Differenzierbare Mannigfaltigkeiten.

Ein Hausdorffscher Raum $\mathfrak{M}^m$ heisse eine m dimensionale, l-mal stetig differenzierbare, bzw. reellanalytische, bzw. komplex(analytische) *Mannigfaltigkeit*, wenn es eine Menge $\mathfrak{P}$ von Abbildungen α gibt, für die gilt:

1. Jedem $\alpha \in \mathfrak{P}$ ist eindeutig eine offene Menge U'_α des Raumes der reellen Vektoren $\mathfrak{t} = (t_1, \ldots, t_m)$ zugeordnet, die durch $\alpha = \alpha(\mathfrak{t})$ topologisch auf $U_\alpha \subseteq \mathfrak{M}^m$ abgebildet wird.

2. Die Mengen U_α bilden eine Überdeckung von $\mathfrak{M}^m = \bigcup_{\alpha \in \mathfrak{P}} U_\alpha$.

3. a) Sind $\alpha(\mathfrak{t})$ und $\beta(\mathfrak{x})$ zwei Abbildungen aus $\mathfrak{P}$, so ist die vermittelnde Abbildung $\mathfrak{x}(\mathfrak{t}) = \beta^{-1}\alpha(\mathfrak{t})$ in $\alpha^{-1}(U_\alpha \cap U_\beta)$ l-mal stetigdifferenzierbar. bzw. reellanalytisch.

b) Die Mannigfaltigkeit heisse *komplex*, falls $m = 2n$ gerade ist und für $w_\nu = x_{2\nu-1} + i x_{2\nu}$, $z = t_{2\nu-1} + i t_{2\nu}$ die vermittelnde Abbildung $\mathfrak{w}(\mathfrak{z}) = \beta^{-1}\alpha$ in $\alpha^{-1}(U_\alpha \cap U_\beta)$ komplexanalytisch ist.

Im Fall $l > 0$ heisse die Mannigfaltigkeit $\mathfrak{M}^m$ orientiert, wenn gilt:

4. In 3. ist die Funktionaldeterminate $\dfrac{\partial \mathfrak{x}}{\partial \mathfrak{t}} > 0$.

Die Forderung 4 ist für komplexe Mannigfaltigkeiten von selbst erfüllt.

Es werden nur orientierte Mannigfaltigkeiten mit $l > 0$ betrachtet. Die Menge $\mathfrak{P}$ kann nachträglich zu einer maximalen erweitert werden, die wieder die Forderungen 1. bis 4. erfüllt. Die Menge $\mathfrak{P}$ werde weiterhin maximal angenommen, und als *Struktur* bezeichnet. Mit α gehört auch jede Abbildung α' zu $\mathfrak{P}$, die durch Einschränkung von α auf eine offene Teilmenge $U_{\alpha'} \subset U_\alpha$ entsteht. $\mathfrak{P}_P$ sei die Menge aller α mit $P \in U_\alpha$ und $\alpha(0) = P$. Ist $\alpha \in \mathfrak{P}_P$, so wird jede offene Umgebung von P in U_α mit $U(P\,|\,\alpha)$ bezeichnet.[10] Die Mengen U_α, $U(P\,|\,\alpha)$ werden durch α „*uniformisiert*".

Die Abbildungen $\alpha(-t_1, t_2, \ldots, t_k)$ mit $\alpha(\mathfrak{t}) \in \mathfrak{P} = \mathfrak{P}^+$ bilden wieder eine Struktur $\mathfrak{P}^-$ und orientieren $\mathfrak{M}^m_+$ zu $\mathfrak{M}^m_-$ um. War $\mathfrak{M}^m_+$ reellanalytisch, oder l-mal stetigdifferenzierbar, so ist es auch $\mathfrak{M}^m_-$; war $\mathfrak{M}^m_+$ komplexanalytisch und $m > 2$, so ist es $\mathfrak{M}^m_-$ nicht.

(2). Eigenschaften auf einer Mannigfaltigkeit.

a) Eine Menge M aus $\mathfrak{M}^m$ heisse *kompakt*, wenn der Satz von HEINE-BOREL für M gilt, sie heisse *kompakt überdeckbar*, falls M in einer Vereinigung von höchstens abzählbar vielen kompakten Mengen liegt, $M \subseteq \bigcup_{\nu=0}^{\infty} K_\nu$, wobei o. B. d. A. $K_0 = \emptyset$ und $K_\nu \subseteq K_{\nu+1}$ sei. Die Menge M heisse *beschränkt*, wenn sie in einer kompakten Menge liegt. Bezüglich einer gewissen Massdefinition heisse M *messbar*, eine *Nullmenge* bzw. von *endlichem Mass*, wenn dies für jede Abbildung $\alpha \in \mathfrak{P}$ für die Menge $\alpha^{-1}(M \cap U_\alpha)$ gilt. Diese messbaren Mengen bzw. Nullmengen haben die üblichen Eigenschaften.

b) Eine komplexwertige Funktion $f(P, \alpha, \nu)$ sei für jedes ν einer Indexmenge N, jedes $\alpha \in \mathfrak{P}$ und jeden Punkt $P \in M \cap U_\alpha$ erklärt; sie heisse auf M messbar, bzw. stetig, bzw. l-mal-(stetig)-differenzierbar, bzw. reellanalytisch, bzw. analytisch, falls dies für die Funktion $f(\alpha(\mathfrak{t}), \alpha, \nu)$ auf $\alpha^{-1}(M \cap U_\alpha)$ für jedes $\alpha \in \mathfrak{P}$

[10] In [I] wurden nur die Mengen $\mathfrak{P}_P$ betrachtet. Es ist jedoch vorteilhaft beide Bezeichnungsweisen $\mathfrak{P}$, U_α und $\mathfrak{P}_P$, $U(P\,|\,\alpha)$ zu verwenden.

und $\nu \in N$ gilt. Sie heisse über M *örtlich integrierbar*, falls es zu jedem $\nu \in N$, jedem Punkt $P \in \mathfrak{M}^m$ und jeder Abbildung $\alpha \in \mathfrak{P}_P$ eine Umgebung $U_\nu(P \mid \alpha)$ gibt, so dass $f(\alpha(\mathfrak{t}), \alpha, \nu)$ über $\alpha^{-1}(U_\nu(P \mid \alpha) \cap M)$ integrierbar ist.

c) Die Abbildung $\sigma(Q)$ der Mannigfaltigkeit $\mathfrak{N}^q$ in die Mannigfaltigkeit $\mathfrak{M}^m$ heisse l-mal stetigdifferenzierbar, bzw. reellanalytisch, bzw. komplexanalytisch, falls bei jeder Wahl von $\alpha(\mathfrak{t}) \in \mathfrak{P}(\mathfrak{M}^m)$ und $\beta(\mathfrak{x}) \in \mathfrak{P}(\mathfrak{N}^q)$ mit $\sigma(U_\beta) \cap U_\alpha \neq \emptyset$ die vermittelnde Abbildung $\mathfrak{t}(\mathfrak{x}) = \alpha^{-1}\sigma\beta(\mathfrak{x})$ auf $\beta^{-1}(U_\beta \cap \sigma^{-1}(U_\alpha))$ l-mal stetigdifferenzierbar, bzw. reellanalytisch, bzw. komplexanalytisch ist; letzteres heisst: Setzt man $z_\nu = x_{2\nu-1} + i x_{2\nu}$, $w_\nu = t_{2\nu-1} + i t_{2\nu}$, so ist $\mathfrak{w}(\mathfrak{z}) = \alpha^{-1}\sigma\beta$ auf $\beta^{-1}(U_\beta \cap \sigma^{-1}(U_\alpha))$ komplexanalytisch. Die Abbildung habe den Rang r, falls dies von jeder Funktionalmatrix $\left(\frac{\partial \alpha^{-1}\sigma\beta(\mathfrak{x})}{\partial \mathfrak{x}}\right)$ in jedem Punkt gilt. Ist $q = m$, so habe die Abbildung $\sigma(Q)$ eine positive Funktionaldeterminante, wenn $\frac{\partial \alpha^{-1}\sigma\beta(\mathfrak{x})}{\partial \mathfrak{x}} > 0$ ist.

d) Die Mannigfaltigkeit $\mathfrak{N}^q$ heisse eine l-mal stetigdifferenzierbare, bzw. reellanalytische, bzw. komplex(analytische), orientierte *Teilmannigfaltigkeit* von $\mathfrak{M}^m$, wenn $\mathfrak{N}^q \subseteq \mathfrak{M}^m$ ist, wenn $\mathfrak{N}^q$ und die identische Abbildung $\sigma_i(P) = P$ von $\mathfrak{N}^q$ in $\mathfrak{M}^m$ die genannte Differenzierbarkeitseigenschaft hat, und wenn $\sigma_i(P)$ den Rang q hat. In jedem Parameterraum U'_α von $\mathfrak{M}^m$ hat dann $\mathfrak{N}'^q_\alpha = \alpha^{-1}(U_\alpha \cap \mathfrak{N}^q)$ einen stetigen Tangentialraum. Ist $\mathfrak{t}_1 \in \alpha^{-1}(U_\alpha \cap \mathfrak{N}^q)$ und ist $q = m-1$, so hat $\mathfrak{N}'^q_\alpha$ in $\mathfrak{t}_1$ eine Normale $\mathfrak{n}(\mathfrak{t}_1)$, die so definiert werde: In § 1 a)—c) kann statt dem Körper der komplexen Zahlen auch der reelle Zahlkörper als Koordinatenkörper gewählt werden. Wird $\beta(\mathfrak{x}) \in \mathfrak{P}(\mathfrak{N}^q)$ mit $P_1 = \alpha(\mathfrak{t}_1) \in U_\beta$ gewählt, so ist $\mathfrak{t}(\mathfrak{x}) = \alpha^{-1}\beta(\mathfrak{x}) = \alpha^{-1}\sigma_i\beta(\mathfrak{x})$ in $\beta^{-1}(U_\alpha \cap U_\beta)$ stetigdifferenzierbar. Es sei $\mathfrak{x}_1 = \beta^{-1}(P_1)$. Dann ist in einem normalen Koordinatensystem

$$\mathfrak{n}(\mathfrak{t}_1) = \left.\frac{{}^*[\mathfrak{t}_{x_1}, \ldots, \mathfrak{t}_{x_{m-1}}]}{|[\mathfrak{t}_{x_1}, \ldots, \mathfrak{t}_{x_{m-1}}]|}\right|_{\mathfrak{x}=\mathfrak{x}_1} \tag{2.1}$$

ein Einheitsvektor senkrecht zur Tangentialebene in $\mathfrak{x}_1$. Er ist unabhängig von β und bildet mit $\mathfrak{n}, \mathfrak{t}_{x_1}, \ldots, \mathfrak{t}_{x_{m-1}}$ ein Rechtssystem. Es gibt eine Zahl $\tau_0 > 0$, sodass $I_+ = \{\mathfrak{t} \mid \mathfrak{t} = \mathfrak{t}_1 + \tau\mathfrak{n}(\mathfrak{t}_1),\ 0 < \tau < \tau_0\}$ und $I_- = \{\mathfrak{t} \mid \mathfrak{t} = \mathfrak{t}_1 + \tau\mathfrak{n}(\mathfrak{t}_1),\ -\tau_0 < \tau < 0\}$ die Mannigfaltigkeit $\mathfrak{N}'^{m-1}_\alpha$ nicht treffen. Liegt nun $\mathfrak{N}^{m-1}$ im Rand Γ der offenen Menge G, so kann man $\mathfrak{N}^{m-1}$ so umorientiern, dass es zu jedem $\alpha \in \mathfrak{P}$ und $P_1 \in U_\alpha$ ein $\tau_0 > 0$ gibt, für das $I_+ \cap \alpha^{-1}(U_\alpha \cap G) = \emptyset$ und $I_- \subset \alpha^{-1}(U_\alpha \cap G)$ ist. Dann sei $\mathfrak{N}^{m-1}$ bzgl. G nach *aussen orientiert*, bzw. habe $\mathfrak{N}^{m-1}$ *bezüglich* G *eine äussere Normale.*

e) Die kompakte Menge $K \subseteq \mathfrak{M}^m$ sei durch endlich viele offene Mengen $V_1, \ldots, V_r$ überdeckt. Dann gibt es zu jedem Index ν eine auf $\mathfrak{M}^m$ stetige Funktion $\lambda_\nu(P)$ mit

$0 \leq \lambda_\nu(P) \leq 1$ für $P \in \mathfrak{M}^m$ und $\lambda_\nu(P) = 0$ für $P \notin V_\nu$, sodass $\sum_{\nu=1}^{r} \lambda_\nu(P) = 1$ für $P \in K$ gilt. Ist $\mathfrak{M}^m$ l-mal stetigdifferenzierbar, so kann man diese „DIEUDONNÉ-*Zerlegung*" (*Zerlegung der Eins*) $\lambda_\nu(P)$ auch l-mal stetigdifferenzierbar wählen.

(3). Dichte.

Es sei M eine Teilmenge der Mannigfaltigkeit $\mathfrak{M}^m$ und p eine natürliche Zahl. Jeder Abbildung $\alpha \in \mathfrak{P}$ und jedem p-tupel ganzer Zahlen $1 \leq \mu_1 < \cdots < \mu_p \leq m$ sei eine komplexwertige Funktion $a_{\mu_1 \ldots \mu_p}(P, \alpha)$ auf $M \cap U_\alpha$ zugeordnet, sodass für jede andere Abbildung $\beta(\mathfrak{x}) \in \mathfrak{P}$ mit $M \cap U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$ und $\mathfrak{x}(\mathfrak{t}) = \beta^{-1}\alpha(\mathfrak{t})$ auf $M \cap U_\alpha \cap U_\beta$ gilt:

$$a_{\mu_1 \ldots \mu_p}(P, \alpha) = \sum_{\nu \mid p}^{m}{}' a_{\nu_1 \ldots \nu_p} \frac{\partial(x_{\nu_1}, \ldots, x_{\nu_p})}{\partial(t_{\mu_1}, \ldots, t_{\mu_p})}\bigg|_{\mathfrak{t}=\alpha^{-1}(P)}. \tag{2.2}$$

Als Funktion von $\mu_1, \ldots, \mu_p$, $\alpha \in \mathfrak{P}$, $P \in U_\alpha$ heisse $a_{\mu_1 \ldots \mu_p}(P, \alpha)$ *eine Dichte der Stufe p auf M*. Ihre Eigenschaften sind nach (2) b) erklärt. *Eine Dichte m-ter Stufe heisse kurz Dichte*; für solche Dichten sind auch Ungleichungen sinnvoll; denn aus $a(P, \alpha) < b(P, \alpha)$ folgt $a(P, \beta) < b(P, \beta)$ wegen $\dfrac{\partial \beta^{-1}\alpha}{\partial \mathfrak{t}} > 0$. Mit $a(P, \alpha)$ ist auch $|a(P, \alpha)|$ eine Dichte.

(4). Alternierende Differentiale.

Zu jedem der in § 1 definierten Räume R_p^{2k} wird ein neues Exemplar $\tilde{R}_p^{2k}$ fest gewählt, und in ihm neue Bezeichnungen eingeführt. Ein Element von $\tilde{R}_p^{2m}$ werde für $p \geq 1$ mit ∂A_p bezeichnet. Das äussere Produkt werde mit $\partial A_p \partial B_q$, die Multiplikation mit einer komplexen Zahl a durch $a \partial A_p$ bezeichnet. Es sei $\tilde{R}_0^{2m}$ der komplexe Zahlkörper. Für $p \geq 1$ wird in den Räumen $\tilde{R}_p^{2m}$ das Konjugiert-Komplexe gemäss § 1 e) eingeführt. Ein inneres Produkt, ein skalares Produkt und ein dualer Raum werden für $\tilde{R}_p^{2m}$ nicht gebildet.

Jeder Abbildung $\alpha = \alpha(\mathfrak{x})$ der Struktur $\mathfrak{P}$ der Mannigfaltigkeit $\mathfrak{M}^m$ wird ein reelles Koordinatensystem der Räume $\tilde{R}_p^{2m}$ zugeordnet, das mit $\partial x_1, \ldots, \partial x_m$ bezeichnet werde. Diese Zuordnung wird irgendwie getroffen und festgehalten. Einer Dichte $a_{\mu_1 \ldots \mu_p}$ der Stufe p auf $M \subseteq \mathfrak{M}^m$ ist eineindeutig eine Abbildung[11, 12]

---

[11] Hier wird von der üblichen Schreibweise abgewichen. Die Bezeichnungsweise ∂A_p statt A_p, ∂x_μ statt dx_μ, $\partial x_\mu \partial x_\nu$ statt $dx_\mu dx_\nu$ zeigt eindeutig und unmissverständlich an, dass es sich um ein Differential, und zwar um ein alternierendes Differential handelt. Es wird dadurch eindeutig

$$\partial A_p = \partial A_p(P, \alpha) = \sum_{\mu | p}^{m}{}' a_{\mu_1 \ldots \mu_p}(P, \alpha)\, \partial x_{\mu_1} \ldots \partial x_{\mu_p} \tag{2.3}$$

zugeordnet, die jeder Abbildung $\alpha = \alpha(\mathfrak{x}) \in \mathfrak{P}$ mit $U_\alpha \cap M \neq \emptyset$ und jedem Punkt $P \in M \cap U_\alpha$ ein Element $\partial A_p(P, \alpha)$ aus $\tilde{R}_p^{2m}$ zuweist, und die ein *alternierendes Differential der Stufe p auf M* heisse.[12] Es habe dieselbe Eigenschaften wie seine Dichte $a_{\mu_1 \ldots \mu_p}$. Man beachte, dass $\partial x_{\mu_1} \ldots \partial x_{\mu_p}$ äussere Produkte sind.[12] Die Rechenregeln folgen aus § 1. Sind die Funktionen f_μ, f auf M differenzierbar und ist $\mathfrak{M}^m$ zweimal stetigdifferenzierbar, so bilden

$$\delta f = \sum_{\nu=1}^{m} f_{x_\nu} \partial x_\nu, \quad \delta f_1 \ldots \delta f_p = \sum_{\nu | p}^{m}{}' \frac{\partial(f_1, \ldots, f_p)}{\partial(x_{\nu_1}, \ldots, x_{\nu_p})} \partial x_{\nu_1} \ldots \partial x_{\nu_p}. \tag{2.4}$$

Beispiele alternierender Differentiale. Der Raum der Vektoren $\mathfrak{x}$ ist auch eine Mannigfaltigkeit. Dort ist $f_\nu(\mathfrak{x}) \equiv x_\nu$ eine Funktion. Wegen $\delta x_{\nu_1} \ldots \delta x_{\nu_p} = \partial x_{\nu_1} \ldots \partial x_{\nu_p}$ kann man $\delta = \partial$ schreiben. Ist $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$ und $\mathfrak{x}(\mathfrak{t}) = \beta^{-1}\alpha(\mathfrak{t})$, so ist dort

$$\partial A_p(P, \alpha) = \sum_{\mu | p}^{m}{}' a_{\mu_1 \ldots \mu_p}(P, \beta)\, \partial x_{\mu_1}(\mathfrak{t}) \ldots \partial x_{\mu_p}(\mathfrak{t}). \tag{2.5}$$

Die *Ableitung* eines stetigdifferenzierbaren, alternierenden Differentiales ∂A_p sei

$$\partial\partial A_p = \partial(\partial A_p) = \sum_{\mu | p}^{m}{}' \partial a_{\mu_1 \ldots \mu_p}(P, \alpha)\, \partial x_{\mu_1} \ldots \partial x_{\mu_p}. \tag{2.6}$$

Sie ist ein alternierendes Differential der Stufe $p+1$, falls $\mathfrak{M}^m$ zweimal stetigdifferenzierbar ist. Es gilt

$$\begin{cases} \partial(\partial A_p \partial B_q) = \partial\partial A_p \partial B_q + (-1)^p \partial A_p \partial\partial B_q, \\ \partial(\partial A_p + \partial B_p) = \partial\partial A_p + \partial\partial B_p, \\ \qquad \partial\partial\partial A_p = 0, \end{cases} \tag{2.7}$$

letzteres, falls ∂A_p zweimal stetigdifferenzierbar ist.

---

klargestellt, wann ein alternierendes oder ein kommutatives Produkt vorliegt. In der sonst üblichen Bezeichnungsweise, muss man beispielsweise erst dem Zusammenhang entnehmen, ob mit $\sum g_{\mu\nu}\, dz_\mu\, d\bar{z}_\nu$ die erste Fundamentalform $\sum g_{\mu\nu}\, dz_\mu\, d\bar{z}_\nu$ oder die ihr zugeordnete alternierende Differentialform $\sum g_{\mu\nu}\, \partial z_\mu\, \partial \bar{z}_\nu$ gemeint ist. Auch scheint es zweckmässig zu sein, ∂A_p statt A_p zu schreiben. Man weiss dann sofort, was ein alternierendes Differential ist und was nicht. Beispielsweise wird statt $\int_{\mathfrak{N}} v_p\, \chi_{2n-2}$ hier deutlicher $\int_{\mathfrak{N}} v_p\, \partial \chi_{2n-2}$ geschrieben werden. Dass dann $\partial\partial A_p$ statt ∂A_p und $\partial\partial\partial A_p = 0$ statt $\partial\partial A_p = 0$ geschrieben wird, ist kein ins Gewicht fallender Nachteil.

[12] Während also eine Dichte $a_{\mu_1 \ldots \mu_p}$ nur Koeffizienten mit $1 \leq \mu_1 < \cdots < \mu_p \leq m$ hat, sind gemäss (2.3), (1.11) und (1.7) die Koeffizienten eines alternierenden Differentials durch

$$a_{\mu_1 \ldots \mu_p} = \delta_{\nu_1 \ldots \nu_p}^{\mu_1 \ldots \mu_p} a_{\nu_1 \ldots \nu_p}$$

für alle Indizes $1 \leq \mu_1 \leq m, \ldots, 1 \leq \mu_p \leq m$ erklärt.

Wird die Mannigfaltigkeit $\mathfrak{N}^q$ durch $\sigma(Q)$ stetigdifferenzierbar in die Mannigfaltigkeit $\mathfrak{M}^m$ abgebildet, ist $M \subseteq \mathfrak{N}^q$, ist auf $\sigma(M)$ ein alternierendes Differential $\partial A_p(P, \alpha)$ gegeben, sind $\alpha(\mathfrak{t}) \in \mathfrak{P}(\mathfrak{M}^m)$ und $\beta(\mathfrak{x}) \in \mathfrak{P}(\mathfrak{N}^q)$ mit $\sigma(U_\beta \cap M) \cap U_\alpha \neq \emptyset$ beliebig gewählt und ist $\mathfrak{t}(\mathfrak{x}) = \alpha^{-1} \sigma \beta(\mathfrak{x})$, so wird durch

$$\sigma \partial A_p = \partial A_p(\sigma(Q)) = \sum_{\mu | p}^{m}{}' a_{\mu_1 \ldots \mu_p}(\sigma(Q), \alpha)\, \partial t_{\mu_1}(\mathfrak{x}) \ldots \partial t_{\mu_p}(\mathfrak{x}) \tag{2.8}$$

auf $M \subseteq \mathfrak{N}^q$ ein alternierendes Differential unabhängig von α gegeben. Sind $\mathfrak{N}^q$ und $\mathfrak{M}^m$ zweimal stetigdifferenzierbar, so ist

$$\sigma \partial \partial A_p = \partial \sigma \partial A_p. \tag{2.9}$$

(5). Integrale auf Mannigfaltigkeiten.

Auf einer orientierten, stetigdifferenzierbaren Mannigfaltigkeit $\mathfrak{M}^m$ ist das *Integral* $\int\limits_M \psi$ als Funktion der (im Lebesgueschen Sinne) messbaren, beschränkten Menge M und der örtlich über M integrierbaren Dichte ψ der Stufe m eindeutig durch folgende Forderungen erklärt:

a) Sind a und b auf M konstant, und sind die Dichten ψ, χ über M örtlich integrierbar, so gilt

$$\int\limits_M (a\psi + b\chi) = a \int\limits_M \psi + b \int\limits_M \chi. \tag{2.10}$$

b) Ist $\alpha \in \mathfrak{P}$ beliebig gewählt, ψ über M örtlich integrierbar und ausserhalb $M - U_\alpha$ Null, so gilt mit $M' = \alpha^{-1}(U_\alpha \cap M)$ die Gleichung

$$\int\limits_M \psi = \int\limits_{M'} \psi(\alpha(\mathfrak{t}), \alpha)\, dt_1 \ldots dt_m. \tag{2.11}$$

Ist die messbare Menge M kompakt überdeckbar, das heisst, ist $M \subseteq \bigcup\limits_{\nu=0}^{\infty} K_\nu$ mit $K_0 = \emptyset$ und mit kompaktem $K_\nu \subseteq K_{\nu+1}$, ist ψ über jeden Durschnitt $M \cap K_\nu$ örtlich integrierbar und existiert der Grenzwert

$$\int\limits_M \psi = \lim_{\nu \to \infty} \int\limits_{M \cap K_\nu} \psi, \tag{2.12}$$

so heisse er das *uneigentliche Integral* von ψ über M bezüglich der Folge $\{K_\nu\}$. Ist $|\psi|$ auch uneigentlich über M integrierbar, so ist $\int\limits_M \psi$ unabhängig von der Wahl der

Folge $\{K_\nu\}$ und heisst das *(eigentliche) Integral* von ψ über M. Die Dichte ψ heisst dann über M *integrierbar*. Die normalen Rechenregeln gelten:

1°. $\int_M \psi = 0$ falls entweder M messbar und $\psi = 0$, oder ψ messbar und M eine Nullmenge ist.

2°. Sind a und b auf M konstant, ψ und χ über M integrierbar, so ist es auch $a\psi + b\chi$. Es gilt

$$\int_M (a\psi + b\chi) = a\int_M \psi + b\int_M \chi. \tag{2.13}$$

3°. Ist $|\psi|$ über M integrierbar, so ist die messbare Dichte ψ über jede messbare Teilmenge N von M integrierbar. Es gilt

$$\left|\int_N \psi\right| \leq \int_M |\psi|. \tag{2.14}$$

4°. Ist ψ über M_1 und M_2 integrierbar, so auch über $M_1 \cup M_2 = M$. Es gilt

$$\int_M \psi = \int_{M_1} \psi + \int_{M_2} \psi - \int_{M_1 \cap M_2} \psi. \tag{2.15}$$

5°. Sind ψ und χ über M integrierbar, ist $\psi \leq \chi$, so gilt $\int_M \psi \leq \int_M \chi$.

6°. Mit χ ist auch jede messbare Dichte ψ mit $|\psi| \leq \chi$ über M integrierbar.

7°. Ist ψ über die Vereinigung $M = \bigcup_{\nu=1}^{\infty} M_\nu$ der messbaren, paarweise punktfremden Mengen M_ν integrierbar, so gilt

$$\int_M \psi = \sum_{\nu=1}^{\infty} \int_{M_\nu} \psi. \tag{2.16}$$

8°. Streben auf M die messbaren Dichten $\psi_\nu \to \psi$ für $\nu \to \infty$, ist $|\psi_\nu| \leq \chi$ und ist χ über M integrierbar, so sind ψ_ν, ψ über M integrierbar. Es ist

$$\int_M \psi = \lim_{\nu\to\infty} \int_M \psi_\nu. \tag{2.17}$$

9°. Sind ψ_ν mit χ über M integrierbar, ist $\psi = \lim_{\nu\to\infty} \psi_\nu \leq \infty$, ist $\psi_\nu \geq \chi$ und ist $\underline{\lim}_{\nu\to\infty} \int_M \psi_\nu < \infty$, so konvergieren die Dichten ψ_ν fast überall auf M gegen ψ, das über M integrierbar ist:

(2.18) $$\int\limits_M \psi \leq \varliminf_{\nu\to\infty} \int\limits_M \psi_\nu.$$

10°. Streben die über M integrierbaren Dichten ψ_ν monoton gegen ψ, $\psi_\nu \to \psi$ für $\nu \to \infty$ und existiert $\lim\limits_{\nu\to\infty} \int\limits_M \psi_\nu < \infty$, so ist

(2.19) $$\int\limits_M \psi = \lim_{\nu\to\infty} \int\limits_M \psi_\nu.$$

11°. Ist ψ über $M \subseteq \mathfrak{M}^m$ integrierbar, und geht bei der Umorientierung von $\mathfrak{M}^m = \mathfrak{M}_+^m$ in $\mathfrak{M}_-^m$ (siehe (1)) die Menge $M = M_+$ in M_-, die Dichte $\psi(P, \alpha)$ in $\psi^*(P, \beta) = \psi(P, \alpha) \dfrac{\partial \alpha^{-1} \beta}{\partial \mathfrak{x}}$ mit $\alpha \in \mathfrak{P}_P^+$ und $\beta \in \mathfrak{P}_P^-$ über, so ist $\int\limits_{M_+} \psi = -\int\limits_{M_-} \psi^*$.

12°. $\mathfrak{N}^p$ sei eine Teilmannigfaltigkeit von $\mathfrak{M}^m$ mit $p \leq m$ und $\sigma_i(P) = P$ die identische Abbildung von $\mathfrak{N}^p$ in $\mathfrak{M}^m$. Sie ordnet dem Differential ∂A_p auf $N \subseteq \mathfrak{M}^m$ das Differential $\sigma_i \partial A_p$ auf $\mathfrak{N}^p \cap N$ zu, dessen Dichte ψ sei. Es heisse ψ die Dichte von ∂A_p *längs* $\mathfrak{N}^p$. Ist ψ über M integrierbar, so heisse auch ∂A_p über M integrierbar. Es sei dann

(2.20) $$\int\limits_M \partial A_p = \int\limits_M \psi.$$

13°. Die Mannigfaltigkeit $\mathfrak{N}^m$ werde durch $\sigma(Q)$ stetigdifferenzierbar und mit positiver Funktionaldeterminante in die Mannigfaltigkeit $\mathfrak{M}^m$ abgebildet. Jeder Punkt $R \in \mathfrak{N}^m$ liegt in einer offenen Umgebung $V(R)$, die durch $\sigma(Q)$ topologisch auf eine Umgebung von $V^*(S)$ des Bildpunktes $S = \sigma(R)$ abgebildet wird. Die Umkehrung von $\sigma(Q)$ auf $V(R)$ sei mit $\sigma_R^{-1}(P)$ bezeichnet. Auf der messbaren Menge $N \subseteq \mathfrak{N}^m$ sei das Differential ∂A_m gegeben. Ist $\sigma(R) = \sigma(T)$, so werde

(2.21) $$\sigma_R^{-1} \partial A_m = \sigma_T^{-1} \partial A_m \quad \text{auf} \quad \sigma(V(R) \cap N) \cap \sigma(V(T) \cap N)$$

vorausgesetzt. Dann wird durch $\partial B_m = \sigma_R^{-1} \partial A_m$ ein alternierendes Differential auf $M = \sigma(N)$ erklärt. Weiter sei die Funktion $\varphi(Q)$ auf N erklärt und $\varphi \partial A_m$ auf N messbar. Setzt man

(2.22) $$\nu(P, Q) = \begin{cases} 0 & \text{für } \sigma(Q) \neq P, \\ 1 & \text{für } \sigma(Q) = P, \end{cases}$$

so gilt

(2.23) $$\int_M \{\sum_{N \in Q} \nu(P, Q)\varphi(Q)\} \partial B_m(P) = \int_N \varphi(Q)\partial A_m(Q),$$

falls wenigstens eines der Integrale für $|\varphi|$ statt φ existiert.

14°. *Integralsatz von* STOKES.[13] Die orientierte, zweimal stetigdifferenzierbare Mannigfaltigkeit $\mathfrak{M}^m$ enthalte die offene, beschränkte Menge G. Der Rand F von G enthalte die orientierte Teilmannigfaltigkeit $\mathfrak{N}^{m-1}$ von $\mathfrak{M}^m$, die bezüglich G eine äussere Normale habe. Es sei $F_1 = F - \mathfrak{N}^{m-1}$ eine Nullmenge des $m-1$ dimensionalen CARATHÉODORY-Masses (μ-Masses). Der Rand F habe ein endliches μ-Mass. Das auf $\bar{G}$ stetige Differential $\partial A_{m-1} = \sum_{\nu=1}^{m} a_\nu(P, \alpha)\partial x_1 \ldots \partial x_{\nu-1}\partial x_{\nu+1} \ldots \partial x_m$ erfülle in G eine LIPSCHITZ-Bedingung, das heisst, zu jeder Abbildung $\alpha(\mathfrak{x}) \in \mathfrak{P}_{P_0}$ gibt es ein $U(P_0|\alpha) \subseteq G$, sodass

(2.24) $$|a_\nu(\alpha(\mathfrak{x}), \alpha) - a(\alpha(\mathfrak{x}'), \alpha)| \leq L|\mathfrak{x} - \mathfrak{x}'|$$

für alle Vektoren $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{x}'$ aus $\alpha^{-1}(U(P_0|\alpha))$ gilt. Die Konstante L darf von P_0 und α abhängen. Die dann fast überall auf G existierende Ableitung $\partial\partial A_{m-1}$ sei über G integrierbar. Dann gilt

(2.25) $$\int_{\mathfrak{N}^{m-1}} \partial A_{m-1} = \int_G \partial\partial A_{m-1}.$$

15°. *Satz von* FUBINI.

a) Die Mannigfaltigkeiten $\mathfrak{M}^m$ und $\mathfrak{N}^l$ seien orientiert, stetigdifferenzierbar und kompakt überdeckbar. Durch $\sigma(P)$ werde $\mathfrak{M}^m$ stetigdifferenzierbar und vom Range l in $\mathfrak{N}^l$ abgebildet. Es sei $s = m - l > 0$. Dann ist das Urbild $\mathfrak{M}_Q = \sigma^{-1}(Q)$ des Punktes $Q \in \mathfrak{N}^l$ entweder leer oder eine s dimensionale, stetigdifferenzierbare Teilmannigfaltigkeit von $\mathfrak{M}^m$. Es seien die Abbildungen $\alpha \in \mathfrak{P}(\mathfrak{N}^l)$, $\gamma \in \mathfrak{P}(\mathfrak{M}^m)$ und $\beta \in \mathfrak{P}(\mathfrak{M}_Q)$ beliebig gewählt, aber so, dass $Q \in U_\alpha$ und $U_\beta \cap U_\gamma \neq \emptyset$ sind. Wird nun $\mathfrak{t}(\mathfrak{w}) = (t_1(\mathfrak{w}), \ldots, t_l(\mathfrak{w})) = \alpha^{-1}\sigma\gamma(\mathfrak{w})$ und $\mathfrak{w}(\mathfrak{x}) = \gamma^{-1}\beta(\mathfrak{x})$ gesetzt, so kann die „Schicht" $\mathfrak{M}_Q$ so orientiert werden, dass

(2.26) $$\det(\operatorname{grad}_{\mathfrak{w}} t_1(\mathfrak{w}), \ldots, \operatorname{grad}_{\mathfrak{w}} t_l(\mathfrak{w}), \mathfrak{w}_{x_1}, \ldots, \mathfrak{w}_{x_s}) > 0$$

auf $\beta^{-1}(U_\beta \cap U_\gamma)$ ist. Die Gradienten sind bei $\mathfrak{w} = \mathfrak{w}(\mathfrak{x})$ zu bilden.

b) Ist M messbar auf $\mathfrak{M}^m$, so folgt, dass für fast alle $Q \in \mathfrak{N}^l$ der Durchschnitt $M_Q = \mathfrak{M}_Q \cap M$ auf $\mathfrak{M}_Q$ messbar ist.

[13] Unglücklicherweise ist hier in [I] ein Vorzeichenfehler unterlaufen; es muss in (2.38) Seite 135 der Faktor $(-1)^{k-1}$ gestrichen werden.

c) Das Differential ∂A_s sei auf $M \subseteq \mathfrak{M}^m$ und das Differential ∂B_l auf $\mathfrak{N}^l$ erklärt. Ihre Produkt $\partial A_s \sigma \partial B_l$ sei über M integrierbar. Es sei N_1 eine geeignete Nullmenge. Es werde $N_2 = \{Q \mid \partial B_l(Q) = 0\}$ und $N = N_1 \cup N_2$ gesetzt. Dann ist

$$\int_M \partial A_s \sigma \partial B_l = (-1)^{sl} \int_{Q \in \mathfrak{N}^l - N} \left\{ \int_{P \in M_Q} \partial A_s(P) \right\} \partial B_l(Q), \tag{2.27}$$

wobei das innere Integral sicher für alle $Q \in \mathfrak{N}^l - N$ existiert. Es werde $\int\limits_{\mathfrak{N}^l - N}$ auch mit $\int\limits_{\mathfrak{N}^l}$ abgekürzt.

d) Hat ∂B_l die Dichte ξ auf $\mathfrak{N}^l$ und ∂A_s die Dichte φ_Q längs M_Q, ist $\partial A_s \sigma \partial B_l$ messbar auf M und existiert das Integral $\int\limits_{Q \in \mathfrak{N}^l - N} \left\{ \int\limits_{P \in M_Q} |\varphi_Q| \right\} \xi$, so ist $\partial A_s \sigma \partial B_l$ über M integrierbar.

(6). Komplexe Mannigfaltigkeiten.

Eine Teilmenge $\mathfrak{N}$ der komplexen Mannigfaltigkeit $\mathfrak{M}^{2n}$ heisse eine *Nullstellenfläche*, wenn es zu jedem Punkt $P_0 \in \mathfrak{N}$ eine Gebietsumgebung $U(P_0)$ und eine in $U(P_0)$ analytische Funktion $g_{P_0}(P) \not\equiv 0$ gibt, sodass $\mathfrak{N} \cap U(P_0) = \{P \mid g_{P_0}(P) = 0\} \cap U(P_0)$ ist. O. B. d. A. zerfalle g_{P_0} in jedem Punkt von $U(P_0) \cap \mathfrak{N}$ nur in einfache Primfaktoren. Der Punkt $P_0 \in \mathfrak{N}$ heisse *gewöhnlich*, wenn $\partial g_{P_0} \neq 0$ in P_0 ist. Diese Definition ist unabhängig von der Wahl von g_{P_0} und $U(P_0)$. Die gewöhnlichen Punkte von $\mathfrak{N}$ bilden eine $2n-2$ dimensionale, komplexe Teilmannigfaltigkeit $\hat{\mathfrak{N}}$ von $\mathfrak{M}^{2n}$. Ist die analytische Funktion $g_0(P)$ im Punkt P_0 ein Primfaktor, so sei $(P_0; g_0)$ ein Flächenelement. Es gehöre dann und nur dann zur Nullstellenfläche $\mathfrak{N}$, wenn $P_0 \in \mathfrak{N}$ und g_{P_0} in P_0 durch g_0 geteilt wird. Sind $\mathfrak{N}$, $\mathfrak{N}_1 \neq \emptyset$, $\mathfrak{N}_2 \neq \emptyset$ Nullstellenflächen, enthält $\mathfrak{N}_1 \cap \mathfrak{N}_2$ kein Flächenelement und ist $\mathfrak{N} = \mathfrak{N}_1 \cup \mathfrak{N}_2$, so ist $\mathfrak{N}$ reduzibel. Die Nullstellenfläche $\mathfrak{N}$ lässt sich in grösste irreduzible Teile $\mathfrak{N}_\nu$ bis auf die Reihenfolge eindeutig zerlegen: $\mathfrak{N} = \bigcup\limits_{\nu \in N} \mathfrak{N}_\nu$. Die Nullstellenflächen $\mathfrak{N}_\nu$ haben paarweise kein Flächenelement gemeinsam. Hat $\mathfrak{M}^{2n}$ eine abzählbare Basis der offenen Mengen, so ist die Indexmenge N höchstens abzählbar.

Es sei $\mathfrak{O}$ die Menge der offenen Menge von $\mathfrak{M}^{2n}$ und $\mathfrak{F}$ die Menge der auf einer offenen Menge O_f analytischen Funktionen f. Eine Teilmenge $F \subset \mathfrak{F} \times \mathfrak{O}$ heisse eine Cousin*sche Verteilung* (II. Art). wenn gilt:

1. Ist $(f, O) \in F$, so ist f auf O analytisch.
2. Zu jedem Punkt P gibt es ein $(f, O) \in F$ mit $P \in O$.
3. Gehören (f_1, O_1) und (f_2, O_2) zu F, so ist $f_1 f_2^{-1} \neq 0$ und regulär in $O_1 \cap O_2$.

Ist $(f, O) \in F$ und $P_0 \in U_\alpha \cap O$, so sei $f = \sum_{\mu=\nu}^{\infty} f_\mu$ die Entwicklung nach homogenen Polynomen f_μ vom Grade μ um $\mathfrak{z}_0 = \alpha^{-1}(P_0)$. Es sei $f_\nu \not\equiv 0$. Dann ist die Zahl $\nu = \nu(P_0)$ unabhängig von der Wahl von $(f, O) \in F$ und der Abbildung $\alpha \in \mathfrak{P}$. Sie heisse die *Vielfachheit der „Nullstelle"* P_0 von F. Die Menge $\{P \mid \nu(P) > 0\}$ ist eine abgeschlossene Nullstellenfläche.

Ist die Funktion $f \not\equiv 0$ analytisch in jedem Gebiet aus $\mathfrak{M}^{2n}$, so ist $(f, \mathfrak{M}^{2n})$ eine Cousinsche Verteilung, also die *Vielfachheit der Nullstelle von* f erklärt. Ist die Funktion $f \not\equiv 0$ und meromorph in jedem Teilgebiet aus $\mathfrak{M}^{2n}$, so gibt es zu jedem Punkt P_0 eine offene Umgebung O_{P_0} und in jedem Punkt von O_{P_0} analytische und teilerfremde Funktionen $w^1_{P_0}$, $w^2_{P_0}$, sodass $f = \dfrac{w^1_{P_0}}{w^2_{P_0}}$ in O_{P_0} ist. Es bildet $F_Z(f) = \{(w^1_{P_0}, O_{P_0})\}$ die Cousinsche Verteilung der Zähler, $F_N(f) = \{(w^2_{P_0}, O_{P_0})\}$ die der Nenner von f. Dadurch ist die *Vielfachheit der Nullstelle* bzw. die der *Polstelle* von f erklärt. Die *Vielfachheit der a-Stelle* von f ist die der Nullstelle von $f - a$ für $a \neq \infty$.

Ist $\alpha(\mathfrak{t}) \in \mathfrak{P}$, so erhält man die komplexen Koordinaten durch

(2.28) $$z_\mu = t_{2\mu-1} + i\,t_{2\mu} = x_\mu + i\,y_\mu, \quad \bar z_\mu = t_{2\mu-1} - i\,t_{2\mu} = x_\mu - i\,y_\mu.$$

Für eine differenzierbare Funktion ψ werde

(2.29) $$\psi_{z_\mu} = \tfrac{1}{2}(\psi_{x_\mu} - i\,\psi_{y_\mu}), \quad \psi_{\bar z_\mu} = \tfrac{1}{2}(\psi_{x_\mu} + i\,\psi_{y_\mu})$$

gesetzt. Ist ψ zweimal stetigdifferenzierbar, so gilt

(2.30) $$\psi_{z_\mu z_\nu} = \frac{1}{4}(\psi_{x_\mu x_\nu} - \psi_{y_\mu y_\nu}) - \frac{i}{4}(\psi_{x_\mu y_\nu} + \psi_{y_\mu x_\nu}) = \psi_{z_\nu z_\mu},$$

(2.31) $$\psi_{z_\mu \bar z_\nu} = \frac{1}{4}(\psi_{x_\mu x_\nu} + \psi_{y_\mu y_\nu}) + \frac{i}{4}(\psi_{x_\mu y_\nu} - \psi_{y_\mu x_\nu}) = \psi_{\bar z_\nu z_\mu},$$

(2.32) $$\psi_{\bar z_\mu \bar z_\nu} = \frac{1}{4}(\psi_{x_\mu x_\nu} - \psi_{y_\mu y_\nu}) + \frac{i}{4}(\psi_{x_\mu y_\nu} + \psi_{y_\mu x_\nu}) = \psi_{\bar z_\nu \bar z_\mu}.$$

Ist $\mathfrak{t}(\mathfrak{v})$ eine differenzierbare Substitution mit $w_\nu = v_{2\nu-1} + i\,v_{2\nu}$, so gilt

(2.33) $$\chi_{w_\nu} = \sum_{\mu=1}^{n} (\psi_{z_\mu} z_{\mu\, w_\nu} + \psi_{\bar z_\mu} \bar z_{\mu\, w_\nu}),$$

(2.34) $$\chi_{w_\nu} = \sum_{\mu=1}^{n} (\psi_{z_\mu} z_{\mu\, \bar w_\nu} + \psi_{\bar z_\mu} \bar z_{\mu\, \bar w_\nu}).$$

Ist also $\mathfrak{z}(\mathfrak{w})$ analytisch, so gilt

(2.35) $$\chi_{w_\nu} = \sum_{\mu=1}^{n} \psi_{z_\mu} z_{\mu\, w_\nu} \quad \text{und} \quad \chi_{\bar{w}_\nu} = \sum_{\mu=1}^{n} \psi_{\bar{z}_\mu} \overline{z_{\mu\, w_\nu}}.$$

Die Ableitungen von z_μ und $\bar{z}_\mu$ sind

(2.36) $$\partial z_\mu = \partial t_{2\mu-1} + i\,\partial t_{2\mu}, \quad \partial \bar{z}_\mu = \partial t_{2\mu-1} - i\,\partial t_{2\mu} = \overline{\partial z_\mu}.$$

Sie bilden ein (nichtreelles) Koordinatensystem von $\tilde{R}_p^{4n}$. Daher hat ein alternierendes Differential ∂A_p die Gestalt

(2.37) $$\partial A_p(P, \alpha) = \sum_{\varrho=0}^{r} \sum_{\mu \mid p-\varrho}^{n}{}' \sum_{\mu \mid \varrho}^{n}{}' a_{\mu_1 \ldots \mu_{p-\varrho} \nu_1 \ldots \nu_\varrho} \partial z_{\mu_1} \ldots \partial z_{\mu_{p-\varrho}} \partial \bar{z}_{\nu_1} \ldots \partial \bar{z}_{\nu_\varrho},$$

wobei die Koeffizienten $a_{\mu_1 \ldots \mu_{p-\varrho} \nu_1 \ldots \nu_\varrho}$ eindeutig bestimmt sind und

(2.38) $$\partial A_p^\varrho(P, \alpha) = \sum_{\mu \mid p-\varrho}^{n}{}' \sum_{\mu \mid \varrho}^{n}{}' a_{\mu_1 \ldots \mu_{p-\varrho} \nu_1 \ldots \nu_\varrho}(P, \alpha) \partial z_{\mu_1} \ldots \partial z_{\mu_{p-\varrho}} \partial \bar{z}_{\nu_1} \ldots \partial \bar{z}_{\nu_\varrho},$$

wieder alternierende Differentiale sind. Die Zahl ϱ heisst ihr *Typ*. Da die Ableitung einer Funktion ψ sich nach (2.29) und (2.36) zu

(2.39) $$\partial \psi = \sum_{\nu=1}^{n} (\psi_{z_\nu} \partial z_\nu + \psi_{\bar{z}_\nu} \partial \bar{z}_\nu)$$

berechnet, besteht nach (2.5) das Transformationsgesetz

(2.40) $$\begin{aligned} &\partial A_p(P, \alpha) = \\ &= \sum_{\varrho=0}^{p} \sum_{\mu \mid p-\varrho}^{n}{}' \sum_{\nu \mid \varrho}^{n}{}' a_{\mu_1 \ldots \mu_{p-\varrho} \nu_1 \ldots \nu_\varrho}(P, \beta) \partial z_{\mu_1}(\mathfrak{w}) \ldots \partial z_{\mu_{p-\varrho}}(\mathfrak{w}) \partial \bar{z}_{\nu_1}(\mathfrak{w}) \ldots \partial \bar{z}_{\nu_\varrho}(\mathfrak{w}). \end{aligned}$$

(2.41) $$\begin{aligned} &a_{\lambda_1 \ldots \lambda_{p-\varrho} \sigma_1 \ldots \sigma_\varrho}(P, \alpha) = \\ &\quad = \sum_{\mu \mid p-\varrho}^{n}{}' \sum_{\nu \mid \varrho}^{n}{}' a_{\mu_1 \ldots \mu_{p-\varrho} \nu_1 \ldots \nu_\varrho}(P, \beta) \frac{\partial(z_{\mu_1}, \ldots, z_{\mu_{p-\varrho}})}{\partial(w_{\lambda_1}, \ldots, w_{\lambda_{p-\varrho}})} \cdot \overline{\frac{\partial(z_{\nu_1}, \ldots, z_{\nu_\varrho})}{\partial(w_{\sigma_1}, \ldots, w_{\sigma_\varrho})}}. \end{aligned}$$

Wegen (2.35) sind auch

(2.42) $$\partial^\perp \psi = i \sum_{\nu=1}^{n} (\psi_{z_\nu} \partial z_\nu - \psi_{\bar{z}_\nu} \partial \bar{z}_\nu),$$

(2.42) $$\partial^\perp \partial A_p = \sum_{\varrho=0}^{n} \sum_{\mu \mid p-\varrho}^{n}{}' \sum_{\nu \mid \varrho}^{n}{}' \partial^\perp a_{\mu_1 \ldots \mu_{p-\varrho} \nu_1 \ldots \nu_\varrho} \partial z_{\mu_1} \ldots \partial z_{\mu_{p-\varrho}} \partial \bar{z}_{\nu_1} \ldots \partial \bar{z}_{\nu_\varrho}$$

alternierende Differentiale auf $\mathfrak{M}^{2n}$. Es ist

$$\partial^{\perp}\partial^{\perp}\partial A_p = 0, \quad \overline{\partial\partial A_p} = \partial\partial\overline{A_p}, \quad \overline{\partial^{\perp}\partial A_p} = \partial^{\perp}\partial\overline{A_p}, \tag{2.43}$$
$$\partial\partial^{\perp}\psi = -2i\sum_{\mu,\nu=1}^{n}\psi_{z_\mu\bar z_\nu}\partial z_\mu\partial\bar z_\nu.$$

Eine zweimal stetigdifferenzierbare, reelle Funktion ψ auf $\mathfrak{M}^{2n}$ ist dann und nur dann Realteil einer analytischen (vielleicht mehrdeutigen) Funktion, wenn $\partial\partial^{\perp}\psi\equiv 0$ ist.

Es seien $\mathfrak{N}_1$ und $\mathfrak{N}_2$ zwei Nullstellenflächen aus $\mathfrak{M}^{2n}$ und $\mathfrak{N}=\mathfrak{N}_1\cup\mathfrak{N}_2$ ihre Vereinigung. Sind $\hat{\mathfrak{N}}$, $\hat{\mathfrak{N}}_1$, $\hat{\mathfrak{N}}_2$ die zugehörigen Teilmannigfaltigkeiten der gewöhnlichen Punkte, so ist $\hat{\mathfrak{N}}_1\cup\hat{\mathfrak{N}}_2\supseteq\hat{\mathfrak{N}}$. Dabei ist $\hat{\mathfrak{N}}_\nu\cap\{\hat{\mathfrak{N}}_1\cup\hat{\mathfrak{N}}_2-\hat{\mathfrak{N}}\}$ eine Nullmenge auf $\hat{\mathfrak{N}}_\nu$. Also ist die *Integraldefinition*

$$\int_{\mathfrak{N}\cap M}\partial A_{2n-2} = \int_{\hat{\mathfrak{N}}\cap M}\partial A_{2n-2} \tag{2.44}$$

sinnvoll, falls das rechte Integral existiert. Da $\hat{\mathfrak{N}}$ eine komplexe Teilmannigfaltigkeit der Dimension $2n-2$ ist, ist jedes alternierende Differential $\partial A^{\varrho}_{2n-2}$ vom Typ $\varrho\neq n-1$ als Differential auf $\hat{\mathfrak{N}}$ betrachtet identisch Null. Für die Integration (2.44) reicht es also alternierende Differentiale der Gestalt[14]

$$\partial\chi_{2n-2} = \left(\frac{i}{2}\right)^{n-1}\frac{1}{4}\left\{\sum_{\substack{\mu,\nu=1\\ \mu\neq\nu}}^{n}a_{\mu\nu}\partial\bar z_\mu\partial z_\nu\partial z_1\partial\bar z_1\ldots\overset{\mu}{\|}\ldots\overset{\nu}{\|}\ldots\partial z_n\partial\bar z_n + \right. \tag{2.45}$$
$$\left. + \sum_{\mu=1}^{n}a_{\mu\mu}\partial z_1\partial\bar z_1\ldots\overset{\mu}{\|}\ldots\partial z_n\partial\bar z_n\right\}$$

zu betrachten. Die kompakte Menge $K\subseteq\mathfrak{N}$ enthalte die auf $\hat{\mathfrak{N}}$ messbare Menge $M\subseteq\hat{\mathfrak{N}}$. Das Differential $\partial\chi_{2n-2}$ sei auf M messbar. Zu jedem Punkt $P_0\in K$ und jeder Abbildung $\alpha\in\mathfrak{P}_{P_0}$ gebe es eine uniformisierbare Umgebung $U(P_0|\alpha)$ und eine Konstante L, sodass $|a_{\mu\nu}(P,\alpha)|\leq L$ auf $M\cap U(P_0|\alpha)$ gilt. Dann existiert nach [I] Satz 11 das Integral (2.44), also ist $\partial\chi_{2n-2}$, das heisst, $\sigma_i\partial\chi_{2n-2}$ über M integrierbar.

(7). Vektordifferentiale.

In § 1 wurde der Raum R_p^{2k} der Polyaden mit dem Körper der komplexen Zahlen als Koordinatenbereich eingeführt. Nun kann man aber auch als Koordinatenbereich die alternierenden Differentiale, die auf einer gemeinsamen Menge M der orientierten Mannigfaltigkeit $\mathfrak{M}^m$ definiert sind, verwenden. Ist $\mathfrak{e}_1,\ldots,\mathfrak{e}_k$ ein Koordinatensystem von R_p^{2k}, so sei

[14] Durch $\overset{\mu}{\|}$ werde das Fehlen des Faktors $\partial z_\mu\partial\bar z_\mu$ angezeigt.

$$\partial\mathfrak{A}^{p,s}=\sum_{\mu|p}^{k}{}'\,\partial A^{s}_{\mu_1\ldots\mu_p}\,\mathfrak{e}_{\mu_1}\ldots\mathfrak{e}_{\mu_p} \tag{2.46}$$

mit

$$\partial A^{s}_{\mu_1\ldots\mu_p}=\delta^{\mu_1\ldots\mu_p}_{\nu_1\ldots\nu_p}\,\partial A^{s}_{\nu_1\ldots\nu_p} \tag{2.47}$$

ein *Vektordifferential* aus $V^{2k}_{p,s}(M)$, falls die alternierenden Differentiale $\partial A^{s}_{\mu_1\ldots\mu_p}$ der Stufe s auf der Menge M definiert sind. Mit der *Summendefinition*

$$\partial\mathfrak{A}^{p,s}+\partial\mathfrak{B}^{p,s}=\sum_{\mu|p}^{k}{}'\,(\partial A^{s}_{\mu_1\ldots\mu_p}+\partial B^{s}_{\mu_1\ldots\mu_p})\,[\mathfrak{e}_{\mu_1},\ldots,\mathfrak{e}_{\mu_p}] \tag{2.48}$$

bildet $V^{2k}_{p,s}(M)$ einen Modul. Die *Produkte*

$$[\partial\mathfrak{A}^{p,s},\partial\mathfrak{B}^{q,t}]=\sum_{\mu|p}^{k}{}'\sum_{\nu|q}^{k}{}'\,\partial A^{s}_{\mu_1\ldots\mu_p}\,\partial B^{t}_{\nu_1\ldots\nu_q}\,[\mathfrak{e}_{\mu_1},\ldots,\mathfrak{e}_{\mu_p},\ \mathfrak{e}_{\nu_1},\ldots,\mathfrak{e}_{\nu_q}], \tag{2.49}$$

$$(\partial\mathfrak{A}^{p,s}\,|\,\partial\mathfrak{B}^{p,t})=\sum_{\mu|p}^{k}{}'\sum_{\nu|p}^{k}{}'\,\partial A^{s}_{\mu_1\ldots\mu_p}\,\overline{\partial B^{t}_{\nu_1\ldots\nu_p}}\,([\mathfrak{e}_{\mu_1},\ldots,\mathfrak{e}_{\mu_p}]\,|\,[\mathfrak{e}_{\nu_1},\ldots,\mathfrak{e}_{\nu_p}]) \tag{2.50}$$

sind im allgemeinen *nicht kommutativ* und *nicht alternierend*. Es gilt

$$[\partial\mathfrak{A}^{p,s},\ \partial\mathfrak{B}^{q,t}]=(-1)^{pq+st}\,[\partial\mathfrak{B}^{q,t},\ \partial\mathfrak{A}^{p,s}], \tag{2.51}$$

$$(\partial\mathfrak{A}^{p,s}\,|\,\partial\mathfrak{B}^{p,t})=(-1)^{st}\,\overline{(\partial\mathfrak{B}^{p,t}\,|\,\partial\mathfrak{A}^{p,s})}. \tag{2.52}$$

Ist $\partial\Gamma^{p,s}$ bezüglich des dualen Koordinatensystems in ${}^{*}V^{2k}_{p,s}(M)$ gebildet, so gilt entsprechend

$$(\partial\Gamma^{p,s},\ \partial\mathfrak{B}^{p,t})=\sum_{\mu|p}^{k}{}'\,\partial\Gamma^{s}_{\mu_1\ldots\mu_p}\,\partial B^{t}_{\mu_1\ldots\mu_p}=(-1)^{ts}\,(\partial\mathfrak{B}^{p,t},\ \partial\Gamma^{p,s}). \tag{2.53}$$

Die Ableitung wird für differenzierbare Vektordifferentiale durch

$$\partial\,\partial\mathfrak{A}^{p,s}=\sum_{\mu|p}^{k}{}'\,\partial\,\partial A^{s}_{\mu_1\ldots\mu_p}\,[\mathfrak{e}_{\mu_1},\ldots,\mathfrak{e}_{\mu_p}] \tag{2.54}$$

erklärt. Auf weitere Rechenregeln soll nicht eingegangen werden. Man kann alle folgenden Umrechnungen leicht an Hand dieser Definitionen nachrechnen. Wie in [I] § 3 a werde im $2k$ dimensionalen Raum der Vektoren $\mathfrak{w}\in R^{2k}_{1}$ die folgenden Bezeichnungen eingeführt:

$$\partial v_2(\mathfrak{w})=\frac{i}{2}(\partial\mathfrak{w}\,|\,\partial\mathfrak{w});\qquad \partial v_{2h}=\frac{1}{h!}(\partial v_2)^h, \tag{2.55}$$

$$\partial\omega_2(\mathfrak{w})=\frac{i}{2}\,|\mathfrak{w}|^{-4}\,|[\mathfrak{w},\partial\mathfrak{w}]|^2,\qquad \partial\omega_{2h}=\frac{1}{h!}(\partial\omega_2)^h. \tag{2.56}$$

Es ist

$$\partial \omega_2(\mathfrak{w}) = \frac{i}{2} |\mathfrak{w}|^{-4} \{(\mathfrak{w}|\mathfrak{w})(\partial\mathfrak{w}|\partial\mathfrak{w}) - (\partial\mathfrak{w}|\mathfrak{w})(\mathfrak{w}|\partial\mathfrak{w})\}. \tag{2.57}$$

Diese Formel möge als Beispiel bewiesen werden:

$$\begin{aligned} \partial \omega_2(\mathfrak{w}) &= \frac{i}{2} |\mathfrak{w}|^{-4} ([\mathfrak{w}, \partial\mathfrak{w}] | [\mathfrak{w}, \partial\mathfrak{w}]) = \\ &= \frac{i}{2} |\mathfrak{w}|^{-4} \sum_{\mu,\nu,\varrho,\sigma=1}^{k} w_\mu \partial w_\nu \bar{w}_\varrho \partial \bar{w}_\sigma ([\mathfrak{e}_\mu, \mathfrak{e}_\nu] | [\mathfrak{e}_\varrho, \mathfrak{e}_\sigma]). \end{aligned} \tag{2.58}$$

Wählt man nun ein normales Koordinatensystem, so folgt

$$\begin{aligned} \partial \omega_2(\mathfrak{w}) &= \frac{i}{2} |\mathfrak{w}|^{-4} \sum_{\mu,\nu=1}^{k} (w_\mu \partial w_\nu \bar{w}_\mu \partial \bar{w}_\nu - \bar{w}_\mu \partial w_\mu w_\nu \partial \bar{w}_\nu) = \\ &= \frac{i}{2} |\mathfrak{w}|^{-4} \{(\mathfrak{w}|\mathfrak{w})(\partial\mathfrak{w}|\partial\mathfrak{w}) - (\partial\mathfrak{w}|\mathfrak{w})(\mathfrak{w}|\partial\mathfrak{w})\}. \end{aligned} \tag{2.59}$$

Im übrigen sind (2.56) und (2.57) unabhängig von der Wahl des Koordinatensystems, womit der Beweis geführt ist. Es ist $\partial v_2(\mathfrak{w})$ das *euklidische Oberflächenelement* und $\partial \omega_2(\mathfrak{w})$ das *projektive*. Es gilt nämlich:

$$\partial \omega_2(\lambda\mathfrak{w}) = \partial \omega_2(\mathfrak{w}) \qquad (\lambda \neq 0). \tag{2.60}$$

Als *Inhalte der Kugel* ergibt sich bekanntlich

$$V_{2k}(r) = \int\limits_{|\mathfrak{w}| \leq r} \partial v_{2k}(\mathfrak{w}) = \frac{\pi^k}{k!} r^{2k}, \qquad V_{2k} = V_{2k}(1), \tag{2.61}$$

$$V_{2k-1}(r) = \int\limits_{|\mathfrak{w}| = r} \partial v_{2k-1}(\mathfrak{w}) = \frac{2\pi^k}{(k-1)!} r^{2k-1}, \quad V_{2k-1} = V_{2k-1}(1), \tag{2.62}$$

$$W_{2k-2} = \int\limits_{Q} \partial \omega_{2k-1}(\mathfrak{w}) = \frac{\pi^{k-1}}{(k-1)!}. \tag{2.63}$$

Dabei ist Q der projektive Raum, der durch die Äqulvalenzrelation $\mathfrak{w} \sim \lambda\mathfrak{w}$, wobei $\mathfrak{w} \neq 0$ und $\lambda \neq 0$ beide komplex sind, erzeugt wird.

§ 3. Meromorphe Flächen.

Die beiden Hauptsätze sollen für analytische Abbildungen, die eine komplexe Mannigfaltigkeit $\mathfrak{M}^{2n}$ in den komplex-projektiven Raum abbilden, aufgestellt werden. Aus später zu nennenden Gründen werde jedoch der Begriff der analytischen Abbildung zum Begriff der *meromorphen Fläche* erweitert.

Definition 3.1. Meromorphe Flächen.

Die zusammenhängende, komplexe Mannigfaltigkeit $\mathfrak{M}^{2n}$ *und die natürlichen Zahlen* $k \geq 2$, $p \geq 1$, *seien fest gewählt. Eine meromorphe Fläche* W^p *der Stufe* p *sei eine Menge von Polyadenfunktionen der Stufe* p *und der Dimension* k, *für die gilt:*

1. *Jeder Polyadenfunktion*

$$\mathfrak{W}^p = \mathfrak{W}^p(P) = \sum_{\mu | p}^{k}{}' w_{\mu_1 \ldots \mu_p}(P) [\mathfrak{e}_{\mu_1}, \ldots, \mathfrak{e}_{\mu_p}] \tag{3.1}$$

aus W^p *ist eindeutig eine offene Menge* $U = U(\mathfrak{W}^p)$ *zugeordnet, auf der sie, das heisst, alle ihre Koordinaten* $w_{\mu_1 \ldots \mu_p}(P)$ *meromorph sind.*

2. *Sind* $\mathfrak{W}_1^p$ *und* $\mathfrak{W}_2^p$ *zwei Elemente von* W^p, *so gibt es eine auf* $U_{12} = U(\mathfrak{W}_1^p) \cap U(\mathfrak{W}_2^p)$ *meromorphe Funktion* $\lambda(P)$, *die in keinem Teilgebiet von* U_{12} *identisch verschwindet, sodass* $\mathfrak{W}_1^p = \lambda(P)\mathfrak{W}_2^p$ *auf* U_{12} *gilt, falls* $U_{12} \neq \emptyset$ *ist.*

3. *Es ist* $\mathfrak{W}^{2n} = \bigcup_{\mathfrak{W}^p \in W^p} U(\mathfrak{W}^p)$.

Ist die Polyadenfunktion $\mathfrak{W}_0^p$ auf der offenen Menge G meromorph und gibt es zu jedem $\mathfrak{W}^p \in W^p$ eine Funktion $\lambda(P)$, die in jedem Teilgebiet von $G \cap U(\mathfrak{W}^p)$ nicht identisch Null und meromorph ist, und für die dort $\mathfrak{W}_0^p = \lambda(P)\mathfrak{W}^p$ gilt, so heisse $\mathfrak{W}_0^p$ eine *Darstellung von* W^p in G. Zwei meromorphe Flächen seien gleich, wenn sie eine, also jede, Darstellung gemeinsam haben. *Ist* A^p *eine duale Polyade, so sei* $(A^p, W^p) \not\equiv 0$ *(bzw.* $\equiv 0$*), wenn* $(A^p, \mathfrak{W}^p) \not\equiv 0$ *(bzw.* $\equiv 0$*) für eine, also jede, Darstellung ist.*

Definition 3.2. Degeneration.

Die meromorphe Fläche W^p *heisse* d e g e n e r i e r t, *wenn es eine duale (konstante) Polyade* A^p *mit* $(A^p, W^p) \equiv 0$ *gibt; sie heisse* s p e z i e l l d e g e n e r i e r t, *wenn es eine spezielle duale (konstante) Polyade* A^p *mit* $(A^p, W^p) \equiv 0$ *gibt; sie heisse* t o t a l d e g e n e r i e r t, $W^p \equiv 0$, *falls eine, also jede, Darstellung* $\mathfrak{W}^p(P) \equiv 0$ *ist. Ist* W^p *nicht totaldegeneriert, so sei* $W^p \not\equiv 0$. *Die meromorphe Fläche heisse konstant, wenn sie eine konstante Darstellung hat.*

Die Darstellung $\mathfrak{W}^p$ auf G ist in jedem Punkt $P_0 \in G$ meromorph. Sie heisse in P_0 *analytisch*, wenn es ihre Koordinaten sind. Sie heisse in P_0 *reduziert*, wenn ihre Koordinaten in P_0 analytisch sind und den grössten gemeinsamen Teiler 1 haben. Die Darstellung $\mathfrak{W}^p$ heisse in der offenen Menge O meromorph, bzw. analytisch, bzw. reduziert, falls sie es in jedem Punkt von O ist. Eine Darstellung auf $G = \mathfrak{M}^{2n}$ heisse *einheitlich*. Die meromorphe Funktion $\lambda(P)$, um die sich zwei Darstellungen unterscheiden, heisse ein *Proportionalitätsfaktor*, kurz auch *Faktor*; ist er analytisch und nicht Null, so heisse er ein *Einheitsfaktor*. Zwei reduzierte Darstellungen unterscheiden sich nur um Einheitsfaktoren. Ist das Koordinatensystem $\mathfrak{e}_1, \ldots, \mathfrak{e}_k$ fest gewählt, so bilden die Ausdrücke $(w_{\mu_1 \ldots \mu_p}(P), G)$, wobei $\mathfrak{W}^p = \sum_{\mu \mid p}^{k}{}' w_{\mu_1 \ldots \mu_p} [\mathfrak{e}_{\mu_1}, \ldots, \mathfrak{e}_{\mu_p}]$ eine auf G reduzierte Darstellung ist, eine COUSINsche Verteilung (II. Art) $W_{\mu_1 \ldots \mu_p}$, falls $w_{\mu_1 \ldots \mu_p}(P) \not\equiv 0$ ist.

Ist $W^p \not\equiv 0$, so erhält man aus einer beliebigen Darstellung in P_0 durch Multiplikation mit einem geeigneten Faktor eine in P_0 reduzierte Darstellung. Es gibt also eine in P_0 reduzierte Darstellung. Dagegen braucht es nicht immer eine einheitliche analytische oder eine einheitliche reduzierte Darstellung zu geben. Auf $\mathfrak{M}^{2n}$ gelte der Satz von POINCARÉ, wenn jede meromorphe Funktion Quotient zweier auf $\mathfrak{M}^{2n}$ analytischer Funktionen ist. Auf $\mathfrak{M}^{2n}$ gelte der Satz von COUSIN (II), wenn es zu jeder COUSINschen Verteilung (II. Art) F eine auf $\mathfrak{M}^{2n}$ analytische Funktion f gibt, sodass $F' = F \cup (f, \mathfrak{M}^{2n})$ wieder eine COUSINsche Verteilung (II. Art) ist. Dann gilt

Satz 3.1. Einheitliche Darstellungen.

1. *Eine meromorphe Fläche hat eine einheitliche (meromorphe) Darstellung.*

2. *Gilt auf $\mathfrak{M}^{2n}$ der Satz von* POINCARÉ, *so hat jede meromorphe Fläche auf $\mathfrak{M}^{2n}$ eine einheitliche analytische Darstellung.*

3. *Gilt auf $\mathfrak{M}^{2n}$ der Satz von* COUSIN (II), *so hat jede meromorphe Fläche $W^p \not\equiv 0$ auf $\mathfrak{M}^{2n}$ eine einheitliche reduzierte Darstellung.*

Beweis. Der Satz ist für $W^p \equiv 0$ richtig. Es sei nun $W^p \not\equiv 0$ angenommen. Dann gibt es ein Koordinatensystem $\mathfrak{e}_1, \ldots, \mathfrak{e}_k$, sodass für jede Darstellung $\mathfrak{W}^p$ die Koordinate $w_{1 \ldots p} \not\equiv 0$ ist. Also ist $\mathfrak{W}_0^p = \sum_{\mu \mid p}^{k}{}' \frac{w_{\mu_1 \ldots \mu_p}}{w_{1 \ldots p}} [\mathfrak{e}_{\mu_1}, \ldots, \mathfrak{e}_{\mu_p}]$ eine einheitliche Darstellung. Gilt der Satz von POINCARÉ, so ist jede Koordinate einer einheitlichen Darstellung Quotient zweier auf $\mathfrak{M}^{2n}$ analytischen Funktionen. Multipliziert man mit dem Produkt der Nennerfunktionen, so entsteht eine einheitliche analytische Darstellung. Gilt der Satz von COUSIN, so auch der Satz von POINCARÉ. Also gibt es eine einheitliche analytische Darstellung $\mathfrak{W}^p$. Die grössten gemeinsamen Teiler ihrer Koordinaten bilden eine COUSINsche Verteilung. Also gibt es einen einheitlichen, grössten gemeinsamen Teiler $\varDelta$, sodass $\varDelta^{-1}\mathfrak{W}^p$ eine einheitliche, reduzierte Darstellung ist, w. z. b. w.

Durch $(1, f)$ ist jeder auf $\mathfrak{M}^{2n}$ meromorphen Funktion f eine meromorphe Fläche (mit $k=2$, $p=1$) eineindeutig zugeordnet, die dann und nur dann degeneriert, wenn

f konstant ist. Für $k=2$ und $p=1$ haben alle meromorphen Flächen eine einheitliche Darstellung $(1, f)$ ausser der Fläche $(0, 1)$, die einer Funktion $f \equiv \infty$ entsprechen würde. Dies führt zur Definition:

Definition 3.3. Analytische Flächen.

Die meromorphe Fläche W^p heisse eine analytische Fläche, wenn es eine einheitliche analytische Darstellung $\mathfrak{W}^p$ und ein Koordinatensystem $\mathfrak{e}_1, \ldots, \mathfrak{e}_k$ gibt, sodass in ihm die Koordinate $w_{1\ldots p} \equiv 1$ ist.

Die analytischen Flächen für $k=2$ und $p=1$ sind den analytischen Funktionen auf $\mathfrak{M}^{2n}$ eineindeutig zugeordnet.

Ebenso überträgt man den Begriff der Unbestimmtheitsstelle. Der Punkt $P_0 \in \mathfrak{M}^{2n}$ heisse eine *Unbestimmtheitsstelle* der meromorphen Fläche W^p, falls $\mathfrak{W}^p(P_0)=0$ für eine, also jede, in P_0 reduzierte Darstellung $\mathfrak{W}^p(P)$ gilt.

Der projektive Raum $\mathfrak{P}^{2k-2}$ entsteht aus dem Raum R_1^{2k} der Vektoren $\mathfrak{w}$, indem man die neue Gleichheitsdefinition: $\mathfrak{w}_1 \sim \mathfrak{w}_2$, wenn $\mathfrak{w}_1 = \lambda \mathfrak{w}_2$ mit $\lambda \neq 0$ gilt, einführt. Dabei werde der Punkt $\mathfrak{w}=0$ weggelassen. Ist $\mathfrak{w}(P)$ eine in P_0 reduzierte Darstellung der meromorphen Fläche W^1, die keine Unbestimmtheitsstellen habe, so wird durch

$$\sigma(P_0) \sim \mathfrak{w}(P_0) \tag{3.2}$$

eine analytische Abbildung von $\mathfrak{M}^{2n}$ in $\mathfrak{P}^{2k-2}$ definiert. Da R_p^{2k} isomorph $R^{2\binom{k}{p}}$ ist, wird analog jeder meromorphen Fläche W^p ohne Unbestimmtheitsstellen eineindeutig eine solche analytische Abbildung von $\mathfrak{M}^{2n}$ in $\mathfrak{P}^{2\binom{k}{p}-2}$ zugeordnet. Man erhält dabei auch alle solche Abbildungen. Die meromorphen Flächen sind also eine Verallgemeinerung der analytischen Abbildungen von $\mathfrak{M}^{2n}$ in $\mathfrak{P}^{2\binom{k}{p}-2}$.

Nun sollen noch einige Gründe genannt werden, die für eine solche Verallgemeinerung sprechen.

1°. Auch für Stufen $p>1$ wurden meromorphe Flächen eingeführt, da sie später gebraucht werden. Zwar ist R_p^{2k} isomorph $R^{2\binom{k}{p}}$ und $^*R_p^{2k}$ isomorph $^*R^{2\binom{k}{p}}$, und zwar entsprechen sich bei diesem Isomorphismus das innere Produkt, das skalare Produkt, duale Koordinatensysteme, die duale Abbildung, die duale Metrik und der Begriff der meromorphen Fläche sowie ihre bisher definierten Eigenschaften, jedoch gilt das nicht mehr für das äussere Produkt.

2°. Meromorphe Darstellungen wurden zugelassen, da eine meromorphe Fläche nicht immer eine einheitliche analytische Darstellung hat. Zum Beispiel ist eine solche auf kompakten Mannigfaltigkeiten nicht vorhanden.

3°. Eine meromorphe Fläche kann Unbestimmtheitsstellen haben. Würde man solche verbieten, so würden auch gewisse meromorphe Funktionen ausgeschlossen sein. Die beiden Hauptsätze sollen aber insbesondere auch für alle meromorphen Funktionen gelten.

4°. Die Verallgemeinerung auf meromorphe Flächen macht beweistechnisch keine Schwierigkeiten. Die enge Verknüpfung mit den Räumen R_p^{2k} bietet viele Vorteile.

5°. $W^p \equiv 0$ ist auch eine meromorphe Fläche.

Aus den in 1° genannten Gründen reicht es jedoch vorläufig den Fall $p=1$ zu betrachten, da sich die nächstfolgenden Begriffe und Sätze unmittelbar auf $p>1$ übertragen. Daher werde jetzt in Kapitel I und II nur noch der Fall $p=1$ betrachtet. Sollten bei $p>1$ Besonderheiten auftreten, so wird dies erwähnt werden.

Bei allen einzuführenden Begriffen ist darauf zu achten, inwieweit sie die folgenden *Invarianzforderungen* erfüllen:

1. *Invarianz gegenüber den „Parameterdarstellungen"* $\alpha \in \mathfrak{M}^{2n}$.
2. *Invarianz gegenüber eineindeutigen analytischen Abbildungen von* $\mathfrak{M}^{2n}$ *auf eine andere komplexe Mannigfaltigkeit.*
3. *Invarianz gegenüber Proportionalitätsfaktoren* λ.
4. *Invarianz gegenüber Einheitsfaktoren* λ.
5. *Invarianz gegenüber der Wahl des Koordinatensystemes* $\mathfrak{e}_1, \ldots, \mathfrak{e}_k$ *in* R_p^{2k}.
6. *Invarianz gegenüber linearen, eineindeutigen Transformationen in* R_p^{2k}.

Aus 3. folgt 4.

Satz 3.2. Der grösste gemeinsame Teiler.

Voraussetzung. *Die meromorphe Fläche* $W \not\equiv 0$ *habe auf der offenen Menge* G *die Darstellung* $\mathfrak{w}(P) = (w_1(P), \ldots, w_k(P))$. *Es sei* $(\Delta_Z(P), O) \in F_Z$ *genau dann, wenn es in der offenen Menge* $O \neq \emptyset$ *analytische Funktionen* f_μ, g_μ *gibt, sodass* $w_\mu = \dfrac{f_\mu}{g_\mu}$ *in* O *gilt und* f_μ, g_μ *in jedem Punkt von* O *teilerfremd sind, und wenn dann* $\Delta_Z(P)$ *grösster gemeinsamer Teiler der Funktionen* $f_1, \ldots, f_k$ *in jedem Punkt von* O *ist. Es sei* $(\Delta_N(P), O) \in F_N$ *genau dann, wenn* $\Delta_N(P)$ *grösster gemeinsamer Teiler der Funktionen* $g_1, \ldots, g_k$ *in jedem Punkt von* O *ist.*

Behauptung. F_Z *und* F_N *sind* COUSINsche *Verteilungen II. Art auf* G.

Beweis. Die Forderungen 1 und 2 von § 2 (6) sind sicher erfüllt. Ist $(\Delta_Z^{(\nu)}(P), O_\nu) \in F_Z$ mit $O_1 \cap O_2 \neq \emptyset$ und ist $Q \in O_1 \cap O_2$, so gilt $f_\mu^{(\nu)} = \Delta_Z^{(\nu)} h_\mu^{(\nu)}$ mit in Q analytischen Funktionen $h_\mu^{(\nu)}$. Wegen

$$\Delta_Z^{(1)} h_\mu^{(1)} g_\mu^{(2)} = f_\mu^{(1)} g_\mu^{(2)} = f_\mu^{(2)} g_\mu^{(1)} = \Delta_Z^{(2)} h_\mu^{(2)} g_\mu^{(1)}$$

und weil $g_\mu^{(\nu)}$, $f_\mu^{(\nu)}$ in Q teilerfremd sind, ist $\Delta_Z^{(1)}$ gemeinsamer Teiler aller $f_\mu^{(2)}$, also Teiler von $\Delta_Z^{(2)}$ in Q. Ebenso ist $\Delta_Z^{(2)}$ Teiler von $\Delta_Z^{(1)}$. Also ist $\dfrac{\Delta_Z^{(1)}}{\Delta_Z^{(2)}} \neq 0$ und regulär in $O_1 \cap O_2$. Entsprechend schliesst man für F_N. Beide, F_Z und F_N, sind Cousinsche Verteilungen, w. z. b. w.

Die Vielfachheit der Nullstelle P von F_Z sei $d(P, 0)$ und heisse die Vielfachheit der *Nullstelle P der Darstellung* $\mathfrak{w}(P)$. Die Vielfachheit der Nullstelle P von F_N sei $d(P, \infty)$ und heisse *die Vielfachheit der Polstelle P der Darstellung* $\mathfrak{w}(P)$. Die in G abgeschlossene Nullstellenfläche $\mathfrak{d}(0) = \{P \mid d(P, 0) > 0\}$ heisse die Nullstellenfläche der Darstellung $\mathfrak{w}(P)$ und $\mathfrak{d}(\infty) = \{P \mid d(P, \infty) > 0\}$ ihre Polstellenfläche. Die Invarianzforderungen 1, 2, 5 und 6 sind erfüllt.

Nun wird der Begriff der a-Stelle und ihrer Vielfachheit verallgemeinert.

Satz 3.3. Invarianz der Schnittzahl.

Voraussetzung. *Ist W eine meromorphe Fläche und $\vec{\alpha}$ ein kontravarianter Vektor, für den $(\vec{\alpha}, W) \not\equiv 0$ gilt, so bestehe die Menge $(\vec{\alpha}, W)$*[15] *aus den Elementen (f, O) mit $f \doteq (\vec{\alpha}, \mathfrak{w}(P))$, wobei $\mathfrak{w}(P)$ eine reduzierte Darstellung auf der offenen Menge O ist. Ausserdem sei eine Darstellung $\mathfrak{w}_1(P)$ auf der offenen Menge G gegeben. Die Vielfachheit ihrer Nullstelle sei $d(P, 0)$, die ihrer Polstelle $d(P, \infty)$. Die Vielfachheit der Nullstelle P weniger der Vielfachheit der Polstelle P der Funktion $(\mathfrak{w}_1(P), \vec{\alpha})$ sei $\nu_1(P, \vec{\alpha})$.*

Behauptung. 1. *Es ist $(\vec{\alpha}, W)$ eine Cousinsche Verteilung (II. Art).*

2. *Die Vielfachheit $\nu(P, \vec{\alpha})$ der Nullstelle P von $(\vec{\alpha}, W)$ und die Nullstellenfläche $\mathfrak{N}(\vec{\alpha}) = \{P \mid \nu(P, \vec{\alpha}) > 0\}$ von $(\vec{\alpha}, W)$ erfüllen die Invarianzforderungen 1 bis 6.*

3. *In der offenen Menge G ist*

$$\nu(P, \vec{\alpha}) = \nu_1(P, \vec{\alpha}) - d(P, 0) + d(P, \infty). \tag{3.3}$$

Beweis. Da sich zwei reduzierte Darstellungen im Durchschnitt ihrer Gültigkeitsbereiche nur um einen Einheitsfaktor unterscheiden, gelten die Behauptungen 1 und 2. Werden $\Delta_N(P)$ und $\Delta_Z(P)$ für $\mathfrak{w}_1(P)$ nach Satz 3.2 definiert, so ist $\mathfrak{w}_1(P) = \dfrac{\Delta_Z}{\Delta_N} \lambda(P) \mathfrak{w}(P)$, wobei $\mathfrak{w}(P)$ eine in $P_0 \in G$ reduzierte Darstellung ist. Da Δ_Z und Δ_N grösste gemeinsame Teiler sind, ist $\lambda(P) \neq 0$ und analytisch. Es folgt die Behauptung 3, w. z. b. w.

---

[15] Eine Verwechslung der Bezeichnungsweise $(\vec{\alpha}, W) \equiv 0$ oder $(\vec{\alpha}, W) \not\equiv 0$ mit der Cousinschen Verteilung $(\vec{\alpha}, W)$ ist nicht zu befürchten.

Definition 3.4. Die Schnittzahl.

In Satz 3.3 sei $\nu(P, \vec{\alpha})$ die Schnittzahl in P zu $\vec{\alpha}$ von W und $\mathfrak{N}(\vec{\alpha})$ die Schnittstellenfläche zu $\vec{\alpha}$ von W.

§ 4. Massbestimmung.

Für die ganze Arbeit werden einige allgemeinverbindliche Voraussetzungen gemacht, die mit römischen Ziffern I, II, ... gekennzeichnet werden.

I **Die Mannigfaltigkeit.** *Die komplexe Mannigfaltigkeit $\mathfrak{M}^{2n}$ der Dimension $2n$ sei zusammenhängend und habe eine abzählbare Basis der offenen Mengen.*

Um die Schnittstellen zu $\vec{\alpha}$ zu messen, berechnet man den Flächeninhalt der Schnittstellenfläche $\mathfrak{N}(\vec{\alpha})$. Dies geschieht mit einem alternierenden Differential $\partial\chi_{2n-2}$. Damit der Flächeninhalt einer beliebigen Nullstellenfläche $\mathfrak{N}$ positiv wird, werde vorausgesetzt, dass die Dichte χ von $\partial\chi_{2n-2}$ längs $\mathfrak{N}$ positiv ist. An das Diffferential $\partial\chi_{2n-2}$ müssen noch zwei weitere Forderungen gestellt werden, wie sich später ergeben wird. Insgesamt werde vorausgesetzt:

II. **Die Massbestimmung.** *Auf $\mathfrak{M}^{2n}$ existiere ein wenigstens sechsmal stetig-differenzierbares, alternierendes Differential $\partial\chi_{2n-2}$, für das gilt*

a) *Sind der Punkt $P_0 \in \mathfrak{M}^{2n}$ und die in P_0 differenzierbaren Funktionen g und h beliebig gewählt, so gelte dort*

$$\partial g\, \partial^{\perp} h\, \partial\chi_{2n-2} = \partial h\, \partial^{\perp} g\, \partial\chi_{2n-2}. \tag{4.1}$$

b) *Das Differential $\partial\chi_{2n-2}$ ist exakt:*

$$\partial\partial\chi_{2n-2} = 0. \tag{4.2}$$

c) *Ist $\mathfrak{N}$ irgendeine $2n-2$ dimensionale, komplexe Teilmannigfaltigkeit von $\mathfrak{M}^{2n}$ und ist $\sigma_i(P) = P$ die identische Abbildung von $\mathfrak{N}$ in $\mathfrak{M}^{2n}$, so habe $\sigma_i\,\partial\chi_{2n-2}$ auf $\mathfrak{N}$ eine positive Dichte.*

Nun werde untersucht, was diese Aussagen bezüglich eines örtlichen Koordinatensystems bedeuten.

Satz 4.1. Der Typ.

Ein alternierendes Differential ∂A_{2n-2} hat dann und nur dann den Typ $n-1$, also die Gestalt[14]

$$\partial A_{2n-2} = \left(\frac{i}{2}\right)^{n-1} \Bigg\{ \sum_{\substack{\mu,\nu=1\\ \mu\neq\nu}}^{n} b_{\mu\nu}(P,\alpha)\, \partial\bar z_\mu\, \partial z_\nu\, \partial z_1\, \partial\bar z_1 \ldots \overset{\mu}{\|} \ldots \overset{\nu}{\|} \ldots \partial z_n\, \partial\bar z_n + \sum_{\mu=1}^{n} b_{\mu\mu}(P,\alpha)\, \partial z_1\, \partial\bar z_1 \ldots \overset{\mu}{\|} \ldots \partial z_n\, \partial\bar z_n \Bigg\}, \tag{4.3}$$

wenn für jeden Punkt P_0 seines Definitionsbereiches M und jedes Paar in P_0 stetigdifferenzierbarer Funktionen g und h gilt:

$$(4.4) \qquad \partial g\, \partial^\perp h\, \partial A_{2n-2} = \partial h\, \partial^\perp g\, \partial A_{2n-2}.$$

Beweis. Die Zerlegung $\partial A_{2n-2} = \sum_{\varrho=0}^{2n-2} \partial A^\varrho_{2n-2}$, wobei $\partial A^\varrho_{2n-2}$ den Typ ϱ hat, ist eindeutig. Sind $P_0 \in M$ und $\alpha \in \mathfrak{P}$ mit $P_0 \in U_\alpha$ beliebig gewählt, so werde zunächst $g = z_\nu$ und $h = z_\mu$, dann $g = \bar{z}_\nu$ und $h = \bar{z}_\mu$ gesetzt. Aus (4.4) folgt

$$(4.5) \qquad \partial z_\mu\, \partial z_\nu\, \partial A^\varrho_{2n-2} = 0 = \partial \bar{z}_\mu\, \partial \bar{z}_\nu\, \partial A^\varrho_{2n-2} \quad \text{für} \quad \mu, \nu = 1, \ldots, n.$$

Für $\varrho \neq n-1$ ist daher $\partial A^\varrho_{2n-2} = 0$. Also hat ∂A_{2n-2} den Typ $n-1$ und die Gestalt (4.3). Aus (4.3) folgt aber umgekehrt wegen

$$(4.6) \qquad \partial g\, \partial^\perp h\, \partial A_{2n-2} = -2 \sum_{\mu,\nu=1}^{n} b_{\mu\nu} (g_{z_\mu} h_{\bar{z}_\nu} + g_{\bar{z}_\nu} h_{z_\mu}) \left(\frac{i}{2}\right)^n \partial z_1\, \partial \bar{z}_1 \ldots \partial z_n\, \partial \bar{z}_n$$

die Gleichung (4.4), w. z. b. w.

Satz 4.2. Die Ableitung.

Ist das alternierende Differential ∂A_{2n-2} vom Typ $n-1$, also von der Gestalt (4.3), *auf der offenen Menge $G \subseteq \mathfrak{M}^{2n}$ stetigdifferenzierbar, so ist dann und nur dann seine äussere Ableitung $\partial\partial A_{2n-2} \equiv 0$, wenn für jede Abbildung $\alpha(\mathfrak{z}) \in \mathfrak{P}$ auf $G \cap U_\alpha$ gilt:*

$$(4.7) \qquad \sum_{\mu=1}^{n} b_{\mu\nu z_\mu} = 0 \quad \text{und} \quad \sum_{\mu=1}^{n} b_{\nu\mu\bar{z}_\mu} = 0 \quad \text{für} \quad \nu = 1, \ldots, n.$$

Beweis. Aus[14]

$$\partial\partial A_{2n-2} = \left(\frac{i}{2}\right)^{n-1} \left\{ \sum_{\nu=1}^{n} \left(\sum_{\mu=1}^{n} b_{\mu\nu z_\mu} \right) \partial z_\nu\, \partial z_1\, \partial \bar{z}_1 \ldots \overset{\nu}{\|} \ldots \partial z_n\, \partial \bar{z}_n + \right.$$
$$\left. + \sum_{\mu=1}^{n} \left(\sum_{\nu=1}^{n} b_{\mu\nu\bar{z}_\nu} \right) \partial \bar{z}_\mu\, \partial z_1\, \partial \bar{z}_1 \ldots \overset{\mu}{\|} \ldots \partial z_n\, \partial \bar{z}_n \right\}.$$

folgt die Behauptung, w. z. b. w.

Satz 4.3. Positive Massbestimmung.

Ist das alternierende Differential ∂A_{2n-2} vom Typ $n-1$, also von der Gestalt (4.3) *im Punkt P_0 erklärt, so hat es dann und nur dann längs jeder durch P_0 gehenden $2n-2$ dimensionalen, komplexen Teilmannigfaltigkeit $\mathfrak{N}$ in P_0 eine positive Dichte, wenn für eine, also jede, Abbildung $\alpha(\mathfrak{z}) \in \mathfrak{P}$ mit $P_0 \in U_\alpha$ durch*

$$(4.8.) \qquad \sum_{\mu,\nu=1}^{n} b_{\mu\nu}(P_0, \alpha)\, x_\mu\, \bar{x}_\nu$$

eine positiv definite HERMITEsche *Form gegeben wird.*

Beweis. Man wählt $\beta(\mathfrak{v}) \in \mathfrak{P}(\mathfrak{N})$ mit $P_0 \in U_\beta$ und setzt $\mathfrak{z}(\mathfrak{v}) = \alpha^{-1}\beta(\mathfrak{v})$. Ist $\sigma_i(P) = P$ die identische Abbildung von $\mathfrak{N}$ in $\mathfrak{M}^{2n}$, so gilt:[16]

$$
\begin{aligned}
&\sigma_i\,\partial A_{2n-2} = \\
(4.9)\qquad &= \sum_{\mu,\nu=1}^{n} b_{\mu\nu}(P_0, \alpha)\,(-1)^{\mu} \frac{\partial(z_1, \ldots \overset{\mu}{|} \ldots, z_n)}{\partial(v_1, \ldots, v_{n-1})}\, (-1)^{\nu}\, \overline{\frac{\partial(z_1, \ldots \overset{\nu}{|} \ldots, z_n)}{\partial(v_1, \ldots, v_{n-1})}}\, \partial v_{2n-2}(\mathfrak{v}),
\end{aligned}
$$

wobei

$$
(4.10)\qquad \partial v_{2n-2}(\mathfrak{v}) = \left(\frac{i}{2}\right)^{n-1} \partial v_1\,\partial \bar v_1 \ldots \partial v_{n-1}\,\partial \bar v_{n-1} = \partial\,\mathrm{Re}\,v_1\,\partial\,\mathrm{Im}\,v_1 \ldots \partial\,\mathrm{Re}\,v_{n-1}\,\partial\,\mathrm{Im}\,v_{n-1}
$$

das euklidische Flächenelement des $\mathfrak{v}$-Raumes ist. Also ist $\sigma_i\,\partial A_{2n-2} = b \cdot \partial v_{2n-2}$, wobei b die Dichte von ∂A_{2n-2} längs $\mathfrak{N}$ in P_0 ist. Nach (4.9) ist b dann und nur dann für jede komplexe Mannigfaltigkeit $\mathfrak{N}$ positiv, wenn (4.8) eine positiv definite HERMITEsche Form ist, w. z. b. w.

Die Voraussetzungen II sind also gleichbedeutend mit:

II **Die Massbestimmung.** *Auf* $\mathfrak{M}^{2n}$ *existiere ein wenigstens sechsmal stetigdifferenzierbares, alternierendes Differential* $\partial\chi_{2n-2}$, *das für jede feste Abbildung* $\alpha \in \mathfrak{P}$ *und jeden festen Punkt* $P \in U_\alpha$ *die Forderungen erfüllt:*

a) *Es ist*[14]

$$
(4.11)\qquad \partial\chi_{2n-2} = \frac{1}{4}\left(\frac{i}{2}\right)^{n-1} \left\{ \sum_{\substack{\mu,\nu=1\\ \mu\neq\nu}}^{n} a_{\mu\nu}(P,\alpha)\,\partial\bar z_\mu\,\partial z_\nu\,\partial z_1\,\partial\bar z_1 \ldots \overset{\mu}{\|} \ldots \overset{\nu}{\|} \ldots \partial z_n\,\partial\bar z_n + {} \right.
$$
$$
\left. {} + \sum_{\mu=1}^{n} a_{\mu\mu}(P,\alpha)\,\partial z_1\,\partial\bar z_1 \ldots \overset{\mu}{\|} \ldots \partial z_n\,\partial\bar z_n \right\}.
$$

b) *Es ist*

$$
(4.12)\qquad \sum_{\mu=1}^{n} a_{\mu\nu} z_\mu = 0 \quad \textit{und} \quad \sum_{\mu=1}^{n} a_{\nu\mu} \bar z_\mu = 0 \quad \textit{für} \quad \nu = 1, \ldots, n.
$$

c) *Es ist*

$$
(4.13)\qquad \sum_{\mu,\nu=1}^{n} a_{\mu\nu}(P,\alpha)\,x_\mu\,\bar x_\nu > 0 \qquad (a_{\mu\nu} = \bar a_{\nu\mu})
$$

eine positiv definite HERMITEsche *Form.*

Für die Existenz einer solchen Massbestimmung ist nun der Satz von Bedeutung:

Satz 4.4. Die KÄHLERsche Massbestimmung.

Voraussetzung. *Auf* $\mathfrak{M}^{2n}$ *existiere eine stetigdifferenzierbare* KÄHLERsche *Metrik* ∂s_2, *das heisst: Für jede Abbildung* $\alpha \in \mathfrak{P}$ *und jeden Punkt* $P \in U_\alpha$ *gilt*

---

[16] Durch $\overset{\mu}{|}$ werde das Fehlen von z_μ angezeigt.

a) *Es ist*

$$\partial s_2 = \frac{i}{2} \sum_{\mu,\nu=1}^{n} h_{\mu\nu}(P,\alpha)\,\partial z_\mu\,\partial \bar z_\nu. \tag{4.14}$$

b) *Die Metrik* ∂s_2 *ist exakt, das heisst:* $\partial\partial s_2 = 0$.

c) *Es ist* $\sum\limits_{\mu,\nu=1}^{n} h_{\mu\nu}(P,\alpha)\,x_\mu\,\bar x_\nu$ *eine positiv definite* HERMITEsche *Form.*

Behauptung. *Das Differential* $\partial \chi_{2n-2} = \frac{1}{(n-1)!}(\partial s_2)^{n-1}$ *erfüllt die Forderungen II. Es ist* $\frac{1}{4} a_{\mu\nu} = H_{\mu\nu} \equiv (-1)^{\mu+\nu} \det\limits_{\substack{\varrho\neq\mu\\ \sigma\neq\nu}} (h_{\varrho\sigma})$ *die Adjunkte von* $h_{\mu\nu}$.

Umgekehrt braucht $\partial\chi_{2n-2}$ für $n > 2$ nicht $(n-1)$te Potenz einer KÄHLERschen Metrik zu sein.

Beweis. Da ∂s_2 den Typ 1 hat, hat $\partial\chi_{2n-2}$ den Typ $n-1$, ist also von der Gestalt (4.11). Die Koeffizienten $a_{\mu\nu}$ sind Polynome in den Unbestimmten $h_{\mu\nu}$, und zwar ist $a_{\mu\nu}$ der Koeffizient des Gliedes, in dem ∂z_μ und $\partial \bar z_\nu$ fehlen. Also hängt das Polynom $a_{\mu\nu}$ nicht von den Unbestimmten $h_{\mu\varrho}$ und $h_{\nu\varrho}$ für $\varrho = 1, \dots, n$ ab. Bei der Substitution $h_{\mu\varrho} = h_{\nu\varrho} = 0$ für $\varrho = 1, \dots, n$ ändert sich $a_{\mu\nu}$ nicht. Wegen

$$\left(\sum_{\mu,\nu=1}^{n-1} g_{\mu\nu}\,\partial x_\mu\,\partial \bar x_\nu\right)^{n-1} = \sum_{\mu\,|\,n-1}^{n-1}\ \sum_{\nu\,|\,n-1}^{n-1} g_{\mu_1\nu_1}\cdots g_{\mu_{n-1}\nu_{n-1}}\,\partial x_{\mu_1}\,\partial\bar x_{\nu_1}\cdots\partial x_{\mu_{n-1}}\,\partial \bar x_{\nu_{n-1}} = \tag{4.15}$$
$$= (n-1)!\,\det(g_{\mu\nu})\,\partial x_1\,\partial\bar x_1\cdots\partial x_{n-1}\,\partial\bar x_{n-1}$$

folgt für $\mu \leq \nu$ also

$$\begin{aligned}
&\tfrac{1}{4} a_{\mu\nu}\,\partial\bar z_\mu\,\partial z_\nu\,\partial z_1\,\partial\bar z_1 \dots \overset{\mu}{\|} \dots \overset{\nu}{\|} \dots \partial z_n\,\partial\bar z_n + \text{andere Glieder} = \\
&= \frac{1}{(n-1)!}\left(\sum_{\substack{\varrho\neq\mu\\ \sigma\neq\nu}} h_{\varrho\sigma}\,\partial z_\varrho\,\partial\bar z_\sigma\right)^{n-1} = \\
&= \det_{\substack{\varrho\neq\mu\\ \sigma\neq\nu}}(h_{\varrho\sigma})\,\partial z_1\,\partial\bar z_1\dots\partial z_{\mu-1}\,\partial\bar z_{\mu-1}\,\partial z_{\mu+1}\,\partial\bar z_\mu\,\partial z_{\mu+2}\,\partial\bar z_{\mu+1}\,\cdot \\
&\qquad\qquad \cdots\,\partial z_{\nu-1}\,\partial\bar z_{\nu-2}\,\partial z_\nu\,\partial\bar z_{\nu-1}\,\partial z_{\nu+1}\dots\partial z_n\,\partial\bar z_n = \\
&= (-1)^{\mu+\nu}\det_{\substack{\varrho\neq\mu\\ \sigma\neq\nu}}(h_{\varrho\sigma})\,\partial\bar z_\mu\,\partial z_\nu\,\partial z_1\,\partial\bar z_1\dots\overset{\mu}{\|}\dots\overset{\nu}{\|}\dots\partial z_n\,\partial\bar z_n.
\end{aligned} \tag{4.16}$$

Daher ist $\frac{1}{4} a_{\mu\nu} = (-1)^{\mu+\nu} \det\limits_{\substack{\varrho\neq\mu\\ \sigma\neq\nu}} (h_{\varrho\sigma})$ die Adjunkte $H_{\mu\nu}$ von $h_{\mu\nu}$. Entsprechend schliesst man für $\mu \geq \nu$. Also gelten die Forderungen II a) und II c). Wegen $\partial(\partial s_2)^{n-1} = (n-1)(\partial s_2)^{n-2}\,\partial\partial s_2 = 0$ gilt auch b), w. z. b. w.

Daraus folgt, dass die ganze Theorie der meromorphen Flächen, insbesondere die beiden Hauptsätze, für jede KÄHLERsche *Mannigfaltigkeit gelten.* Einige Beispiele seien genannt:

1. $\mathfrak{M}^{2n}$ ist eine Teilmannigfaltigkeit eines (schlichten oder nichtschlichten) Gebietes über dem Zahlenraum der Vektoren $(z_1, \ldots, z_s)$ und $\partial\chi_{2n-2} = \frac{1}{(n-1)!}\left\{\frac{i}{2}\sum_{\mu=1}^{s}\partial z_\mu \partial \bar{z}_\mu\right\}^{n-1}$ die euklidische Massbestimmung.

2. $\mathfrak{M}^{2n}$ lässt sich mit von Null verschiedener Funktionaldeterminante durch eine analytische Abbildung σ in eine komplexe Mannigfaltigkeit abbilden, auf der II mit $\partial\tilde{\chi}_{2n-2}$ gilt. Es ist $\partial\chi_{2n-2} = \sigma\partial\tilde{\chi}_{2n-2}$.

3. $\mathfrak{M}^{2n}$ ist ein schlichtes, beschränktes Gebiet des $\mathfrak{z}$-Raumes und $\partial\chi_{2n-2}$ die $(n-1)$te Potenz der BERGMANNschen Metrik.

Nun mögen noch einige Formeln für das Differential $\partial\chi_{2n-2}$ berechnet werden. Die Abbildung $\alpha(\mathfrak{z}) \in \mathfrak{P}$ werde beliebig gewählt und

$$a_{\mu\nu}(P, \alpha) = \alpha_{\mu\nu} + i\beta_{\mu\nu} = \gamma_{2\mu-1, 2\nu-1} + i\gamma_{2\mu, 2\nu-1} = \gamma_{2\mu, 2\nu} - i\gamma_{2\mu-1, 2\nu}, \tag{4.17}$$

$$z_\mu = x_\mu + iy_\mu = t_{2\mu-1} + it_{2\mu}, \tag{4.18}$$

$$v_\mu = \tau_{2\mu-1} + i\tau_{2\mu}, \quad u_\mu = \sigma_{2\mu-1} + i\sigma_{2\mu} \tag{4.19}$$

gesetzt, wobei x_μ, y_μ, $t_{2\mu-1}$, $t_{2\mu}$, $\tau_{2\mu-1}$, $\tau_{2\mu}$, $\sigma_{2\mu-1}$, $\sigma_{2\mu}$ und

$$\alpha_{\mu\nu} = \alpha_{\nu\mu}, \quad \beta_{\mu\nu} = -\beta_{\nu\mu}, \quad \gamma_{\mu\nu} = \gamma_{\nu\mu} \tag{4.20}$$

reell sind. Dann rechnet man leicht nach, dass

$$\sum_{\mu,\nu=1}^{n} a_{\mu\nu}(\bar{v}_\mu u_\mu + \bar{u}_\mu v_\mu) = 2\sum_{\varkappa,\lambda=1}^{2n}\gamma_{\varkappa\lambda}\tau_\varkappa\sigma_\lambda, \tag{4.21}$$

$$2\sum_{\mu=1}^{n} a_{\mu\nu z_\mu} = \sum_{\lambda=1}^{2n}\gamma_{\lambda, 2\nu-1\, t_\lambda} - i\sum_{\lambda=1}^{2n}\gamma_{\lambda, 2\nu\, t_\lambda} \tag{4.22}$$

gilt. Also sind $\partial\partial\chi_{2n-2} = 0$ und $\sum_{\mu=1}^{n} a_{\mu\nu z_\mu} = 0$ und $\sum_{\varkappa=1}^{2n}\gamma_{\varkappa\lambda\tau_\varkappa} = 0$ gleichbedeutend. Ist die reelle Funktion φ zweimal stetigdifferenzierbar, so folgt aus (2.43) und (4.11) unmittelbar

$$\begin{aligned}\partial\partial^\perp\varphi\partial\chi_{2n-2} &= -\sum_{\mu,\nu=1}^{n} a_{\mu\nu}\varphi_{z_\mu\bar{z}_\nu}\left(\frac{i}{2}\right)^n\partial z_1\partial\bar{z}_1\ldots\partial z_n\partial\bar{z}_n = \\ &= -\tfrac{1}{4}\sum_{\mu,\nu=1}^{2n}\gamma_{\mu\nu}\varphi_{t_\mu t_\nu}\partial t_1\partial t_2\ldots\partial t_{2n}\end{aligned} \tag{4.23}$$

mit

$$\left(\frac{i}{2}\right)^n\partial z_1\partial\bar{z}_1\ldots\partial z_n\partial\bar{z}_n = \partial t_1\partial t_2\ldots\partial t_{2n}. \tag{4.24}$$

Wegen (4.6) und (4.13) hat

$$\partial\varphi\,\partial^{\perp}\varphi\,\partial\chi_{2n-2} = -\sum_{\mu,\nu=1}^{n} a_{\mu\nu}\,\varphi_{z_\mu}\varphi_{\bar z_\nu}\left(\frac{i}{2}\right)^{n}\partial z_1\,\partial\bar z_1\ldots\partial z_n\,\partial\bar z_n = \tag{4.25}$$
$$= -\tfrac{1}{4}\sum_{\mu,\nu=1}^{2n}\gamma_{\mu\nu}\,\varphi_{t_\mu}\varphi_{t_\nu}\,\partial t_1\,\partial t_2\ldots\partial t_{2n}$$

eine nichtpositive Dichte, die dann und nur dann Null ist, wenn $\partial\varphi = 0$ ist.

Die stetigdifferenzierbare, orientierte Teilmannigfaltigkeit $S = S^{2n-1}$ von $\mathfrak{M}^{2n}$ liege im Rand der offenen Menge H und habe bezüglich H eine äussere Normale. Wenn $\alpha(\mathfrak{z}) \in \mathfrak{P}(\mathfrak{M}^{2n})$ und $\beta(\mathfrak{r}) \in \mathfrak{P}(S)$ mit $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$ gewählt sind, so werde neben (4.17) bis (4.22) noch definiert

$$\begin{aligned}
&\alpha^{-1}\beta(\mathfrak{r}) = \mathfrak{z}(\mathfrak{r}) = \sum_{\nu=1}^{n} z_\nu(\mathfrak{r})\,\mathfrak{e}_\nu = \\
&\quad = \sum_{\nu=1}^{n}\{x_\nu(\mathfrak{r}) + i\,y_\nu(\mathfrak{r})\}\,\mathfrak{e}_\nu = \sum_{\nu=1}^{n}(t_{2\nu-1}(\mathfrak{r}) + i\,t_{2\nu}(\mathfrak{r}))\,\mathfrak{e}_\nu \\
&m_\varrho(\mathfrak{r}) = (-1)^{\varrho-1}\frac{\partial(t_1,\ldots,t_{\varrho-1},t_{\varrho+1},\ldots,t_{2n})}{\partial(r_1,\ldots\ldots\ldots\ldots,r_{2n-1})} \\
&\lambda(\mathfrak{r}) = \sqrt{\sum_{\varrho=1}^{2n} m_\varrho^2(\mathfrak{r})} \\
&n_\varrho(\mathfrak{r}) = \lambda^{-1}(\mathfrak{r})\,m_\varrho(\mathfrak{r}) \\
&\mathfrak{n}(\mathfrak{r}) = \sum_{\nu=1}^{n}(n_{2\nu-1} + i\,n_{2\nu})\,\mathfrak{e}_\nu .
\end{aligned}\tag{4.26}$$

Im Parameterraum der Vektoren $\mathfrak{z}$ werde durch $(\mathfrak{z}\,|\,\mathfrak{v}) = \sum_{n=1}^{n} z_\mu \bar v_\mu$ eine Metrik eingeführt. Dann ist der Vektor $\mathfrak{n}(\mathfrak{r})$ nach (2.1) die Normale in $\mathfrak{z}(\mathfrak{r})$ auf $\alpha^{-1}(S)$. Das euklidische Oberflächenelement von $\alpha^{-1}(S)$ ist

$$\partial\omega = \lambda(\mathfrak{r})\,\partial r_1\ldots\partial r_{2n-1}. \tag{4.27}$$

Die reelle Funktion φ sei in H stetigdifferenzierbar und zusammen mit $\partial\varphi$ in $\bar H$ stetig. Auf H sei $\varphi \geq c$ und auf S sei $\varphi \equiv c$ mit $\partial\varphi \neq 0$. Dann steht

$$\operatorname{grad}\varphi = \sum_{\nu=1}^{n}(\varphi_{x_\nu} + i\varphi_{y_\nu})\,\mathfrak{e}_\nu = 2\sum_{\nu=1}^{n}\varphi_{\bar z_\nu}\,\mathfrak{e}_\nu \neq 0 \tag{4.28}$$

auf $\alpha^{-1}(S)$ im Punkt $\mathfrak{z}$ senkrecht und zeigt in Richtung wachsender φ-Werte. Also ist

$$\frac{\operatorname{grad}\varphi}{|\operatorname{grad}\varphi|} = -\mathfrak{n}(\mathfrak{r}). \tag{4.29}$$

Die reelle Funktion ψ sei auf H stetigdifferenzierbar und zusammen mit $\partial \psi$ in $\bar{H}$ stetig. Es sei $\sigma_i(P) = P$ die identische Abbildung von S in $\mathfrak{M}^{2n}$. Dann gilt

$$
\begin{aligned}
\sigma_i\, \partial^{\perp} \psi\, \partial \chi_{2n-2} &= \frac{1}{2}\left(\frac{i}{2}\right)^n \sum_{\mu,\nu=1}^{n} a_{\mu\nu}\, \psi_{z_\mu}\, \partial z_\nu\, \partial z_1\, \partial \bar{z}_1 \ldots \overset{\nu}{\|} \ldots \partial z_n\, \partial \bar{z}_n - \\
&- \frac{1}{2}\left(\frac{i}{2}\right)^n \sum_{\mu,\nu=1}^{n} a_{\mu\nu}\, \psi_{\bar{z}_\nu}\, \partial \bar{z}_\mu\, \partial z_1\, \partial \bar{z}_1 \ldots \overset{\mu}{\|} \ldots \partial z_n\, \partial \bar{z}_n = \\
&= \frac{i}{4} \sum_{\mu,\nu=1}^{n} a_{\mu\nu}\, \psi_{z_\mu} (\partial x_\nu + i\, \partial y_\nu)\, \partial x_1\, \partial y_1 \ldots \overset{\nu}{\|} \ldots \partial x_n\, \partial y_n - \\
&- \frac{i}{4} \sum_{\mu,\nu=1}^{n} a_{\mu\nu}\, \psi_{\bar{z}_\nu} (\partial x_\mu - i\, \partial y_\mu)\, \partial x_1\, \partial y_1 \ldots \overset{\mu}{\|} \ldots \partial x_n\, \partial y_n = \\
&= -\frac{1}{4} \sum_{\mu,\nu=1}^{n} a_{\mu\nu} [\psi_{z_\mu} (i n_{2\nu} + n_{2\nu-1}) + \psi_{\bar{z}_\nu} (-i n_{2\mu} + n_{2\mu-1})]\, \partial \omega = \\
&= \frac{1}{2}\, |\operatorname{grad} \varphi|^{-1} \sum_{\mu,\nu=1}^{n} a_{\mu\nu} (\psi_{z_\mu} \varphi_{\bar{z}_\nu} + \varphi_{z_\mu} \psi_{\bar{z}_\nu})\, \partial \omega .
\end{aligned} \tag{4.30}
$$

Also gilt

$$
\begin{aligned}
\sigma_i\, \partial^{\perp} \psi\, \partial \chi_{2n-2} &= \frac{1}{2}\, |\operatorname{grad} \varphi|^{-1} \sum_{\mu,\nu=1}^{n} a_{\mu\nu} (\psi_{z_\mu} \varphi_{\bar{z}_\nu} + \varphi_{z_\mu} \psi_{\bar{z}_\nu})\, \partial \omega = \\
&= \frac{1}{4}\, |\operatorname{grad} \varphi|^{-1} \sum_{\mu,\nu=1}^{n} \gamma_{\mu\nu}\, \psi_{t_\mu} \varphi_{t_\nu}\, \partial \omega = \\
&= -\frac{1}{4} \sum_{\mu,\nu=1}^{n} \gamma_{\mu\nu}\, \psi_{t_\mu} n_\nu\, \partial \omega .
\end{aligned} \tag{4.31}
$$

Dabei sind für $\partial^{\perp} \psi$, ψ_{z_μ}, $\psi_{\bar{z}_\mu}$, φ_{z_μ}, $\varphi_{\bar{z}_\mu}$, ψ_{t_μ}, φ_{t_μ} die Randwerte bei Annäherung aus H zu nehmen.

Satz 4.5. Richtungsableitung.

Voraussetzung. *Die stetigdifferenzierbare, orientierte Teilmannigfaltigkeit S von $\mathfrak{M}^{2n}$ liege im Rand der offenen Menge H und habe bezüglich H eine äussere Normale. Die reelle Funktion ψ sei auf H stetigdifferenzierbar und zusammen mit $\partial \psi$ in $\bar{H}$ stetig. In $P_0 \in S$ sei $\psi(P_0) = c$ und in $\bar{H}$ sei $\psi(P) \geq c$.*

Behauptung. *Bildet man $\partial^{\perp} \psi$ mit den Randwerten der Ableitungen bei Annäherung aus H, so hat $\partial^{\perp} \psi\, \partial \chi_{2n-2}$ längs S in P_0 eine nichtnegative Dichte, die in P_0 dann und nur dann Null ist, wenn $\partial^{\perp} \psi = 0$ ist.*

Beweis. In einer Umgebung von P_0 gibt es eine Funktion φ sodass die Gleichungen (4.26) bis (4.31) gelten. Dabei kann man noch $\alpha \in \mathfrak{P}$ so wählen, dass

$$a_{\mu\nu}(P_0, \alpha) = \delta_\mu^\nu = \begin{cases} 0 & \text{für } \mu \neq \nu \\ 1 & \text{für } \mu = \nu \end{cases} \tag{4.32}$$

ist. Ist $\mathfrak{a} = \sum_{\nu=1}^{n} (a_{2\nu-1} + i\, a_{2\nu})\, \mathfrak{e}_\nu$ irgendein Richtungsvektor, der mit der Normalen $\mathfrak{n}$ einen Winkel kleiner als $\frac{\pi}{2}$ einschliesst, ist $\mathfrak{z}_0 = \alpha^{-1}(P_0)$, so ist

$$\sum_{\nu=1}^{2n} \alpha_\nu \psi_{t_\nu} = \lim_{\varepsilon \to +0} \frac{\psi(P_0) - \psi(\alpha(\mathfrak{z}_0 - \varepsilon\, \mathfrak{a}))}{\varepsilon} \leq 0. \tag{4.33}$$

Also ist in P_0 der Vektor grad $\psi = -|\operatorname{grad} \psi|\, \mathfrak{n}$ antiparallel zur Normalen $\mathfrak{n}$. Aus (4.31) und (4.32) folgt

$$\sigma_i\, \partial^\perp \psi\, \partial \chi_{2n-2} = \tfrac{1}{4}\, |\operatorname{grad} \psi|\, \partial \omega \geq 0. \tag{4.34}$$

Es ist $\sigma_i\, \partial^\perp \psi\, \partial \chi_{2n-2} = 0$ dann und nur dann, wenn grad $\psi = 0$ ist, das heisst, wenn $\partial^\perp \psi = 0$ ist, w. z. b. w.

§ 5. Integralumformungen.

In diesem Paragraphen werden einige vorbereitende Sätze bewiesen.

Satz 5.1. Analytische Schichtzerlegung.

Voraussetzung. *Die Funktion $f(P)$ sei auf der offenen Menge G der Mannigfaltigkeit $\mathfrak{M}^{2n}$ meromorph und in keinem Teilgebiet konstant. Die Vielfachheit ihrer w-Stelle P sei $\nu(P, w)$. Sie habe die w-Stellenfläche $\mathfrak{N}(w)$. Das Differential $\partial A_{2n-2}(P)$ sei auf der messbaren Menge $M \subseteq \mathfrak{M}^{2n}$ und das Differential ∂B_2 auf der w-Ebene erklärt. Das Differential $\partial A_{2n-2}\, \partial B_2(f(P))$ sei über die Menge M integrierbar.*

Behauptung. *Es gilt*

$$\int_M \partial A_{2n-2}(P)\, \partial B_2(f(P)) = \int_{|w| < \infty} \Big\{ \int_{\mathfrak{N}(w) \cap M} \nu(P, w)\, \partial A_{2n-2}(P) \Big\}\, \partial B_2(w), \tag{5.1}$$

wobei das Integral über $\mathfrak{N}(w)$ für fast alle w mit $\partial B_2(w) \neq 0$ existiert.

Zusatz. *Ist $\partial A_{2n-2}(P)\, \partial B_2(f(P))$ messbar, hat ∂A_{2n-2} längs $\mathfrak{N}(w)$ die Dichte $a(P; w)$ und existiert das Integral*

$$\int_{|w| < \infty} \Big\{ \int_{\mathfrak{N}(w) \cap M} |a(P; w)| \Big\}\, \partial B_2(w),$$

so ist $\partial A_{2n-2}(P)\, \partial B_2(f(P))$ über die messbare Menge M integrierbar.

Beweis. Es sei N die Menge der $w \neq \infty$ für die $\mathfrak{N}(w)$ ein Flächenelement mit der Menge $D = \{P \mid \partial f = 0\}$ gemeinsam hat. Als höchstens abzählbare Menge ist N eine Nullmenge der w-Ebene. Der Durchschnitt $D \cap \mathfrak{N}(w)$ ist für alle $w \notin N$ mit $w \neq \infty$ eine Nullmenge auf $\mathfrak{N}(w)$. Ebenso ist $F = D \cup \mathfrak{N}(\infty)$ eine Nullmenge auf G. Daher sind der Satz und der Zusatz bewiesen, wenn die Behauptung für $M - F$ statt M gilt. Da $G - F$ wieder offen ist, kann man o. B. d. A. die Funktion $f(P)$ analytisch auf G und $\partial f \neq 0$ auf G voraussetzen. Dann ist $\nu(P, w) \leq 1$. Die Abbildungen $\alpha(z) \in \mathfrak{P}(|w| < \infty)$, $\beta(\mathfrak{v}) \in \mathfrak{P}(\mathfrak{N}(w))$ und $\gamma(\mathfrak{y}) \in \mathfrak{P}(\mathfrak{M}^{2n})$ werden beliebig gewählt, aber so, dass $w \in U_\alpha$ und $U_\beta \cap U_\gamma \neq \emptyset$ sind. Dann ist α^{-1} eine analytische Funktion g und $z(\mathfrak{y}) = \alpha^{-1}(f(\gamma(\mathfrak{y}))) = g(f(\gamma(\mathfrak{y})))$ ebenfalls analytisch. Auch $\mathfrak{y}(\mathfrak{v}) = \gamma^{-1}\beta(\mathfrak{v})$ ist analytisch. Es sei

$$y_\mu = w_{2\mu-1} + i\, w_{2\mu} \quad \text{mit reellen } w_\varrho \qquad (\mu = 1, \ldots, n),$$

$$v_\mu = x_{2\mu-1} + i\, x_{2\mu} \quad \text{mit reellen } x_\varrho \qquad (\mu = 1, \ldots, n-1),$$

$$\mathfrak{w}(\mathfrak{x}) = \mathfrak{y}(\mathfrak{v}) = \gamma^{-1}\beta(\mathfrak{w}), \quad z(\mathfrak{w}) = t_1(\mathfrak{w}) + i\, t_2(\mathfrak{w}).$$

Wird $\operatorname{grad}_{\mathfrak{y}} z = \sum_{\nu=1}^{n} \overline{z_{y_\nu}}\, \mathfrak{e}_\nu$ gesetzt, so ist

$$\det(\operatorname{grad}_{\mathfrak{w}} t_1(\mathfrak{w}), \operatorname{grad}_{\mathfrak{w}} t_2(\mathfrak{w}), \mathfrak{w}_{x_1}, \ldots, \mathfrak{w}_{x_{2n-2}}) = |\det(\operatorname{grad}_{\mathfrak{y}} z, \mathfrak{y}_{v_1}, \ldots, \mathfrak{y}_{v_{n-1}})|^2 > 0.$$

Da nämlich $\partial f \neq 0$ ist, ist $\mathfrak{N}(w)$ eine komplexe Teilmannigfaltigkeit, also die Determinante nicht Null. Die Voraussetzungen des Satzes von FUBINI § 2 (5) 15° sind erfüllt. Es entsprechen sich nämlich:

§ 2, (5), 15°	$\mathfrak{M}^m$	$\mathfrak{N}^l$	$\sigma(P)$	$\mathfrak{M}_Q$	Q	α β γ	$t_\nu(\mathfrak{w})$	$\mathfrak{w}(\mathfrak{x})$	M	∂A_s	∂B_l
Hier	G	$\|w\| < \infty$	$f(P)$	$\mathfrak{N}(w)$	w	α β γ	$t_\nu(\mathfrak{w})$	$\mathfrak{w}(\mathfrak{x})$	M	∂A_{2n-2}	$\partial B_2(w)$

Daher sind Satz 15.1 und der Zusatz richtig, w. z. b. w.

Satz 5.2. Analytische Schichtzerlegung einer Hyperfläche.

Voraussetzung. *Die Funktion $f(P)$ sei auf der offenen Menge G der Mannigfaltigkeit $\mathfrak{M}^{2n}$ meromorph und in keinem Teilgebiet konstant. Die Vielfachheit ihrer w-Stelle sei $\nu(P, w)$. Sie habe die w-Stellenfläche $\mathfrak{N}(w)$. Die stetigdifferenzierbare, orientierte Teilmannigfaltigkeit $\mathfrak{S}^{2n-1} \subset G$ von $\mathfrak{M}^{2n}$ werde durch $f(P)$ in eine glatte Kurve $\mathfrak{C}$, das heisst, in eine eindimensionale, stetigdifferenzierbare, orientierte Teilmannigfaltigkeit der w-Ebene abgebildet. Die Mannigfaltigkeit $\mathfrak{S}^{2n-1}$ liege auf dem Rand der offenen*

Menge $H \subset G$ *und habe eine äussere Normale bezüglich* H. *Die Kurve* $\mathfrak{C}$ *liege auf dem Rand einer offenen Menge* $H^* \supseteq \{w \mid w = f(P),\ P \in H\}$ *und habe eine äussere Normale bezüglich* H^*. *Das Differential* $\partial A_{2n-2}(P)$ *sei auf der messbaren Menge* $M \subseteq \mathfrak{S}^{2n-1}$ *und das Differential* $\partial B_1(w)$ *auf* $\mathfrak{C}$ *erklärt. Über die Menge* M *sei das Differential* $\partial A_{2n-2}(P)\, \partial B_1(f(P))$ *integrierbar.*

Behauptung. *Es gibt eine Nullmenge* N_1 *von* $\mathfrak{C}$, *sodass* $\int\limits_{\mathfrak{N}(w) \cap M} \partial A_{2n-2}$ *für alle* $w \in \mathfrak{C} - N_1 - \{w \mid \partial B_1(w) = 0\}$ *existiert. Trägt* $\mathfrak{N}(w)$ *seine natürliche Orientierung, so gilt*

$$\int\limits_M \partial A_{2n-2}\, \partial B_1(f(P)) = \int\limits_{w \in \mathfrak{C}} \Big\{ \int\limits_{\mathfrak{N}(w) \cap M} \nu(P, w)\, \partial A_{2n-2}(P) \Big\}\, \partial B_1(w). \tag{5.2}$$

Zusatz. *Ist* $\partial A_{2n-2}(P)\, \partial B_1(f(P))$ *messbar, hat* $\partial A_{2n-2}(P)$ *längs* $\mathfrak{N}(w)$ *die Dichte* $a(P; w)$ *und existiert das Integral* $\int\limits_{w \in \mathfrak{C}} \int\limits_{\mathfrak{N}(w) \cap M} |a(P, w)|\, \partial B_1(w)$, *so ist* $\partial A_{2n-2}(P)\, \partial B_1(f(P))$ *über die messbare Menge* M *integrierbar.*

Beweis. Wie im Beweis von Satz 5.1 kann man o. B. d. A. die Funktion $f(P)$ in G analytisch mit $\partial f \neq 0$ annehmen. Dann ist $\nu(P, w) \leq 1$. Der Satz von Fubini § 2 (5) 15° wird angewandt. Man wählt den Punkt $P_0 \in \mathfrak{S}^{2n-1}$ und die Abbildungen $\alpha(t) \in \mathfrak{P}(\mathfrak{C})$, $\gamma(\mathfrak{w}) \in \mathfrak{P}(\mathfrak{S}^{2n-1})$ mit $P_0 \in U_\gamma$ und $w_0 = f(P_0) \in U_\alpha$ beliebig. Dann ist zunächst zu beweisen, dass die Abbildung

$$t(\mathfrak{w}) = \alpha^{-1} f(\gamma(\mathfrak{w})) \tag{5.3}$$

eine Funktionalmatrix vom Rang 1 hat, das heisst, dass grad $t(\mathfrak{w}) \neq 0$ ist. Es reicht dies für ein α und ein γ zu zeigen. O. B. d. A. kann man daher

$$\alpha(t) = t + i\,\psi(t) \tag{5.4}$$

annehmen. Wegen $\partial f \neq 0$ gibt es eine Abbildung $\delta(\mathfrak{v}, w) \in \mathfrak{P}(\mathfrak{M}^{2n})$ mit $P_0 \in U_\delta$ und $f(\delta(\mathfrak{v}, w)) \equiv w$. Es werde

$$v_\nu = x_{2\nu-1} + i\,x_{2\nu} \quad \text{für} \quad \nu = 1, \ldots, n-1 \quad \text{und} \quad w = u + i\,v \tag{5.5}$$

gesetzt. Im $(\mathfrak{x}, u, v)$-Raum wird das Koordinatensystem $\mathfrak{e}_1, \ldots, \mathfrak{e}_{2n}$ gewählt. Dann ist $\delta^{-1}\gamma(\mathfrak{w}) = \mathfrak{x}(\mathfrak{w}) + u(\mathfrak{w})\, \mathfrak{e}_{2n-1} + v(\mathfrak{w})\, \mathfrak{e}_{2n}$. Es ist

$$t(\mathfrak{w}) + i\,\psi(t(\mathfrak{w})) = f(\gamma(\mathfrak{w})) = f(\delta\delta^{-1}\gamma(\mathfrak{w})) = u(\mathfrak{w}) + i\,v(\mathfrak{w}). \tag{5.6}$$

Die Normale im Punkt $\delta^{-1}\gamma(\mathfrak{w})$ auf $\delta^{-1}(\mathfrak{S}^{2n-1})$ ist daher, wenn $\lambda > 0$ geeignet gewählt ist:

$$(5.7)\qquad \mathfrak{n}(\mathfrak{w}) = \lambda \cdot \begin{vmatrix} e_1 & \dots e_{2n-2} & e_{2n-1} & e_{2n} \\ x_{1w_1} & \dots x_{2n-2\,w_1} & t_{w_1} & \psi' t_{w_1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x_{1w_{2n-1}} & \dots x_{2n-2\,w_{2n-1}} & t_{w_{2n-1}} & \psi' t_{w_{2n-1}} \end{vmatrix} =$$

$$= \lambda \det(\operatorname{grad} x_1, \dots, \operatorname{grad} x_{2n-2}, \operatorname{grad} t)\,(\psi' e_{2n-1} - e_{2n}).$$

Also ist grad $t(\mathfrak{w}) \neq 0$. Daher gilt (5.2), wenn die Orientierung von $\mathfrak{N}(w)$ richtig gemäss § 2 (5) 15° a gewählt ist. Wenn die Orientierung wie in § 2 gewählt ist, so ist $\beta(\mathfrak{x}) = \delta(\varepsilon x_1, x_2, \dots, x_{2n-2}, u, v) \in \mathfrak{P}(\mathfrak{N}(w))$, wobei $\varepsilon = \pm 1$ ist. Es wird $\varepsilon = +1$ behauptet. Es sei $\tilde{\mathfrak{x}} = (\varepsilon x_1, x_2, \dots, x_{2n-2})$. Setzt man $\tilde{\mathfrak{w}}(\mathfrak{x}) = \gamma^{-1}\beta(\mathfrak{x})$ und $\mathfrak{w}(\mathfrak{x}) = = \gamma^{-1}\delta(\mathfrak{x}, w)$, so ist nach der Orientierungsvorschrift

$$(5.8)\qquad 0 < \det(\operatorname{grad}_{\mathfrak{w}} t, \tilde{\mathfrak{w}}_{x_1}(\mathfrak{x}) \dots, \tilde{\mathfrak{w}}_{x_{2n-2}}(\mathfrak{x})) = \varepsilon \det(\operatorname{grad}_{\mathfrak{w}} t, \mathfrak{w}_{x_1}(\tilde{\mathfrak{x}}), \dots, \mathfrak{w}_{x_{2n-2}}(\tilde{\mathfrak{x}})),$$

wobei der Gradient bei $\tilde{\mathfrak{w}}(\mathfrak{x}) = \mathfrak{w}(\tilde{\mathfrak{x}})$ zu bilden ist. Für jedes hinreichend kleine positive $\eta > 0$ wird der Punkt $\delta^{-1}\gamma(\mathfrak{w}) - \lambda\eta\,\mathfrak{n}(\mathfrak{w}) \in H$ in den Punkt

$$(5.9)\qquad -\lambda\eta \det(\operatorname{grad} x_1, \dots, \operatorname{grad} x_{2n-2}, \operatorname{grad} t)\cdot(\psi' - i) \in H^*$$

abgebildet. Da $\mathfrak{m} = \sqrt{(1 + |\psi'|^2)^{-1}}\,(\psi' - i)$ die äussere Normale auf $\mathfrak{C}$ ist, erhält man

$$(5.10)\qquad \det(\operatorname{grad} t, \operatorname{grad} x_1, \dots, \operatorname{grad} x_{2n-2}) > 0.$$

Gemäss der Definition von $\mathfrak{w}(\mathfrak{x})$ und $\mathfrak{x}(\mathfrak{w})$ erhält man unter Berücksichtigung von (5.4) und (5.6) durch „Rändern" der in (5.11) auftretenden Determinanten die Beziehung:

$$(5.11)\qquad \begin{aligned} 0 &< 1 + |\operatorname{grad} t|^2 = \\ &= \det(\operatorname{grad} t, \mathfrak{w}_{x_1}(\tilde{\mathfrak{x}}), \dots, \mathfrak{w}_{x_{2n-2}}(\tilde{\mathfrak{x}})) \det(\operatorname{grad} t, \operatorname{grad} x_1, \dots, \operatorname{grad} x_{2n-2}), \end{aligned}$$

wobei die Gradienten bei $\mathfrak{w} = \mathfrak{w}(\tilde{\mathfrak{x}})$ zu bilden sind. Aus (5.11), (5.10) und (5.8) folgt $\varepsilon > 0$, also $\varepsilon = 1$. Daher hat $\mathfrak{N}(w)$ seine natürliche Orientierung, w. z. b. w.

Der nächste Satz zeigt die Stetigkeit eines Integrales über eine w-Stellenfläche.

Satz 5.3. Stetigkeit eines Integrales.

Voraussetzung. *Die Funktion $f(P)$ sei auf der offenen Menge G der Mannigfaltigkeit $\mathfrak{M}^{2n}$ regulär und in keinem Teilgebiet konstant. Die Vielfachheit ihrer w-Stelle P sei $\nu(P, w)$ und $\mathfrak{N}(w)$ ihre w-Stellenfläche. Das Differential $\partial A_{2n-2}(P)$ sei auf der kompakten Menge $K \subset G$ stetig. Der Rand von K sei R. Es sei $A = \{P \mid \partial A_{2n-2}(P) = 0\} \cap K$. Der Durchschnitt $\mathfrak{N}(0) \cap (R - A)$ sei eine Nullmenge auf $\mathfrak{N}(0)$.*

Behauptung. *Das Integral*

$$I(w) = \int\limits_{\mathfrak{N}(w) \cap K} \nu(P, w)\, \partial A_{2n-2} \tag{5.12}$$

ist in $w = 0$ *stetig.*

Beweis. Zunächst wird angenommen, dass $\mathfrak{M}^{2n}$ der $\mathfrak{z}$-Raum ist. Das Koordinatensystem werde so gewählt, dass die Nullstellenfläche $\mathfrak{N}(0)$ jede achsenparallele, zweidimensionale, analytische Ebene in höchstens abzählbar vielen Punkten trifft. O. B. d. A. ist[14]

$$\begin{aligned} \partial A_{2n-2} = \left(\frac{i}{2}\right)^{n-1} \Bigg\{ & \sum_{\substack{\mu,\nu=1 \\ \mu \neq \nu}}^{n} b_{\mu\nu}\, \partial \bar{z}_\mu\, \partial z_\nu\, \partial z_1\, \partial \bar{z}_1 \ldots \overset{\mu}{\Vert} \ldots \overset{\nu}{\Vert} \ldots \partial z_n\, \partial \bar{z}_n + \\ & + \sum_{\mu=1}^{n} b_{\mu\mu}\, \partial z_1\, \partial \bar{z}_1 \ldots \overset{\mu}{\Vert} \ldots \partial z_n\, \partial \bar{z}_n \Bigg\}. \end{aligned} \tag{5.13}$$

Das euklidische Oberflächenelement einer Nullstellenfläche $\mathfrak{N}$ ist

$$\partial v_{2n-2} = \left(\frac{i}{2}\right)^{n-1} \sum_{\mu=1}^{n} \partial z_1\, \partial \bar{z}_1 \ldots \overset{\mu}{\Vert} \ldots \partial z_n\, \partial \bar{z}_n. \tag{5.14}$$

Die Menge der gewöhnlichen Punkte von $\mathfrak{N}$ sei $\hat{\mathfrak{N}}$. Längs $\hat{\mathfrak{N}}$ habe ∂A_{2n-2} die Dichte a und ∂v_{2n-2} die Dichte v. Ferner ist

$$M(\mathfrak{z}) = n \sum_{\mu,\nu=1}^{n} |b_{\mu\nu}(\mathfrak{z})| \tag{5.15}$$

stetig auf K und Null auf A. Ist $\mathfrak{z}(\mathfrak{u}) \in \mathfrak{P}(\hat{\mathfrak{N}})$ eine beliebige Parameterdarstellung von $\mathfrak{N}$, so gilt[14, 16]

$$\begin{aligned} |a| \leq \sum_{\mu \neq \nu} |b_{\mu\nu}| & \left| \frac{\partial(\bar{z}_\mu, z_\nu, z_1, \bar{z}_1, \ldots \overset{\mu}{\Vert} \ldots \overset{\nu}{\Vert} \ldots, z_n, \bar{z}_n)}{\partial(u_1, \bar{u}_1, \ldots, u_{n-1}, \bar{u}_{n-1})} \right| + \\ & + \sum_{\mu=1}^{n} |b_{\mu\mu}| \left| \frac{\partial(z_1, \bar{z}_1, \ldots \overset{\mu}{\Vert} \ldots, z_n, \bar{z}_n)}{\partial(u_1, \bar{u}_1, \ldots, u_{n-1}, \bar{u}_{n-1})} \right| \leq \\ \leq M(\mathfrak{z}) \frac{1}{n} \sum_{\mu,\nu=1}^{n} & \left| \frac{\partial(z_1, \ldots \overset{\mu}{|} \ldots, z_n)}{\partial(u_1, \ldots, u_{n-1})} \right| \left| \frac{\partial(z_1, \ldots \overset{\nu}{|} \ldots, z_n)}{\partial(u_1, \ldots, u_{n-1})} \right| \leq \\ \leq M(\mathfrak{z}) \sum_{\mu=1}^{n} & \left| \frac{\partial(z_1, \ldots \overset{\mu}{|} \ldots, z_n)}{\partial(u_1, \ldots, u_{n-1})} \right|^2 = M(\mathfrak{z})\, v. \end{aligned}$$

Für jede messbare Menge $M \subseteq \mathfrak{N}(w)$ gilt daher

$$\left| \int\limits_{M \cap \mathfrak{N}(w)} \nu(\mathfrak{z}, w)\, \partial A_{2n-2} \right| \leq \int\limits_{M \cap \mathfrak{N}(w)} M(\mathfrak{z})\, \nu(\mathfrak{z}, w)\, \partial v_{2n-2}. \tag{5.16}$$

Der Beweis wird nun in verschiedenen Schritten erbracht.

a) Die Funktion $\psi(\mathfrak{z}, w)$ sei für alle $\mathfrak{z} \in K$ und $|w| \leq \delta$ stetig. Auf $A \cap R$ sei $\psi(\mathfrak{z}, 0) = 0$. Die Vielfachheit der w-Stelle z der Funktion $f(\mathfrak{x}, z)$ sei $\nu_n(\mathfrak{x}, z, w)$. Bei der Projektion

$$\pi: \quad \mathfrak{z} = (z_1, \ldots, z_n) \to \mathfrak{x} = \pi\mathfrak{z} = (z_1, \ldots, z_{n-1}) \tag{5.17}$$

geht die Menge K in die kompakte Menge K' und die Nullmenge $\mathfrak{N}(0) \cap (R - A)$ in die Nullmenge N' über. Dann ist

$$\varphi(\mathfrak{x}, w) = \sum_{(\mathfrak{x}, z) \in K} \nu_n(\mathfrak{x}, z, w)\, \psi(\mathfrak{x}, z, w) \tag{5.18}$$

auf $K_1 = K' \times \{w \mid |w| \leq \delta\}$ beschränkt und in jedem Punkt $\mathfrak{x} \in K' - N'$, $w = 0$ stetig. Denn zu jedem Punkt $(\mathfrak{x}_1, w_1) \in K_1$ gibt es ein $\eta > 0$ und eine offene Menge G_1 mit $K \subset G_1 \subset G$, sodass

$$\sum_{(\mathfrak{x}, z) \in K} \nu_n(\mathfrak{x}, z, w) \leq \sum_{(\mathfrak{x}_1, z) \in G_1} \nu_n(\mathfrak{x}_1, z, w_1) < \infty \tag{5.19}$$

für alle $|\mathfrak{x} - \mathfrak{x}_1| < \eta$, $|w - w_1| < \eta$ gilt. Daher sind $\sum\limits_{(\mathfrak{x}, z) \in K} \nu_n(\mathfrak{x}, z, w)$ und $\varphi(\mathfrak{x}, w)$ auf K_1 beschränkt. Der Punkt $\mathfrak{x}_0 \in K' - N'$ sei beliebig gewählt. Die verschiedenen Nullstellen von $f(\mathfrak{x}_0, z)$ mit $(\mathfrak{x}_0, z) \in K$ seien $z_1, \ldots, z_r$. Eine positive Zahl δ_0 werde so gewählt, dass $f(\mathfrak{z})$ auf dem Kreis $\{\mathfrak{z} \mid \mathfrak{z} = (\mathfrak{x}_0, z)$ *und* $|z - z_\varrho| \leq \delta_0\}$ noch analytisch ist und ausser dem Mittelpunkt keine Nullstelle hat. Dann ist $\sum\limits_{|z - z_\varrho| < \delta_0} \nu_n(\mathfrak{x}, z, w) = \nu_n(\mathfrak{x}_0, z_\varrho, 0)$, wenn nur $|\mathfrak{x} - \mathfrak{x}_0| < \eta_0$ und $|w| \leq \eta_0 < \delta$ ist. Setzt man $\psi(\mathfrak{z}, w) = 0$ für $\mathfrak{z} \notin K$, $|w| \leq \delta$, so ist ψ in allen Punkten $(\mathfrak{x}_0, z_\varrho, 0)$ stetig. Daher strebt

$$\varphi(\mathfrak{x}, w) - \varphi(\mathfrak{x}_0, 0) = \sum_{\varrho=1}^{r} \sum_{|z - z_\varrho| < \delta_0} \nu_n(\mathfrak{x}, z, w) \{\psi(\mathfrak{x}, z, w) - \psi(\mathfrak{x}_0, z_\varrho, 0)\} \to 0$$

für $\mathfrak{x} \to \mathfrak{x}_0$, $w \to w_0$. Die Funktion $\varphi(\mathfrak{x}, w)$ ist für $\mathfrak{x} \in K' - N'$ in $w = 0$ stetig.

b) Unter denselben Voraussetzungen wie in a) ist das Integral

$$J(w) = \int_{\mathfrak{N}(w) \cap K} \nu(\mathfrak{z}, w)\, \psi(\mathfrak{z}, w)\, \partial z_1\, \partial \bar{z}_1 \ldots \partial z_{n-1}\, \partial \bar{z}_{n-1}$$

in $w = 0$ stetig. Denn nach [I] Hilfssatz 7 ist

$$\begin{aligned} J(w) &= \int_{K_1'} \sum_{(\mathfrak{x}, z) \in K} \nu_n(\mathfrak{x}, z, w)\, \psi(\mathfrak{x}, z, w)\, \partial x_1\, \partial \bar{x}_1 \ldots \partial x_{n-1}\, \partial \bar{x}_{n-1} = \\ &= \int_{K'} \varphi(\mathfrak{x}, w)\, \partial x_1\, \partial \bar{x}_1 \ldots \partial x_{n-1}\, \partial \bar{x}_{n-1}. \end{aligned} \tag{5.20}$$

Da $\varphi(\mathfrak{x}, w)$ in K_1 beschränkt und in allen Punkten $\mathfrak{x} \in K' - N'$ in $w = 0$ stetig ist, ist $J(w)$ in $w = 0$ stetig.

c) In $w=0$ ist das Integral

$$\int\limits_{\mathfrak{N}(w)\cap K} \nu(\mathfrak{z}, w)\,\psi(\mathfrak{z}, w)\,\partial v_{2n-2}(\mathfrak{z}) \tag{5.21}$$

nach b) stetig.

d) Lässt sich in einer Umgebung von K die Gleichung $f(\mathfrak{z})-w=0$ eindeutig nach einer Veränderlichen z_ϱ, zum Beispiel z_n, auflösen, so ist $J(w)$ in $w=0$ stetig. Denn für eine stetige Funktion $\psi(\mathfrak{z}, w)$ ist dann

$$I(w)=\int\limits_{\mathfrak{N}(w)\cap K} \nu(\mathfrak{z}, w)\,\partial A_{2n-2}=\int\limits_{\mathfrak{N}(w)\cap K} \psi(\mathfrak{z}, w)\,\nu(\mathfrak{z}, w)\,\partial z_1\,\partial\bar{z}_1\ldots\partial z_{n-1}\,\partial\bar{z}_{n-1}. \tag{5.22}$$

e) Hat die Nullstellenfläche $\mathfrak{N}(0)$ auf K nur gewöhnliche Punkte, so ist $I(w)$ in $w=0$ stetig. Um jeden Punkt $\mathfrak{z}_0\in\mathfrak{N}(0)\cap K$ gibt es nämlich eine offene Kugel $U(\mathfrak{z}_0)$ und eine in $\bar{U}(\mathfrak{z}_0)$ analytische Funktion $\varphi(\mathfrak{z})$ mit $f(\mathfrak{z})=\varphi(\mathfrak{z})^h$, wobei sich die Gleichung $\varphi(\mathfrak{z})-W=0$ in $U(\mathfrak{z}_0)$ gemäss d) auflösen lässt. Es sei $U^*(\mathfrak{z}_0)$ eine konzentrische Kugel vom halben Radius. Die Vielfachheit der W-Stelle $\mathfrak{z}$ der Funktion $\varphi(\mathfrak{z})$ sei $\tilde{\nu}(\mathfrak{z}, W)$ und $\tilde{\mathfrak{N}}(W)$ ihre W-Stellenfläche. Die im $\mathfrak{z}$-Raum stetige Funktion $\lambda(\mathfrak{z})$ sei ausserhalb $U^*(\mathfrak{z}_0)$ Null. Setzt man $W_\varrho=e^{\frac{2\pi i\varrho}{h}}\sqrt[h]{w}$ und $N_\varrho=\tilde{\mathfrak{N}}(W_\varrho)\cap U^*(\mathfrak{z}_0)\cap K$, so ist

$$\int\limits_{\mathfrak{N}(w)\cap K} \lambda(\mathfrak{z})\,\nu(\mathfrak{z}, w)\,\partial A_{2n-2}=\sum_{\varrho=1}^{h}\int\limits_{N_\varrho}\tilde{\nu}(\mathfrak{z}, W_\varrho)\,\lambda(\mathfrak{z})\,\partial A_{2n-2} \tag{5.23}$$

nach d) in $w=0$ stetig. Nun wählt man eine Überdeckung $U^*(\mathfrak{z}_\varrho)$ der kompakten Menge K und stetige Funktionen $\lambda_\varrho(\mathfrak{z})$ mit $\lambda_\varrho(\mathfrak{z})=0$ für $\mathfrak{z}\notin U^*(\mathfrak{z}_\varrho)$, wobei $\sum\limits_{\varrho=1}^{m}\lambda_\varrho(\mathfrak{z})=1$ für $\mathfrak{z}\in K$ ist. Dann ist

$$I(w)=\int\limits_{\mathfrak{N}(w)\cap K} \nu(\mathfrak{z}, w)\,\partial A_{2n-2}=\sum_{\varrho=1}^{m}\int\limits_{\mathfrak{N}(w)\cap K}\lambda_\varrho(\mathfrak{z})\,\nu(\mathfrak{z}, w)\,\partial A_{2n-2} \tag{5.24}$$

in $w=0$ stetig.

f) Die Menge der nichtgewöhnlichen Punkte von $\mathfrak{N}(0)$ sei M. Die kompakte Menge $M\cap K$ werde durch endlich viele offene Kugeln vom Radius ε überdeckt, deren Mittelpunkte auf $M\cap K$ liegen, und deren Vereinigung $M_\varepsilon\supset M\cap K$ ist. Nach [I] Hilfssatz 4 ist $Rd\,M_\varepsilon\cap\mathfrak{N}(0)$ eine Nullmenge auf $\mathfrak{N}(0)$. Bestimmt man $M(\mathfrak{z})$ nach (5.15), so ist gemäss c) das Integral $\int\limits_{\mathfrak{N}(w)\cap M_\varepsilon\cap K} M(\mathfrak{z})\,\nu(\mathfrak{z}, w)\,\partial v_{2n-2}$ in $w=0$ stetig. Der Parallelkörper $M^\varepsilon=\{\mathfrak{z}\mid|\mathfrak{z}-\mathfrak{x}|<\varepsilon$ *für ein* $\mathfrak{x}\in M\cap K\}$ enthält M_ε. Wegen $M^\varepsilon\subset M^\eta$ für $\varepsilon<\eta$ und wegen $\bigcap\limits_{\varepsilon>0} M^\varepsilon=M\cap K$ ist

$$(5.25)\qquad \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{M^\varepsilon\cap\mathfrak{N}(0)} M(\mathfrak{z})\,\nu(\mathfrak{z},0)\,\partial v_{2n-2}=\int_{M\cap K} M(\mathfrak{z})\,\nu(\mathfrak{z},0)\,\partial v_{2n-2}=0.$$

Daher erhält man aus (5.16) nach c) die Beziehung

$$\overline{\lim_{\varepsilon\to 0}}\ \overline{\lim_{w\to 0}}\left|\int_{\mathfrak{N}(w)\cap M_\varepsilon\cap K}\nu(\mathfrak{z},w)\,\partial A_{2n-2}\right|\le\overline{\lim_{\varepsilon\to 0}}\ \overline{\lim_{w\to 0}}\int_{\mathfrak{N}(w)\cap M_\varepsilon\cap K} M(\mathfrak{z})\,\nu(\mathfrak{z},w)\,\partial v_{2n-2}=$$

$$=\overline{\lim_{\varepsilon\to 0}}\int_{\mathfrak{N}(0)\cap M_\varepsilon\cap K} M(\mathfrak{z})\,\nu(\mathfrak{z},0)\,\partial v_{2n-2}\le$$

$$\le\overline{\lim_{\varepsilon\to 0}}\int_{\mathfrak{N}(0)\cap M^\varepsilon} M(\mathfrak{z})\,\nu(\mathfrak{z},0)\,\partial v_{2n-2}=0.$$

Der Rand R_ε der kompakten Menge $K_\varepsilon=K-M_\varepsilon$ liegt in $R\cup(\overline{M}_\varepsilon-M_\varepsilon)$. Also ist $\mathfrak{N}(0)\cap(R_\varepsilon-A)$ eine Nullmenge auf $\mathfrak{N}(0)$. Da $\mathfrak{N}(0)\cap K_\varepsilon$ nur aus gewöhnlichen Punkten besteht, ist $\int_{\mathfrak{N}(w)\cap K_\varepsilon}\cdot\ \nu(\mathfrak{z},w)\,\partial A_{2n-2}$ in $w=0$ stetig. Also gilt

$$\overline{\lim_{w\to 0}}\left|\int_{\mathfrak{N}(w)\cap K}\nu(\mathfrak{z},w)\,\partial A_{2n-2}-\int_{\mathfrak{N}(0)\cap K}\nu(\mathfrak{z},0)\,\partial A_{2n-2}\right|\le$$

$$\le\overline{\lim_{\varepsilon\to 0}}\ \overline{\lim_{w\to 0}}\left|\int_{\mathfrak{N}(w)\cap K_\varepsilon}-\int_{\mathfrak{N}(0)\cap K_\varepsilon}\right|+\overline{\lim_{\varepsilon\to 0}}\ \overline{\lim_{w\to 0}}\left|\int_{\mathfrak{N}(w)\cap M_\varepsilon\cap K}\right|+\overline{\lim_{\varepsilon\to 0}}\ \overline{\lim_{w\to 0}}\int_{\mathfrak{N}(0)\cap M^\varepsilon}\left|\ \right|=0+0+0.$$

Damit ist der Satz bewiesen, wenn $\mathfrak{M}^{2n}$ der $\mathfrak{z}$-Raum ist.

g) Der Satz gilt auch für eine beliebige komplexe Mannigfaltigkeit. Denn wählt man eine Dieudonné-Zerlegung von K durch offene Mengen U^ϱ und stetige Funktionen $\lambda_\varrho(P)$, wobei $\overline{U}^\varrho\subset U_{\alpha_\varrho}$ für eine Abbildung $\alpha_\varrho\in\mathfrak{P}$ ist, dann ist

$$(5.26)\qquad \int_{K\cap\mathfrak{N}(w)}\nu(P,w)\,\partial A_{2n-2}=\sum_{\varrho=1}^{r}\int_{K\cap\mathfrak{N}(w)\cap\overline{U}^\varrho}\lambda_\varrho(P)\,\nu(P,w)\,\partial A_{2n-2}$$

stetig in $w=0$, w. z. b. w.

Unter dem μ-Mass wird in der ganzen Arbeit das Oberflächenmass der Dimension $2n-1$ von Carathéodory verstanden. Das s-dimensionale Mass von Carathéodory ist so erklärt: Es sei $\varrho>0$ beliebig gewählt und $\{K_\nu\}$ eine Überdeckung der zu messenden Menge M durch abgeschlossene, konvexe Mengen K_ν, deren Durchmesser kleiner als ϱ ist. Mit $d^s(K_\nu)$ werde die obere Grenze der Lebesgueschen Masse der Projektionen von K_ν in alle s dimensionalen Ebenen des $\mathfrak{z}$-Raumes bezeichnet. Dann ist

$$\mu_s(M) = \lim_{\varrho \to 0} \underset{\{K_\nu\}}{\underline{\text{fin}}} \sum_{\nu=1}^{\infty} d^s(K_\nu) \leq \infty \tag{5.27}$$

das s dimensionale CARATHÉODORY-Mass. Aus $\mu_s(M) < \infty$ folgt $\mu_\varrho(M) = 0$ für $s < \varrho$. Liegt die Menge M in einer stetigdifferenzierbaren Teilmannigfaltigkeit $\mathfrak{M}^s$ des $\mathfrak{z}$-Raumes, so ist $\mu_s(M) = \int_M \partial\omega$, wobei $\partial\omega$ das euklidische Oberflächenelement von $\mathfrak{M}^s$ ist. Eine Menge M der Mannigfaltigkeit $\mathfrak{M}^{2n}$ heisse μ-messbar, μ-Nullmenge oder von endlichem μ-Mass, wenn es zu jedem Punkt $P \in \mathfrak{M}^{2n}$ und jeder Abbildung $\alpha \in \mathfrak{P}_P$ eine uniformisierbare Umgebung $U(P \mid \alpha)$ gibt, sodass dies für $\alpha^{-1}(U(P \mid \alpha) \cap M)$ gilt. Es reicht dies für ein $\alpha \in \mathfrak{P}_P$ zu fordern.

Satz 5.4. Das μ-Mass einer Niveaufläche.

Voraussetzung. *Die reelle Funktion $\psi(P)$ sei in der offenen Menge G der Mannigfaltigkeit $\mathfrak{M}^{2n}$ stetigdifferenzierbar. Die kompakte Menge F liege in G. Es sei*

$$A = \{P \mid \partial\psi(P) = 0\}, \quad M_r = \{P \mid \psi(P) = r\} \cap F. \tag{5.28}$$

Behauptung. *Für fast alle r hat die Menge M_r ein endliches μ-Mass der Dimension $2n-1$ und ist die Menge $M_r \cap A$ eine μ-Nullmenge.*

Beweis. Es reicht den Satz für ein beschränktes Gebiet G des Raumes der Vektoren $\mathfrak{z} = (z_1, \ldots, z_n)$ mit $z_\nu = x_{2\nu-1} + i\,x_{2\nu}$ und $2n = k$ zu beweisen. Das LEBESGUEsche Mass $m(D_r)$ der Menge $D_r = \{\mathfrak{x} \mid \psi(\mathfrak{x}) \geq r\} \cap G$ ist eine momotone Funktion

$$f(r) = m(D_r). \tag{5.29}$$

Sie ist also für fast alle r, das heisst für alle r, die nicht der Nullmenge N angehören, differenzierbar. Es werden $r \notin N$ und die abgeschlossene Menge $M \subseteq M_r$ beliebig gewählt. Ist $\varrho > 0$, so ist ihr Parallelkörper

$$M(\varrho) = \bigcup_{\mathfrak{y} \in F} \{\mathfrak{x} \mid |\mathfrak{x} - \mathfrak{y}| < \varrho\}. \tag{5.30}$$

Der Raum wird mit einem Netz der Maschenweite $\dfrac{\varrho}{2\sqrt{k}}$ überzogen. Die endlich vielen abgeschlossenen Würfel $K_1, \ldots, K_t$ des Netzes mit $K_\varrho \cap M \neq \emptyset$ überdecken M und liegen in $M(\varrho)$. Ist V der Inhalt der $k-1$ dimensionalen Einheitskugel, so ist der Inhalt der Projektion von K_ν in eine beliebige Ebene der Dimension $k-1$ kleiner als $V\varrho^{k-1}$. Mit der Bezeichnungsweise von (5.27) gilt

$$\mu(M) \leq \overline{\lim_{\varrho \to +0}} \sum_{\nu=1}^{t} d^{k-1}(K_\nu) \leq \overline{\lim_{\varrho \to 0}}\, t\, V \varrho^{k-1} =$$

$$(5.31) \qquad = \overline{\lim_{\varrho \to 0}}\, V \frac{(2\sqrt{k})^k}{\varrho}\, t \left(\frac{\varrho}{2\sqrt{k}}\right)^k \leq V (2k)^k \overline{\lim_{\varrho \to 0}} \frac{m\left(\bigcup_{\nu=1}^{t} K_\nu\right)}{\varrho} \leq$$

$$\leq V (2k)^k \overline{\lim_{\varrho \to 0}} \frac{m(M(\varrho))}{\varrho}.$$

Der Abstand des Randes von G von F sei kleiner als $2L$. Auf $M(L)$ sind die partiellen Ableitungen $\psi_{x_\nu}(\mathfrak{x})$ durch eine Konstante C beschränkt. Für $0 < \varrho \leq L$ ist $M(\varrho) \subset G$ und es gilt:

$$(5.32) \qquad F(\varrho) = \operatorname*{Max}_{\nu=1,\ldots,k} \operatorname*{Max}_{\mathfrak{x} \in \bar{M}(\varrho)} |\psi_{x_\nu}(\mathfrak{x})|.$$

Zu jedem Punkt $\mathfrak{x} \in M(\varrho)$ mit $0 < \varrho \leq L$ gibt es einen Punkt $\mathfrak{x}' \in M$, sodass $|\mathfrak{x} - \mathfrak{x}'| \leq \varrho$ ist. Die Verbindungsstrecke der beiden Punkte $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{x}'$ liegt in $M(\varrho) \subset G$. Auf ihr gibt es einen Punkt $\mathfrak{x}''$, sodass gilt:

$$(5.33) \qquad |\psi(\mathfrak{x}) - r| = |\psi(\mathfrak{x}) - \psi(\mathfrak{x}')| = \left|\sum_{\nu=1}^{k} \psi_{x_\nu}(\mathfrak{x}'')\,(x'_\nu - x_\nu)\right| \leq k\, F(\varrho)\, |\mathfrak{x}' - \mathfrak{x}|.$$

Daher gilt:

$$(5.34) \qquad M(\varrho) \subseteq \{\mathfrak{x} \mid \psi(\mathfrak{x}) \geq r - k F(\varrho)\varrho\} - \{\mathfrak{x} \mid \psi(\mathfrak{x}) \geq r + k F(\varrho)\varrho + \varrho^2\} \cap G.$$

Also lässt sich das Lebesguesche Mass von $M(\varrho)$ durch

$$(5.35) \qquad \frac{m(M(\varrho))}{\varrho} = -\frac{f(r + kF(\varrho)\varrho + \varrho^2) - f(r)}{\varrho} - \frac{f(r - kF(\varrho)\varrho) - f(r)}{-\varrho}$$

abschätzen. Da $f(r)$ an der betrachteten Stelle r differenzierbar ist, gilt:

$$(5.36) \qquad \mu(M) \leq V (2k)^k \overline{\lim_{\varrho \to +0}} \frac{m(M(\varrho))}{\varrho} \leq -V (2k)^{k+1} f'(r) \overline{\lim_{\varrho \to 0}} F(\varrho) \leq -V (2k)^{k+1} f'(r)\, C.$$

Also ist $\mu(M) < \infty$ für alle $r \notin N$. Insbesondere gilt das für $M = M_r$. Ist aber $M = M_r \cap A$, so strebt $F(\varrho) \to 0$ für $\varrho \to +0$. Also ist $\mu(M_r \cap A) = 0$ für alle $r \notin N$, w. z. b. w.

Werden ∂v_{2n-2} und ∂v_{2n} nach (2.55) für n statt k bestimmt, und ist $\partial \omega$ das euklidische Oberflächenelement von $M'_r = M_r - A$, so gilt:

$$(5.37) \qquad \partial \psi\, \partial^\perp \psi\, \partial v_{2n-2} = -|\operatorname{grad} \psi|^2\, \partial v_{2n},$$

wie (4.6) zeigt. Nach (4.31) hat das Differential $\partial^\perp \psi\, \partial v_{2n-2}$ längs M'_r den Wert

$$(5.38) \qquad \partial^\perp \psi\, \partial v_{2n-2} = |\operatorname{grad} \psi|\, \partial \omega.$$

Ist M'_r geeignet orientiert, so ergibt der Satz von Fubini

$$(5.39) \qquad \infty > \int_{F-A} |\operatorname{grad} \psi| \, \partial v_{2n} = \int_{-\infty}^{+\infty} \left\{ \int_{M'_r} \partial \omega \right\} dr.$$

Für fast alle r hat also $M'_r = M_r - A$ ein endliches μ-Mass. Aus (5.39) folgt also ein Teil der Behauptung von Satz 5.4.

Nun muss noch ein Integral über eine Hyperfläche abgeschätzt werden. Der Beweis wird analog zu Weyl [43] Kap. II § 4 Lemma 4 A Seite 87 und Lemma 4 D Seite 91 geführt.

Satz 5.5. Abschätzung eines Randintegrales.

Voraussetzung. *Die offene Menge G der Mannigfaltigkeit $\mathfrak{M}^{2n}$ enthalte den kompakten Teil K einer $2n-1$ dimensionalen, orientierten Teilmannigfaltigkeit $\mathfrak{T}^{2n-1}$ von $\mathfrak{M}^{2n}$. Das Differential ∂A_{2n-1} sei auf K stetig. Die Funktion $F_0(P)$ sei auf K erklärt, messbar, nichtnegativ und beschränkt. Die Funktion $f_0(P)$ sei auf G regulär und in keinem Teilgebiet identisch Null. Für alle $P \in K$ gelte $|f_0(P)| \leq F_0(P)$. Die Menge der auf K messbaren Funktionen $g(P)$ mit $|g(P)| \leq C$ sei $\mathfrak{G}_C$. Ausserdem sei $\mathfrak{F}_b$ die Menge der auf G regulären Funktionen $f \not\equiv 0$, für die auf G die Abschätzung $|f(P) - f_0(P)| < b$ und auf K die Abschätzung $|f(P)| \leq F_0(P)$ besteht. Für $f \in \mathfrak{F}_b$ und $g \in \mathfrak{G}_C$ werde gesetzt:*

$$(5.40) \qquad \Omega = \left\{ P \;\middle|\; \log \frac{F_0(P)}{|f(P)|} < \omega \text{ mit } P \in K \right\},$$

$$(5.41) \qquad I_\omega(f) = \int_\Omega g(P) \log \frac{F_0(P)}{|f(P)|} \, \partial A_{2n-1}.$$

Behauptung. *Es gibt eine Konstante $b > 0$, sodass das Integral*

$$(5.42) \qquad I(f) = \int_K g(P) \log \frac{F_0(P)}{|f(P)|} \, \partial A_{2n-1}$$

existiert und auf $\mathfrak{F}_b \times \mathfrak{G}_C$ gleichmässig beschränkt ist: $|I(f)| \leq N$ und sodass auf $\mathfrak{F}_b \times \mathfrak{G}_C$ gleichmässig

$$(5.43) \qquad I_\omega(f) \Rightarrow I(f) \text{ für } \omega \to \infty.$$

Beweis. Der Punkt $P_0 \in K$ werde beliebig gewählt. Dann gibt es eine Abbildung $\alpha(\mathfrak{z}) \in \mathfrak{P}_{P_0}$ mit $P_0 = \alpha(0) \in U_a$ und eine offene Umgebung $U \subset U_a$ von P_0, sodass gilt:

1. Es gibt zwei positive Zahlen $\varepsilon > 0$ und $\delta > 0$, sodass

$$(5.44) \qquad U'' = \{\mathfrak{z} \mid |z_\nu| \leq \delta \text{ für } \nu = 1, \ldots, n-1; \; |z_n| \leq 5\varepsilon\}$$

im Urbild $U' = \alpha^{-1}(U)$ liegt.

2. Es gibt eine auf U'' analytische Funktion $R(\mathfrak{z}) \neq 0$, eine ganze Zahl $q \geq 0$ und q Funktionen $a_1^0(\mathfrak{x}), \ldots, a_q^0(\mathfrak{x})$ auf

$$V = \{\mathfrak{x} \mid \mathfrak{x} = (x_1, \ldots, x_{n-1}) \textit{ mit } |x_\nu| \leq \delta\}, \tag{5.45}$$

sodass für alle $\mathfrak{z} = (\mathfrak{x}, z_n) \in U''$ die Gleichung gilt:

$$f_0(\alpha(\mathfrak{z})) = \prod_{\varrho=1}^{q} \{z_n - a_\varrho^0(\mathfrak{x})\} R(\mathfrak{z}). \tag{5.46}$$

3. Auf V gilt $|a_\varrho^0(\mathfrak{x})| \leq \varepsilon$ für $\varrho = 1, \ldots, q$.

4. Die Menge $W = V \times \{t \mid -5\varepsilon \leq t \leq +5\varepsilon\}$ wird durch

$$z_\nu = x_\nu \text{ für } \nu = 1, \ldots, n-1; \quad z_n = t + i\varphi(z_1, \ldots, z_{n-1}, t) \tag{5.47}$$

topologisch auf $\mathfrak{T}'' = \alpha^{-1}(\mathfrak{T}^{2n-1}) \cap U''$ abgebildet. Die Funktion $\varphi(\mathfrak{x}, t)$ ist reell und stetigdifferenzierbar auf einer W umfassenden offenen Menge.

5. Auf $\mathfrak{T}''$ hat das Differential ∂A_{2n-1} die Gestalt

$$\partial A_{2n-1} = a(\mathfrak{x}, t) \left(\frac{i}{2}\right)^{n-1} \partial x_1 \partial \bar{x}_1 \ldots \partial x_{n-1} \partial \bar{x}_{n-1} \partial t. \tag{5.48}$$

Die Funktion $a(\mathfrak{x}, t)$ ist auf W stetig.

Eine solche Wahl der Umgebung U ist immer möglich. Nun gibt es zwei Konstanten $b > 0$ und $M > 0$, für die gilt:

6. Im Zylinder $Z = V \times \{z_n \mid 2\varepsilon \leq |z_n| \leq 5\varepsilon\}$ ist $|f_0(\alpha(\mathfrak{z}))| \geq 2b > 0$.

7. Auf W gilt $|a(\mathfrak{x}, t)| < M$.

Ist nun $f \in \mathfrak{F}_b$, so folgt $|f(\alpha(\mathfrak{z})) - f_0(\alpha(\mathfrak{z}))| < b < |f_0(\alpha(\mathfrak{z}))|$ für $\mathfrak{z} \in Z$. Daher hat $f(\alpha(\mathfrak{z}))$ ebenfalls genau q Nullstellen $a_1(z_1, \ldots, z_{n-1}), \ldots, a_q(z_1, \ldots, z_{n-1})$ in $|z_n| \leq 2\varepsilon$. In V gilt wieder $|a_\varrho(\mathfrak{x})| \leq 2\varepsilon$ für $\varrho = 1, \ldots, q$. Aus $|f - f_0| < b$ und $|f_0| > 2b$ folgt $|f| > b$ auf Z. Daher gilt

$$|f(\alpha(\mathfrak{z}))| \geq \frac{b}{(5\varepsilon)^q} \prod_{\varrho=1}^{q} |z_n - a_\varrho(z_1, \ldots, z_{n-1})| \text{ für } \mathfrak{z} \in U''. \tag{5.49}$$

Die Teilmenge $\Omega \subseteq K$ wird zu jedem $\omega \leq \infty$ nach (5.40) erklärt. Ihr Urbild in $\mathfrak{T}''$ ist $\Omega'' = \alpha^{-1}(\Omega) \cap U''$. Dieses Ω'' besitzt eine Projektion $\tilde{\Omega}''$ in dem Parameterraum der Veränderlichen $(\mathfrak{x}, t)$. Bei festem Vektor $\mathfrak{x} \in V$ schneidet diese Projektion $\tilde{\Omega}''$ auf der Geraden $\mathfrak{x} = \text{const.}$ eine Menge L_ω aus. Es ist also

$$L_\omega = \left\{t \,\middle|\, \log \frac{F_0(\alpha(\mathfrak{z}))}{|f(\alpha(\mathfrak{z}))|} < \omega \text{ mit } \mathfrak{z} = (\mathfrak{x}, t + i\varphi) \in K\right\} \tag{5.50}$$

für jeden festen Vektor $\mathfrak{x} \in V$. Auf K sei $F_0(P) \leq A$ und

$$\eta = 5\,\varepsilon\, q \left(\frac{A}{b}\right)^{\frac{1}{q}} e^{-\frac{\omega}{2q}} \text{ d. h.: } \omega = 2 \log \left\{\frac{A}{b}\left(\frac{5\,\varepsilon\, q}{\eta}\right)^{q}\right\}. \tag{5.51}$$

Für $\omega \to \infty$ strebt $\eta \to 0$. Ist $|f(P)| \leq F_0(P)$ auf K und $|z_n - a_\varrho| > \frac{\eta}{q}$, so gilt:

$$0 \leq \log \frac{F_0(\alpha(\mathfrak{z}))}{|f(\alpha(\mathfrak{z}))|} \leq \log \left\{\frac{A}{b}\left(\frac{5\,\varepsilon\, q}{\eta}\right)^{q}\right\} = \frac{\omega}{2} < \omega \tag{5.52}$$

für jeden festen Vektor $\mathfrak{x} \in V$ mit $\mathfrak{z} = (\mathfrak{x}, z_n)$. Daher umfasst L_ω die Vereinigung

$$L'_\omega = \bigcup_{\varrho=1}^{q} \left\{ t \,\Big|\, |z_n - a_\varrho| > \frac{\eta}{q} \textit{ mit } z_n = t + i\varphi(\mathfrak{x}, t) \textit{ und } |t| \leq 5\,\varepsilon \right\}, \tag{5.53}$$

wobei $\mathfrak{x} \in V$ beliebig aber fest gewählt ist. Dann gilt

$$\begin{aligned}
&\int\limits_{L_\infty} a\, g \log \frac{F_0}{|f|}\, dt - \int\limits_{L_\omega} a\, g \log \frac{F_0}{|f|}\, dt \leq \\
&\leq \int\limits_{L_\infty - L_\omega} |a|\,|g| \log \frac{F_0}{|f|}\, dt \leq \\
&\leq 2\,\eta\, C\, M \log \frac{A}{b} + \sum_{\varrho=1}^{q} C\, M \int\limits_{|t + i\varphi - a_\varrho| < \frac{\eta}{p}} \log \frac{5\,\varepsilon}{|z_n - a_\varrho|}\, dt \leq \\
&\leq 2\,\eta\, C\, M \log \frac{A}{b} + C\, M \sum_{\varrho=1}^{q} \int\limits_{|t - \operatorname{Re} a_\varrho| < \frac{\eta}{q}} \log \frac{5\,\varepsilon}{|t - \operatorname{Re} a_\varrho|}\, dt \leq \\
&\leq 2\,\eta\, C\, M \log \frac{A}{b} + 2\,\eta\, C\, M \log \frac{5\,\varepsilon\, q}{\eta}.
\end{aligned} \tag{5.54}$$

Daher strebt

$$\int\limits_{L_\omega} a\, g \log \frac{F_0}{|f|}\, dt \Rightarrow \int\limits_{L_\infty} a\, g \log \frac{F_0}{|f|}\, dt \qquad \text{für } \omega \to \infty \tag{5.55}$$

gleichmässig für $\mathfrak{x} \in V$, $f \in \mathfrak{F}_b$ und $g \in \mathfrak{G}_C$. Setzt man

$$U_1(P_0) = \alpha(\{\mathfrak{z} \,|\, |z_\nu| < \delta \textit{ für } \nu = 1, \ldots, n-1;\ |z_n| < 5\,\varepsilon\}) \tag{5.56}$$

und integriert über V, so ergibt sich, dass

$$\int\limits_{\Omega \cap U_1(P_0)} g(P) \log \frac{F_0}{|f|}\, \partial A_{2n-1} \Rightarrow \int\limits_{K \cap U_1(P_0)} g(P) \log \frac{F_0(P)}{|f(P)|}\, \partial A_{2n-1} \tag{5.57}$$

für $\omega \to \infty$ gleichmässig für $f \in \mathfrak{F}_b$ und $g \in \mathfrak{G}_C$ konvergiert. Nun wird die Menge K mit endlich vielen Umgebungen $U_1(P_1), \ldots, U_1(P_r)$ überdeckt. Man setzt $b = \underset{\varrho=1,\ldots,r}{\mathrm{Min}}\ b(P_\varrho)$ und wählt eine DIEUDONNÉ-Zerlegung $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ zu dieser Überdeckung. Die Funktionen $\lambda_\varrho g$ gehören zu $\mathfrak{G}_C$. Also strebt

$$(5.58)\qquad \begin{aligned} I_\omega(f) &= \int_\Omega g \log \frac{F_0}{|f|} \partial A_{2n-1} = \sum_{\varrho=1}^{r} \int_{\Omega \cap U_1(P_\varrho)} \lambda_\varrho g \log \frac{F_0}{|f|} \partial A_{2n-1} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \sum_{\varrho=1}^{r} \int_{K \cap U_1(P_\varrho)} \lambda_\varrho g \log \frac{F_0}{|f|} \partial A_{2n-1} = \int_K g \log \frac{F_0}{|f|} \partial A_{2n-1} = I(f) \end{aligned}$$

gleichmässig auf $\mathfrak{F}_b \times \mathfrak{G}_C$. Daher gibt es ein ω_0, sodass $|I(f) - I_{\omega_0}(f)| < 1$ für alle $f \in \mathfrak{F}_b$ und $g \in \mathfrak{G}_C$ gilt. Also besteht auf $\mathfrak{F}_b \times \mathfrak{G}_C$ die gleichmässige Abschätzung

$$(5.59)\qquad |I(f)| \leq |I(f) - I_{\omega_0}(f)| + |I_{\omega_0}(f)| \leq 1 + \omega_0 C \int_K |\partial A_{2n-1}| = N.$$

Daher gelten die Behauptungen, w. z. b. w.

Da man $F_0 = \mathrm{Max}\, |f_0(P)|$ konstant wählen kann, folgt die Existenz des Integrales

$$(5.60)\qquad \int_K g(P) \log |f(P)| \partial A_{2n-1}$$

für jede auf K reguläre Funktion $f \not\equiv 0$. Da aber eine meromorphe Funktion örtlich der Quotient zweier analytischer Funktionen ist, existiert das Integral (5.60) auch für jede auf K meromorphe Funktion $f \not\equiv 0$. Ist H eine kompakte Menge aus $\mathfrak{M}^{2n}$, so folgt wie in [I] Hilfssatz 6 die Existenz der Integrale

$$(5.61)\qquad \int_H \partial^\perp \log f\, \partial A_{2n-1}, \quad \int_H \log |f|\, \partial A_{2n},$$

wobei ∂A_{2n-1} und ∂A_{2n} messbare Differentiale auf H sind, deren Koeffizienten bei beliebiger Wahl der Abbildung $\alpha \in \mathfrak{P}$ in $U_\alpha \cap H$ beschränkt seien.[17]

---

[17] Die Existenz des Integrales $\int_H \log |f| \partial A_{2n}$ wurde in [I] nicht bewiesen, kann aber wie dort oder auch mittels zahlreicher anderer Methoden gezeigt werden. Beispielsweise folgt sie sofort aus Satz 5.5, indem man dort $\mathfrak{M}^{2n}$ durch $\mathfrak{M}^{2n} \times \{z \,|\, |z| < \infty\}$, K durch $H \times \{x \,|\, 0 \leq x \leq 1\}$, $\mathfrak{T}^{2n-1}$ durch $\mathfrak{M}^{2n} \times \{x \,|\, -\infty < x < +\infty\}$ ersetzt. Dann ist $\log |f| \partial A_{2n}$ längs jeder Ebene $\{(P, z) \,|\, P = \text{konst.}\}$ konstant. Nach Satz 5.5 existiert das Integral

$$\int_0^1 \int_H \log |f| \partial A_{2n} \partial t = \int_H \log |f| \partial A_{2n}$$

w. z. b. w.

II. Kapitel.

Der erste Hauptsatz.

§ 6. Die Jensensche Formel.

Bei einer Veränderlichen ist der 1. Hauptsatz eine einfache Folgerung der Jensenschen Formel. Auch bei mehreren Veränderlichen gelingt es eine „Jensen*sche Formel*" zu beweisen, aus der sofort der 1. Hauptsatz folgt. Wie bei einer Veränderlichen wird diese Jensensche Formel mit dem Greenschen Integralsatz bewiesen.

Die Funktion ψ erfülle in der offenen Menge $G \subseteq \mathfrak{M}^{2n}$ eine Lipschitz-*Bedingung*, wenn es zu jedem Punkt $P_0 \in G$ und jeder Abbildung $\alpha \in \mathfrak{P}$ mit $P_0 \in U_\alpha$ eine Umgebung $U(P_0) \subseteq U_\alpha \cap G$ gibt, sodass

$$|\psi(\alpha(\mathfrak{z})) - \psi(\alpha(\mathfrak{z}'))| \leq L\,|\mathfrak{z} - \mathfrak{z}'| \tag{6.1}$$

für alle $\mathfrak{z}$, $\mathfrak{z}'$ aus $\alpha^{-1}(U(P_0))$ gilt. Dabei darf L von P_0 und α abhängen. Es reicht, (6.1) für ein $\alpha \in \mathfrak{P}$ mit $P_0 \in U_\alpha$ zu verlangen. Das totale Differential von $\psi(\alpha(\mathfrak{z}))$ existiert fast überall auf $\alpha^{-1}(U(P_0))$ und geht bei der stetigdifferenzierbaren Substitution $\mathfrak{z}(\mathfrak{y})$ an jeder Stelle, an der es existiert, in das totale Differential von $\psi(\alpha(\mathfrak{z}(\mathfrak{y})))$ über. Daher ist ψ fast überall auf G (total) differenzierbar.

Hilfssatz 1. Lipschitz-Bedingung.

Voraussetzung. *Die offene Menge G enthalte die offene Menge H, deren abgeschlossene Hülle $\bar{H}$ sei. Die Funktion ψ sei in G stetig und in H stetigdifferenzierbar mit in $\bar{H} \cap G$ stetigen Ableitungen. Auf der Menge $G—H$ nimmt die Funktion ψ nur endlich viele Werte an.*

Behauptung. *Die Funktion ψ erfüllt in G eine* Lipschitz-*Bedingung.*

Beweis. Der Punkt $P_0 \in G$ werde beliebig gewählt. Ist $P_0 \in G - \bar{H}$ oder $P_0 \in H$, so gibt es trivialerweise eine Abbildung $\alpha \in \mathfrak{P}$ mit $P_0 \in U_\alpha$ und eine Umgebung $U(P_0) \subseteq U_\alpha$, für die (6.1) gilt. Ist $P_0 \in \bar{H} - H$, so wählt man $\alpha \in \mathfrak{P}$ mit $P_0 \in U_\alpha$ und die offene Menge $U_1(P_0) \subseteq U_\alpha \cap G$ beliebig. Da ψ stetig ist, kann man $U_1(P_0)$ so verkleinern, dass $\psi = C$ auf $U_1(P_0) \cap (G - H)$ mit einer einheitlichen Konstanten C gilt. Die offene Kugel K mit dem Mittelpunkt $\mathfrak{z}_0 = \alpha^{-1}(P_0)$ liege mit ihrem Rand in $\alpha^{-1}(U_1(P_0))$. Es sei $z_\nu = x_{2\nu-1} + i\,x_{2\nu}$. Da die Ableitungen ψ_{x_ν} in $\bar{H}' = \alpha^{-1}(\bar{H}) \cap \bar{K}$ stetig sind, sind sie dort beschränkt: $|\psi_{x_\nu}| \leq M$. Dann gilt (6.1) mit $L = 5\,nM$ und $U(P_0) = \alpha(K) \subset U_\alpha \cap G$. Es seien nämlich $\mathfrak{z} \neq \mathfrak{z}'$ in K beliebig gewählt. Drei Fälle sind nun zu unterscheiden.

1. *Es liegen* $\mathfrak{z}$ *und* $\mathfrak{z}'$ *in* $H' = K \cap \alpha^{-1}(H)$. Dann bestimmt man ein $\tau_0 \leq 1$ und ein $\tau_0' > 0$, sodass alle Punkte $\mathfrak{y} = \mathfrak{z} + t(\mathfrak{z}' - \mathfrak{z})$ für $0 \leq t < \tau_0$ und $\tau_0' < t \leq 1$ in H' liegen, aber die Punkte $\mathfrak{a}_0 = \mathfrak{z} + \tau_0(\mathfrak{z}' - \mathfrak{z})$ und $\mathfrak{a}_0' = \mathfrak{z} + \tau_0'(\mathfrak{z}' - \mathfrak{z})$ nicht mehr. Existiert $\mathfrak{a}_0$, also auch $\mathfrak{a}_0'$, nicht, so sei $\tau_0 = \tau_0' = \frac{1}{2}$ und $\mathfrak{a}_0 = \mathfrak{a}_0' = \frac{1}{2}(\mathfrak{z} + \mathfrak{z}')$ gesetzt. In beiden Fällen ist $\psi(\alpha(\mathfrak{a}_0)) = \psi(\alpha(\mathfrak{a}_0'))$. Nun werde ε in $0 < \varepsilon < \operatorname{Min}(\tau_0, 1 - \tau_0')$ so klein gewählt, dass für $\mathfrak{a}_\varepsilon = \mathfrak{z} + (\tau_0 - \varepsilon)(\mathfrak{z}' - \mathfrak{z})$ und $\mathfrak{a}_\varepsilon' = \mathfrak{z} + (\tau_0' + \varepsilon)(\mathfrak{z}' - \mathfrak{z})$ die Abschätzung

$$|\psi(\alpha(\mathfrak{a}_\varepsilon)) - \psi(\alpha(\mathfrak{a}_0))| + |\psi(\alpha(\mathfrak{a}_\varepsilon')) - \psi(\alpha(\mathfrak{a}_0'))| < M|\mathfrak{z} - \mathfrak{z}'| \tag{6.2}$$

gilt. Auf der Verbindungsstrecke von $\mathfrak{z}$ nach $\mathfrak{z}'$ gibt es dann zwischen $\mathfrak{z}$ und $\mathfrak{a}_\varepsilon$ einen Punkt $\mathfrak{y} \in H'$ und zwischen $\mathfrak{a}_\varepsilon'$ und $\mathfrak{z}'$ einen Punkt $\mathfrak{y}' \in H'$, sodass gilt

$$\begin{aligned} &|\psi(\alpha(\mathfrak{z})) - \psi(\alpha(\mathfrak{z}'))| = |\psi(\alpha(\mathfrak{z})) - \psi(\alpha(\mathfrak{a}_0)) + \psi(\alpha(\mathfrak{a}_0')) - \psi(\alpha(\mathfrak{z}'))| \leq \\ &\leq |\psi(\alpha(\mathfrak{z})) - \psi(\alpha(\mathfrak{a}_\varepsilon))| + |\psi(\alpha(\mathfrak{a}_\varepsilon')) - \psi(\alpha(\mathfrak{z}'))| + M|\mathfrak{z} - \mathfrak{z}'| = \\ &= \Big|\sum_{\nu=1}^{2n} \psi_{x_\nu}(\alpha(\mathfrak{y}))(x_\nu - a_{\nu\varepsilon})\Big| + \Big|\sum_{\nu=1}^{2n} \psi_{x_\nu}(\alpha(\mathfrak{y}'))(x_\nu' - a_{\nu\varepsilon}')\Big| + M|\mathfrak{z} - \mathfrak{z}'| \leq \\ &\leq 5nM|\mathfrak{z} - \mathfrak{z}'| = L|\mathfrak{z} - \mathfrak{z}'|. \end{aligned} \tag{6.3}$$

2. *Es ist* $\mathfrak{z}' \in K - H'$ *und* $\mathfrak{z} \in H'$. Dann gelten dieselben Überlegungen wie in 1 mit $\mathfrak{a}_0' = \mathfrak{a}_\varepsilon' = \mathfrak{y}' = \mathfrak{z}'$.

3. *Es gehören* $\mathfrak{z}$ *und* $\mathfrak{z}'$ *zu* $K - H'$. Dann ist (6.1) trivial.

Also erfüllt ψ eine LIPSCHITZ-Bedingung in G, w.z.b.w.

Satz 6.1. Die GREENschen Formeln.

Voraussetzung. a) *Die offene Menge* H *der Mannigfaltigkeit* $\mathfrak{M}^{2n}$ *habe den Rand* S. *Es sei* $\bar{H} = H \cup S$ *kompakt. Der Rand* S *habe ein endliches* $2n-1$ *dimensionales* CARATHÉODORY-*Mass* (μ-*Mass*). *In* S *liege die orientierte, stetigdifferenzierbare Teilmannigfaltigkeit* S_0 *der Dimension* $2n-1$, *die bezüglich* H *eine äussere Normale habe. Es sei* $S_1 = S - S_0$ *eine* μ-*Nullmenge.*

b) *Das alternierende Differential* ∂A_{2n-2} *sei in* $\bar{H}$ *stetig, in* H *stetigdifferenzierbar mit in* $\bar{H}$ *stetigen Ableitungen und habe den Typ* $n-1$, *also die Gestalt* (5.13). *In* H *gelte* $\partial\partial A_{2n-2} = 0$.

c) *Die Funktionen* u *und* v *seien in* $\bar{H}$ *stetig, in* H *zweimal stetigdifferenzierbar mit in* $\bar{H}$ *stetigen Ableitungen bis zur 2. Ordnung.*

d) *Die in* $\bar{H}$ *stetige Funktion* ψ *erfülle in* H *eine* LIPSCHITZ-*Bedingung.*

e) *Das Differential* $\partial\psi\,\partial^\perp u\,\partial A_{2n-2}$ *sei über* H *integrierbar.*

Behauptung. *Die* GREEN*schen Formeln gelten*

$$\int_{S_0} \psi\, \partial^\perp u\, \partial A_{2n-2} = \int_H \partial\psi\, \partial^\perp u\, \partial A_{2n-2} + \int_H \psi\, \partial\partial^\perp u\, A_{2n-2}, \tag{6.4}$$

$$\int_{S_0} (u\,\partial^\perp v - v\,\partial^\perp u)\, \partial A_{2n-2} = \int_H (u\,\partial\partial^\perp v - v\,\partial\partial^\perp u)\, \partial A_{2n-2}. \tag{6.5}$$

Beweis. Wegen $\partial\partial A_{2n-2} = 0$ folgt (6.4) unmittelbar aus dem Integralsatz von Stokes[18]. Nach Satz 4.1 gilt $(\partial u\,\partial^\perp v - \partial v\,\partial^\perp u)\,\partial A_{2n-2} = 0$. Aus (6.4) folgt also (6.5). w.z.b.w.

Ist f eine meromorphe Funktion, so darf man die Funktion ψ auch durch $\log|f|$ ersetzen:

Satz 6.2. Die 1. GREENsche Formel für den Logarithmus.

Voraussetzung: *Aus Satz* 6.1 *werde* a) *bis* c) *vorausgesetzt, sowie:*

f) *Die Funktion* $f(P)$ *sei in* $\bar{H}$ *meromorph und verschwinde in keinem Teilgebiet von* H *identisch.*

g) *Es sei* $\log|f|\,\partial^\perp u\,\partial A_{2n-2}$ *über* S_0 *integrierbar.*

Behauptung. *Es gilt*

$$\int_{S_0} \log|f|\,\partial^\perp u\,\partial A_{2n-2} = \int_H \partial\log|f|\,\partial^\perp u\,\partial A_{2n-2} + \int_H \log|f|\,\partial\partial^\perp u\,\partial A_{2n-2}. \tag{6.6}$$

Die Voraussetzung g) *ist von selbst erfüllt, wenn* $\partial^\perp u\,\partial A_{2n-2}$ *längs* S_0 *eine nichtnegative Dichte hat.*

Beweis. Wie am Schluss von § 5 bemerkt wurde, existieren die beiden Integrale über H in (6.6). Der Satz 5.5 gibt nur die Existenz des Randintegrales in (6.6) für jede kompakte Teilmenge von S_0.

Die ganzen Zahlen $m < 0$ und $M > 0$ werden beliebig gewählt. Man setzt

$$H_{m,M} = \{P \mid m < \log|f| < M\} \cap H \subseteq H_{m-1,M} \subseteq H_{m-1,M+1},$$

$$\psi_{m,M} = \begin{cases} \log|f| & \text{für } m < \log|f| < M, \\ m & \text{für } \log|f| \le m, \\ M & \text{für } \log|f| \ge M. \end{cases} \tag{6.7}$$

Die Funktion $\psi_{m,M}$ ist auf $\bar{H}$ stetig und erfüllt nach Hilfssatz 1 auf H eine LIPSCHITZ-Bedingung. Wegen

$$\int_{H_{m,M}} \partial\log|f|\,\partial^\perp u\,\partial A_{2n-2} = \int_H \partial\psi_{m,M}\,\partial^\perp u\,\partial A_{2n-2} \tag{6.8}$$

ist $\partial\psi_{m,M}\,\partial^\perp u\,\partial A_{2n-2}$ über H integrierbar. Also gilt

[18] Siehe [I] Satz 8 Seite 137 oder in dieser Arbeit § 2 (5) 14°.

$$(6.9)\qquad \int\limits_{S_0} \psi_{m,M}\,\partial^{\perp} u\,\partial A_{2n-2} = \int\limits_{H_{m,M}} \partial \log|f|\,\partial^{\perp} u\,\partial A_{2n-2} + \int\limits_{H} \psi_{m,M}\,\partial\,\partial^{\perp} u\,\partial A_{2n-2}.$$

Da die beiden Integrale über H in (6.6) existieren, folgt

$$(6.10)\qquad \begin{aligned} &\lim_{m\to\infty}\ \lim_{M\to\infty} \int\limits_{S_0} \psi_{m,M}\,\partial^{\perp} u\,\partial A_{2n-2} = \\ &= \int\limits_{H} \partial \log|f|\,\partial^{\perp} u\,\partial A_{2n-2} + \int\limits_{H} \log|f|\,\partial\,\partial^{\perp} u\,\partial A_{2n-1}. \end{aligned}$$

Hat nun $\partial^{\perp} u\,\partial A_{2n-2}$ eine nichtnegative Dichte, so folgt aus (6.10) gemäss §2 (5) 10° die Integrierbarkeit von $\log|f|\,\partial^{\perp} u\,\partial A_{2n-2}$ über S_0. Ist aber dieses Differential über S_0 integrierbar, so folgt aus (6.10) gemäss §2 (5) 8° die Behauptung (6.6), w.z.b.w.

Hier zeigt sich der Vorteil, dass die GREENsche Formel (6.4) auch für eine Funktion ψ gilt, die nur eine LIPSCHITZ-Bedingung erfüllt. Ohne diese Tatsache lässt sich der Beweis von Satz 6.2 auch führen, jedoch wird er dann komplizierter. Bei den wesentlichen Anwendungen hat $\partial^{\perp} u\,\partial A_{2n-2}$ eine nichtnegative Dichte auf S_0.

Satz 6.3. Ein Residuensatz.

Voraussetzung. *Von Satz 6.1 werden a), b) und d) von Satz 6.2 werde f) vorausgesetzt. Ausserdem gelte:*

h) *Die Vielfachheit der Nullstelle P von f sei $\nu(P, 0)$, die der Polstelle P sei $\nu(P, \infty)$. Die Nullstellenfläche von f sei $\mathfrak{N}(0)$, die Polstellenfläche von f sei $\mathfrak{N}(\infty)$. Es werde $\nu(P) = \nu(P, 0) - \nu(P, \infty)$ und $\mathfrak{N} = \mathfrak{N}(0) \cup \mathfrak{N}(\infty)$ gesetzt.*

i) *Zu jedem Punkt $P_0 \in \bar{H}$ gebe es eine offene Umgebung $V(P_0)$ und in $\bar{V}(P_0)$ analytische Funktionen $g(P)$ und $h(P)$, die in jedem Punkt von $V(P_0)$ teilerfremd sind, sodass $f = \frac{g}{h}$ in $V(P_0)$ gilt und die Differentiale $\psi\,\partial^{\perp} \log|g|\,\partial A_{2n-2}$ und $\psi\,\partial^{\perp} \log|h|\,\partial A_{2n-2}$ über $\bar{V}(P_0) \cap S_0$, sowie die Differentiale $\partial\,\psi\,\partial^{\perp} \log|g|\,\partial A_{2n-2}$ und $\partial\,\psi\,\partial^{\perp} \log|h|\,\partial A_{2n-2}$ über $\bar{V}(P_0) \cap H$ integrierbar sind.*

j) *Es gebe eine Nullmenge M auf $\mathfrak{N}$, sodass $\psi(P) = 0$ für $P \in \mathfrak{N} \cap S - M$ ist.*

Behauptung. *Es gilt die Residuenformel*

$$(6.11)\qquad \int\limits_{S_0} \psi\,\partial^{\perp} \log|f|\,\partial A_{2n-2} = \int\limits_{H} \partial\,\psi\,\partial^{\perp} \log|f|\,\partial A_{2n-2} - 2\pi \int\limits_{\mathfrak{N}\cap H} \nu(P)\,\psi\,\partial A_{2n-2}.$$

Bemerkung. *Die Differentiale $\partial\,\psi\,\partial^{\perp} \log|g|\,\partial A_{2n-2}$ und $\partial\,\psi\,\partial^{\perp} \log|h|\,\partial A_{2n-2}$ sind sicher über $\bar{V}(P_0) \cap H$ integrierbar, falls ψ in einer $\bar{H}$ umfassenden offenen Menge eine LIPSCHITZ-Bedingung erfüllt, oder in $\bar{H}$ stetige Ableitungen hat. Dagegen brauchen $\partial^{\perp} \log|g|\,\partial A_{2n-2}$ und $\partial^{\perp} \log|h|\,\partial A_{2n-2}$ nicht immer über $S_0 \cap \bar{V}(P_0)$ integrierbar zu sein.*

Beweis. Da (6.11) für eine konstante Funktion offensichtlich richtig ist, kann man o. B. d. A. annehmen, dass die Funktion f in keinem Teilgebiet von H konstant ist.

Der Punkt $P_0 \in \overline{H}$ sei beliebig gewählt. Dann gibt es eine Abbildung $\alpha(\mathfrak{z}) \in \mathfrak{P}$ mit $P_0 = \alpha(0) \in U_a$. Es werde $z_\nu = x_{2\nu-1} + i x_{2\nu}$ gesetzt. Dann gibt es Zahlen r_0 und r mit $r_0 > r$, sodass der Würfel $\overline{U}'(P_0) = \{\mathfrak{z} \mid |x_\nu| \le r_0\}$ in $\alpha^{-1}(U_a \cap V(P_0))$ liegt, und dass die Seiten des Würfels $U_1'(P_0) = \{\mathfrak{z} \mid |x_\nu| < r\}$ aus der Nullmenge $S' = \alpha^{-1}(S \cap U_a)$ eine μ-Nullmenge ausschneiden. Es sei

$$
\begin{aligned}
U'(P_0) &= \{\mathfrak{z} \mid |x_\nu| < r_0\}, \quad U(P_0) = \alpha(U'(P_0)),\\
U_1'(P_0) &= \{\mathfrak{z} \mid |x_\nu| < r\}, \quad U_1(P_0) = \alpha(U_1'(P_0)),\\
U_2'(P_0) &= \{\mathfrak{z} \mid |x_\nu| < \tfrac{1}{2} r\}, \quad U_2(P_0) = \alpha(U_2'(P_0)).
\end{aligned}
\tag{6.12}
$$

Es ist

$$\overline{U}_2(P_0) \subset U_1(P_0) \subset \overline{U}_1(P_0) \subset U(P_0) \subset \overline{U}(P_0) \subset U_a \cap V(P_0) \tag{6.13}$$

$$\mu(Rd\, U_1'(P_0) \cap S') = 0. \tag{6.14}$$

Die Funktionen g und h werden gemäss der Voraussetzung bestimmt. Die Vielfachheit der Nullstelle P von g (bzw. von h) ist dieselbe wie die von f (bzw. die der Polstelle von f), nämlich $\nu(P, 0)$ (bzw. $\nu(P, \infty)$). Es ist $\mathfrak{N}(0) \cap V(P_0) = \{P \mid g(P) = 0\} \cap V(P_0)$ und $\mathfrak{N}(\infty) \cap V(P_0) = \{P \mid h(P) = 0\} \cap V(P_0)$. Die Funktion $\lambda(P)$ mit $0 \le \lambda(P) \le 1$ sei in $\mathfrak{M}^{2n}$ stetigdifferenzierbar und ausserhalb $U_2(P_0)$ identisch Null. Dann wird

$$
\begin{aligned}
&\int\limits_{S_0 \cap U(P_0)} \lambda(P)\, \psi(P)\, \partial^\perp \log|g|\, \partial A_{2n-2} =\\
&= \int\limits_{H \cap U(P_0)} \partial\{\lambda(P)\, \psi(P)\}\, \partial^\perp \log|g|\, \partial A_{2n-2} - 2\pi \int\limits_{\mathfrak{N}(0) \cap H} \nu(P, 0)\, \lambda\, \psi\, \partial A_{2n-2}
\end{aligned}
\tag{6.15}
$$

behauptet. Ist die Funktion g konstant, so ist die Gleichung (6.15) offensichtlich richtig. Ist g nicht konstant, so wird (6.15) in drei Schritten bewiesen.

1. **Schritt.** *Die Integration.*

Die Nullstellenfläche $\mathfrak{N}(0)$ werde mit einem Mantel T_ϱ umgeben. Dazu werde die Zahl $\varrho > 0$ beliebig gewählt. Man setzt nun

$$B_\varrho = \{P \mid |g(P)| > \varrho\} \cap U(P_0), \quad B_\varrho' = \alpha^{-1}(B_\varrho) \tag{6.16}$$

$$T_\varrho = \{P \mid |g(P)| = \varrho\} \cap U(P_0), \quad T_\varrho' = \alpha^{-1}(T_\varrho) \tag{6.17}$$

$$A = \{P \mid \partial g(P) = 0\} \cap U(P_0), \quad A' = \alpha^{-1}(A_\varrho) \tag{6.18}$$

$$Q_\varrho = T_\varrho - A \quad , \quad Q_\varrho' = \alpha^{-1}(Q_\varrho) \tag{6.19}$$

Nach (5.39) gilt für jede messbare Menge $Q \subseteq U'(P_0)$ die Umformung

$$\infty > \int_{Q-A} |\operatorname{grad} |g|| \, \partial v_{2n} = \int_{-\infty}^{+\infty} \left\{ \int_{Q'_\varrho \cap Q} \partial \omega \right\} d\varrho, \tag{6.20}$$

wobei $\partial \omega$ das euklidische Oberflächenelement von Q'_ϱ ist. Also hat, bis auf eine Nullmenge N_0 der Zahlen ϱ, die reellanalytische, orientierbare Teilmannigfaltigkeit Q_ϱ von $U(P_0)$ ein endliches μ-Mass, wie auch Satz 5.4 besagt. Wählt man für Q die Nullmenge $\alpha^{-1}(S) \cup Rd\, U'_1(P_0)$, so zeigt (6.20), dass bis auf eine Nullmenge N_1 der Zahlen ϱ der Durchschnitt $Q_\varrho \cap (S \cup Rd\, U_1(P_0))$ eine μ-Nullmenge ist. Da A aus endlich vielen komplexen Teilmannigfaltigkeiten mit Dimensionen $2k \leq 2n-2$ besteht, ist A eine μ-Nullmenge. Für $\varrho \notin N = N_0 \cup N_1$ und $\varrho > 0$ ist daher $T_\varrho \cap \{S \cup Rd\, U_1(P_0)\}$ eine μ-Nullmenge und hat T_ϱ ein endliches μ-Mass. Es werden nur noch solche Zahlen $\varrho > 0$ betrachtet, die nicht zur Nullmenge N gehören. Die Vereinigung der Würfelkanten von $U'_1(P_0)$, also

$$K' = \bigcup_{\substack{\mu,\nu=1 \\ \mu \neq \nu}}^{2n} \{\mathfrak{z} \mid x_\mu = x_\nu = r\}, \quad K = \alpha(K') \tag{6.21}$$

ist wieder eine μ-Nullmenge.

Als Vereinigung endlich vieler μ-Nullmengen ist

$$F_1 = [S \cap Rd\, U_1(P_0)] \cup [S \cap T_\varrho] \cup [T_\varrho \cap Rd\, U_1(P_0)] \cup [T_\varrho \cap A] \cup S_1 \cup K \tag{6.22}$$

eine μ-Nullmenge. Die Teilmannigfaltigkeiten $Rd\, U_1(P_0) - K$ und Q_ϱ mögen so orientiert werden, dass sie eine äussere Normale bezüglich $U_1(P_0)$ bzw. B_ϱ haben. Dann sind

$$F_2 = (Rd\, U_1(P_0) - K) \cap H \cap B_\varrho, \tag{6.23}$$

$$F_3 = Q_\varrho \cap U_1(P_0) \cap H, \tag{6.24}$$

$$F_4 = S_0 \cap B_\varrho \cap U_1(P_0) \tag{6.25}$$

als offene Teilmengen von $Rd\, U_1(P_0) - K$, bzw. Q_ϱ, bzw. S_0 selbst orientierte, stetig-differenzierbare, $2n-1$ dimensionale Teilmannigfaltigkeiten von $U(P_0)$, die bezüglich $U_1(P_0)$, bzw. B_ϱ, bzw. H eine äussere Normale haben. Wegen

$$F_2 \cap \bar{F}_3 \subseteq B_\varrho \cap \bar{Q}_\varrho = \emptyset, \quad \bar{F}_2 \cap F_3 \subseteq Rd\, U_1(P_0) \cap U_1(P_0) = \emptyset, \tag{6.26}$$

$$F_2 \cap \bar{F}_4 \subseteq H \cap \bar{S}_0 = \emptyset, \quad \bar{F}_2 \cap F_3 \subseteq Rd\, U_1(P_0) \cap U_1(P_0) = \emptyset, \tag{6.27}$$

$$F_3 \cap \bar{F}_4 \subseteq H \cap \bar{S}_0 = \emptyset, \quad \bar{F}_3 \cap F_4 \subseteq \bar{Q}_\varrho \cap B_\varrho = \emptyset \tag{6.28}$$

ist auch die Vereinigung

$$S_0^* = F_2 \cup F_3 \cup F_4 \tag{6.29}$$

eine orientierte, stetigdifferenzierbare, $2n-1$ dimensionale Teilmannigfaltigkeit von $U(P_0)$. Es ist

$$\bar{F}_1 \cap S_0^* = 0; \tag{6.30}$$

denn es gilt

$$\bar{F}_1 \cap F_2 \subseteq (S \cap H) \cup (\bar{T}_\varrho \cap B_\varrho) \cup (S_1 \cap H) \cup (K \cap \{Rd\, U_1(P_0) - K\}) = \emptyset \tag{6.31}$$

$$\bar{F}_1 \cap F_3 \subseteq (S \cap H) \cup (Rd\, U_1(P_0) \cap U_1(P_0)) \cup (\bar{A} \cap Q_\varrho) \cup (S_1 \cap H) \cup (K \cap U_1(P_0)) = \emptyset \tag{6.32}$$

$$\bar{F}_2 \cap F_3 \supseteq (Rd\, U_1(P_0) \cap U_1(P_0)) \cup (\bar{T}_\varrho \cap B_\varrho) \cup (S_1 \cap S_0) \cup (K \cap U_1(P_0)) = \emptyset. \tag{6.33}$$

Setzt man

$$H^* = B_\varrho \cap U_1(P_0) \cap H, \quad S^* = Rd\, H^*, \quad S_1^* = F_1 \cap S^*, \tag{6.34}$$

so wird

$$S^* = S_0^* \cup S_1^* \text{ mit } S_0^* \cap S_1^* = \emptyset \tag{6.35}$$

behauptet; letzteres folgt unmittelbar aus (6.30). Die andere Behauptung von (6.35) ergibt sich aus den Abschätzungen

$$\begin{aligned}
S^* &= \overline{B_\varrho \cap U_1(P_0) \cap H} - B_\varrho \cap U_1(P_0) \cap H \\
&\subseteq \bar{B}_\varrho \cap \bar{U}_1(P_0) \cap \bar{H} - B_\varrho \cap U_1(P_0) \cap H \\
&\subseteq \{Rd\, B_\varrho \cap U_1(P_0) \cap H\} \cup \{B_\varrho \cap Rd\, U_1(P_0) \cap H\} \\
&\quad \cup \{B_\varrho \cap U_1(P_0) \cap Rd\, H\} \cup \{Rd\, B_\varrho \cap Rd\, U_1(P_0) \cap H\} \\
&\quad \cup \{Rd\, B_\varrho \cap U_1(P_0) \cap Rd\, H\} \cup \{B_\varrho \cap Rd\, U_1(P_0) \cap Rd\, H\} \\
&\quad \cup \{Rd\, B_\varrho \cap Rd\, U_1(P_0) \cap Rd\, H\} \\
&\subseteq (F_1 \cup F_3) \cup (F_1 \cup F_2) \cup (F_1 \cup F_4) \cup F_1 \cup F_1 \cup F_1 \cup F_1 = F_1 \cup S_0^*,
\end{aligned}$$

$$S^* \subseteq (F_1 \cap S^*) \cup S_0^* = S_1^* \cup S_0^*. \tag{6.36}$$

Andererseits ist

$$\begin{aligned}
&S^* \supseteq \bar{B}_\varrho \cap U_1(P_0) \cap H - B_\varrho \cap U_1(P_0) \cap H = T_\varrho \cap H \cap U_1(P_0) \supseteq F_3, \\
&S^* \supseteq B_\varrho \cap \bar{U}_1(P_0) \cap H - B_\varrho \cap U_1(P_0) \cap H = B_\varrho \cap Rd\, U_1(P_0) \cap H \supseteq F_2, \\
&S^* \supseteq B_\varrho \cap U_1(P_0) \cap \bar{H} - B_\varrho \cap U_1(P_0) \cap H = B_\varrho \cap U_1(P_0) \cap S \supseteq F_4, \\
&S^* \supseteq F_2 \cup F_3 \cup F_4 = S_0^*.
\end{aligned} \tag{6.37}$$

Damit ist (6.35) beweisen. Da auf S^* die Menge S_0^* offen ist, ist S_1^* abgeschlossen also kompakt. Der Rand $S^* \subseteq S_1^* \cup Rd\, U_1(P_0) \cup T_\varrho \cup S_0$ hat ein endliches μ-Mass. Wegen (6.26) bis (6.28), (6.30), (6.34) und (6.35) gibt es zu jedem Punkt $P_1 \in F_2$, bzw. $\in F_3$, bzw. $\in F_4$ eine Umgebung $\tilde{U}(P_1) \subset U(P_0)$, sodass $\tilde{U}(P_1) \cap \bar{H}^* = \tilde{U}(P_1) \cap \bar{U}_1(P_0)$, bzw. $= \tilde{U}(P_1) \cap \bar{B}_\varrho$, bzw. $\tilde{U}(P_1) \cap \bar{H}$ ist. Daher ist die äussere Normale von F_2 bezüglich $U_1(P_0)$, bzw. von F_3 bezüglich B_ϱ, bzw. von F_4 bezüglich H eine äussere Normale von S_0^* bezüglich H^*. Es ist S_0^* eine stetigdifferenzierbare, orientierte Teilmannigfaltigkeit von $\mathfrak{M}^{2n}$ im Rande S^* der offenen Menge H^*, die bezüglich H^* eine äussere Normale hat. Wie die „Übersetzungstabelle"

Satz 6.1	$\mathfrak{M}^{2n}$	H	S	S_0	S_1	∂A_{2n-2}	u	v	ψ
Hier	$\mathfrak{M}^{2n}$	H^*	S^*	S_0^*	S_1^*	∂A_{2n-2}	$\log\|g\|$	$\log\|g\|$	$\lambda\,\psi$

zeigt, sind die Voraussetzungen von Satz 6.1 erfüllt. Es gilt:

$$\begin{aligned}\int_{S_0^*} \lambda(P)\,\psi\,\partial^\perp \log|g|\,\partial A_{2n-2} &= \\ = \int_{H^*} \partial(\lambda\psi)\,\partial^\perp \log|g|\,\partial A_{2n-2} &+ \int_{H^*} \lambda\,\psi\,\partial\,\partial^\perp \log|g|\,\partial A_{2n-2}.\end{aligned} \tag{6.38}$$

Weil $\log|g|$ der Realteil einer analytischen Funktion ist, ist gemäss (2.43) das Differential $\partial\,\partial^\perp \log|g|\,\partial A_{2n-2} \equiv 0$. Da die Funktion $\lambda(P)$ ausserhalb $U_2(P_0)$ verschwindet, gilt also

$$\begin{aligned}\int_{B_\varrho \cap H} \partial(\lambda\psi)\,\partial^\perp \log|g|\,\partial A_{2n-2} &= \\ = \int_{Q_\varrho \cap H} \lambda\,\psi\,\partial^\perp \log|g|\,\partial A_{2n-2} &+ \int_{S_0 \cap B_\varrho} \lambda\,\psi\,\partial^\perp \log|g|\,\partial A_{2n-2}.\end{aligned} \tag{6.39}$$

Bevor man den Grenzübergang $\varrho \to +0$ ausführen kann, muss noch das Integral über $Q_\varrho \cap H$ umgeformt werden.

2. **Schritt.** *Eine Integralumformung.*

Mit $\mathfrak{M}(w)$ werde die w-Stellenfläche von $g(P)$ in $U(P_0)$ bezeichnet. Die Vielfachheit der w-Stelle P von $g(P)$ sei $\tilde{\nu}(P, w)$. Für $w = 0$ gilt

$$\mathfrak{M}(0) = \mathfrak{N}(0) \cap U(P_0), \quad \tilde{\nu}(P, 0) = \nu(P, 0). \tag{6.40}$$

Dann wird

$$\int_{Q_\varrho \cap H} \lambda\,\psi\,\partial^\perp \log|g|\,\partial A_{2n-2} = \int_{\vartheta=0}^{2\pi} \Big\{ \int_{\mathfrak{M}(\varrho e^{i\vartheta}) \cap \bar{H}} \tilde{\nu}(P, \varrho e^{i\vartheta})\,\lambda\,\psi\,\partial A_{2n-2} \Big\}\, d\vartheta \tag{6.41}$$

behauptet. Zum Beweis dient Satz 5.2. Es entsprechen sich

Satz 5.2	f	G	$\mathfrak{M}^{2n}$	$\nu(P, w)$	$\mathfrak{N}(w)$	$\mathfrak{S}^{2n-1}$	$\mathfrak{C}$
Hier	g	$U(P_0)$	$\mathfrak{M}^{2n}$	$\tilde{\nu}(P, w)$	$\mathfrak{M}(w)$	Q_ϱ	$\lvert w\rvert=\varrho$

Satz 5.2	H	H^*	∂A_{2n-2}	M	$\partial B_1(w)$
Hier	B_ϱ	$\lvert w\rvert>\varrho$	$\lambda\psi\partial A_{2n-2}$	$Q_\varrho\cap\bar{H}$	$\partial^\perp\log\lvert w\rvert$

Wie die Tabelle zeigt, sind die Voraussetzungen von Satz 5.2 erfüllt. Da $Q_\varrho \cap \bar{H} - Q_\varrho \cap H$ eine Nullmenge auf Q ist, erhält man

$$(6.42)\qquad \int\limits_{Q_\varrho\cap H} \lambda\,\psi\,\partial^\perp \log|g|\,\partial A_{2n-2} = \int\limits_{|w|=\varrho} \Big\{ \int\limits_{\mathfrak{M}(w)\cap\bar{H}\cap Q_\varrho} \tilde{\nu}(P, w)\,\lambda\,\psi\,\partial A_{2n-2}\Big\}\,\partial^\perp \log|w|\,.$$

Der Kreis $|w|=\varrho$ ist dabei so orientiert, dass seine Normale ins Äussere von $|w|>\varrho$, also ins Kreisinnere zeigt und mit der Tangente in der Reihenfolge: „Normale, Tangente" ein Rechtssystem bildet. Der Kreis ist also im Uhrzeigersinn orientiert. Daher ist

$$(6.43)\qquad w=\alpha(\vartheta)=\varrho\,e^{-i\vartheta}\qquad (0\le\vartheta\le 2\pi)$$

eine zulässige Parameterdarstellung. Es gilt

$$(6.44)\qquad \partial w = -i\,\varrho\,e^{-i\vartheta}\,\partial\vartheta,\quad \partial\bar{w}=i\,\varrho\,e^{i\vartheta}\,\partial\vartheta,$$

$$(6.45)\qquad \partial^\perp \log|w| = i\left\{\frac{1}{2}\frac{\partial w}{w}-\frac{1}{2}\frac{\partial\bar{w}}{\bar{w}}\right\}=\partial\vartheta.$$

Aus (6.42) bis (6.45) folgt, da sich $Q_\varrho\cap\mathfrak{M}(\varrho\,e^{-i\vartheta})$ und $\mathfrak{M}(\varrho\,e^{-i\vartheta})$ für fast alle ϑ nur um eine Nullmenge unterscheiden:

$$(6.46)\qquad \int\limits_{Q_\varrho\cap H} \lambda\,\psi\,\partial^\perp \log|g|\,\partial A_{2n-2} = \int\limits_{\vartheta=0}^{2\pi} \Big\{ \int\limits_{\mathfrak{M}(\varrho e^{-i\vartheta})\cap\bar{H}} \tilde{\nu}(P, \varrho\,e^{-i\vartheta})\,\lambda\,\psi\,\partial A_{2n-2}\Big\}\,d\vartheta.$$

Ersetzt man ϑ durch $2\pi-\vartheta$, so folgt (6.41) unmittelbar.

3. **Schritt.** *Der Grenzübergang.*

Die Zahl $\varrho>0$ durfte einer gewissen Nullmenge N nicht angehören. Nun wird eine monoton fallende Nullfolge $\varrho_\nu\to+0$ für $\nu\to\infty$ mit $\varrho_\nu\notin N$ ausgewählt und ϱ_ν auch kurz mit ϱ bezeichnet.

a) Es werden

$$\tilde{K} = \overline{U_1(P_0) \cap H}, \tag{6.47}$$

$$\tilde{R} = Rd\,\tilde{K} \subseteq \overline{U_1(P_0) \cap H} - U_1(P_0) \cap H, \tag{6.48}$$

$$\tilde{A} = \{P \mid \lambda\,\psi\,\partial A_{2n-2}(P) = 0\} \cap \tilde{K} \tag{6.49}$$

gesetzt. Da $\lambda(P)$ ausserhalb $U_1(P_0)$ und $\psi(P)$ nach Voraussetzung auf $\mathfrak{N} \cap S - M \supseteq \mathfrak{M}(0) \cap S - M$ verschwinden, ist

$$\begin{aligned}
\mathfrak{M}(0) \cap (\tilde{R} - \tilde{A}) &\subseteq \mathfrak{M}(0) \cap \tilde{K} \cap \{\overline{U_1(P_0) \cap H} - U_1(P_0) \cap H - \tilde{A}\} \\
&\subseteq \mathfrak{M}(0) \cap \tilde{K} \cap \{(Rd\,U_1(P_0) \cap \overline{H}) \cup (U_1(P_0) \cap Rd\,H) - \tilde{A}\} \\
&\subseteq \mathfrak{M}(0) \cap \tilde{K} \cap (S - \tilde{A}) \\
&\subseteq \mathfrak{M}(0) \cap \tilde{K} \cap \{S - (\mathfrak{M}(0) \cap S - M) \cap \tilde{K}\} \\
&\subseteq \mathfrak{M}(0) \cap M.
\end{aligned} \tag{6.50}$$

Da M eine Nullmenge auf $\mathfrak{N}$ ist, ist $M \cap \mathfrak{M}(0)$ und damit $\mathfrak{M}(0) \cap (\tilde{R} - \tilde{A})$ eine Nullmenge auf $\mathfrak{M}(0)$. Weil

$$\tilde{K} - U_1(P_0) \cap \overline{H} \subseteq \overline{U_1(P_0)} \cap \overline{H} - U_1(P_0) \cap \overline{H} = Rd\,U_1(P_0) \cap \overline{H} \tag{6.51}$$

gilt, und weil $\lambda(P) = 0$ für $P \notin U_1(P_0)$ ist, hat man

$$I(w) = \int\limits_{\mathfrak{M}(w) \cap \tilde{K}} \tilde{\nu}(P, w)\,\lambda\,\psi\,\partial A_{2n-2} = \int\limits_{\mathfrak{M}(w) \cap \overline{H}} \tilde{\nu}(P, w)\,\lambda\,\psi\,\partial A_{2n-2}. \tag{6.52}$$

Das Integral $I(w)$ ist in $w = 0$ stetig; wie nämlich die Tabelle

Satz 5.3	f	G	$\mathfrak{M}^{2n}$	$\nu(P, w)$	$\mathfrak{N}(w)$	∂A_{2n-2}	K	R	A	$I(w)$
Hier	g	$U(P_0)$	$\mathfrak{M}^{2n}$	$\tilde{\nu}(P, w)$	$\mathfrak{M}(w)$	$\lambda\,\psi\,\partial A_{2n-2}$	$\tilde{K}$	$\tilde{R}$	$\tilde{A}$	$I(w)$

zeigt, sind die Voraussetzungen von Satz 5.3 erfüllt. Da $I(w)$ in $w = 0$ stetig ist, strebt $I(\varrho\,e^{i\vartheta}) \to I(0)$ für $\varrho \to 0$ und ist $I(\varrho\,e^{i\vartheta})$ für $0 \leq \varrho \leq \varrho_0$ und $0 \leq \varrho \leq 2\pi$ beschränkt. Daher strebt

$$\int\limits_0^{2\pi} I(\varrho\,e^{i\vartheta})\,d\vartheta \to 2\pi\,I(0) \text{ für } \varrho = \varrho_\nu \text{ und } \nu \to \infty. \tag{6.53}$$

Da $\lambda(P)$ ausserhalb $U(P_0)$ verschwindet und (6.41), (6.52), (6.53) und (6.40) gelten, strebt

(6.54) $\int\limits_{Q_\varrho \cap H} \lambda \psi \partial^\perp \log |g| \partial A_{2n-2} \to 2\pi \int\limits_{\mathfrak{N}(0) \cap \bar{H}} \nu(P,0) \lambda \psi \partial A_{2n-2}$ für $\varrho = \varrho_\nu$ und $\nu \to \infty$.

b) Es ist

$$\bigcup_{\nu=1}^{\infty} B_{\varrho_\nu} = U(P_0) - \mathfrak{M}(0), \quad B_{\varrho_\nu} \supseteq B_{\varrho_{\nu-1}}. \tag{6.55}$$

Da $\mathfrak{M}(0)$ aus endlich vielen komplexen Teilmannigfaltigkeiten mit Dimensionen $2k \leq 2n-2$ besteht, ist $\mathfrak{M}(0)$ eine Nullmenge auf $\mathfrak{M}^{2n}$ und $\mathfrak{M}(0) \cap S_0$ eine Nullmenge auf S_0. Da (6.55) gilt, und da die Integrale über $B_\varrho \cap H$, bzw. $S_0 \cap B_\varrho$ in (6.39) für $\varrho = 0$ und für ψ statt $\lambda\psi$, also auch für $\lambda\psi$ nach Voraussetzung existieren, streben

$$\int\limits_{B_\varrho \cap H} \partial(\lambda\psi) \partial^\perp \log |g| \partial A_{2n-2} \to \int\limits_{U(P_0) \cap H} \partial(\lambda\psi) \partial^\perp \log |g| \partial A_{2n-2}, \tag{6.56}$$

$$\int\limits_{S_0 \cap B_\varrho} \lambda\psi \partial^\perp \log |g| \partial A_{2n-2} \to \int\limits_{S_0 \cap U(P_0)} \lambda\psi \partial^\perp \log |g| \partial A_{2n-2} \tag{6.57}$$

für $\varrho = \varrho_\nu$ und $\nu \to \infty$. Da ψ auf $\mathfrak{N}(0) \cap \bar{H} - \mathfrak{N}(0) \cap H = \mathfrak{N}(0) \cap S$ bis auf die Nullmenge M von $\mathfrak{N}(0)$ verschwindet, folgt aus (6.39), (6.54), (6.56) und (6.57) sofort die behauptete Gleichung (6.15).

Da eine entsprechende Gleichung (6.15) auch für h statt g, für $\mathfrak{N}(\infty)$ statt $\mathfrak{N}(0)$ und für $\nu(P, \infty)$ statt $\nu(P, 0)$ gilt, da $f = \frac{g}{h}$ sowie $\mathfrak{N} = \mathfrak{N}(0) \cup \mathfrak{N}(\infty)$ und $\nu(P) = \nu(P,0) - \nu(P, \infty)$ ist, und da $\lambda(P)$ ausserhalb $U(P_0)$ verschwindet, erhält man durch Subtraktion der „beiden" Gleichungen (6.15) die Beziehung

$$\begin{aligned} &\int\limits_{S_0} \lambda\psi \partial^\perp \log |f| \partial A_{2n-2} = \\ &= \int\limits_{H} \partial(\lambda\psi) \partial^\perp \log |f| \partial A_{2n-2} - 2\pi \int\limits_{\mathfrak{N} \cap H} \nu(P) \lambda\psi \partial A_{2n-2}. \end{aligned} \tag{6.58}$$

Endlich viele Umgebungen $U_2(P_1), \ldots, U_2(P_q)$ überdecken die kompakte Menge $\bar{H}$. Zu dieser Überdeckung bestimmt man eine DIEUDONNÉ-Zerlegung mittels stetigdifferenzierbarer Funktionen λ_ϱ, für die also gilt:

$$0 \leq \lambda_\varrho(P) \leq 1 \text{ für } P \in \mathfrak{M}^{2n}, \quad \lambda_\varrho(P) = 0 \text{ für } P \notin U_2(P_\varrho) \tag{6.59}$$

$$\sum_{\varrho=1}^{q} \lambda_\varrho(P) = 1 \text{ für } P \in \bar{H} \subset \bigcup_{\varrho=1}^{q} U_2(P_\varrho). \tag{6.60}$$

Setzt man λ_ϱ in (6.58) ein und summiert über $\varrho = 1, \ldots, q$, so erhält man die behauptete Gleichung (6.11), w.z.b.w..

Macht man die Voraussetzungen a), b), c) von Satz 6.1, sowie f), g) von Satz 6.2 und h), i), j) von Satz 6.3 für u statt ψ, so folgt durch Subtraktion von (6.6) und (6.11) eine zweite Residuenformel:

$$\begin{aligned}\int_{S_0} (\log|f|\,\partial^\perp u - u\,\partial^\perp \log|f|)\,\partial A_{2n-2} &= \\ &= \int_H \log|f|\,\partial\partial^\perp u\,\partial A_{2n-2} + \pi \int_{\mathfrak{N} \cup H} \nu(P)\,u\,\partial A_{2n-2}.\end{aligned} \tag{6.61}$$

In Analogie zum nullstellenzählenden Integral bei einer Veränderlichen gibt der folgende Satz eine Verallgemeinerung eines Satzes von W. WIRTINGER[19]:

Satz 6.4. Eine dritte Residuenformel.

Voraussetzung. *Die Voraussetzungen a), b) von Satz 6.1, sowie f) von Satz 6.2 und h) von Satz 6.3 werden gemacht. Die Funktion $e(P)$ sei auf $\bar{H}$ analytisch. Ferner gelte:*

i*) *Zu jedem Punkt $P_0 \in \mathfrak{N} \cap S$ gebe es eine offene Umgebung $V(P_0)$ und in $\bar{V}(P_0)$ analytische Funktionen $g(P)$ und $h(P)$, die in jedem Punkt von $V(P_0)$ teilerfremd sind, sodass $f = \frac{g}{h}$ in $V(P_0)$ gilt und die Differentiale $\partial^\perp \log g\,\partial A_{2n-2}$ und $\partial^\perp \log h\,\partial A_{2n-2}$ über $\bar{V}(P_0) \cap S$ integrierbar sind.*

j*) *Es sei $\mathfrak{N} \cap S$ eine Nullmenge auf $\mathfrak{N}$.*

Behauptung. *Es gelten die Residuenformeln von* W. WIRTINGER.

$$\frac{1}{2\pi}\int_{S_0} e(P)\partial^\perp \log\frac{1}{f}\,\partial A_{2n-2} = \int_{\mathfrak{N} \cap H} \nu(P)\,e(P)\,\partial A_{2n-2}, \tag{6.62}$$

$$\frac{1}{2\pi}\int_{S_0} \partial^\perp \log\frac{1}{f}\,\partial A_{2n-2} = \int_{\mathfrak{N} \cap H} \nu(P)\,\partial A_{2n-2}. \tag{6.63}$$

---

[19] Vergleiche WIRTINGER [37]. Dort ist $\mathfrak{M}^{2n}$ der Raum der Vektoren $\mathfrak{z}$ und ∂A_{2n-2} das Differential ∂v_{2n-2} aus (2.55), also die euklidische Massbestimmung. Allerdings geht W. WIRTINGER bei seinem Beweis, abgesehen von einigen recht kurzen Bemerkungen auf Seite 420, nicht auf die nichtgewöhnlichen Punkte der Nullstellenfläche ein. Ebenso untersucht er nicht, wie die Null- und Polstellenfläche $\mathfrak{N}$ den Rand S schneidet. Daher entgehen ihm auch die unabdingbaren Voraussetzungen i*) und j*). — Für die Zwecke dieser Arbeit ist es nicht nötig zu untersuchen, wieweit i*) und j*) voneinander abhängen.

Beweis. Die Voraussetzung i*) lässt sich für jeden Punkt $P_0 \in \bar{H}$ erfüllen. Also kann man den Beweis genau so, wie den Beweis zu Satz 6.3 führen. Man hat nur ψ durch e, $|f|$ durch f, $|g|$ durch g und $|h|$ durch h zu ersetzen. Statt (6.45) verwendet man

$$\partial^{\perp} \log w = i \frac{\partial w}{w} = \partial \vartheta. \tag{6.64}$$

Wegen

$$\partial e \, \partial^{\perp} \log f \, \partial A_{2n-2} = -\frac{i}{f} \sum_{\mu,\nu=1}^{n} (e_{z_\mu} f_{\bar{z}_\nu} + e_{\bar{z}_\nu} f_{z_\mu}) \, \partial z_\mu \, \partial \bar{z}_\nu \, \partial A_{2n-2} = 0 \tag{6.65}$$

folgt dann die Behauptung, w.z.b.w.

Jetzt sind alle Vorbereitungen zum Beweis der JENSENschen Formel getroffen.

Satz 6.5. Die JENSENsche Formel.[20]

Voraussetzung. 1. *In der Mannigfaltigkeit $\mathfrak{M}^{2n}$ seien zwei offene Mengen G und g gegeben, deren Ränder ein endliches, $2n-1$ dimensionales* CARATHÉODORY-*Mass (μ-Mass) haben. Die abgeschlossenen Hüllen $\bar{G}$ ung $\bar{g}$ seien kompakt. Es liege $\bar{g}$ in G. Im Rand von G (bzw. g) sei die $2n-1$ dimensionale, orientierte, stetigdifferenzierbare Teilmannigfaltigkeit Γ (bzw. γ) enthalten, die bezüglich G (bzw. g) eine äussere Normale habe. Es seien $Rd\, G - \Gamma$ und $Rd\, g - \gamma$ Nullmengen des μ-Masses. Ausserdem sei $Rd\, g = Rd\, \bar{g}$.*

2. *Das alternierende Differential ∂A_{2n-2} sei in $\bar{G}$ stetig, in G stetigdifferenzierbar mit in $\bar{G}$ stetigen Ableitungen und habe den Typ $n-1$, also die Gestalt* (5.13). *In G gelte $\partial \partial A_{2n-2} = 0$.*

3. *Die Funktion $\varphi(P)$ sei in $\mathfrak{M}^{2n}$ stetig, in $H = G - \bar{g}$ zweimal stetigdifferenzierbar mit in $\bar{H}$ stetigen Ableitungen bis zur 2. Ordnung. Es gelte*

$$\varphi(P) = \begin{cases} 0 & \text{für } P \notin G \\ 1 & \text{für } P \in \bar{g} \end{cases}, \quad 0 \leq \varphi(P) \leq 1 \quad \text{für } P \in H, \tag{6.66}$$

$$\partial \partial^{\perp} \varphi(P) \, \partial A_{2n-2}(P) = 0 \quad \text{für } P \in H. \tag{6.67}$$

4. *Die Funktion $f(P)$ sei in $\bar{G}$ meromorph und verschwinde in keinem Teilgebiet von G identisch. Die Vielfachheit der Nullstelle P von f sei $\nu(P, 0)$, die der Polstelle P sei $\nu(P, \infty)$. Die Nullstellenfläche von f sei $\mathfrak{N}(0)$, die Polstellenfläche von f sei $\mathfrak{N}(\infty)$. Es werde $\mathfrak{N} = \mathfrak{N}(0) \cup \mathfrak{N}(\infty)$ und $\nu(P) = \nu(P, 0) - \nu(P, \infty)$ gesetzt.*

5. *Es sei $\log |f| \cdot \partial^{\perp} \varphi \, \partial A_{2n-2}$ über $\Gamma \cup \gamma$ integrierbar, wobei $\partial^{\perp} \varphi(P) = \lim\limits_{\substack{Q \to P \\ Q \in H}} \partial^{\perp} \varphi(Q)$ ist.*

---

[20] Für $n = 1$ siehe W [43] Kap. IV § 2 Gleichung (2.6) Seite 171.

Behauptung. *Es gilt die* JENSEN*sche Formel.*

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_{\Gamma} \log|f|\,\partial^{\perp}\varphi\,\partial A_{2n-2} - \frac{1}{2\pi}\int\limits_{\gamma} \log|f|\,\partial^{\perp}\varphi\,\partial A_{2n-2} = \int\limits_{\mathfrak{N}\cap G} \nu(P)\,\varphi\,\partial A_{2n-2}. \tag{6.68}$$

Zusätze:

1°. *Hat* $\partial^{\perp}\varphi\,\partial A_{2n-2}$ *längs* $\Gamma\cup\gamma$ *eine nichtnegative Dichte, so ist die Voraussetzung 5 von selbst erfüllt.*

2°. *Genügt das Differential* $\partial\chi_{2n-2}$ *der allgemeinen Voraussetzung* II *und ist* $\partial A_{2n-2}=\partial\chi_{2n-2}$, *so ist* 1°, *also auch Voraussetzung* 5 *von selbst erfüllt.*[21]

3°. *Zur Voraussetzung* 3 *vergleiche man auch den Satz* 7.1 *des nächsten Paragraphen. Die* JENSEN*sche Formel gilt insbesondere für jede zulässige Menge G im Sinne der allgemeinen Voraussetzungen* III *und* IV (*siehe* § 7), *wenn die Funktion f die Voraussetzung* 4 *des Satzes* 6.5 *erfüllt.*

Beweis. Da $Rd\,g=Rd\,\bar{g}$ ist, ist $S=Rd\,H=Rd\,G\cup Rd\,g$. Orientiert man γ so zu γ_{-} um, dass γ_{-} eine äussere Normale bezüglich H hat, so erkennt man an Hand der Tabelle,

Satz 6.2	H	$\mathfrak{M}^{2n}$	S	S_0	S_1	∂A_{2n-2}	u	v	f
Hier	H	$\mathfrak{M}^{2n}$	S	$\Gamma\cup\gamma_{-}$	$S-(\Gamma\cup\gamma_{-})$	∂A_{2n-2}	φ	φ	f

dass die Voraussetzungen von Satz 6.2 erfüllt sind. Weil gemäss § 2 (5) 11° aber $\int\limits_{\gamma} = -\int\limits_{\gamma_{-}}$ gilt, erhält man zusammen mit (6.67) die Gleichung

$$\int\limits_{\Gamma} \log|f|\,\partial^{\perp}\varphi\,\partial A_{2n-2} - \int\limits_{\gamma} \log|f|\,\partial^{\perp}\varphi\,\partial A_{2n-2} = \int\limits_{H} \partial\log|f|\,\partial^{\perp}\varphi\,\partial A_{2n-2}. \tag{6.69}$$

Nach Satz 4.1 gilt für ein Differential ∂A_{2n-2} vom Typ $n-1$, also der Gestalt (5.13) die Beziehung $\partial\log|f|\,\partial^{\perp}\varphi\,\partial A_{2n-2}=\partial\varphi\,\partial^{\perp}\log|f|\,\partial A_{2n-2}$. Es folgt

$$\int\limits_{H} \partial\log|f|\,\partial^{\perp}\varphi\,\partial A_{2n-2} = \int\limits_{H} \partial\varphi\,\partial^{\perp}\log|f|\,\partial A_{2n-2}. \tag{6.70}$$

Nach Hilfssatz 1 erfüllt die Funktion φ in $\mathfrak{M}^{2n}$ eine LIPSCHITZ-Bedingung. Ist $V(P_0)\subseteq\mathfrak{M}^{2n}$ eine offene Menge, in deren abgeschlossenen Hülle die teilerfremden

[21] Damit die JENSENsche Formel auch für $\partial\chi_{2n-2}$ gilt, wurden die allgemeinen Voraussetzungen II a und II b gemacht.

Funktionen $\tilde{g}$ und h analytisch sind, gilt $f=\frac{\tilde{g}}{h}$ in $\overline{V}(P_0)$, so sind daher die Differentiale $\partial\varphi\,\partial^{\perp}\log|\tilde{g}|\,\partial A_{2n-2}$ und $\partial\varphi\,\partial^{\perp}\log|h|\,\partial A_{2n-2}$ über $\overline{V}(P_0)\cap H$ integrierbar. Da φ auf $Rd\,G$ Null ist, sind $\varphi\,\partial^{\perp}\log|\tilde{g}|\,\partial A_{2n-2}$ und $\varphi\,\partial^{\perp}\log|h|\,\partial A_{2n-2}$ über $\Gamma\cap\overline{V}(P_0)$ integrierbar. Wie die Tabelle

Satz 6.3	H	$\mathfrak{M}^{2n}$	S	S_0	S_1	ψ	∂A_{2n-2}	f	$\nu(P,0)$
Hier	G	$\mathfrak{M}^{2n}$	$Rd\,G$	Γ	$Rd\,G-\Gamma$	φ	∂A_{2n-2}	f	$\nu(P,0)$

Satz 6.3	$\nu(P,\infty)$	$\mathfrak{N}(0)$	$\mathfrak{N}(\infty)$	$\mathfrak{N}$	$\nu(P)$	$V(P_0)$	g	h	M
Hier	$\nu(P,\infty)$	$\mathfrak{N}(0)$	$\mathfrak{N}(\infty)$	$\mathfrak{N}$	$\nu(P)$	$V(P_0)$	$\tilde{g}$	h	$\emptyset$

zeigt, sind die Voraussetzungen, von Satz 6.3 bezüglich der offenen Menge G erfüllt. Da $G=H\cup g\cup Rd\,g$ ist, da $Rd\,g$ eine Nullmenge ist, und $\partial\varphi$ auf g verschwindet, erhält man

$$(6.71)\qquad 2\pi\int\limits_{\mathfrak{N}\cap G}\nu(P)\,\varphi\,\partial A_{2n-2}=\int\limits_{G}\partial\varphi\,\partial^{\perp}\log|f|\,\partial A_{2n-2}=\int\limits_{H}\partial\varphi\,\partial^{\perp}\log|f|\,\partial A_{2n-2}.$$

Aus (6.69), (6.70) und (6.71) folgt unmittelbar (6.68), w.z.b.w.

Auf $\mathfrak{M}^{2n}$ gibt es eine zweimal stetigdifferenzierbare Funktion $\lambda(P)$ mit $0\leq\lambda(P)\leq 1$, die in einer Umgebung von $\overline{\Gamma}$ identisch Null in einer Umgebung von $\overline{\gamma}$ identisch Eins ist. Unter der Voraussetzung von Zusatz 1° folgt aus Satz 6.2 mit $u=-\lambda\varphi$ die Existenz von $\int\limits_{\gamma}\log|f|\,\partial^{\perp}\varphi\,\partial A_{2n-2}=\int\limits_{\gamma_-}\log|f|\,\partial^{\perp}u\,\partial A_{2n-2}$ und mit $u=(1-\lambda)\varphi$ die Existenz von $\int\limits_{\Gamma}\log|f|\,\partial^{\perp}\varphi\,\partial A_{2n-2}=\int\limits_{\Gamma}\log|f|\,\partial^{\perp}u\,\partial A_{2n-2}$, womit Zusatz 1° bewiesen ist. Da φ längs Γ und γ konstant ist und in G grösser als auf Γ bzw. γ ist, ergibt sich Zusatz 2° unmittelbar aus Satz 4.5.

Die Voraussetzung (6.67) ist natürlich sehr einschneidend, legt aber auch die Funktion φ fest. Im nächsten Paragraphen soll diese Voraussetzung geprüft werden, bevor aus der JENSENschen Formel der 1. Hauptsatz hergeleitet wird.

§ 7. Die Voraussetzungen des 1. Hauptsatzes.

Ausser den in § 4 gemachten allgemeinen Voraussetzungen I und II werden nun zwei weitere solche allgemeine Voraussetzungen gemacht.

III. **Der Kern.** *Eine offene Teilmenge g der Mannigfaltigkeit $\mathfrak{M}^{2n}$ werde fest gewählt und heisse Kern. Für g möge gelten:*

a) *Die abgeschlossene Hülle $\bar{g}$ von g ist kompakt.*

b) *Der Rand γ von g sei eine $2n-1$ dimensionale, orientierte, wenigstens fünfmal stetigdifferenzierbare Teilmannigfaltigkeit von $\mathfrak{M}^{2n}$, die bezüglich g eine äussere Normale habe.*

Dann ist $Rd\, g = Rd\, \bar{g}$. Der Kern g ist eine echte Teilmenge von $\mathfrak{M}^{2n}$. Ein solcher Kern existiert immer

IV. **Zulässige Mengen.** *Eine offene Teilmenge G von $\mathfrak{M}^{2n}$ heisse zulässig (bezüglich des Kernes g), wenn gilt:*

a) *Die abgeschlossene Hülle $\bar{G}$ von G ist kompakt.*

b) *Es ist $\bar{g} \subset G$.*

c) *Der Rand von G enthält eine $2n-1$ dimensionale, stetigdifferenzierbare, orientierte Teilmannigfaltigkeit Γ von $\mathfrak{M}^{2n}$, die bezüglich G eine äussere Normale hat.*

d) *Der Rand von G hat ein endliches, $2n-1$ dimensionales* Carathéodory-*Mass (μ-Mass).*

e) *Es ist $Rd\, G - \Gamma$ eine μ-Nullmenge.*

f) *Auf der Mannigfaltigkeit $\mathfrak{M}^{2n}$ gibt es eine stetige Funktion $\varphi(P)$, die im „Kondensator" $H = G - \bar{g}$ zweimal stetigdifferenzierbar ist und in $\bar{H}$ stetige Ableitungen erster und zweiter Ordnung hat. Wenn $\partial \chi_{2n-2}$ das Differential der Voraussetzung* II *in* § 4 *ist, so gilt:*

$$\varphi(P) = \begin{cases} 0 & \text{für } P \notin G \\ 1 & \text{für } P \in \bar{g}, \end{cases} \quad 0 < \varphi(P) < 1 \quad \text{für } P \in H, \tag{7.1}$$

$$\partial \partial^{\perp} \varphi\, \partial \chi_{2n-2} = 0 \quad \text{in } H. \tag{7.2}$$

Diese Funktion

$$\varphi = \varphi(P) = \varphi(P, G) = \varphi(P, G, g) \tag{7.3}$$

heisse das (auf 1) normierte Potential des Kondensators H. Die Menge

$$E = \{ P \mid \partial \varphi(P) = 0 \} \cap \bar{H} \tag{7.4}$$

heisse die kritische Menge des Kondensators H.

Gemäss II und (4.17) bis (4.24) ist φ die Lösung einer ersten Randwertaufgabe der elliptischen, selbstadjungierten Differentialgleichung

$$\sum_{\mu,\nu=1}^{n} a_{\mu\nu}\, \varphi_{z_\mu \bar{z}_\nu} = 0 \quad \text{d.h.} \sum_{\mu,\nu=1}^{2n} \gamma_{\mu\nu}\, \varphi_{t_\mu t_\nu} = 0 \quad \text{mit} \tag{7.5}$$

$$\sum_{\mu,\nu=1}^{n} a_{\mu\nu}\, \bar{u}_\mu u_\nu > 0 \quad \text{d.h.} \sum_{\mu,\nu=1}^{2n} \gamma_{\mu\nu}\, \sigma_\mu \sigma_\nu > 0 \quad \text{für } \mathfrak{u} \neq 0, \tag{7.6}$$

$$\sum_{\mu=1}^{n} a_{\mu\nu z_\mu} = 0 \quad \text{d.h.} \sum_{\mu=1}^{2n} \gamma_{\mu\nu t_\mu} = 0. \tag{7.7}$$

Die Lösung φ ist durch die Forderungen (7.1) und (7.2) nach dem Maximumsprinzip [22] eindeutig bestimmt. Die Randwertaufgabe wird zunächst lokal gelöst. Ein Gebiet K mit Rand R gehöre zur Menge $\mathfrak{K}$ und heisse eine Scheibe, wenn es eine Abbildung $\alpha \in \mathfrak{P}$ mit $\bar{K} \subset U_\alpha$ gibt, wenn $\bar{K} = K \cup R$ kompakt ist, und wenn der Rand R eine zweimal stetigdifferenzierbare, orientierte Teilmannigfaltigkeit von $\mathfrak{M}^{2n}$ ist, die bezüglich K eine äussere Normale hat. Zu jeder Scheibe $K \in \mathfrak{K}$ gibt es eine GREENsche Funktion $G_K(P, Q)$[23]. Schreibt man auf dem Rand R stetige Randwerte $f(P)$ vor, so wird die Randwertaufgabe für K durch

$$U(Q) = \int\limits_{P \in R} f(P)\, \partial_P^{\perp} G_K(P, Q)\, \partial \chi_{2n-2} \tag{7.8}$$

gelöst. Um eine Lösung für eine beliebige offene, beschränkte Menge H, auf deren Rand S stetige, reelle Randwerte $f(P)$ vorgeschrieben sind, zu erhalten, wendet man das Verfahren von O. PERRON [24] an. Es sei $M = \underset{P \in S}{\operatorname{Max}} f(P)$ und $m = \underset{P \in S}{\operatorname{Min}} f(P)$. Die Funktionenmenge $\mathfrak{B}$ bestehe aus allen reellen Funktionen $\xi(P)$ der ersten BAIREschen Funktionsklasse, für die $m \le \xi(P) \le M$ auf $\bar{H}$ gilt. Für jede Funktion $\xi \in \mathfrak{B}$ und jede Scheibe $K \in \mathfrak{K}$ mit $\bar{K} \subset H$ ist der *Operator*

$$M_K \xi[Q] = \begin{cases} \xi(Q) & \text{für } Q \in \bar{H} - K, \\ \int\limits_{P \in R} \xi(P)\, \partial_P^{\perp} G_K(P, Q)\, \partial \chi_{2n-2} & \text{für } Q \in K \end{cases} \tag{7.9}$$

erklärt und erfüllt die Forderungen

1°. $\alpha_1 M_K \xi_1 + \alpha_2 M_K \xi_2 = M_K(\alpha_1 \xi_1 + \alpha_2 \xi_2)$ (α_1, α_2 konst.).

2°. $M_K \xi_1 \le M_K \xi_2$ für $\xi_1 \le \xi_2$.

3°. $\partial \partial^{\perp} M_K \xi[Q]\, \partial \chi_{2n-2} = 0$ für $Q \in K$.

4°. $M_K \xi[Q]$ ist in $\bar{H}$ stetig, wenn $\xi(P)$ es ist.

5°. $M_K \xi_\nu[Q] \to M_K \xi[Q]$, wenn $\xi_\nu(Q) \to \xi(Q)$ für $\nu \to \infty$ strebt und $\xi(Q) \in \mathfrak{B}$ ist.

6°. Ist $\xi(Q) = M_K \xi[Q]$ für jede Scheibe $K \in \mathfrak{K}$ mit $\bar{K} \subset H$, so ist $\partial \partial^{\perp} \xi(P)\, \partial \chi_{2n-2} = 0$ für $P \in H$.

Eine Funktion $\omega(P) \in \mathfrak{B}$ heisse eine *Oberfunktion* und gehöre zur Menge Ω, wenn

a) $\omega(P)$ in $\bar{H}$ stetig ist,

b) $\omega(P) \ge f(P)$ für $P \in S$ gilt,

c) $\omega(P) \ge M_K \omega[P]$ für jede Scheibe $K \in \mathfrak{K}$ mit $\bar{K} \subset H$ und jeden Punkt $P \in \bar{H}$ gilt.

---

[22] Siehe E. HOPF [27].

[23] Siehe STERNBERG [24] § 7 und GIRAUD [29_2] Seite 223.

[24] Siehe PERRON [23]. Das Verfahren wurde dort von O. PERRON nur für Potentialfunktionen angegeben, überträgt sich aber anstandslos auf den hier vorliegenden Fall.

Oberfunktionen existieren, denn die Konstante M ist eine Oberfunktion. Eine Oberfunktion nimmt ihr Maximum nicht in H sondern auf S an, ausser sie ist in einem grössten Teilgebiet von H konstant. Da der Operator M_K und die Oberfunktionen die genannten Eigenschaften besitzen, kann man das Verfahren von O. PERRON[24] durchführen und erhält durch

$$U(P) = \underline{\operatorname{fin}}_{\omega \in \Omega} \omega(P) \quad \text{für} \quad P \in \bar{H} \tag{7.10}$$

eine Lösung der Differentialgleichung $\partial \partial^\perp u \, \partial \chi_{2n-2} = 0$ in H. Sie ist nach O. PERRON in jedem Randpunkt $P_0 \in S$ stetig, und hat dort den vorgeschriebenen Randwert $f(P_0)$, wenn es zu P_0 eine Umgebung $U(P_0)$ gibt, für die gilt:

α) Es gibt eine in $\bar{H} \cap \bar{U}(P_0)$ stetige Funktion $\eta(P)$ mit $\eta(P_0) = 0$.

β) Es ist $\eta(P) \geq 0$ in $\bar{H} \cap \bar{U}(P_0)$.

γ) Es ist $\eta(P) > 0$ in $\overline{H \cap Rd\, U(P_0)}$.

δ) Es ist $\eta(P) \geq M_L \eta[P]$ für jede Scheibe $L \in \mathfrak{K}$ mit $\bar{L} \subset H \cap U(P_0)$.

Ist nun $S \cap U^*(P_0)$ eine zweimal stetigdifferenzierbare, orientierte Teilmannigfaltigkeit von $\mathfrak{M}^{2n}$, so kann man zwei Umgebungen $U_1(P_0)$, $U_2(P_0)$ mit $\bar{U}_1(P_0) \subset U_2(P_0) \subset \subset \bar{U}_2(P_0) \subset U^*(P_0)$ angeben, sodass der Rand von $U_2(P_0) \cap H$ eine zweimal stetigdifferenzierbare, orientierte Teilmannigfaltigkeit von $\mathfrak{M}^{2n}$ ist, eine äussere Normale bezüglich $U_2(P_0) \cap H$ hat und $Rd\,(U_2(P_0) \cap H) \cap \bar{U}_1(P_0) = S \cap \bar{U}_1(P_0)$ ist. Nun löst man die Randwertaufgabe in $U_2(P_0) \cap H$ gemäss (7.8) für stetige Randwerte $g(P) \geq 0$ mit $g(P_0) = 0$ und $g(P) > 0$ auf $\overline{H \cap Rd\, U_2(P_0)}$. Die Lösung $\eta(P)$ erfüllt die Forderungen α) bis δ). Somit ergibt sich der folgende Satz:

Satz 7.1. Zulässige Mengen.

Voraussetzung. *Die offene, beschränkte Teilmenge G von $\mathfrak{M}^{2n}$ enthalte den Kern g und habe eine wenigstens fünfmal stetigdifferenzierbare, orientierte Teilmannigfaltigkeit Γ der Dimension $2n-1$ als Rand, die bezüglich G eine äussere Normale habe. Jedes grösste Teilgebiet von G enthalte einen Punkt des Kernes g.*[25]

Behauptung. 1. *Es ist G eine zulässige Menge.*

2. *Sind die Ränder Γ und γ und das Differential $\partial \chi_{2n-2}$ wenigstens $q+1$ mal stetigdifferenzierbar mit $q+1 \geq 5$, so hat die Potentialfunktion φ in H stetige Ableitungen bis zur q-ten Ordnung, die in $\bar{H}$ stetig sind. Ist $\partial \chi_{2n-2}$ insbesondere reellanalytisch, so ist auch φ reellanalytisch in H.*

[25] Ist umgekehrt G eine zulässige Menge, so folgt aus (7.1) und dem Maximumsprinzip, dass jedes grösste Teilgebiet von G einen Punkt von g enthält.

Beweis. 1. Die Forderungen IV a) bis e) sind erfüllt. Der Beweis für die Existenz der Potentialfunktion φ in f) wurde soeben angedeutet und soll nicht genauer ausgeführt werden. Nach dem Maximumsprinzip[22] ist $0<\varphi<1$ in H, da in jedem grössten Teilgebiet von G ein Punkt von g liegt.[25] 2. Die zweite Behauptung ergibt sich aus GIRAUD [29_2] und GIRAUD [29_3].[26] Es gibt also immer zulässige Mengen, w. z. b. w.

Nach E. HOPF [52] ist in jedem Randpunkt $P_0 \in \Gamma \cup \gamma$ die Richtungsableitung nach der Normalen von φ nicht Null (bei Annäherung aus H!). Aus Satz 4.5 erhält man somit

Satz 7.2. Richtungsableitung.

Ist G eine zulässige Menge und φ ihre Potentialfunktion, so hat $\partial^{\perp}\varphi\,\partial\chi_{2n-2}$ auf den Randmannigfaltigkeiten γ und Γ eine positive Dichte.

Dieser Satz gestattet es, eine weitere allgemeine Voraussetzung zu treffen.

V. **Kapazität, Spannung und Potential.** *Die Kapazität des Kondensators H der zulässigen Menge G sei*

$$C = C(G) = C(G, g) = \frac{1}{2\pi}\int_{\gamma} \partial^{\perp}\varphi\,\partial\chi_{2n-2}. \tag{7.11}$$

Nach Satz 7.2 ist C positiv. Die Spannung des Kondensators H sei

$$R = R(G) = R(G, g) = \frac{1}{C(G, g)}. \tag{7.12}$$

Das Potential des Kondensators sei

$$\psi = \psi(P) = \psi(P, G) = \psi(P, G, g) = R(G, g)\,\varphi(P, G, g). \tag{7.13}$$

Nach Satz 6.1 gilt

$$C = \frac{1}{2\pi}\int_{\gamma} \partial^{\perp}\varphi\,\partial\chi_{2n-2} = \frac{1}{2\pi}\int_{\Gamma} \partial^{\perp}\varphi\,\partial\chi_{2n-2} = -\frac{1}{2\pi}\int_{H} \partial\varphi\,\partial^{\perp}\varphi\,\partial\chi_{2n-2}. \tag{7.14}$$

Wegen (4.25) ergibt sich bereits aus (7.14), dass $C>0$ ist. Weiter gilt:

$$\frac{1}{2\pi}\int_{\gamma} \partial^{\perp}\psi\,\partial\chi_{2n-2} = \frac{1}{2\pi}\int_{\Gamma} \partial^{\perp}\psi\,\partial\chi_{2n-2} = 1. \tag{7.15}$$

---

[26] Man vergleiche insbesondere GIRAUD [29_2] IV Satz 4 Seite 189 und VII Satz 1 Seite 243, sowie GIRAUD [29_3] Seite 389.

Aus (7.1) und (7.2) folgt

$$\psi(P) = \begin{cases} 0 & \text{für } P \notin G \\ R & \text{für } P \in \bar{g}, \end{cases} \quad 0 < \psi(P) < R \quad \text{für } P \in H, \tag{7.16}$$

$$\partial \partial^{\perp} \psi(P) \, \partial \chi_{2n-2}(P) = 0 \quad \text{für} \quad P \in H. \tag{7.17}$$

Über die Monotonie der Kapazität, der Spannung und des Potentials gibt der folgende Satz Aufschluss.

Satz 7.3. Die Monotonie von Kapazität, Spannung und Potential.

Voraussetzung. *Die zulässige Menge G^* enthalte die zulässige Menge G. Beide offene Mengen seien dabei bezüglich desselben Kernes zulässig.*

Behauptung. *Es gelten die Abschätzungen*

$$\varphi(P, G) \leq \varphi(P, G^*) \quad \textit{für} \quad P \in \mathfrak{M}^{2n}, \quad G \subseteq G^*, \tag{7.18}$$

$$\psi(P, G) \leq \psi(P, G^*) \quad \textit{für} \quad P \in \mathfrak{M}^{2n}, \quad G \subseteq G^*, \tag{7.19}$$

$$C(G) \geq C(G^*) \qquad \textit{für} \qquad G \subseteq G^*, \tag{7.20}$$

$$R(G) \leq R(G^*) \qquad \textit{für} \qquad G \subseteq G^*. \tag{7.21}$$

In (7.20), (7.21) *und* (7.18), (7.19) *für* $P \in H^* = G^* - \bar{g}$ *gilt dann und nur dann die Gleichheit, wenn* $G = G^*$ *ist.*

Beweis. Es sei $G \neq G^*$. Die Differenz $\xi(P) = \varphi(P, G^*) - \varphi(P, G)$ löst in $H = G - \bar{g}$ die Differentialgleichung (7.17), ist auf dem Rand $\gamma \cup Rd\, G$ von H nichtnegativ, und weil $\xi(P) = \varphi(P, G^*) > 0$ in $H^* - G$ gilt, in einem Punkt von $Rd\, G$ positiv. Also ist $\xi(P) > 0$ für $P \in H^*$. Es folgt (7.18). Wegen $\xi(P) = 0$ für $P \in \gamma$ folgt also nach Satz 4.5 und E. Hopf [52] auch $C(G) > C(G^*)$, das heisst $R(G) < R(G^*)$. Mit (7.18) ergibt sich (7.19), wobei $\psi(P, G) < \psi(P, G^*)$ für $P \in H^*$ gilt, w. z. b. w.

Im Falle einer Veränderlichen, also in W [43], sind φ und ψ harmonische Funktionen.

Nun sind die Voraussetzungen der Jensenschen Formel und damit des 1. Hauptsatzes geklärt, wenigstens soweit diese Vorausetzungen nur von der Mannigfaltigkeit $\mathfrak{M}^{2n}$ und der Massbestimmung $\partial \chi_{2n-2}$ abhängen. Während der Kern g festgehalten wird, mögen die zulässigen Mengen G nach und nach die Mannigfaltigkeit $\mathfrak{M}^{2n}$ ausschöpfen. Dazu wird — später in § 11 — noch die Voraussetzung VII gemacht.

§ 8. Der erste Hauptsatz.

Aus den in § 3 genannten Gründen reicht es den 1. Hauptsatz für meromorphe Flächen der Stufe $p=1$ aufzustellen. Zunächst müssen aber noch die Anzahlfunktion und die Schmiegungsfunktionen eingeführt werden.

Definition 8.1. Anzahlfunktion.[27]

Auf der Mannigfaltigkeit $\mathfrak{M}^{2n}$ *sei eine meromorphe Fläche W gegeben. Für den kontravarianten Vektor* $\vec{\mathfrak{a}} \neq 0$ *sei* $(\vec{\mathfrak{a}}, W) \not\equiv 0$. *Die Schnittzahl im Punkt P zu* $\vec{\mathfrak{a}}$ *sei* $\nu(P, \vec{\mathfrak{a}})$ *und* $\mathfrak{N}(\vec{\mathfrak{a}})$ *die zugehörige Schnittstellenfläche. Die Mannigfaltigkeit* $\mathfrak{M}^{2n}$ *möge die allgemeinen Voraussetzungen I bis V erfüllen. Als Funktion der zulässigen Menge G werde die Anzahlfunktion zu* $\vec{\mathfrak{a}}$ *von W durch*

$$N(G, \vec{\mathfrak{a}}) = \int_{\mathfrak{N}(\vec{\mathfrak{a}})} \nu(P, \vec{\mathfrak{a}})\, \psi(P, G)\, \partial \chi_{2n-2} \tag{8.1}$$

definiert.

Die Anzahlfunktion $N(G, \vec{\mathfrak{a}})$ ist *nichtnegativ* und dann und nur dann Null, wenn die meromorphe Fläche W die Ebene $(\vec{\mathfrak{a}}, \mathfrak{w}) = 0$ für $P \in G$ nicht schneidet, das heisst, wenn $\nu(P, \vec{\mathfrak{a}}) \equiv 0$ für $P \in G$ ist. Nach Satz 7.3 gilt

$$0 \leq N(G, \vec{\mathfrak{a}}) \leq N(G^*, \vec{\mathfrak{a}}) \quad \text{für} \quad G \subseteq G^*. \tag{8.2}$$

Zur Definition der *Schmiegungsfunktion* werden die Voraussetzungen von Definition 8.1 gemacht. Ist $\mathfrak{w}(P)$ irgendeine Darstellung, so wird durch

$$\| \mathfrak{w}(P), \vec{\mathfrak{a}} \| = \frac{|(\mathfrak{w}(P), \vec{\mathfrak{a}})|}{|\mathfrak{w}(P)|\, |\vec{\mathfrak{a}}|} \tag{8.3}$$

eine eindeutige Funktion von P auf $\mathfrak{M}^{2n}$ erklärt, die nicht identisch Null ist und nicht von der Wahl der Darstellung $\mathfrak{w}(P)$ abhängt. Wählt man eine einheitliche meromorphe Darstellung $\mathfrak{w}(P)$, so ist nach Satz 6.5 und seinem Zusatz 2° das Differential $\log |(\mathfrak{w}, \vec{\mathfrak{a}})|\, \partial^{\perp} \psi\, \partial \chi_{2n-2}$ und wegen

$$|\log |\mathfrak{w}|| \leq \tfrac{1}{2} \log k + \sum_{\nu=1}^{k} |\log |w_\nu|| \tag{8.4}$$

auch das Differential $\log |\mathfrak{w}|\, \partial^{\perp} \psi\, \partial \chi_{2n-2}$ über den Kernrand γ und über die Randmannigfaltigkeit Γ der zulässigen Menge G integrierbar. Dasselbe gilt dann auch von $\log \| \mathfrak{w}(P), \vec{\mathfrak{a}} \|\, \partial^{\perp} \psi\, \partial \chi_{2n-2}$. Daher kann man definieren:

---

[27] Für $n=1$ siehe W [43] Kap. IV § 3 Seite 173.

Definition 8.2. Die Schmiegungsfunktion.[27]

Auf der Mannigfaltigkeit $\mathfrak{M}^{2n}$ *sei eine meromorphe Fläche* $W \not\equiv 0$ *gegeben. Für den kontravarianten Vektor* $\vec{\mathfrak{a}}$ *sei* $(\vec{\mathfrak{a}}, W) \not\equiv 0$. *Die Mannigfaltigkeit* $\mathfrak{M}^{2n}$ *möge die allgemeinen Voraussetzungen* I *bis* V *erfüllen. Als Funktion der zulässigen Menge* G *werden die* *Schmiegungsfunktionen zu* $\vec{\mathfrak{a}}$ *von* W *durch*

$$m(\Gamma, \vec{\mathfrak{a}}) = m(G, \Gamma, \vec{\mathfrak{a}}) = \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} \log \frac{1}{\| \mathfrak{w}(P), \vec{\mathfrak{a}} \|} \partial^{\perp} \psi \, \partial \chi_{2n-2} \tag{8.5}$$

$$m(\gamma, \vec{\mathfrak{a}}) = m(G, \gamma, \vec{\mathfrak{a}}) = \frac{1}{2\pi} \int_{\gamma} \log \frac{1}{\| \mathfrak{w}(P), \vec{\mathfrak{a}} \|} \partial^{\perp} \psi \, \partial \chi_{2n-2} \tag{8.6}$$

definiert.

Da $\partial^{\perp} \psi \partial \chi_{2n-2}$ längs Γ bzw. γ eine positive Dichte hat, und da $0 \leq \| \mathfrak{w}(P), \vec{\mathfrak{a}} \| \leq 1$ ist, sind die Schmiegungsfunktionen nichtnegativ:

$$0 \leq m(\Gamma, \vec{\mathfrak{a}}), \quad 0 \leq m(\gamma, \vec{\mathfrak{a}}). \tag{8.7}$$

Satz 8.1. *Gilt in* (8.7) *das Gleichheitszeichen, so ist die meromorphe Fläche* W *konstant.*

Beweis. Längs Γ bzw. γ ist dann nämlich $\| \mathfrak{w}(P), \vec{\mathfrak{a}} \| \equiv 1$. Nach (1.44) gibt es ein normales Koordinatensystem, in dem $\vec{\mathfrak{a}} = \alpha_1 \vec{\varepsilon}_1 \neq 0$ gilt. Für eine einheitliche meromorphe Darstellung ist also

$$|\alpha_1|^2 |w_1|^2 = |(\vec{\mathfrak{a}}, \mathfrak{w})|^2 = |\vec{\mathfrak{a}}|^2 |\mathfrak{w}|^2 = |\alpha_1|^2 \sum_{\nu=1}^{k} |w_\nu|^2 \text{ längs } \Gamma \text{ bzw. } \gamma.$$

Daher sind die Funktionen $w_2, \ldots, w_k$ längs Γ bzw. γ, das heisst auf $\mathfrak{M}^{2n}$ identisch Null. Es sind $w_1(P)\, \mathfrak{e}_1$ und damit der konstante Vektor $\mathfrak{e}_1$ einheitliche Darstellungen, w. z. b. w.

Nun gilt der 1. Hauptsatz:

Satz 8.2. Der erste Hauptsatz.[27]

Voraussetzung. *Auf der Mannigfaltigkeit* $\mathfrak{M}^{2n}$ *seien die allgemeinen Voraussetzungen* I *bis* V *erfüllt. Die Anzahlfunktion und die Schmiegungsfunktionen der meromorphen Fläche* W *auf* $\mathfrak{M}^{2n}$ *werden nach Definition* 8.1 *bezw. nach Definition* 8.2 *gebildet. Es sei* G *irgendeine zulässige Menge.*

Behauptung. *Für jeden kontravarianten Vektor* $\vec{\mathfrak{a}}$ *mit* $(W, \vec{\mathfrak{a}}) \not\equiv 0$ *hat die Charakteristik, die durch*

$$T(G) = T(G, g) = N(G, \vec{\mathfrak{a}}) + m(\Gamma, \vec{\mathfrak{a}}) - m(\gamma, \vec{\mathfrak{a}}) \tag{8.8}$$

definiert ist, denselben Wert, ist also unabhängig von $\vec{\mathfrak{a}}$.

Beweis. Es sei $\vec{\beta}$ ein zweiter kontravarianter Vektor mit $(W, \vec{\beta}) \not\equiv 0$. Ist $\mathfrak{w}(P)$ irgendeine Darstellung von W, so ist die Funktion

$$f(P, \vec{\alpha}, \vec{\beta}) = \frac{(\mathfrak{w}(P), \vec{\alpha})}{(\mathfrak{w}(P), \vec{\beta})} \not\equiv 0 \tag{8.9}$$

eindeutig und unabhängig von der Wahl der Darstellung $\mathfrak{w}(P)$ auf $\mathfrak{M}^{2n}$ erklärt und meromorph. Die Vielfachheit ihrer Nullstelle P sei $\tilde{\nu}(P, 0)$ die ihrer Polstelle sei $\tilde{\nu}(P, \infty)$. Ihre Nullstellenfläche sei $\mathfrak{N}_0$ und $\mathfrak{N}_\infty$ ihre Polstellenfläche. Die Schnittstellenfläche zu $\vec{\alpha}$ von W sei $\mathfrak{N}(\vec{\alpha})$, die zu $\vec{\beta}$ sei $\mathfrak{N}(\vec{\beta})$. Die Vielfachheit der Schnittstelle P zu $\vec{\alpha}$ sei $\nu(P, \vec{\alpha})$, zu $\vec{\beta}$ sei $\nu(P, \vec{\beta})$. Der Punkt $P_0 \in \mathfrak{M}^{2n}$ sei beliebig gewählt. Dann gibt es eine Umgebung $U(P_0)$ von P_0 und zwei in $U(P_0)$ analytische Funktionen h ung g mit $f = \frac{g}{h}$ in $U(P_0)$, die in jedem Punkt von $U(P_0)$ teilerfremd sind. Ist $U(P_0)$ hinreichend klein, so gibt es eine in $U(P_0)$ reduzierte Darstellung $\mathfrak{w}(P)$. Da g und h teilerfremd sind, folgen aus

$$(\mathfrak{w}(P), \vec{\beta})\, g(P) = (\mathfrak{w}(P), \vec{\alpha})\, h(P) \tag{8.10}$$

die Abschätzungen

$$\nu(P, \vec{\alpha}) \geq \tilde{\nu}(P, 0) \quad \text{d. h.} \quad \mathfrak{N}(\vec{\alpha}) \supseteq \mathfrak{N}_0, \tag{8.11}$$

$$\nu(P, \vec{\beta}) \geq \tilde{\nu}(P, \infty) \quad \text{d. h.} \quad \mathfrak{N}(\vec{\beta}) \supseteq \mathfrak{N}_\infty \tag{8.12}$$

und die Identität

$$\nu(P, \vec{\beta}) + \tilde{\nu}(P, 0) = \nu(P, \vec{\alpha}) + \tilde{\nu}(P, \infty), \tag{8.13}$$

$$\nu(P, \vec{\alpha}) - \nu(P, \vec{\beta}) = \tilde{\nu}(P, 0) - \tilde{\nu}(P, \infty). \tag{8.14}$$

Da $\tilde{\nu}(P, 0)$ ausserhalb $\mathfrak{N}_0$ und $\tilde{\nu}(P, \infty)$ ausserhalb $\mathfrak{N}_\infty$ verschwinden, gilt

$$\int_{\mathfrak{N}_0 \cup \mathfrak{N}_\infty} \{\tilde{\nu}(P, 0) - \tilde{\nu}(P, \infty)\}\, \psi\, \partial \chi_{2n-2} = \int_{\mathfrak{N}(\vec{\alpha})} \nu(P, \vec{\alpha})\, \psi\, \partial \chi_{2n-2} - \int_{\mathfrak{N}(\vec{\beta})} \nu(P, \vec{\beta})\, \psi\, \partial \chi_{2n-2}. \tag{8.15}$$

Wendet man nun die Jensensche Formel (Satz 6.5) auf die Funktion $f(P, \vec{\alpha}, \vec{\beta})$ an, so erhält man mit (8.15) die Gleichung

$$\frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} \log \left| \frac{(\mathfrak{w}(P), \vec{\alpha})}{(\mathfrak{w}(P), \vec{\beta})} \right| \partial^{\perp} \psi\, \partial \chi_{2n-2} - \frac{1}{2\pi} \int_{\gamma} \log \left| \frac{(\mathfrak{w}(P), \vec{\alpha})}{(\mathfrak{w}(P), \vec{\beta})} \right| \partial^{\perp} \psi\, \partial \chi_{2n-2} =$$

$$= \int_{\mathfrak{N}(\vec{\alpha})} \nu(P, \vec{\alpha})\, \psi(P, G)\, \partial \chi_{2n-2} - \int_{\mathfrak{N}(\vec{\beta})} \nu(P, \vec{\beta})\, \psi(P, G)\, \partial \chi_{2n-2}.$$

Erweitert man die Brüche mit $|\mathfrak{w}|$ und addiert $\log \frac{|\vec{\beta}|}{|\vec{\alpha}|} - \log \frac{|\vec{\beta}|}{|\vec{\alpha}|} = 0$, so erhält man wegen

$$\log \frac{|\vec{\beta}|}{|\vec{\alpha}|} = \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} \log \frac{|\vec{\beta}|}{|\vec{\alpha}|} \partial^{\perp} \psi \, \partial \chi_{2n-2} - \frac{1}{2\pi} \int_{\gamma} \log \frac{|\vec{\beta}|}{|\vec{\alpha}|} \partial^{\perp} \psi \, \partial \chi_{2n-2}$$

nach (1.45) die Gleichung

$$\frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} \log \frac{\| \mathfrak{w}(P), \vec{\alpha} \|}{\| \mathfrak{w}(P), \vec{\beta} \|} \partial^{\perp} \psi \, \partial \chi_{2n-2} - \frac{1}{2\pi} \int_{\gamma} \log \frac{\| \mathfrak{w}(P), \vec{\alpha} \|}{\| \mathfrak{w}(P), \vec{\beta} \|} \partial^{\perp} \psi \, \partial \chi_{2n-2} =$$
$$= \int_{\mathfrak{N}(\vec{\alpha})} \nu(P, \vec{\alpha}) \, \psi \, \partial \chi_{2n-2} - \int_{\mathfrak{N}(\vec{\beta})} \nu(P, \vec{\beta}) \, \psi \, \partial \chi_{2n-2}.$$

Ordnet man nach $\vec{\alpha}$ und $\vec{\beta}$, so ergibt sich wegen (8.1), (8.5) und (8.6) die Gleichung

$$N(G, \vec{\beta}) + m(\Gamma, \vec{\beta}) - m(\gamma, \vec{\beta}) = N(G, \vec{\alpha}) + m(\Gamma, \vec{\alpha}) - m(\gamma, \vec{\alpha}) = T(G)$$

also hängt die Charakteristik nicht von $\vec{\alpha}$ ab, w. z. b. w.

Der 1. Hauptsatz gibt eine Invarianzaussage, die eine Verallgemeinerung des Satzes: „Ein Polynom nimmt jeden Wert, ausser $a = \infty$, so oft an, wie sein Grad angibt.“ Der 1. Hauptsatz sagt: Eine meromorphe Fläche schneidet jede Ebene $(\mathfrak{w}, \vec{\alpha}) = 0$, abgesehen vom „unbedeutenden“ Restglied $m(\Gamma, \vec{\alpha}) - m(\gamma, \vec{\alpha})$, „so oft“, das heisst mit dem gleichen Mass $N(G, \vec{\alpha})$, wie ihre Charakteristik $T(G)$ angibt. Erst der 2. Hauptsatz lässt erkennen, inwieweit die Schmiegungsfunktion $m(\Gamma, \vec{\alpha}) - m(\gamma, \vec{\alpha})$ tatsächlich nur ein „Restglied“ ist. Der Grad eines Polynomes ist aber auch ein Wachstumsmass für das Polynom. Es fragt sich, ob auch die Charakteristik ein Wachstumsmass der meromorphen Fläche ist. Dies und einige andere Eigenschaften der Charakteristik soll nun untersucht werden.

§ 9. Eigenschaften und Darstellungen der Charakteristik.

Die Anzahlfunktion erfüllt die Invarianzforderungen 1 bis 6 von § 3, während die Schmiegungsfunktionen und die Charakteristik nur den Invarianzforderungen 1 bis 5 genügen. Die Invarianzforderung 6 bleibt nur bei unitären Transformationen gewahrt. Übt man eine beliebige eindeutige, lineare Transformation auf R_1^{2k} aus, so bedeutet das den Übergang von einer Metrik $(\mathfrak{x} \mid \mathfrak{y})$ zu einer neuen Metrik $(\mathfrak{x} \mid \mathfrak{y})_0$. Bezeichnet man die Grössen bezüglich der Metrik $(\mathfrak{x} \mid \mathfrak{y})_0$ durch einen Index $^{(0)}$ und bestimmt man die nur von den Metriken $(\mathfrak{x} \mid \mathfrak{y})$, $(\mathfrak{x} \mid \mathfrak{y})_0$ abhängige Konstante λ_1 nach § 1 d, so folgen leicht die Abschätzungen

$$|m^{(0)}(\Gamma, \vec{\alpha}) - m(\Gamma, \vec{\alpha})| \leq \log \lambda_1, \tag{9.1}$$

$$|m^{(0)}(\gamma, \vec{\alpha}) - m(\gamma, \vec{\alpha})| \leq \log \lambda_1, \tag{9.2}$$

$$|T^{(0)}(G) - T(G)| \leq 2 \log \lambda_1, \tag{9.3}$$

$$N(G, \vec{\alpha}) = N^{(0)}(G, \vec{\alpha}). \tag{9.4}$$

Die Charakteristik und die Schmiegungsfunktionen hängen also nur unbedeutend von der Metrik ab.[28]

Um weitere Eigenschaften der Charakteristik zu finden, werden verschiedene Darstellungen der Charakteristik bewiesen.

Satz 9.1. Die Betragsdarstellung.[29]

Voraussetzung. *Die meromorphe Fläche $W \not\equiv 0$ habe die einheitliche Darstellung $\mathfrak{w}(P)$. Nach § 3 Satz 3.2 ff. sei $d(P, 0)$ die Vielfachheit der Nullstelle P und $d(P, \infty)$ die Vielfachheit der Polstelle P der Darstellung $\mathfrak{w}(P)$. Es sei $\vartheta(0)$ die Nullstellenfläche und $\vartheta(\infty)$ die Polstellenfläche der Darstellung $\mathfrak{w}(P)$. Es werde $\vartheta = \vartheta(0) \cup \vartheta(\infty)$ und $d(P) = d(P, 0) - d(P, \infty)$ gezetzt.*

Behauptung. *Es gilt die Betragsdarstellung*

$$\begin{aligned} T(G) = \frac{1}{2\pi} \int_\Gamma \log |\mathfrak{w}(P)| \, \partial^\perp \psi \, \partial \chi_{2n-2} - \frac{1}{2\pi} \int_\gamma \log |\mathfrak{w}(P)| \, \partial^\perp \psi \, \partial \chi_{2n-2} - \\ - \int_\vartheta d(P) \, \psi(P, G) \, \partial \chi_{2n-2}. \end{aligned} \tag{9.5}$$

Beweis. Da die meromorphe Fläche nicht totaldegeneriert ist, gibt es einen Vektor $\vec{\alpha}$ mit $(\vec{\alpha}, \mathfrak{w}(P)) \not\equiv 0$. Die Vielfachheit der Nullstelle P weniger der Polstelle P der Funktion $(\mathfrak{w}(P), \vec{\alpha})$ sei $\nu_1(P, \vec{\alpha})$. Die Vereinigung ihrer Null- und Polstellenfläche sei $\mathfrak{N}$. Nach der JENSENschen Formel (6.68) gilt

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int_\Gamma \log |(\mathfrak{w}, \vec{\alpha})| \, \partial^\perp \psi \, \partial \chi_{2n-2} - \frac{1}{2\pi} \int_\gamma \log |(\mathfrak{w}, \vec{\alpha})| \, \partial^\perp \psi \, \partial \chi_{2n-2} = \\ = \int_\mathfrak{N} \nu_1(P, \vec{\alpha}) \, \psi(P, G) \, \partial \chi_{2n-2}. \end{aligned} \tag{9.6}$$

Addiert man die Gleichungen (9.6) und (8.8), so folgt

[28] Für $n = 1$ siehe W [43] Kap. II § 2 Seite 78.
[29] Für $n = 1$ siehe W [43] Kap. II § 2 Seite 81—82.

$$(9.7)\quad \begin{aligned} T(G) = \frac{1}{2\pi}\int_{\Gamma} \log (|\mathfrak{w}|\,|\vec{\alpha}|)\,\partial^{\perp}\psi\,\partial\chi_{2n-2} - \frac{1}{2\pi}\int_{\gamma} \log (|\mathfrak{w}|\,|\vec{\alpha}|)\,\partial^{\perp}\psi\,\partial\chi_{2n-2} - \\ - \int_{\mathfrak{N}\cup\mathfrak{N}(\vec{\alpha})} \{\nu_1(P,\vec{\alpha}) - \nu(P,\vec{\alpha})\}\,\psi(P,G)\,\partial\chi_{2n-2}. \end{aligned}$$

Wegen (7.15) darf man darin $(|\mathfrak{w}|\,|\vec{\alpha}|)$ durch $|\mathfrak{w}|$ ersetzen. Da nach Satz 3.3 nun $\nu_1(P,\vec{\alpha}) - \nu(P,\vec{\alpha}) = d(P)$ ist, folgt (9.5), w. z. b. w.

Damit ist erstmals eine Darstellung der Charakteristik gegeben, die frei vom kontravarianten Vektor $\vec{\alpha}$ ist. Allerdings hat sie den grossen Nachteil, nicht invariant gegenüber einem Wechsel der Darstellung zu sein, was ihren Wert sehr mindert.[30] Bei den weiteren Darstellungen wird dieser Nachteil nicht mehr auftreten.

Ist $\mathfrak{w}(P) = \mathfrak{e}_1 + \sum_{\nu=2}^{k} w_\nu \mathfrak{e}_\nu$ die Darstellung einer analytischen Fläche gemäss Definition 3.3, sind die Funktionen $w_\nu(P)$ also auf $\mathfrak{M}^{2n}$ analytisch, so setzt man

$$(9.8)\qquad M(G) = \operatorname*{Max}_{P\in\bar{G}} \sqrt{\sum_{\nu=2}^{k} |w_\nu(P)|^2}.$$

Das Koordinatensystem $\mathfrak{e}_1, \ldots, \mathfrak{e}_k$ braucht nicht normal zu sein. Aus (9.3) und (9.5) folgt aber

$$(9.9)\qquad T(G) \leq \log^{+} M(G) + 2\log\lambda_1 + \log 2,$$

wobei die Konstante λ_1 nur von der Metrik in R_1^{2k} abhängt. Analog dem Fall einer ganzen Funktion $f(z)$ ist also auch hier im Fall einer analytischen Fläche die Charakteristik mit dem Betragsmaximum verbunden. Das ist der erste Hinweis darauf, dass die Charakteristik ein Wachstumsmass ist.

Eine andere Darstellung erhält man durch

Satz 9.2. Eine Mittelwertdarstellung.[31]

Voraussetzung. *Die meromorphe Fläche W sei nicht degeneriert.*

Behauptung. *Es gilt die Mittelwertdarstellung*

$$(9.10)\qquad T(G) = \frac{1}{V_{2k-1}}\int_{|\vec{\alpha}|=1} N(G,\vec{\alpha})\,\partial v_{2k-1}(\vec{\alpha}),$$

[30] Für eine einheitliche, analytische Darstellung ist $d(P) \geq 0$ und für eine einheitliche, reduzierte Darstellung ist $d(P) = 0$. Ist $\mathfrak{M}^{2n}$ der euklidische Raum und $\partial\chi_{2n-2}$ die euklidische Massbestimmung, so ergibt sich aus (9.5) die bei STOLL [53] § 5 (5.17) angegebene Abschätzung der Charakteristik, die dort ganz nützliche Dienste leistet. Für manche Zwecke ist also die Betragsdarstellung doch brauchbar.

[31] Für $n = 1$ siehe W [43] Kap. IV § 3 Seite 173 Gleichung (3.3) und Kap. II § 2 Seite 127.

wobei $V_{2k-1} = \dfrac{2\pi^k}{(k-1)!}$ *nach* (2.62) *der Oberflächeninhalt der Einheitskugel und* $\partial v_{2k-1}(\vec{\alpha})$ *ihr euklidisches Oberflächenelement ist.*

Beweis. Der Beweis wird wie in W [43] Kap. III § 2 Seite 126—130 geführt. Er beruht auf dem dort bewiesenen Lemma 2 A:

Hilfssatz 1. *Ist der Vektor* $\mathfrak{w}$ *nicht Null, so ist der Integralmittelwert*

$$\frac{1}{V_{2k-1}} \int\limits_{|\vec{\alpha}|=1} \log \frac{1}{\|\mathfrak{w}, \vec{\alpha}\|} \partial v_{2k-1}(\vec{\alpha}) = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{k-1}\right) = m_0 \tag{9.11}$$

unabhängig vom Vektor $\mathfrak{w} \neq 0$.

Der Beweis von Satz 9.2 ergibt sich nach W [43] nun so: Da der Integrand nichtnegativ ist, darf man die Integrationsreihenfolge $\int\limits_{\Gamma} \int\limits_{|\vec{\alpha}|=1}$ vertauschen und erhält:

$$\begin{aligned} m_0 &= \frac{1}{2\pi} \int\limits_{\Gamma} \left\{ \frac{1}{V_{2k-1}} \int\limits_{|\vec{\alpha}|=1} \log \frac{1}{\|\mathfrak{w}, \vec{\alpha}\|} \partial v_{2k-1}(\vec{\alpha}) \right\} \partial^{\perp} \psi \, \partial \chi_{2n-2} = \\ &= \frac{1}{V_{2k-1}} \int\limits_{|\vec{\alpha}|=1} \left\{ \frac{1}{2\pi} \int\limits_{\Gamma} \log \frac{1}{\|\mathfrak{w}, \vec{\alpha}\|} \partial^{\perp} \psi \, \partial \chi_{2n-2} \right\} \partial v_{2k-1}(\vec{\alpha}) = \\ &= \frac{1}{V_{2k-1}} \int\limits_{|\vec{\alpha}|=1} m(\Gamma, \vec{\alpha}) \, \partial v_{2k-1}(\vec{\alpha}). \end{aligned} \tag{9.12}$$

Entsprechend folgt

$$m_0 = \frac{1}{V_{2k-1}} \int\limits_{|\vec{\alpha}|=1} m(\gamma, \vec{\alpha}) \, \partial v_{2k-1}(\vec{\alpha}). \tag{9.13}$$

Aus dem ersten Hauptsatz sowie den Gleichungen (9.12) und (9.13) folgt die Existenz des Integrales in (9.10) und die Gleichung (9.10), w. z. b. w.

Degeneriert die meromorphe Fläche W nicht, so folgt aus (9.10), dass ihre Charakteristik nichtnegativ und monoton ist:

$$0 \leq T(G) \leq T(G^*) \quad \text{für} \quad G \subseteq G^*. \tag{9.14}$$

Dies bleibt auch noch richtig, wenn die meromorphe Fläche degeneriert, wie der folgende Satz zeigt:

Satz 9.3. Degenerierte Flächen.[32]

Voraussetzung. *Die meromorphe Fläche* $W \not\equiv 0$ *liege in einem linearen Unterraum* L, *das heisst der Raum* $L = \{[\mathfrak{a}_1, \ldots, \mathfrak{a}_m]\}$ *werde durch* $m \leq k$ *linear unabhängige Vektoren* $\mathfrak{a}_1, \ldots, \mathfrak{a}_m$ *aufgespannt, und für jede Darstellung* $\mathfrak{w}(P)$ *von* W *gelte:*

$$\mathfrak{w}(P) = \sum_{\mu=1}^{m} w_\mu(P)\, \mathfrak{a}_\mu \in R_1^{2k}. \tag{9.15}$$

Durch $\sigma \mathfrak{w} = \sum_{\mu=1}^{m} w_\mu \mathfrak{e}_\mu$ *werde* L *linear und eineindeutig in den Raum* R_1^{2m} *mit dem Koordinatensystem* $\mathfrak{e}_1, \ldots, \mathfrak{e}_m$ *abgebildet. Die Vektoren* $\mathfrak{a}_1, \ldots, \mathfrak{a}_m$ *seien zu einem Koordinatensystem* $\mathfrak{a}_1, \ldots, \mathfrak{a}_k$ *von* R_1^{2k} *ergänzt, dessen duales Koordinatensystem* $\vec{\alpha}_1, \ldots, \vec{\alpha}_k$ *sei. Das zu* $\mathfrak{e}_1, \ldots, \mathfrak{e}_m$ *duale Koordinatensystem sei* $\vec{\varepsilon}_1, \ldots, \vec{\varepsilon}_m$. *Die Vektoren* $\vec{\alpha} = \sum_{\nu=1}^{k} \alpha_\nu \vec{\alpha}_\nu \in {}^*R_1^{2k}$ *werden durch* ${}^*\sigma\vec{\alpha} = \sum_{\nu=1}^{m} \alpha_\nu \vec{\varepsilon}_\nu \in {}^*R_1^{2m}$ *linear in* ${}^*R_1^{2m}$ *abgebildet. In* R_1^{2m} *werde durch* $(\mathfrak{x} \mid \mathfrak{y}) = (\sigma^{-1}\mathfrak{x} \mid \sigma^{-1}\mathfrak{y})$ *eine Metrik und in* ${}^*R_1^{2m}$ *die duale Metrik eingeführt.*

Behauptung. *Durch die Darstellungen*

$$\sigma \mathfrak{w}(P) = \sum_{\mu=1}^{m} w_\mu(P)\, \sigma \mathfrak{a}_\mu = \sum_{\mu=1}^{m} w_\mu(P)\, \mathfrak{e}_\mu \in R_1^{2m} \tag{9.19}$$

wird eine meromorphe Fläche σW *gegeben, deren Charakteristik* $\tilde{T}(G)$, *deren Schmiegungsfunktionen* $\tilde{m}(\Gamma, \vec{\beta})$, $\tilde{m}(\gamma, \vec{\beta})$ *und deren Anzahlfunktion* $\tilde{N}(G, \vec{\beta})$ *sind. Ist* $(\vec{\alpha}, W) \not\equiv 0$, *so ist* $({}^*\sigma\vec{\alpha}, \sigma W) \not\equiv 0$ *und es gilt:*

$$N(G, \vec{\alpha}) = \tilde{N}(G, {}^*\sigma\vec{\alpha}), \tag{9.17}$$

$$m(\Gamma, \vec{\alpha}) = \tilde{m}(\Gamma, {}^*\sigma\vec{\alpha}) + \log \frac{|\vec{\alpha}|}{|{}^*\sigma\vec{\alpha}|}, \tag{9.18}$$

$$m(\gamma, \vec{\alpha}) = \tilde{m}(\gamma, {}^*\sigma\vec{\alpha}) + \log \frac{|\vec{\alpha}|}{|{}^*\sigma\vec{\alpha}|}, \tag{9.19}$$

$$T(G) = \tilde{T}(G). \tag{9.20}$$

Beweis. Offensichtlich ist σW wieder eine meromorphe Fläche. Für zwei Vektoren $\mathfrak{w} \in L$ und $\vec{\alpha} \in {}^*R_1^{2k}$ gilt

$$(\mathfrak{w}, \vec{\alpha}) = \sum_{\mu=1}^{m} w_\mu \alpha_\mu = (\sigma\mathfrak{w}, {}^*\sigma\vec{\alpha}), \tag{9.21}$$

$$|\sigma\mathfrak{w}| = |\sigma^{-1}\sigma\mathfrak{w}| = |\mathfrak{w}|. \tag{9.22}$$

---

[32] Für $n = 1$ siehe W [43] Kap. II § 4 Seite 94 und Kap. III § 5 Seite 143.

Ist $(W, \vec{\alpha}) \not\equiv 0$, so folgt aus (9.21), dass auch $(\sigma W, {}^*\sigma\vec{\alpha}) \not\equiv 0$ ist und (9.17) gilt. Aus (9.22) folgt

$$\|\mathfrak{w}, \vec{\alpha}\| = \frac{|(\mathfrak{w}, \vec{\alpha})|}{|\mathfrak{w}|\,|\vec{\alpha}|} = \frac{|(\sigma\mathfrak{w}, {}^*\sigma\vec{\alpha})|}{|\sigma\mathfrak{w}|\,|{}^*\sigma\vec{\alpha}|}\,\frac{|{}^*\sigma\vec{\alpha}|}{|\vec{\alpha}|} = \|\sigma\mathfrak{w}, {}^*\sigma\vec{\alpha}\| \cdot \frac{|{}^*\sigma\vec{\alpha}|}{|\vec{\alpha}|}. \tag{9.23}$$

Aus (9.23) ergeben sich die Gleichungen (9.18) und (9.19). Mit (9.17) bis (9.19) folgt aus dem 1. Hauptsatz die Gleichung (9.20), w. z. b. w.

Daher hat auch eine degenerierte meromorphe Fläche $W \not\equiv 0$ eine nichtnegative und monotone Charakteristik, für die (9.14) gilt. Die meromorphe Fläche $W \not\equiv 0$ liegt in einem kleinsten linearen Unterraum L der Dimension $2m$. Nach den Sätzen 9.2 und 9.3 hat ihre Charakteristik die Integraldarstellung

$$T(G) = \frac{1}{V_{2m-1}} \int\limits_{\substack{|\vec{\alpha}|=1\\ \vec{\alpha}\in L}} N(G, \vec{\alpha})\, \partial v_{2m-1}(\vec{\alpha}) \geq 0. \tag{9.24}$$

Die Gleichungen (9.10) bzw. (9.24) bilden den Ausgangspunkt für eine andere, wichtige Darstellung der Charakteristik, zu deren Beweis jedoch noch einige Vorbereitungen zu treffen sind.

Im Raum R_1^{2k} der Vektoren $\mathfrak{w}$ werde die projektive Massbestimmung

$$\partial\omega_2(\mathfrak{w}) = \frac{i}{2}\,|\mathfrak{w}|^{-4}\,|[\mathfrak{w}, \partial\mathfrak{w}]|^2 \tag{9.25}$$

gemäss § 2 (7) Gleichung (2.56) und (2.57) eingeführt.[33] In dieses Differential wird nun eine meromorphe Fläche eingesetzt.

Hilfssatz 2. *Ist $\mathfrak{w}(P)$ eine beliebige Darstellung der meromorphen Fläche $W \not\equiv 0$, so wird unabhängig von der Wahl der Darstellung $\mathfrak{w}(P)$ durch*

$$\partial\omega_2(\mathfrak{w}(P)) = \frac{i}{2}\,|\mathfrak{w}(P)|^{-4}\,|[\mathfrak{w}(P), \partial\mathfrak{w}(P)]|^2 \tag{9.26}$$

ein alternierendes Differential auf $\mathfrak{M}^{2n}$ — abgesehen von den Unbestimmtheitsstellen der meromorphen Fläche W — eindeutig erklärt. Es lässt sich umformen zu

---

[33] Hier tritt eine Besonderheit auf, wenn meromorphe Flächen W^p mit einer Stufe $p > 1$ betrachtet werden. Auf R_p^{2k} ist $\partial\omega_2(\mathfrak{W}^p)$ nach (2.57), (9.27) oder (9.29) zu bilden. Will man jedoch auch für R_p^{2k} die Definition (9.25) bzw. (9.28) verwenden, so hat man R_p^{2k} mit $R^{2\binom{k}{p}}$ zu identifizieren und in $R^{2\binom{k}{p}}$ das äussere Produkt zu bilden, das dann mit $\{\ ,\ \}$ bezeichnet werde. Man vergleiche dazu auch W [43] Kap. III § 5 Seite 143.

$$\partial\omega_2(\mathfrak{w}(P)) = \frac{i}{2}|\mathfrak{w}(P)|^{-4}\{(\mathfrak{w}(P)\,|\,\mathfrak{w}(P))\,(\partial\mathfrak{w}(P)\,|\,\partial\mathfrak{w}(P)) - \\ -(\partial\mathfrak{w}(P)\,|\,\mathfrak{w}(P))\,(\mathfrak{w}(P)\,|\,\partial\mathfrak{w}(P))\}, \tag{9.27}$$

$$\partial\omega_2(\mathfrak{w}(P)) = \frac{i}{2}|\mathfrak{w}(P)|^{-4}\sum_{\mu,\nu=1}^{n}([\mathfrak{w},\mathfrak{w}_{z_\mu}]\,|\,[\mathfrak{w},\mathfrak{w}_{z_\nu}])\,\partial z_\mu\,\partial\bar{z}_\nu, \tag{9.28}$$

$$\partial\omega_2(\mathfrak{w}(P)) = \frac{i}{2}|\mathfrak{w}(P)|^{-4}\sum_{\mu,\nu=1}^{n}\begin{vmatrix}(\mathfrak{w}\,|\,\mathfrak{w}) & (\mathfrak{w}\,|\,\mathfrak{w}_{z_\nu})\\ (\mathfrak{w}_{z_\mu}\,|\,\mathfrak{w}) & (\mathfrak{w}_{z_\mu}\,|\,\mathfrak{w}_{z_\nu})\end{vmatrix}\partial z_\mu\,\partial\bar{z}_\nu. \tag{9.29}$$

Beweis. Ist $\tilde{\mathfrak{w}}(P)$ eine zweite Darstellung, so gibt es eine meromorphe Funktion $\lambda(P) \not\equiv 0$, sodass im Durchschnitt der Gültigkeitsbereiche der beiden Darstellungen $\mathfrak{w}(P) = \lambda(P)\,\tilde{\mathfrak{w}}(P)$ gilt. Es folgt

$$\partial\omega_2(\mathfrak{w}) = \frac{i}{2}|\lambda\tilde{\mathfrak{w}}|^{-4}\,|[\lambda\tilde{\mathfrak{w}},\lambda\partial\tilde{\mathfrak{w}}+\partial\lambda\cdot\tilde{\mathfrak{w}}]|^2 = \frac{i}{2}|\lambda\tilde{\mathfrak{w}}|^{-4}\,|[\lambda\tilde{\mathfrak{w}},\lambda\partial\tilde{\mathfrak{w}}]|^2 = \partial\omega_2(\tilde{\mathfrak{w}}). \tag{9.30}$$

Also ist $\partial\omega_2(\mathfrak{w})$ bis auf die Unbestimmtheitsstellen von W eindeutig erklärt. Aus (9.26) folgt (9.28), woraus sich nach (1.37) wiederum (9.29) ergibt, was mit (9.27) gleichbedeutend ist, w. z. b. w.

Hilfssatz 3.[34] *Das euklidische Oberflächenelement der Ebene $(\vec{\alpha},\mathfrak{w}) = 0$ mit festem Vektor $\mathfrak{w} \neq 0$ sei gemäss (2.55) durch $\partial v_{2k-2}(\vec{\alpha})$ gegeben. Für zwei beliebige Vektoren $\mathfrak{u}$ und $\mathfrak{v}$ gilt dann*

$$I \equiv \frac{1}{\pi^{k-1}}\int\limits_{(\vec{\alpha},\mathfrak{w})=0} e^{-|\vec{\alpha}|^2}\frac{(\vec{\alpha},\mathfrak{u})\,\overline{(\vec{\alpha},\mathfrak{v})}}{|\mathfrak{w}|^2}\,\partial v_{2k-2}(\vec{\alpha}) = \frac{([\mathfrak{w},\mathfrak{u}]\,|\,[\mathfrak{w},\mathfrak{v}])}{|\mathfrak{w}|^4}. \tag{9.31}$$

Hat insbesondere in einem normalen Koordinatensystem $\mathfrak{e}_1,\ldots,\mathfrak{e}_k$ der Vektor $\mathfrak{w} = \sum_{\nu=1}^{k} w_\nu\,\mathfrak{e}_\nu$ die Koordinate $w_1 \neq 0$, so gilt

$$I = \frac{1}{\pi^{k-1}}\int\limits_{|\alpha_k|<\infty}\cdots\int\limits_{|\alpha_2|<\infty} e^{-|\vec{\alpha}|^2}\frac{(\vec{\alpha},\mathfrak{u})\,\overline{(\vec{\alpha},\mathfrak{v})}}{|w_1|^2}\left(\frac{i}{2}\right)^{k-1}\partial\alpha_2\,\partial\bar{\alpha}_2\ldots\partial\alpha_k\,\partial\bar{\alpha}_k, \tag{9.32}$$

wobei $\alpha_1 = \sum_{\nu=2}^{k}\alpha_\nu\frac{w_\nu}{w_1}$ zu setzen ist.

Beweis. Die Behauptung (9.31) ist unabhängig von der Wahl des Koordinatensystems. Nach (1.44) kann man ein normales Koordinatensystem $\mathfrak{e}_1',\ldots,\mathfrak{e}_k'$ wählen, in dem

[34] Vergleiche W [43] Kap. III § 4.

(9.33) $$\mathfrak{e}_0 = w_1' \mathfrak{e}_1' \neq 0, \quad \mathfrak{u} = u_1' \mathfrak{e}_1 + \mathfrak{u}_2' \mathfrak{e}_2, \quad \mathfrak{v} = v_1' \mathfrak{e}_1' + v_2' \mathfrak{e}_2' + v_3' \mathfrak{e}_3'$$

ist. Im dualen Koordinatensystem $\vec{\varepsilon}_\nu'$ sei $\vec{\alpha}_\nu = \sum_{\nu=1}^{k} \alpha_\nu' \vec{\varepsilon}_\nu'$. Dann gilt

(9.34) $$I = \frac{1}{\pi^{k-1}} \int\limits_{\alpha_1'=0} e^{-|\vec{\alpha}|^2} \frac{\alpha_2' u_2' (\bar{\alpha}_2' \bar{v}_2' + \bar{\alpha}_3' \bar{v}_3')}{|w_1'|^2} \partial v_{2k-2}(\vec{\alpha}) = \frac{u_2' \bar{v}_2'}{|w_1'|^2} I_1 + \frac{u_2' \bar{v}_3'}{|w_1'|^2} I_2$$

mit

(9.35) $$\begin{aligned} I_1 &= \frac{1}{\pi^{k-1}} \int\limits_{|\alpha_k|<\infty} \cdots \int\limits_{|\alpha_2|<\infty} e^{-|\alpha_2|^2 - \cdots - |\alpha_k|^2} |\alpha_2|^2 \left(\frac{i}{2}\right)^{k-1} \partial \alpha_2 \partial \bar{\alpha}_2 \ldots \partial \alpha_k \partial \bar{\alpha}_k = \\ &= \int\limits_0^\infty \cdots \int\limits_0^\infty e^{-t_2 - \cdots - t_k} t_2 \, dt_2 \ldots dt_k = 1, \end{aligned}$$

wobei $\alpha_\nu = \sqrt{t_\nu} e^{i \varphi_\nu}$ gesetzt wurde. Ausserdem ist

(9.36) $$\begin{aligned} I_2 &= \frac{1}{\pi^{k-1}} \int\limits_{|\alpha_k'|<\infty} \cdots \int\limits_{|\alpha_2'|<\infty} e^{-|\alpha_2'|^2 - \cdots - |\alpha_k'|^2} \alpha_2' \bar{\alpha}_3' \left(\frac{i}{2}\right)^{k-1} \partial \alpha_2' \partial \bar{\alpha}_2' \ldots \partial \alpha_k' \partial \bar{\alpha}_k' = \\ &= -\frac{1}{\pi^{k-1}} \int\limits_{|\alpha_k|<\infty} \cdots \int\limits_{|\alpha_2|<\infty} e^{-|\alpha_2|^2 - \cdots - |\alpha_k|^2} \alpha_2 \bar{\alpha}_3 \left(\frac{i}{2}\right)^{k-1} \partial \alpha_2 \partial \bar{\alpha}_2 \ldots \partial \alpha_k \partial \bar{\alpha}_k = 0, \end{aligned}$$

wobei $\alpha_\nu = i \alpha_\nu'$ gesetzt wurde. Man erhält

(9.37) $$\begin{aligned} I &= \frac{u_2' \bar{v}_2'}{|w_1'|^2} = \frac{w_1' \bar{w}_1' (u_1' \bar{v}_1' + u_2' \bar{v}_2') - w_1' \bar{v}_1' \bar{w}_1' u_1'}{|w_1'|^4} = \\ &= |\mathfrak{w}|^{-4} \{ (\mathfrak{w} | \mathfrak{w}) (\mathfrak{u} | \mathfrak{v}) - (\mathfrak{w} | \mathfrak{v}) (\mathfrak{u} | \mathfrak{w}) \} = \\ &= |\mathfrak{w}|^{-4} ([\mathfrak{w}, \mathfrak{u}] \,|\, [\mathfrak{w}, \mathfrak{v}]). \end{aligned}$$

Damit ist (9.31) bewiesen. Ist in einem normalen Koordinatensystem $\mathfrak{e}_1 \ldots, \mathfrak{e}_k$ der Vektor $\mathfrak{w} = \sum_{\nu=1}^{k} w_\nu \mathfrak{e}_\nu$ mit $w_1 \neq 0$ gegeben, und ist $\vec{\varepsilon}_1, \ldots, \vec{\varepsilon}_k$ das duale Koordinatensystem, so kann man die Gleichung $(\vec{\alpha}, \mathfrak{w}) = 0$ durch $\alpha_1 = \varphi(\alpha_2, \ldots, \alpha_k) = -\sum_{\nu=2}^{k} \alpha_\nu \frac{w_\nu}{w_1}$ auflösen. Die Ebene $(\vec{\alpha}, \mathfrak{w}) = 0$ hat die Parameterdarstellung

(9.38) $$\vec{\zeta} = \varphi(\alpha_2, \ldots, \alpha_k) \vec{\varepsilon}_1 + \sum_{\nu=2}^{k} \alpha_\nu \vec{\varepsilon}_\nu .$$

Ihr euklidisches Oberflächenelement ist

$$
\begin{aligned}
|[\vec{\zeta}_{\alpha_2}, \ldots, \vec{\zeta}_{\alpha_k}]|^2 &= |[\varphi_{\alpha_2}\vec{\varepsilon}_1 + \vec{\varepsilon}_2, \ldots, \varphi_{\alpha_k}\vec{\varepsilon}_1 + \vec{\varepsilon}_k]|^2 = \\
&= |\sum_{\nu=2}^{k} (-1)^{\nu} \varphi_{\alpha_\nu} [\vec{\varepsilon}_1, \ldots, \vec{\varepsilon}_{\nu-1}, \vec{\varepsilon}_{\nu+1}, \ldots, \vec{\varepsilon}_k] + [\vec{\varepsilon}_2, \ldots, \vec{\varepsilon}_k]|^2 = \\
&= \sum_{\nu=2}^{k} |\varphi_{\alpha_\nu}|^2 + 1 = \qquad (9.39)\\
&= \sum_{\nu=2}^{k} \frac{|w_\nu|^2}{|w_1|^2} + 1 = \\
&= \frac{|\mathfrak{w}|^2}{|w_1|^2}.
\end{aligned}
$$

Also gilt

$$
\partial v_{2k-2}(\vec{\alpha}) = \left(\frac{i}{2}\right)^{k-1} \frac{|\mathfrak{w}|^2}{|w_1|^2} \partial \alpha_2 \partial \bar{\alpha}_2 \ldots \partial \alpha_k \partial \bar{\alpha}_k. \tag{9.40}
$$

Aus (9.31) folgt also (9.32), w. z. b. w.

Aus Hilfssatz 3 und Gleichung (9.28) ergibt sich unmittelbar:

Hilfssatz 4. *Ist die meromorphe Fläche $W \not\equiv 0$ nicht degeneriert, und $\mathfrak{w}(P)$ eine beliebige Darstellung, so gilt für alle Punkte P mit $\mathfrak{w}(P) \neq 0$ die Gleichung*

$$
\partial \omega_2(\mathfrak{w}(P)) = \frac{i}{2} \frac{1}{\pi^{k-1}} \int\limits_{\left(\frac{\mathfrak{w}(P)}{|\mathfrak{w}(P)|}, \vec{\alpha}\right) = 0} e^{-|\vec{\alpha}|^2} \frac{(\vec{\alpha}, \partial \mathfrak{w}) \overline{(\vec{\alpha}, \partial \mathfrak{w})}}{|\mathfrak{w}|^2} \partial v_{2k-2}(\vec{\alpha}). \tag{9.41}
$$

Für ein beliebiges normales Koordinatensystem $\mathfrak{e}_1, \ldots, \mathfrak{e}_k$ mit $\mathfrak{w}(P) = \sum_{\mu=1}^{k} w_\mu \mathfrak{e}_\mu$ gilt für alle Punkte P mit $w_1(P) \neq 0$ die Gleichung

$$
\partial \omega_2(\mathfrak{w}(P)) = \frac{i}{2} \frac{1}{\pi^{k-1}} \int\limits_{|\alpha_k| < \infty} \cdots \int\limits_{|\alpha_2| < \infty} e^{-|\vec{\alpha}|^2} \frac{(\vec{\alpha} | \partial \mathfrak{w}) \overline{(\vec{\alpha}, \partial \mathfrak{w})}}{|w_1|^2} \left(\frac{i}{2}\right)^{k-1} \partial \alpha_2 \partial \bar{\alpha}_2 \ldots \partial \alpha_k \partial \bar{\alpha}_k, \tag{9.42}
$$

wobei $\alpha_1 = -\sum_{\nu=2}^{k} \alpha_\nu \frac{w_\nu(P)}{w_1(P)}$ zu setzen ist.

Nun kann der folgende Satz bewiesen werden.

Satz 9.4. Die Normaldarstellung der Charakteristik.[35]

Voraussetzung. *Die meromorphe Fläche W sei nicht totaldegeneriert. Die projektive Massbestimmung $\partial \omega_2$ sei gemäss (9.25) definiert und $\partial \omega_2(\mathfrak{w}(P))$ nach Hilfssatz 2 gebildet.*[33]

---

[35] Für $n = 1$ siehe W [43] Kap. IV Seite 174 und Kap. III § 4.

Behauptung. *Es gilt die Normaldarstellung*

$$T(G) = \frac{1}{\pi} \int_G \psi(P, G)\, \partial \omega_2 (\mathfrak{w}(P))\, \partial \chi_{2n-2}. \tag{9.43}$$

Beweis. Nach Satz 9.3 kann man wegen $\partial \omega_2 (\mathfrak{w}(P)) = \partial \omega_2 (\sigma \mathfrak{w}(P))$ o. B. d. A. annehmen, dass die meromorphe Fläche W nicht degeneriert. Im Gebiet D sei eine reduzierte Darstellung $\mathfrak{w}(P)$ von W gegeben. Das Gebiet F liege mit seinem Rand in D und sei beschränkt. Die auf $\mathfrak{M}^{2n}$ stetige Funktion $\lambda(P)$ mit $0 \leq \lambda(P) \leq 1$ sei ausserhalb F identisch Null. Dann werde

$$N_1(\vec{\alpha}) = \int_{\mathfrak{N}(\vec{\alpha})} \nu(P, \vec{\alpha})\, \psi(P, G)\, \lambda(P)\, \partial \chi_{2n-2} \tag{9.44}$$

gesetzt. Wegen $N_1(\vec{\alpha}) \leq N(G, \vec{\alpha})$ existiert das Integral

$$J = \frac{1}{V_{2k-1}} \int_{|\vec{\alpha}|=1} N_1(\vec{\alpha})\, \partial v_{2k-1}(\vec{\alpha}) \tag{9.45}$$

und hat wegen $N_1(\vec{\alpha}) = N_1(\varrho \vec{\alpha})$ für $\varrho \neq 0$ nach [I] Hilfssatz 1 Seite 142 den Wert

$$\begin{aligned} J &= \frac{1}{\pi^k} \int_{|\vec{\alpha}|<\infty} N_1(\vec{\alpha})\, e^{-|\vec{\alpha}|^2} \partial v_{2k}(\vec{\alpha}) = \\ &= \left(\frac{i}{2}\right)^k \frac{1}{\pi^k} \int_{|\alpha_k|<\infty} \cdots \int_{|\alpha_1|<\infty} e^{-|\vec{\alpha}|^2} \left\{ \int_{\mathfrak{N}(\vec{\alpha}) \cap F} \nu(P, \vec{\alpha})\, \lambda\, \psi\, \partial \chi_{2n-2} \right\} \partial \alpha_1\, \partial \bar{\alpha}_1 \ldots \partial \alpha_k\, \partial \bar{\alpha}_k. \end{aligned} \tag{9.46}$$

Nun wird irgendein normales Koordinatensystem gewählt. In ihm ist

$$\mathfrak{w}(P) = \sum_{\nu=1}^{k} w_\nu(P)\, \mathfrak{e}_\nu. \tag{9.47}$$

Da die meromorphe Fläche W nicht degeneriert, ist $w_1(P) \not\equiv 0$. Im Gebiet D ist also die Funktion

$$\alpha_1(P) = \varphi(P, \alpha_2, \ldots, \alpha_k) = - \sum_{\nu=2}^{k} \alpha_\nu \frac{w_\nu(P)}{w_1(P)} \tag{9.48}$$

meromorph. Da die meromorphe Fläche W nicht degeneriert, ist $\alpha_1(P)$ für jeden festen Vektor $(\alpha_2, \ldots, \alpha_k) \neq 0$ nicht konstant. Für diese Funktion gilt

$$\alpha_1(P)\, w_1(P) + \alpha_2\, w_2(P) + \cdots + \alpha_k\, w_k(P) \equiv 0, \tag{9.49}$$

$$\partial \alpha_1(P)\, w_1(P) + \alpha_1(P)\, \partial w_1(P) + \alpha_2\, \partial w_2(P) + \cdots + \alpha_k\, \partial w_k(P) \equiv 0, \tag{9.50}$$

$$\partial \alpha_1(P) = -\left.\frac{(\vec{\alpha}, \partial \mathfrak{w}(P))}{w_1(P)}\right|_{\alpha_1 = \alpha_1(P)}. \tag{9.51}$$

Der Vektor $(\alpha_2, \ldots, \alpha_k) \neq 0$ werde festgehalten. Die Funktion $\alpha_1(P)$ habe die α_1-Stellenfläche $\mathfrak{N}_1(\alpha_1)$ und die Vielfachheit $\nu_1(P, \alpha_1)$ der α_1-Stelle P. Die Nullstellenfläche von $w_1(P)$ in D sei $\mathfrak{N}_1$. In jedem Punkt P mit $w_1(P) \neq 0$, also in jedem Punkt $P \in \overline{F} - \mathfrak{N}_1$ ist $\nu_1(P, \alpha_1) = \nu(P, \vec{\alpha})$. Daher gilt auch $\mathfrak{N}_1(\alpha_1) \cap (\overline{F} - \mathfrak{N}_1) = \mathfrak{N}(\vec{\alpha}) \cap (\overline{F} - \mathfrak{N}_1)$. Abgesehen von endlich vielen Werten α_1 sind aber $\mathfrak{N}_1 \cap \mathfrak{N}(\vec{\alpha}) \cap \overline{F}$ und $\mathfrak{N}_1 \cap \mathfrak{N}_1(\alpha) \cap \dot{\overline{F}}$ Nullmengen auf $\mathfrak{N}(\vec{\alpha})$ bzw. $\mathfrak{N}_1(\alpha_1)$. Daher folgt aus (9.46) die Gleichung

$$J = \left(\frac{i}{2}\right)^k \frac{1}{\pi^k} \int\limits_{|\alpha_k| < \infty} \cdots \int\limits_{|\alpha_1| < \infty} e^{-|\vec{\alpha}|^2} \left\{ \int\limits_{\mathfrak{N}_1(\alpha_1) \cap F} \nu_1(P, \alpha_1)\, \lambda\, \psi\, \partial \chi_{2n-2} \right\} \partial \alpha_1\, \partial \overline{\alpha}_1 \ldots \partial \alpha_k\, \partial \overline{\alpha}_k. \tag{9.52}$$

Da in (9.52) alle Integranden nichtnegativ sind, folgt aus Satz 5.1 und seinem Zusatz

$$J = \left(\frac{i}{2}\right)^k \frac{1}{\pi^k} \int\limits_{|\alpha_k| < \infty} \cdots \int\limits_{|\alpha_2| < \infty} \int\limits_{F} e^{-|\vec{\alpha}|^2} \lambda\, \psi\, \partial \alpha_1(P)\, \partial \overline{\alpha}_1(P)\, \partial \chi_{2n-2}\, \partial \alpha_2\, \partial \overline{\alpha}_2 \ldots \partial \alpha_k\, \partial \overline{\alpha}_k, \tag{9.53}$$

wobei für α_1 die Funktion $\alpha_1(P)$ einzusetzen ist. Da

$$\frac{i}{2} \frac{(\vec{\alpha}, \partial \mathfrak{w})\, \overline{(\vec{\alpha}, \partial \mathfrak{w})}}{|w_1|^2} \partial \chi_{2n-2} = \frac{i}{2} \partial \alpha_1\, \partial \overline{\alpha}_1\, \partial \chi_{2n-2} = \frac{1}{4} \sum_{\mu, \nu = 1}^{n} a_{\mu\nu}\, \alpha_{1 z_\mu}\, \overline{\alpha_{1 z_\nu}}\, \partial v_{2n} \geq 0 \tag{9.54}$$

ist, folgt nach dem Satz von Fubini

$$J = \frac{i}{2} \frac{1}{\pi^k} \int\limits_F \int\limits_{|\alpha_k| < \infty} \cdots \int\limits_{|\alpha_2| < \infty} e^{-|\vec{\alpha}|^2} \frac{(\vec{\alpha}, \partial \mathfrak{w})\, \overline{(\vec{\alpha}, \partial \mathfrak{w})}}{|w_1|^2} \left(\frac{i}{2}\right)^{k-1} \partial \alpha_2\, \partial \overline{\alpha}_2 \ldots \partial \alpha_k\, \partial \overline{\alpha}_k\, \lambda\, \psi\, \partial \chi_{2n-2}. \tag{9.55}$$

Nach Hilfssatz 4 ist aber

$$J = \frac{1}{\pi} \int\limits_{F \cap G} \lambda(P)\, \psi(P, G)\, \partial \omega_2(\mathfrak{w}(P))\, \partial \chi_{2n-2}. \tag{9.56}$$

Aus (9.44), (9.45) und (9.56) folgt mit einer Dieudonné-Zerlegung von $\overline{G}$ die Gleichung

$$T(G) = \frac{1}{V_{2k-1}} \int\limits_{|\vec{\alpha}| = 1} N(G, \vec{\alpha})\, \partial v_{2k-1} = \frac{1}{\pi} \int\limits_G \psi(P, G)\, \partial \omega_2(\mathfrak{w})\, \partial \chi_{2n-2}, \tag{9.57}$$

w. z. b. w.

Die Darstellung (9.43) heisst Normaldarstellung, weil durch sie die Charakteristik unmittelbar in einfacher Weise gegeben ist. Nun kann auch (9.14) verschärft werden.

Hilfssatz 5. *Ist* $\sum_{\mu,\nu=1}^{n} a_{\mu\nu} x_\mu \bar{x}_\nu$ *eine positiv definite* HERMITEsche *Form, so ist für beliebige Vektoren* $\mathfrak{w}, \mathfrak{u}_1, \ldots, \mathfrak{u}_n$ *die Form*

$$\sum_{\mu,\nu=1}^{n} a_{\mu\nu} ([\mathfrak{w}, \mathfrak{u}_\mu] \mid [\mathfrak{w}, \mathfrak{u}_\nu]) \geq 0 \tag{9.58}$$

positiv definit. In (9.58) *gilt dann und nur dann das Gleichheitszeichen, wenn*

$$[\mathfrak{w}, \mathfrak{u}_\mu] = 0 \qquad \text{für } \mu = 1, \ldots, n. \tag{9.59}$$

Beweis. In einem geeigneten normalen Koordinatensystem gilt

$$\mathfrak{w} = w_1 \mathfrak{e}_1, \quad \mathfrak{u}_\mu = \sum_{\varrho=1}^{k} u_{\mu\varrho} \mathfrak{e}_\varrho, \quad [\mathfrak{w}, \mathfrak{u}_\mu] = \sum_{\varrho=2}^{k} w_1 u_{\mu\varrho} [\mathfrak{e}_1, \mathfrak{e}_\varrho]. \tag{9.60}$$

Dann ist

$$\begin{aligned} &\sum_{\mu,\nu=1}^{n} a_{\mu\nu} ([\mathfrak{w}, \mathfrak{u}_\mu] \mid [\mathfrak{w}, \mathfrak{u}_\nu]) = \\ &= \sum_{\mu,\nu=1}^{n} a_{\mu\nu} \sum_{\varrho=1}^{k} w_1 u_{\mu\varrho} \bar{w}_1 \bar{u}_{\nu\varrho} = \sum_{\varrho=2}^{k} \sum_{\mu,\nu=1}^{n} a_{\mu\nu} w_1 u_{\mu\varrho} \bar{w}_1 \bar{u}_{\nu\varrho} \geq 0. \end{aligned} \tag{9.61}$$

Der Ausdruck ist dann und nur dann Null, wenn $w_1 u_{\mu\varrho} = 0$ ist für alle Indizes $\mu \geq 1$, $\varrho \geq 2$, das heisst, wenn $[\mathfrak{w}, \mathfrak{u}_\mu] = 0$ ist für $\mu = 1, \ldots, n$, w. z. b. w.

Hilfssatz 6. *Ist die meromorphe Fläche W nicht totaldegeneriert, so hat das Differential $\partial \omega_2 (\mathfrak{w}(P)) \partial \chi_{2n-2}$ eine nichtnegative Dichte auf $\mathfrak{M}^{2n}$. Ist $W \not\equiv 0$ konstant, so ist $\partial \omega_2 (\mathfrak{w}(P)) \partial \chi_{2n-2} \equiv 0$. Ist $W \not\equiv 0$ nicht konstant, so ist $\partial \omega_2 (\mathfrak{w}(P)) \partial \chi_{2n-2}$ auf höchstens abzählbar vielen komplexen Teilmannigfaltigkeiten mit Dimensionen $2k \leq 2n-2$ Null.*

Beweis. Der Punkt $P_0 \in \mathfrak{M}^{2n}$ und die Abbildung $\alpha \in \mathfrak{P}$ mit $P_0 \in U_\alpha$ seien beliebig gewählt. Es gibt eine Darstellung $\mathfrak{w}(P)$ von W auf einem Gebiet D mit $P_0 \in D \cap U_\alpha$. Dann gilt

$$\partial \omega_2 (\mathfrak{w}) \partial \chi_{2n-2} = \frac{1}{4} \sum_{\mu,\nu=1}^{n} a_{\mu\nu} \frac{([\mathfrak{w}, \mathfrak{w}_{z_\mu}] \mid [\mathfrak{w}, \mathfrak{w}_{z_\nu}])}{|\mathfrak{w}|^4} \partial v_{2n}(\mathfrak{z}) \geq 0. \tag{9.62}$$

Also hat $\partial \omega_2 (\mathfrak{w}) \partial \chi_{2n-2}$ eine nichtnegative Dichte. Ist diese im Gebiet D identisch Null, so wählt man $P_0 \in V \subseteq D \cap U_\alpha$. Da $\mathfrak{w}(P) \not\equiv 0$ gibt es ein ϱ mit $w_\varrho(P) \not\equiv 0$. Dann ist $\mathfrak{v}(P) = \sum_{\mu=1}^{k} \frac{w_\mu}{w_\varrho} \mathfrak{e}_\mu$ wieder eine Darstellung auf V. Daher kann man o. B. d. A.

$\mathfrak{w}(P) = \sum_{\mu=1}^{k} w_\mu(P)\, \mathfrak{e}_\mu$ mit $w_\varrho(P) \equiv 1$ annehmen. Da $\partial\omega_2(\mathfrak{w})\,\partial\chi_{2n-2} \equiv 0$ ist, folgt aus Hilfssatz 5

$$0 \equiv [\mathfrak{w}, \mathfrak{w}_{z_\mu}] = \sum_{\substack{\varkappa, \lambda=1 \\ \varkappa<\lambda}}^{n} \begin{vmatrix} w_\varkappa & w_\lambda \\ w_{\varkappa z_\mu} & w_{\lambda z_\mu} \end{vmatrix} [\mathfrak{e}_\varkappa, \mathfrak{e}_\lambda]. \tag{9.63}$$

Also ist

$$0 \equiv \begin{vmatrix} w_\varrho & w_\lambda \\ w_{\varrho z_\mu} & w_{\lambda z_\mu} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & w_\lambda \\ 0 & w_{\lambda z_\mu} \end{vmatrix} = w_{\lambda z_\mu}. \tag{9.64}$$

Daher ist $\mathfrak{w}(P) = \mathfrak{c}$ eine konstante Darstellung auf D, also auf $\mathfrak{M}^{2n}$. Nun sei $\partial\omega_2(\mathfrak{w}(P))\,\partial\chi_{2n-2} \not\equiv 0$. Da abzählbar viele Gebiete D die Mannigfaltigkeit $\mathfrak{M}^{2n}$ überdecken, bilden wegen

$$\{P \mid \partial\omega_2(\mathfrak{w}(P))\,\partial\chi_{2n-2}(P) = 0\} \cap D = \bigcap_{\mu=1}^{n} \{P \mid [\mathfrak{w}(P), \mathfrak{w}_{z_\mu}(P)] = 0\} \cap D \tag{9.65}$$

die Nullstellen des Differentials $\partial\omega_2(\mathfrak{w})\,\partial\chi_{2n-2}$ höchstens abzählbar viele komplexe Teilmannigfaltigkeiten mit Dimensionen $2k \leq 2n-2$. Ist W konstant, so ist sicher $\partial\omega_2(\mathfrak{w}(P))\,\partial\chi_{2n-2} \equiv 0$, w. z. b. w.

Aus Hilfssatz 6 und Satz 7.3 folgt unmittelbar:

Satz 9.5. Die Monotonie der Charakteristik.

Voraussetzung. *Die meromorphe Fläche $W \not\equiv 0$ sei nicht konstant.*

Behauptung. *Für zwei zulässige offene Mengen $G_1 \subset G_2$ gilt*

$$0 < T(G_1) < T(G_2). \tag{9.66}$$

§ 10. Zwischenkondensatoren. Zwei andere Darstellungen.

Jede zulässige Menge G liefert eine kontinuierliche Menge anderer zulässiger Mengen $G_r = \{P \mid \psi(P, G) > R(G) - r\}$, wie der folgende Satz besagt.

Satz 10.1. Zwischenkondensatoren.[36]

Voraussetzung. *Die allgemeinen Voraussetzungen* I *bis* V *werden gemacht. Es sei G eine zulässige Menge.*

Behauptung. *Für fast alle r in $0 < r \leq R(G)$, das heisst, für alle r in diesem Intervall mit Ausnahme der Nullmenge $M = M(G)$ ist $G_r = \{P \mid \psi(P, G) > R(G) - r\}$ eine zulässige Menge. Die zugehörige Randmannigfaltigkeit ist*

[36] Für $n = 1$ siehe W [43] Kap. IV § 3 Seite 175.

(10.1) $$\Gamma_r = \{P \mid \psi(P, G) = R(G) - r \text{ und } \partial\psi(P, G) \neq 0\} = Rd\, G_r - E,$$

wobei E die kritische Menge des Kondensators $H = G - \bar{g}$ ist. Die Potentialfunktion von G_r ist

(10.2) $$\psi(P, G_r) = \begin{cases} \psi(P, G) - (R(G) - r) & \text{für } P \in G_r, \\ 0 & \text{für } P \notin G_r, \end{cases}$$

bzw.

(10.3) $$\varphi(P, G_r) = \frac{1}{r}\,\psi(P, G_r).$$

Die Spannung des Kondensators $H_r = G_r - \bar{g}$ ist

(10.4) $$R(G_r) = r.$$

Seine Kapazität ist

(10.5) $$C(G_r) = \frac{1}{r}\cdot$$

Die zulässigen Mengen G_r wachsen monoton in r, das heisst:

(10.6) $$g \subset \bar{g} \subset G_r \subset \bar{G}_r \subset G_{r'} \subset \bar{G}_{r'} \subset G_R = G \quad \text{für } 0 < r < r' < R.$$

Beweis. Die Forderungen a) bis f) der allgemeinen Voraussetzung IV sind für die offenen Mengen G_r nachzuprüfen. Da sich (10.6) unmittelbar aus der Definition von G_r ergibt, gelten die Forderungen a) und b). Mit der in (10.3) und (10.2) definierten Funktion $\varphi(P, G_r)$ ist die Forderung f) erfüllt. Es ist

(10.7) $$\begin{aligned} C(G_r) &= \frac{1}{2\pi}\int_\gamma \partial^\perp \varphi(P, G_r)\, \partial\chi_{2n-2} = \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_\gamma \partial^\perp\left(\frac{1}{r}\psi(P, G) - \frac{R-r}{r}\right)\partial\chi_{2n-2} = \\ &= \frac{1}{r}\,\frac{1}{2\pi}\int_\gamma \partial^\perp \psi(P, G)\, \partial\chi_{2n-2} = \frac{1}{r}\cdot \end{aligned}$$

Also ist $C(G_r) = 1/r$ die Kapazität und $R(G_r) = r$ die Spannung des Kondensators $H_r = G_r - \bar{g}$. Die Funktion $\psi(P, G_r)$ aus (10.2) ist das Potential dieses Kondensators. Definiert man Γ_r gemäss (10.1), so liegt Γ_r im Rand von G_r und ist nach § 2 (5) 15° a eine stetigdifferenzierbare, orientierbare Teilmannigfaltigkeit der Dimension $2n-1$ von $\mathfrak{M}^{2n}$. Es sei Γ_r so orientiert, dass es eine äussere Normale bezüglich G_r hat. Nach Satz 5.4 gibt es eine Nullmenge $M = M(G)$ des Intervalles $0 < r \leq R(G)$, sodass für alle $r \notin M(G)$ mit $0 < r \leq R(G)$ die Niveaufläche $Rd\, G_r$ ein endliches μ-Mass hat und $Rd\, G_r - \Gamma_r = E \cap Rd\, G_r$ eine μ-Nullmenge ist. Daher sind auch die Forderungen c) – e) erfüllt. Für alle $r \notin M(G)$ mit $0 < r \leq R(G)$ ist G_r eine zulässige Menge, w. z. b. w.

Für diese Zwischenkondensatoren kann man nun auch die Sätze der beiden letzten Paragraphen formulieren, was hier nicht zu geschehen braucht. Man beachte aber, dass

$$\partial^\perp \psi(P, G_r)\, \partial \chi_{2n-2} = \partial^\perp \psi(P, G)\, \partial \chi_{2n-2}, \tag{10.8}$$

$$m(G_r, \gamma, \vec{\alpha}) = m(G, \gamma, \vec{\alpha}) \tag{10.9}$$

für $0 < r \leq R(G)$ unabhängig von r sind.

Mit Hilfe dieser Zwischenkondensatoren können nun zwei weitere Darstellungen der Charakteristik bewiesen werden. Um diese Darstellungen aufstellen zu können, werde der folgende Hilfssatz bewiesen:

Hilfssatz 1. *Ist die Funktion $f(P)$ auf dem Kondensator $H = G - \mathfrak{g}$ messbar, und ist das Differential $f(P)\, \partial \psi\, \partial^\perp \psi\, \partial \chi_{2n-2}$ über $H - E$ integrierbar, so gilt die Integralumformung*

$$\int_{H-E} f(P)\, \partial \psi\, \partial^\perp \psi\, \partial \chi_{2n-2} = - \int_0^{R(G)} \left\{ \int_{\Gamma_r} f(P)\, \partial^\perp \psi\, \partial \chi_{2n-2} \right\} dr. \tag{10.10}$$

Zusatz. *Existiert das Integral $\int_{\Gamma_r} |f|\, \partial^\perp \psi\, \partial \chi_{2n-2}$ für fast alle r in $0 < r \leq R(G)$ und ist es über dieses Intervall integrierbar, so ist das Differential $f\, \partial \psi\, \partial^\perp \psi\, \partial \chi_{2n-2}$ über $H - E$ integrierbar.*

Beweis. Der Satz von Fubini § 2 (5) 15° wird angewandt. Dazu dient die Übersetzungstabelle:

Fubini	$\mathfrak{M}^m$	$\mathfrak{N}^l$	$\sigma(P)$	m	l	s
Hier	$H - E$	$\mathfrak{N}^1 = \{u \mid -\infty < u < +\infty\}$	$\sigma(P) = R - \psi(P, G)$	$2n$	1	$2n - 1$

Fubini	Q	$\mathfrak{M}_Q$	$\alpha(\mathfrak{t})$	$\beta(\mathfrak{x})$	$\gamma(\mathfrak{w})$	$\mathfrak{t}(\mathfrak{w})$
Hier	r	$\Gamma_r = \tilde{\Gamma}_r$	$\alpha(t) = t$	$\tilde{\beta}(\tilde{\mathfrak{x}})$	$\gamma(\mathfrak{w}) = \gamma^*(\mathfrak{z})$	$t(\mathfrak{w})$

Fubini	$\mathfrak{w}(\mathfrak{x})$	M	M_Q	∂A_s	∂B_e
Hier	$\tilde{\mathfrak{w}}(\tilde{\mathfrak{x}})$	$H - E$	Γ_r	$f\, \partial^\perp \psi\, \partial \chi_{2n-2}$	∂u

Die offene Menge $H-E$ ist eine $2n$ dimensionale, komplexe Teilmannigfaltigkeit von $\mathfrak{M}^{2n}$. Die Funktion $\sigma(P)=R-\psi(P,G)$ bildet $H-E$ stetigdifferenzierbar und wegen

(10.11) $$\partial\sigma(P)=-\partial\psi\neq 0 \quad \text{auf} \quad H-E$$

mit dem Rang 1 in die Zahlengerade $\mathfrak{R}^1=\{u\mid -\infty<u<+\infty\}$ ab, die in Richtung von $-\infty$ nach $+\infty$ orientiert sei. Nach dem Satz von Fubini ist der Mannigfaltigkeit $\sigma^{-1}(r)=\{P\mid\psi(P)=R-r\}=\Gamma_r$ eine bestimmte Orientierung zugeordnet. Erteilt man Γ_r diese Orientierung, so werde es mit $\tilde{\Gamma}_r$ bezeichnet, während die Bezeichnung Γ_r die Orientierung durch ein äussere Normale bezüglich G_r anzeige. Gehört die Abbildung $\tilde{\beta}(\tilde{\mathfrak{x}})$ zu $\mathfrak{P}(\tilde{\Gamma}_r)$ und ist $U_{\tilde{\beta}}$ zusammenhängend, so gehört die Abbildung $\beta(\mathfrak{x})=\tilde{\beta}(\varepsilon\mathfrak{x})$ zu $\mathfrak{P}(\Gamma_r)$, wobei $\varepsilon=\pm 1$ ist. Es wird $\Gamma_r=\tilde{\Gamma}_r$, das heisst, $\varepsilon=1$ behauptet. Zum Beweis werden die Abbildung $\alpha(t)\equiv t$ aus $\mathfrak{P}(\mathfrak{R}^1)$ und die Abbildung $\gamma^*(\mathfrak{z})$ aus $\mathfrak{P}(H-E)$ mit $U_{\tilde{\beta}}\cap U_\gamma\neq\phi$ gewählt. Es sei $\tilde{\mathfrak{x}}=\varepsilon\mathfrak{x}$ und $z_\nu=w_{2\nu-1}+iw_{2\nu}$. Man setzt $\gamma(\mathfrak{w})=\gamma^*(\mathfrak{z})$, sowie $\mathfrak{w}(\mathfrak{x})=\gamma^{-1}\beta(\mathfrak{x})$ und $\tilde{\mathfrak{w}}(\tilde{\mathfrak{x}})=\gamma^{-1}\tilde{\beta}(\tilde{\mathfrak{x}})$. Wird $t(\mathfrak{w})=\alpha^{-1}\sigma\gamma(\mathfrak{w})=$ $=\sigma\gamma(\mathfrak{w})=R-\psi(\gamma(\mathfrak{w}))$ gesetzt, so ist an der Stelle $\mathfrak{w}=\tilde{\mathfrak{w}}(\tilde{\mathfrak{x}})$ die Determinante

(10.12) $$\Delta=\det\left(\operatorname{grad}_{\mathfrak{w}} t(\mathfrak{w}),\ \tilde{\mathfrak{w}}_{\tilde{x}_1}(\tilde{\mathfrak{x}}),\ldots,\tilde{\mathfrak{w}}_{\tilde{x}_{2n-1}}(\tilde{\mathfrak{x}})\right)>0,$$

das heisst

(10.13) $$\Delta=-\det\left(\operatorname{grad}\psi(\gamma(\mathfrak{w})),\ \tilde{\mathfrak{w}}_{\tilde{x}_1}(\tilde{\mathfrak{x}}),\ldots,\tilde{\mathfrak{w}}_{\tilde{x}_{2n-1}}(\tilde{\mathfrak{x}})\right)>0.$$

Wegen $\tilde{\mathfrak{w}}(\tilde{\mathfrak{x}})=\tilde{\mathfrak{w}}(\varepsilon\mathfrak{x})=\gamma^{-1}\tilde{\beta}(\varepsilon\mathfrak{x})=\gamma^{-1}\beta(\mathfrak{x})=\mathfrak{w}(\mathfrak{x})=\mathfrak{w}(\varepsilon\tilde{\mathfrak{x}})$ heisst das

(10.14) $$\Delta=-\varepsilon\det\left(\operatorname{grad}\psi(\gamma(\mathfrak{w})),\ \mathfrak{w}_{x_1}(\mathfrak{x}),\ldots,\mathfrak{w}_{x_{2n-1}}(\mathfrak{x})\right)>0.$$

Die äussere Normale von $\Gamma_r'=\gamma^{-1}(U_\gamma\cap\Gamma_r)$ zeigt in Richtung fallender ψ-Werte, ist also $-\frac{\operatorname{grad}\psi}{|\operatorname{grad}\psi|}$. Nach der Orientierung von Γ_r bilden $-\frac{\operatorname{grad}\psi}{|\operatorname{grad}\psi|}$, $\mathfrak{w}_{x_1},\ldots,\mathfrak{w}_{x_{2n-1}}$ ein Rechtssystem. Daher ist

(10.15) $$-\det\left(\operatorname{grad}\psi(\gamma(\mathfrak{w})),\ \mathfrak{w}_{x_1}(\mathfrak{x}),\ldots,\mathfrak{w}_{x_{2n-1}}(\mathfrak{x})\right)>0.$$

Aus (10.14) und (10.15) folgt $\varepsilon=1$, das heisst, $\Gamma_r=\tilde{\Gamma}_r$. Die Orientierung von Γ_r ist richtig gewählt. Setzt man in das Differential ∂u die Abbildung $\sigma(P)=R-\psi(P)$ ein, so erhält man $\sigma\partial u=\partial\sigma(P)=-\partial\psi(P)$. Da $\partial\psi$ auf der kritischen Menge E und nur auf hr verschwindet, erhält man aus dem Satz von Fubini die Integralumformung

$$\begin{aligned}\int_{H-E} f(P)\,\partial\psi\,\partial^{\perp}\psi\,\partial\chi_{2n-2} &= \int_{H-E} f(P)\,\partial^{\perp}\psi\,\partial\chi_{2n-2}\cdot(-\partial\psi) = \\ &= -\int_{-\infty}^{+\infty}\Big\{\int_{\Gamma_u} f(P)\,\partial^{\perp}\psi\,\partial\chi_{2n-2}\Big\}\,\partial u = \\ &= -\int_{0}^{R}\Big\{\int_{\Gamma_r} f(P)\,\partial^{\perp}\psi\,\partial\chi_{2n-2}\Big\}\,d r.\end{aligned}\tag{10.16}$$

Ebenso folgt der Zusatz aus § 2 (5) 15° d, w. z. b. w.

Satz 10.2. Die sphärische Darstellung der Charakteristik.[37]

Voraussetzung. *Die meromorphe Fläche W sei nicht totaldegeneriert.*

Behauptung 1. *Der Quotient*

$$0 \le S(P) = \frac{1}{2}\,\frac{\sum\limits_{\mu,\nu=1}^{n} a_{\mu\nu}\,([\mathfrak{w},\mathfrak{w}_{z_\mu}]\,|\,[\mathfrak{w},\mathfrak{w}_{z_\nu}])}{\sum\limits_{\mu,\nu=1}^{n} a_{\mu\nu}\,\psi_{z_\mu}\,\psi_{\bar z_\nu}\;|\,\mathfrak{w}\,|^4} = -2\,\frac{\partial\omega_2(\mathfrak{w})\,\partial\chi_{2n-2}}{\partial\psi\,\partial^{\perp}\psi\,\partial\chi_{2n-2}}\tag{10.17}$$

ist auf $\bar H - E$, abgesehen von den Unbestimmtheitsstellen von W, unabhängig von der Wahl der Darstellung $\mathfrak{w}(P)$ und der uniformisierenden Abbildung α eindeutig als Funktion von P erklärt.

2. *Das Differential $S(P)\,\partial\psi\,\partial^{\perp}\psi\,\partial\chi_{2n-2}$ ist über $\bar H - E$ integrierbar.*

3. *Das Differential $S(P)\,\partial^{\perp}\psi\,\partial\chi_{2n-2}$ ist über fast alle Γ_r integrierbar.*

4. *Setzt man*

$$a = \frac{1}{\pi}\int_{G} \partial\omega_2(\mathfrak{w}(P))\,\partial\chi_{2n-2},\tag{10.18}$$

$$\varepsilon(r) = \frac{1}{\pi}\int_{G_r\cap E} \partial\omega_2(\mathfrak{w}(P))\,\partial\chi_{2n-2},\tag{10.19}$$

$$Q(r) = \frac{1}{2\pi}\int_{\Gamma_r} S(P)\,\partial^{\perp}\psi\,\partial\chi_{2n-2},\tag{10.20}$$

$$A(t) = \frac{1}{\pi}\int_{G_t} \partial\omega_2(\mathfrak{w}(P))\,\partial\chi_{2n-2},\tag{10.21}$$

so gilt die sphärische Darstellung

---

[37] Für $n = 1$ siehe W [43] Kap. IV § 3 Seite 177 und Kap. III § 6 Seite 152.

(10.22)
$$T(G) = \int\limits_0^{R(G)} A(t)\,dt$$

und die Darstellung

(10.23)
$$T(G) = aR + \int\limits_0^R (R-r)\,Q(r)\,dr + \int\limits_0^R (R-r)\,d\varepsilon(r).$$

Ferner ist

(10.24)
$$A(t) = a + \int\limits_0^t Q(r)\,dr + \varepsilon(t).$$

5. *Ist die meromorphe Fläche W nichtkonstant, so sind a, $Q(r)$ und $A(t)$ positiv. Ist W konstant, so sind sie Null.*

6. *Ist E eine Nullmenge, oder $\partial\chi_{2n-2}$ reellanalytisch, so ist $\varepsilon(r) \equiv 0$.*

Beweis 1. Das Differential $\partial\omega_2(\mathfrak{w})\,\partial\chi_{2n-2}$ hat die Dichte

(10.25)
$$\frac{1}{4}\sum_{\mu,\nu=1}^{n} a_{\mu\nu}\frac{([\mathfrak{w}, \mathfrak{w}_{z_\mu}] \,|\, [\mathfrak{w}, \mathfrak{w}_{z_\nu}])}{|\mathfrak{w}|^4} \geq 0,$$

die nicht von der Wahl der Darstellung $\mathfrak{w}(P)$ abhängt. Das Differential $-\partial\psi\,\partial^{\perp}\psi\,\partial\chi_{2n-2}$ hat die Dichte

(10.26)
$$\sum_{\mu,\nu=1}^{n} a_{\mu\nu}\,\psi_{z_\mu}\,\psi_{\bar{z}_\nu}$$

die auf $\bar{H} - E$ positiv ist. Der Quotient dieser beiden Dichten ist $\frac{1}{2}S(P)$. Also ist die erste Behauptung und wegen $S\,\partial\psi\,\partial^{\perp}\psi\,\partial\chi_{2n-2} = -2\,\partial\omega_2\,\partial\chi_{2n-2}$ auch die zweite bewiesen.

3. Nach Hilfssatz 1 gilt

(10.27)
$$\begin{aligned} T(G) &= \frac{1}{\pi}\int\limits_G \psi(P, G)\,\partial w_2(\mathfrak{w})\,\partial\chi_{2n-2} = \\ &= \frac{R}{\pi}\int\limits_G \partial\omega_2(\mathfrak{w})\,\partial\chi_{2n-2} + \frac{1}{\pi}\int\limits_E \psi(P, G)\,\partial\omega_2(\mathfrak{w})\,\partial\chi_{2n-2} - \\ &- \frac{1}{2\pi}\int\limits_{H-E} \psi(P, G)\,S(P)\,\partial\psi\,\partial^{\perp}\psi\,\partial\chi_{2n-2} = \\ &= a\cdot R + \frac{1}{\pi}\int\limits_E \psi(P, G)\,\partial\omega_2(\mathfrak{w})\,\partial\chi_{2n-2} + \int\limits_0^R (R-r)\,Q(r)\,dr. \end{aligned}$$

Also existiert das Integral $Q(r)$ für fast alle r.

4. Es sei

$$\tilde{\varepsilon}(r) = \frac{1}{\pi} \int\limits_{G_r \cap E} \psi(P, G_r)\, \partial\omega_2(\mathfrak{w})\, \partial\chi_{2n-2}. \tag{10.28}$$

Für $r > r'$ gilt

$$\begin{aligned} 0 \leq \tilde{\varepsilon}(r) - \tilde{\varepsilon}(r') &= \frac{1}{\pi} \int\limits_{G_r \cap E} (\psi(P, G) - R + r)\, \partial\omega_2\, \partial\chi_{2n-2} - \\ &- \frac{1}{\pi} \int\limits_{G_{r'} \cap E} (\psi(P, G) - R + r')\, \partial\omega_2\, \partial\chi_{2n-2} = \\ &= (r - r')\, \varepsilon(r) + \int\limits_{E \cap (G_r - G_{r'})} (\psi(P, G) - R + r')\, \partial\omega_2\, \partial\chi_{2n-2} \leq \\ &\leq (r - r')\, \varepsilon(R). \end{aligned} \tag{10.29}$$

Daher erfüllt $\tilde{\varepsilon}(r)$ eine Lipschitz-Bedingung, ist also totalstetig. Ebenso erhält man

$$0 \geq \frac{\tilde{\varepsilon}(r') - \tilde{\varepsilon}(r)}{r' - r} - \varepsilon(r) \geq - \int\limits_{E \cap (G_r - G_{r'})} \partial\omega_2\, \partial\chi_{2n-2} \to 0 \quad \text{für } r' \to r - 0. \tag{10.30}$$

Daher existiert die linksseitige Ableitung der totalstetigen Funktion $\tilde{\varepsilon}(r)$ und ist $\varepsilon(r)$. Die Ableitung von $\tilde{\varepsilon}(r)$ existiert fast überall und ist gleich $\varepsilon(r)$. Auf γ ist $\partial^\perp\psi \neq 0$, also trifft die abgeschlossene Menge E den abgeschlossenen Rand γ nicht. Daher ist $\tilde{\varepsilon}(0) = 0$. Es gilt

$$\tilde{\varepsilon}(R) = \int\limits_0^R \varepsilon(r)\, dr = \int\limits_0^R (R - r)\, d\varepsilon(r). \tag{10.31}$$

Aus (10.27), (10.28) und (10.31) folgt Gleichung (10.23). Nach Hilfssatz 1 gilt

$$\begin{aligned} A(t) &= \frac{1}{\pi} \int\limits_{G_t} \partial\omega_2(\mathfrak{w})\, \partial\chi_{2n-2} = \\ &= \frac{1}{\pi} \int\limits_{g} \partial\omega_2(\mathfrak{w})\, \partial\chi_{2n-2} + \frac{1}{\pi} \int\limits_{E \cap G_t} \partial\omega_2(\mathfrak{w})\, \partial\chi_{2n-2} - \\ &- \frac{1}{2\pi} \int\limits_{H_t - E} S(P)\, \partial\psi\, \partial^\perp\psi\, \partial\chi_{2n-2} = \\ &= a + \varepsilon(t) + \int\limits_0^t Q(r)\, dr. \end{aligned} \tag{10.32}$$

Daher ist Gleichung (10.24) richtig. Aus (10.24), (10.31) und (10.23) folgt die Gleichung (10.22). Damit ist die vierte Behauptung bewiesen.

Aus Hilfssatz 6 in § 9 folgt die fünfte Behauptung. Ist $\partial \chi_{2n-2}$ reellanalytisch, so ist auch ψ reellanalytisch. Dann ist aber $E = \{P \mid \partial \psi = 0\} \cap \bar{H}$ eine Nullmenge, also $\varepsilon(r) \equiv 0$. Nun sind alle Behauptungen des Satzes bewiesen.

Diesen Satz kann man natürlich auch für Zwischenkondensatoren aufstellen, indem man G durch G_r ersetzt. Man hat dabei $(G_r)_t = G_t$ zu beachten. Nach (10.23) gilt also

$$T(G_r) = \int_0^r A(t)\, dt. \tag{10.33}$$

Da $A(t) \geq 0$ und monoton ist, ist $T(G_r)$ im Intervall $0 \leq r \leq R$ totalstetig, monoton und konvex. Allgemeiner gilt sogar

Satz 10.3. Die Abhängigkeit von r.[38]

Voraussetzung. *Die meromorphe Fläche W sei nicht totaldegenereirt. Es werde $T(G_0) = N(G_0, \vec{\alpha}) = 0$ und $m(\Gamma_0, \vec{\alpha}) = m(\gamma, \vec{\alpha})$ gesetzt. Ausserdem werde*

$$n(G, \vec{\alpha}) = \int_{\mathfrak{N}(\vec{\alpha}) \cap G} \nu(P, \vec{\alpha})\, \partial \chi_{2n-2} \tag{10.34}$$

für jeden Vektor $\vec{\alpha}$ mit $(W, \vec{\alpha}) \not\equiv 0$ gesetzt.

Behauptung. *Die Charakteristik $T(G_r)$ und die Anzahlfunktion $N(G_r, \vec{\alpha})$ sind in $0 \leq r \leq R(G)$ totalstetig, monoton und konvex. Die Schmiegungsfunktion $m(\Gamma_r, \vec{\alpha})$ ist in $0 \leq r \leq R(G)$ totalstetig. Die Schmiegungsfunktion $m(G_r, \gamma, \vec{\alpha}) = m(G, \gamma, \vec{\alpha}) = m(\gamma, \vec{\alpha})$ hängt nicht von r ab. Im übrigen gilt:*

$$N(G_r, \vec{\alpha}) = \int_0^r n(G_t, \vec{\alpha})\, dt. \tag{10.35}$$

Beweis. Die Behauptungen über die Charakteristik wurden schon bewiesen. Die Behauptungen über die Anzahlfunktion folgen aus (10.35). Da $\partial^{\perp} \psi(P, G_r)\, \partial \chi_{2n-2} = \partial^{\perp} \psi(P, G)\, \partial \chi_{2n-2}$ ist, hängt $m(\gamma, \vec{\alpha})$ nicht von r ab. Nach dem 1. Hauptsatz ist also $m(\Gamma_r, \vec{\alpha})$ totalstetig. Es reicht die Gleichung (10.35) zu bewiesen. Wenn $r > r'$ ist, gilt

---

[38] Für $n = 1$ siehe W [43] Kap. IV § 3 Seite 176.

$$
(10.36)\quad
\begin{aligned}
&0 \le N(G_r, \vec{\alpha}) - N(G_{r'}, \vec{\alpha}) = \\
&= \int\limits_{\mathfrak{N}(\vec{\alpha}) \cap G_r} (\psi(P, G) - R + r)\, \nu(P, \vec{\alpha})\, \partial \chi_{2n-2} - \int\limits_{\mathfrak{N}(\vec{\alpha}) \cap G_{r'}} (\psi(P, G) - R + r')\, \nu(P, \vec{\alpha})\, \partial \chi_{2n-2} = \\
&= (r - r')\, n(G_r, \vec{\alpha}) + \int\limits_{\mathfrak{N}(\vec{\alpha}) \cap (G_r - G_{r'})} (\psi(P, G) - R + r')\, \nu(P, \vec{\alpha})\, \partial \chi_{2n-2} \le \\
&\le (r - r')\, n(G, \vec{\alpha}).
\end{aligned}
$$

Daher erfüllt $N(G_r, \vec{\alpha})$ eine LIPSCHITZ-Bedingung, ist also totalstetig. Ebenso erhält man

$$
(10.37)\quad
\begin{aligned}
&0 \ge \frac{N(G_r, \vec{\alpha}) - N(G_{r'}, \vec{\alpha})}{r - r'} - n(G_r, \vec{\alpha}) = \\
&= \int\limits_{\mathfrak{N}(\vec{\alpha}) \cap (G_r - G_{r'})} \frac{\psi(P, G) - R + r'}{r - r'}\, \nu\, \partial \chi_{2n-2} \ge - \int\limits_{\mathfrak{N}(\vec{\alpha}) \cap (G_r - G_{r'})} \nu\, \partial \chi_{2n-2} \to 0
\end{aligned}
$$

für $r' \to r - 0$. Daher existiert die linksseitige Ableitung der totalstetigen Funktion $N(G_r, \vec{\alpha})$ und ist $n(G_r, \vec{\alpha})$. Wegen

$$
(10.38)\quad N(G_r, \vec{\alpha}) = \int\limits_{\mathfrak{N}(\vec{\alpha})} \psi(P, G_r)\, \nu(P, \vec{\alpha})\, \partial \chi_{2n-2} \le r\, n(G, \vec{\alpha})
$$

strebt $N(G_r, \vec{\alpha}) \to 0$ für $r \to +0$. Man erhält also

$$
(10.35)\quad N(G_r, \vec{\alpha}) = \int_0^r n(G_t, \alpha)\, dt, \qquad \text{w. z. b. w.}
$$

Nach Satz 10.2 ist die Charakteristik eng mit dem „Wachstum" der meromorphen Fläche verknüpft. Im komplexprojektiven Raum $\mathfrak{P}^{2k-2}$ der Dimension $2k-2$, der aus den Koordinatenverhältnissen $\mathfrak{w} = (w_1 : \ldots : w_k)$ besteht, wird durch $\partial \omega_2(\mathfrak{w})$ eine KÄHLERsche Metrik gegeben. Auf der Mannigfaltigkeit $\mathfrak{M}^{2n}$ gibt das Differential $\partial \chi_{2n-2}$ eine Massbestimmung. Im Produktraum $\mathfrak{P}^{2k-2} \times \mathfrak{M}^{2n}$ erteilt das Differential $\partial \omega_2(\mathfrak{w}) \cdot \partial \chi_{2n-2}$ dem Funktionsbild

$$
(10.39)\quad \tilde{W} = \{(\mathfrak{w}, P) \mid \mathfrak{w} = \mathfrak{w}(P),\ P \in \mathfrak{M}^{2n}\}
$$

der nichtkonstanten, meromorphen Fläche $W \not\equiv 0$ eine positive Massenbelegung. Misst man den Flächeninhalt des über G_t gelegenen Teiles von $\tilde{W}$ mit dieser Massenbelegung $\partial \omega_2(\mathfrak{w})\, \partial \chi_{2n-2}$, so erhält man gerade $\pi A(t)$. Dieser Flächeninhalt $\pi A(t)$ ist ein Mass für die „Grösse", das heisst, das „Wachstum" der meromorphen Fläche. Dasselbe gilt dann auch für das Integral $T(G) = \frac{1}{\pi} \int_0^R \pi A(t)\, dt$.

Es gibt aber noch eine andere wichtige Wachstumseigenschaft der Charakteristik. Nach (10.23) ist

$$T(G) \geq a\,R(G). \tag{10.40}$$

Ist nun $G^{(\nu)}$ eine Folge zulässiger Mengen, so ist

$$\varliminf_{\nu\to\infty} \frac{T(G^{(\nu)})}{R(G^{(\nu)})} \geq a > 0. \tag{10.41}$$

Strebt für eine Folge $G^{(\nu)}$ die Spannung $R(G^{(\nu)}) \to \infty$ für $\nu \to \infty$, so strebt

$$T(G^{(\nu)}) \to \infty \quad \text{für } \nu \to \infty, \tag{10.42}$$

wenn die meromorphe Fläche W nichtkonstant ist. Man beachte, dass die Voraussetzung $\varliminf_{\nu\to\infty} R(G^{(\nu)}) = \infty$ nur von der Mannigfaltigkeit $\mathfrak{M}^{2n}$ und der gewählten Massbestimmung $\partial\chi_{2n-2}$ abhängt, nicht aber von der betrachteten meromorphen Fläche. Im nächsten Paragraphen soll gezeigt werden, dass sich unter gewissen Voraussetzungen die Konstante a in (10.41) durch eine Konstante $b > 0$ ersetzen lässt, die nicht von der Wahl der meromorphen Fläche abhängt.

§ 11. Mannigfaltigkeiten mit der Gesamtkapazität Null.

Zunächst möge die am Schluss des letzten Paragraphen versprochene Konstante eingeführt werden, was in Form einer allgemeinen Voraussetzung geschehen möge.

VI. **Der Eichfaktor.**[39] *Die allgemeinen Voraussetzungen* I *bis* III *werden gemacht. Im offenen Kern g werde eine kompakte Menge $K_g \neq \emptyset$ beliebig, aber weiterhin fest gewählt. Es sei $\mathfrak{N}$ die Menge der Nullstellenflächen $\mathfrak{N}$, die in g abgeschlossen sind, für die also $\mathfrak{N} \cap g = \overline{\mathfrak{N}} \cap g$ gilt, und für die $K_g \cap \mathfrak{N}$ nicht leer ist. Dann heisse*

$$b = \operatorname*{fin}_{\mathfrak{N}\in\mathfrak{N}} \int_{\mathfrak{N}\cap g} \partial\chi_{2n-2} \tag{11.1}$$

der Eichfaktor der Massbestimmung. Es werde $\mathfrak{N} \neq \emptyset$ vorausgesetzt.

Der Eichfaktor ist positiv, wie sofort gezeigt werden wird. Er ist gewissermassen der analytische Abstand der Menge K_g vom Kernrand γ. Er gibt eine gewisse

---

[39] Für $n = 1$ ist $b = 1$; denn dort wäre analog $b = \operatorname*{fin}_{\mathfrak{N}\in\mathfrak{N}} \sum_{P\in g} \nu(P)$ zu setzten, wobei $\mathfrak{N}$ die Menge aller endlichen oder abzählbaren Mengen $\mathfrak{N}$ mit $\mathfrak{N} \cap K_g \neq \emptyset$ ist, und $\nu(P) = \nu_{\mathfrak{N}}(P)$ ihre charakteristische Funktion ist. Ist für $n > 1$ eine nichtkonstante meromorphe Fläche vorhanden, so ist $\mathfrak{N}$ nicht leer.

Eichung der Massbestimmung und hängt nur von der Mannigfaltigkeit, der Massbestimmung, dem Kern und der kompakten Menge K_g ab. Eicht man $\partial \chi_{2n-2}$ so, dass $b=1$ ist, so ändern sich $T(G)$, $N(G, \vec{\alpha})$, $m(\Gamma, \vec{\alpha})$ und $m(\gamma, \vec{\alpha})$ nicht, während sich ψ und R mit b multiplizieren. Um jedoch die sich — unwesentlich — ändernden Funktionen nicht neu bezeichnen zu müssen, werde die Eichung $b=1$ nicht vorgenommen.

Satz 11.1. *Der Eichfaktor ist positiv.*

Beweis. Der Punkt $P_0 \in K_g$ und die Abbildung $\alpha(\mathfrak{z}) \in \mathfrak{P}$ mit $P_0 = \alpha(\mathfrak{z}_0) \in U_a$ werden beliebig gewählt. Es werden die Kugeln

$$U_1' = U_1'(P_0) = \{\mathfrak{z} \mid |\mathfrak{z} - \mathfrak{z}_0| < 3r\}, \quad U_1 = U_1(P_1) = \alpha(U_1'(P_0)),$$
$$U_2' = U_2'(P_0) = \{\mathfrak{z} \mid |\mathfrak{z} - \mathfrak{z}_0| < r\}, \quad U_2 = U_2(P_0) = \alpha(U_2'(P_0))$$

so klein gewählt, dass $\bar{U}_1'(P_0)$ in $\alpha^{-1}(g \cap U_a)$ liegt. Da $\sum_{\mu,\nu=1}^{n} a_{\mu\nu} u_\mu \bar{u}_\nu$ positiv definit ist, gibt es eine Konstante $c > 0$, sodass

$$\tfrac{1}{4} \sum_{\mu,\nu=1}^{n} a_{\mu\nu}(P, \alpha) u_\mu \bar{u}_\nu \geq c \sum_{\mu=1}^{n} |u_\mu|^2 = c\,|\mathfrak{u}|^2 > 0 \tag{11.2}$$

für alle Punkte $P \in \bar{U}_1$ und alle Vektoren $\mathfrak{u} \neq 0$ gilt. Nun wird die Existenz einer positiven Zahl $b(P_0)$ behauptet, sodass

$$\int_{\mathfrak{N} \cap g} \partial \chi_{2n-2} \geq b(P_0) > 0 \tag{11.3}$$

für alle Nullstellenflächen $\mathfrak{N}$ mit $\mathfrak{N} \cap U_2(P_0) \neq \emptyset$ gilt. Ist eine solche Nullstellenfläche $\mathfrak{N}$ gegeben, so wählt man einen Punkt $P_1 \in \mathfrak{N} \cap U_2(P_0)$ aus. Der Punkt $\mathfrak{z}_1 = \alpha^{-1}(P_1)$ liegt in der Kugel U_2'. Daher liegt die Kugel $V' = \{\mathfrak{z} \mid |\mathfrak{z} - \mathfrak{z}_1| < 2r\}$ in U_1'. Die Dichte der euklidischen Massbestimmung $\partial v_{2n-2}(\mathfrak{z})$, die in (2.55) definiert ist, längs $\mathfrak{N}' = \alpha^{-1}(U(P_0) \cap \mathfrak{N})$ sei v, die Dichte des Differentiales $\partial \chi_{2n-2}$ längs $\mathfrak{N}'$ sei χ. Ist $\mathfrak{z}(\mathfrak{y}) \in \mathfrak{P}(\hat{\mathfrak{N}}')$ eine Parameterdarstellung von $\mathfrak{N}'$, so gilt[16]

$$\begin{aligned}\chi &= \frac{1}{4} \sum_{\mu,\nu=1}^{n} a_{\mu\nu} (-1)^\mu \frac{\partial(z_1, \ldots \overset{\mu}{|} \ldots, z_n)}{\partial(y_1, \ldots, y_{n-1})} \overline{(-1)^\nu \frac{\partial(z_1, \ldots \overset{\nu}{|} \ldots, z_n)}{\partial(y_1, \ldots, y_{n-1})}} \geq \\ &\geq c \sum_{\nu=1}^{n} \left| \frac{\partial(z_1, \ldots \overset{\nu}{|} \ldots, z_n)}{\partial(y_1, \ldots, y_{n-1})} \right|^2 = c \cdot v.\end{aligned} \tag{11.4}$$

Daher gilt

$$\int_{\mathfrak{N} \cap g} \partial \chi_{2n-2} \geq \int_{\mathfrak{N}' \cap U_1'} \partial \chi_{2n-2} \geq c \int_{\mathfrak{N}' \cap U_1'} \partial v_{2n-2} \geq c \int_{\mathfrak{N}' \cap V'} \partial v_{2n-2}. \tag{11.5}$$

Die Kugel V' ist ein Cousinsches Gebiet. Die Nullstellenfläche $\mathfrak{N}'$ ist in V' abgeschlossen. Also gibt es eine in V' analytische Funktion $f(\mathfrak{z})$, deren Nullstellenfläche gerade $\mathfrak{N}'$ ist und die in jedem gewöhnlichen Punkt von $\mathfrak{N}'$ mit der Vielfachheit 1 verschwindet. Es sei $\nu(\mathfrak{z})$ die Vielfachheit der Nullstelle $\mathfrak{z}$ von f. Die projektive Massbestimmung $\partial\omega_{2n-2}(\mathfrak{z}-\mathfrak{z}_1)$, die in (2.56) definiert ist, hat nach [I] (3.13), die nichtnegative Dichte $|\mathfrak{z}-\mathfrak{z}_1|^{-2n}|(\mathfrak{z}-\mathfrak{z}_1, \mathfrak{z}_{\nu_1}, \ldots, \mathfrak{z}_{\nu_{n-1}})|^2$ längs $\mathfrak{N}'$. Werden $V_{2n-2}(r)$ und W_{2n-2} nach (2.61) und (2.63) definiert, ist $V''=\{\mathfrak{z} \mid |\mathfrak{z}-\mathfrak{z}_1|<r\}$, so besteht nach [I] Satz 10 die Gleichung

$$(11.6) \qquad \frac{1}{V_{2n-2}(r)}\int\limits_{\mathfrak{N}'\cap V''}\partial v_{2n-2}=\frac{1}{V_{2n-2}(r)}\int\limits_{\mathfrak{N}'\cap V''}\nu(\mathfrak{z})\,\partial v_{2n-2}=\frac{1}{W_{2n-2}}\int\limits_{\mathfrak{N}'\cap V''}\nu(\mathfrak{z})\,\partial\omega_{2n-2}+\nu(\mathfrak{z}_1).$$

Da V'' in V' enthalten ist, und $\mathfrak{z}_1$ zu $\mathfrak{N}'$ gehört, also $\nu(\mathfrak{z}_1)\geq 1$ ist, folgt

$$(11.7) \qquad \int\limits_{\mathfrak{N}\cap g}\partial\chi_{2n-2}\geq c\int\limits_{\mathfrak{N}'\cap V'}\partial v_{2n-2}\geq c\int\limits_{\mathfrak{N}'\cap V''}\partial v_{2n-2}\geq c\,V_{2n-2}(r)\cdot 1=b(P_0)>0.$$

Endlich viele offene Kugeln $U_2(P_1), \ldots, U_2(P_t)$ überdecken die kompakte Menge K_g. Es ist $b_0=\operatorname*{Min}_{\nu=1,\ldots,t} b(P_\nu)$ positiv. Da jeder Punkt von K_g in einer Kugel $U_2(P_\nu)$ liegt, erhält man die Abschätzung

$$(11.8) \qquad b=\operatorname*{\underline{fin}}_{\mathfrak{N}\in\mathfrak{N}}\int\limits_{\mathfrak{N}\cap g}\partial\chi_{2n-2}\geq b_0>0,$$

w. z. b. w.

Ist nun die meromorphe Fläche $W\neq 0$ nichtkonstant, so wählt man einen Punkt $P_0\in K_g$ und eine in P_0 reduzierte Darstellung $\mathfrak{w}(P)$. Es lässt sich immer ein kontravarianter Vektor $\vec{\alpha}\neq 0$ so finden, dass $(\mathfrak{w}(P_0), \vec{\alpha})=0$, aber $(\mathfrak{w}(P), \vec{\alpha})\not\equiv 0$ ist. Dann ist aber $\nu(P_0, \vec{\alpha})>0$. Daher gehört $\mathfrak{N}(\vec{\alpha})$ zur Menge $\mathfrak{N}$. Also gilt

$$\begin{aligned} N(G; \vec{\alpha}) &= \int\limits_{\mathfrak{N}(\vec{\alpha})}\psi(P, G)\,\nu(P, \vec{\alpha})\,\partial\chi_{2n-2}\geq \\ &\geq R(G)\int\limits_{g\cap\mathfrak{N}(\vec{\alpha})}\partial\chi_{2n-2}\geq \\ &\geq R(G)\cdot b. \end{aligned}$$

Aus dem ersten Hauptsatz folgt

$$(11.9) \qquad m(\gamma, \vec{\alpha})+T(G)\geq N(G, \vec{\alpha})\geq R(G)\,b>0,$$

wobei b der Eichfaktor ist, also nicht von der meromorphen Fläche W abhängt. Da die Schmiegungsfunktion $m(\gamma, \vec{\alpha})$ noch von der zulässigen Menge G abhängt, muss der Grenzübergang $G \to \mathfrak{M}^{2n}$ noch etwas genauer untersucht werden. Zunächst werde noch eine allgemeine Voraussetzung gemacht.

VII. **Ausschöpfung.** *Zu jeder kompakten Menge K der Mannigfaltigkeit $\mathfrak{M}^{2n}$ gebe es wenigstens eine zulässige Menge mit $G \supset K$. Es sei $\mathfrak{G}_0$ die Menge aller zulässigen Mengen.*

Ist die Funktion $f(G)$ für alle zulässigen Mengen G, die eine kompakte Menge K_0 umfassen, erklärt, so strebe $f(G) \to a$ für $G \to \mathfrak{M}^{2n}$, das heisst, es gelte

$$a = \lim_{G \to \mathfrak{M}^{2n}} f(G), \tag{11.10}$$

wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ eine kompakte Menge K_ε gibt, sodass

$$|f(G) - a| < \varepsilon \tag{11.12}$$

für alle zulässigen Mengen $G \supset K_\varepsilon \cup K_0$ gilt. Entsprechend führt man die Begriffe $\lim\limits_{G \to \mathfrak{M}^{2n}} f(G) = \infty$, $\overline{\lim\limits_{G \to \mathfrak{M}^{2n}}}$, $\underline{\lim\limits_{G \to \mathfrak{M}^{2n}}}$, O, o für $G \to \mathfrak{M}^{2n}$ ein. Nun werde definiert:

Definition 11.1. Gesamtkapazität und Gesamtspannung.[40]

Die Gesamtkapazität der komplexen Mannigfaltigkeit $\mathfrak{M}^{2n}$ sei durch

$$\mathfrak{C} = \operatorname*{fin}_{G \in \mathfrak{G}_0} C(G) \geq 0 \tag{11.13}$$

erklärt, die Gesamtspannung sei

$$J = \begin{cases} \dfrac{1}{\mathfrak{C}}, & \text{falls } \mathfrak{C} > 0 \text{ ist,} \\ \infty, & \text{falls } \mathfrak{C} = 0 \text{ ist.} \end{cases} \tag{11.14}$$

Die Gesamtspannung und die Gesamtkapazität hängen nur von der kompakten Mannigfaltigkeit $\mathfrak{M}^{2n}$, dem Kern g und der Massbestimmung $\partial \chi_{2n-2}$ ab. Wie bei bei W [43] beweist man:

---

[40] Die in (11.10) bis (11.18) eingeführten Begriffe entsprechen genau denen bei einer Veränderlichen. Man vergleiche hierzu W [43] Kap. IV § 6. Zu Definition 11.1, Satz 11.2 und seinem Beweis siehe insbesondere Seite 190, zu (11.17) und (11.18) siehe Seite 200.

Satz 11.2. Gesamtkapazität und Gesamtspannung.

Es gilt

(11.15) $$\mathfrak{C} = \lim_{G \to \mathfrak{M}^{2n}} C(G) < \infty.$$

(11.16) $$J = \overline{\operatorname{fin}}_{G \in \mathfrak{G}_0} R(G) = \lim_{G \to \mathfrak{M}^{2n}} R(G) \leq \infty.$$

Beweis. Es reicht (11.15) zu beweisen. Zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es eine zulässige Menge G_ε, sodass $\mathfrak{C} \leq C(G_\varepsilon) \leq \mathfrak{C} + \varepsilon$ ist. Es ist $K_\varepsilon = \overline{G}_\varepsilon$ kompakt. Für alle zulässigen Mengen $G \supset K_\varepsilon$ ist $\mathfrak{C} \leq C(G) \leq C(G_\varepsilon) \leq \mathfrak{C} + \varepsilon$, w. z. b. w.

Wie bei W [43] ist es zweckmässig die folgenden Abkürzungen zu benutzen: Ist die Funktion $s(G)$ für alle zulässigen Mengen G erklärt, die eine kompakte Menge K_0 umfassen, so sei

(11.17) $$s(G) = (0),$$

wenn

(11.18) $$s(G) = \begin{cases} O(1) & \text{für } \mathfrak{C} > 0 \\ o(R(G)) & \text{für } \mathfrak{C} = 0 \end{cases} \quad \text{für } G \to \mathfrak{M}^{2n}$$

ist. Nun kann man die Schmiegungsfunktion $m(\gamma, \vec{\alpha})$ abschätzen.

Satz 11.3. Eine Abschätzung der Schmiegungsfunktion.[41]

Voraussetzung. *Die meromorphe Fläche W sei nicht degeneriert.*

Behauptung. *Die Schmiegungsfunktion $m(\gamma, \vec{\alpha})$ ist für alle kontravarianten Vektoren $\vec{\alpha} \neq 0$ stetig. Es gilt*

(11.19) $$m(\gamma, \vec{\alpha}) = (0)$$

gleichmässig für alle kontravarianten Vektoren $\vec{\alpha} \neq 0$.

Beweis. Für jede positive Zahl ω werde

(11.20) $$\gamma_\omega = \left\{ P \mid \log \frac{1}{\| \mathfrak{w}(P), \vec{\alpha} \|} < \omega \right\} \cap \gamma$$

gesetzt. Der Punkt $P_0 \in \gamma$ werde beliebig gewählt. Dann gibt es eine beschränkte, offene Umgebung $U(P_0)$ mit einer auf $\bar{U}(P_0)$ analytischen Darstellung $\mathfrak{w}(P)$ von W. Es sei $U_1(P_0)$ eine offene Umgebung von P_0 mit $\bar{U}_1(P_0) \subset U(P_0)$. Die Funktion $\lambda(P)$ mit $0 \leq \lambda(P) \leq 1$ sei auf $\mathfrak{M}^{2n}$ stetig, ausserhalb $U_1(P_0)$ sei sie Null aber sonst beliebig gewählt. Es sei $\vec{\alpha}_0 \neq 0$. An Hand der Tabelle

[41] Für $n = 1$ siehe W [43] Kap. IV § 6 Seite 192.

Satz 5.5	G	$\mathfrak{M}^{2n}$	K	$\mathfrak{T}^{2n-1}$	∂A_{2n-1}	$F_0(P)$
Hier	$U(P_0)$	$\mathfrak{M}^{2n}$	$\gamma \cap \bar{U}_1(P_0)$	$\gamma \cap U(P_0)$	$\partial^{\perp}\psi\,\partial\chi_{2n-2}$	$\lvert\mathfrak{w}(P)\rvert$
Satz. 5.5	$f_0(P)$	C	b	Ω	$\mathfrak{F}_b$	$\mathfrak{G}_C$
Hier	$\left(\mathfrak{w}(P), \frac{\vec{\alpha}_0}{\lvert\vec{\alpha}_0\rvert}\right)$	1	$\tilde{b}$	γ_ω	$\mathfrak{F}_{\tilde{b}}$	$\mathfrak{G}_1$

bestimmt man die Konstante b aus Satz 5.5, die hier $\tilde{b}$ heisse, um sie vom Eichfaktor zu unterscheiden. Auf $U(P_0)$ ist $|\mathfrak{w}(P)| < M$. Für jeden kontravarianten Vektor aus $A_0 = \left\{\vec{\alpha} \mid |\vec{\alpha} - \vec{\alpha}_0| \le \frac{\tilde{b}}{4M}|\vec{\alpha}_0| \text{ und } 2|\vec{\alpha}| \ge |\vec{\alpha}_0|\right\}$ gilt

$$\left|\left(\mathfrak{w}(P), \frac{\vec{\alpha}}{|\vec{\alpha}|}\right) - \left(\mathfrak{w}(P), \frac{\vec{\alpha}_0}{|\vec{\alpha}_0|}\right)\right| \le |\mathfrak{w}(P)| \left|\frac{\vec{\alpha} - \vec{\alpha}_0}{|\vec{\alpha}|} - \vec{\alpha}_0 \frac{|\vec{\alpha}| - |\vec{\alpha}_0|}{|\vec{\alpha}|\,|\vec{\alpha}_0|}\right| < M\left\{\frac{2\tilde{b}}{4M} + \frac{2\tilde{b}}{4M}\right\} = \tilde{b} \tag{11.21}$$

$$\frac{|\mathfrak{w}(P)|\,|\vec{\alpha}|}{|(\mathfrak{w}(P), \vec{\alpha})|} \ge 1. \tag{11.22}$$

Also gehört die Funktion $\left(\mathfrak{w}(P), \frac{\vec{\alpha}}{|\vec{\alpha}|}\right)$ zu $\mathfrak{F}_{\tilde{b}}$. Daher strebt

$$\frac{1}{2\pi} \int\limits_{\gamma_\omega \cap \bar{U}_1(P_0)} \lambda(P) \log \frac{1}{\|\mathfrak{w}, \vec{\alpha}\|} \partial^{\perp}\psi\,\partial\chi_{2n-2} \Rightarrow \frac{1}{2\pi} \int\limits_{\gamma \cap \bar{U}_1(P_0)} \lambda(P) \log \frac{1}{\|\mathfrak{w}, \vec{\alpha}\|} \partial^{\perp}\psi\,\partial\chi_{2n-2} \tag{11.23}$$

für $\omega \to \infty$ gleichmässig für alle kontravarianten Vektoren $\vec{\alpha} \in A_0$. Mit einer Dieudonné-Zerlegung folgt sofort, dass

$$I_\omega(\vec{\alpha}) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{\gamma_\omega} \log \frac{1}{\|\mathfrak{w}, \vec{\alpha}\|} \partial^{\perp}\psi\,\partial\chi_{2n-2} \Rightarrow \frac{1}{2\pi} \int\limits_{\gamma} \log \frac{1}{\|\mathfrak{w}, \vec{\alpha}\|} \partial^{\perp}\psi\,\partial\chi_{2n-2} = m(\gamma, \vec{\alpha}) \tag{11.24}$$

für $\omega \to \infty$ gleichmässig in einer Umgebung $A^\circ = \{\vec{\alpha} \mid |\vec{\alpha} - \vec{\alpha}_0| \le \tilde{b}_0 \text{ und } 2|\vec{\alpha}| \ge |\vec{\alpha}_0|\}$ mit $\tilde{b}_0 > 0$ strebt. Die charakteristische Funktion der Menge $\gamma_\omega = \gamma_\omega(\vec{\alpha})$ sei

$$\varrho(P, \vec{\alpha}) = \begin{cases} 0 & \text{für } P \notin \gamma_\omega(\vec{\alpha}), \\ 1 & \text{für } P \in \gamma_\omega(\vec{\alpha}). \end{cases} \tag{11.25}$$

Dann strebt $\varrho(P, \vec{\alpha}) \to \varrho(P, \vec{\alpha}_0)$ für $\vec{\alpha} \to \vec{\alpha}_0$ und alle $P \in \gamma$, die nicht zu $Rd\,\gamma_\omega(\vec{\alpha}_0) = \bar{\gamma}_\omega(\vec{\alpha}_0) - \gamma_\omega(\vec{\alpha}_0)$ gehören. Die höchstens abzählbar vielen Werte ω, für die $Rd\,\gamma_\omega(\vec{\alpha}_0)$

keine Nullmenge auf γ ist, werde ausgeschieden. Für $\vec{\alpha} \to \vec{\alpha}_0$ strebt dann

$$(11.26) \qquad \begin{aligned} I_\omega(\vec{\alpha}) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_\gamma \varrho(P, \vec{\alpha}) \log \frac{1}{\| \mathfrak{w}, \vec{\alpha} \|} \partial^\perp \psi \partial \chi_{2n-2} \to \\ \to \frac{1}{2\pi} \int\limits_\gamma \varrho(P, \vec{\alpha}_0) \log \frac{1}{\| \mathfrak{w}, \vec{\alpha}_0 \|} \partial^\perp \psi \partial \chi_{2n-2}, \end{aligned}$$

denn der Integrand ist durch $\log \omega \partial^\perp \psi \partial \chi_{2n-2}$ gleichmässig beschränkt. Aus (11.26) und (11.24) folgt, dass $m(\gamma, \vec{\alpha})$ an der Stelle $\vec{\alpha}_0$ stetig ist. Da $\vec{\alpha}_0 \neq 0$ beliebig gewählt war, ist $m(\gamma, \vec{\alpha})$ stetig für $\vec{\alpha} \neq 0$.

Wegen $m(\gamma, \vec{\alpha}) = m(\gamma, \tau \vec{\alpha})$ für $\tau \neq 0$, gilt (11.24) für alle Vektoren $\vec{\alpha} \neq 0$ gleichmässig. Die zulässige Menge $G \supset \bar{G}_0$ werde beliebig gewählt. Nach Satz 7.3 ist $\xi(P) = \varphi(P, G) - \varphi(P, G_0)$ positiv in $G - \bar{g}$ und identisch Null längs γ. Daher hat $\partial^\perp \xi \partial \chi_{2n-2}$ nach Satz 4.5 eine nichtpositive Dichte. Es gilt also

$$(11.27) \qquad \begin{aligned} m(G, \gamma, \vec{\alpha}) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{\gamma_\omega} \log \frac{1}{\| \mathfrak{w}, \vec{\alpha} \|} \partial^\perp \psi \partial \chi_{2n-2} + \frac{1}{2\pi} \int\limits_{\gamma - \gamma_\omega} \log \frac{1}{\| \mathfrak{w}, \vec{\alpha} \|} \partial^\perp \psi(P, G) \partial \chi_{2n-2} \leq \\ \leq \omega + \frac{1}{2\pi} \int\limits_{\gamma - \gamma_\omega} \log \frac{1}{\| \mathfrak{w}, \vec{\alpha} \|} \partial^\perp \left\{ \frac{R(G)}{R(G_0)} \psi(P, G_0) \right\} \partial \chi_{2n-2}. \end{aligned}$$

Zu jedem $\varepsilon > 0$ wählt man $\omega = \omega_\varepsilon$ so gross, dass

$$(11.28) \qquad \frac{1}{2\pi} \int\limits_{\gamma - \gamma_\omega} \log \frac{1}{\| \omega, \vec{\alpha} \|} \partial^\perp \psi(P, G_0) \partial \chi_{2n-2} < \varepsilon$$

ist. Dabei hängt ω_ε nicht von der zulässigen Menge G und nicht vom kontravarianten Vektor $\vec{\alpha}$ ab. Es ist

$$(11.29) \qquad m(G, \gamma, \vec{\alpha}) \leq \omega_\varepsilon + \varepsilon \frac{R(G)}{R(G_0)}.$$

Daher ist $m(G, \gamma, \vec{\alpha}) = (0)$ gleichmässig in $\vec{\alpha} \neq 0$, w. z. b. w.

Nun ist es leicht, die versprochene Abschätzung zu beweisen.

Satz 11.4. Eine Abschätzung der Charakteristik nach unten.[42]

Voraussetzung. *Die Mannigfaltigkeit $\mathfrak{M}^{2n}$ habe die Gesamtkapazität $\mathfrak{C} = 0$, das heisst die Gesamtspannung $J = \infty$. Es sei b der Eichfaktor. Die meromorphe Fläche $W \not\equiv 0$ sei nicht konstant.*

---

[42] Für $n = 1$ siehe W [43] Kap. IV § 6 Seite 192 Gleichung (6.4).

Behauptung. *Es gilt die Abschätzung*

$$\underline{\lim}_{G \to \mathfrak{M}^{2n}} \frac{T(G)}{R(G)} \geq b > 0. \tag{11.30}$$

Beweis. Nach Satz 9.3 kann man o. B. d. A. annehmen, dass die meromorphe Fläche nicht degeneriert. Die Ungleichungen (11.9), (11.18) und Satz 11.3 ergeben

$$T(G) \geq R(G)\, b - o(R(G)) \quad \text{für} \quad G \to \mathfrak{M}^{2n}, \tag{11.31}$$

woraus unmittelbar die Behauptung (11.31) folgt, w. z. b. w.

Noch einmal sei darauf aufmerksam gemacht, dass die Konstante b nur von den geometrischen Voraussetzungen: $\mathfrak{M}^{2n}$, $\partial \chi_{2n-2}$, g und K_g abhängt und für alle nichtkonstanten, meromorphen Flächen beliebiger Dimension und Stufe dieselbe Zahl ist. Satz 11.4 ist eine Verschärfung eines Satzes von LIOUVILLE, der aus ihm folgt:

Satz 11.5. Satz von LIOUVILLE.

Voraussetzung. *Die Mannigfaltigkeit $\mathfrak{M}^{2n}$ habe die Gesamtkapazität $\mathfrak{C} = 0$, das heisst die Gesamtspannung $J = \infty$. Die analytische Fläche W habe in einem geeigneten Koordinatensystem $\mathfrak{e}_1, \ldots, \mathfrak{e}_k$ die reduzierte, einheitliche Darstellung*

$$\mathfrak{w}(P) = \mathfrak{e}_1 + \sum_{\nu=2}^{k} w_\nu(P)\, \mathfrak{e}_\nu. \tag{11.32}$$

Die Funktion $|\mathfrak{w}(P)|$ sei auf $\mathfrak{M}^{2n}$ beschränkt.

Behauptung. *Die meromorphe Fläche ist konstant.*

Anmerkung. *Insbesondere ist eine beschränkte analytische Funktion konstant.*

Beweis. Jede Koordinate w_ν ist beschränkt. Also ist auch

$$M(G) = \operatorname*{Max}_{P \in \bar{G}} \sqrt{\sum_{\nu=2}^{k} |w_\nu(P)|^2} \leq M \tag{11.33}$$

für alle zulässigen Mengen G beschränkt. Nach Ungleichung (9.9) gibt es dann eine Konstante $2 \log \lambda_1$, sodass

$$T(G) \leq \log^+ M(G) < 2 \log \lambda_1 + \log 2 < \log^+ M + 2 \log 2\lambda_1 \tag{11.34}$$

gilt. Daher ist die Charakteristik beschränkt. Nach Satz 11.4 ist die meromorphe Fläche und damit auch $\mathfrak{w}(P)$ konstant, w. z. b. w.

Die Anmerkung ergibt sich, indem man die meromorphe Fläche mit der reduzierten Darstellung $\mathfrak{w}(P) = \mathfrak{e}_1 + f\,\mathfrak{e}_2$ betrachtet. Den Satz 11.5 kann man auch noch anders aussprechen:

Satz 11.6. Analytische Abbildungen.

Voraussetzung. *Die Mannigfaltigkeit $\mathfrak{M}^{2n}$ habe die Gesamtkapazität $\mathfrak{C} = 0$, das heisst, die Gesamtspannung $J = \infty$ und werde durch $\sigma(P)$ analytisch in den $2k$ dimensionalen, euklidischen Raum R_1^{2k} abgebildet.*

Behauptung. *Der Bildbereich $\sigma(\mathfrak{M}^{2n})$ ist entweder ein Punkt oder nicht beschränkt.*

Beweis. Man wähle ein Koordinatensystem $\mathfrak{e}_1, \ldots, \mathfrak{e}_k$ im Bildraum R_1^{2k}. Die Abbildung $\sigma(P)$ wird durch

$$\sigma(P) = \sum_{\nu=1}^{k} w_\nu(P)\,\mathfrak{e}_\nu \tag{11.35}$$

gegeben, wobei die Koordinaten $w_\nu(P)$ auf $\mathfrak{M}^{2n}$ analytisch sind. Nun wendet man Satz 11.5 auf die meromorphe Fläche

$$\mathfrak{w}(P) = \mathfrak{e}_0 + \sum_{\nu=1}^{k} w_\nu(P)\,\mathfrak{e}_\nu \in R_1^{2k+2} \tag{11.36}$$

an und erhält die Behauptung, w. z. b. w.

Eine Mannigfaltigkeit mit der Gesamtkapazität $\mathfrak{C} = 0$ lässt sich also nicht pseudokonform auf ein schlichtes, beschränktes Gebiet, oder auch nichtschlichtes Gebiet mit beschränktem Grundgebiet abbilden.

Literatur.

[41]. Ahlfors, L.: The theory of meromorphic curves. Acta Soc. Sci. Fenn., nova Ser. A *3*, 31 (1941).

[34]. Behnke, H. und P. Thullen: Theorie der Funktionen mehrerer komplexer Veränderlichen. Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete, Bd. *3*, 251–371 (1934).

[29_1]. Giraud, G.: Sur les équations de type elliptique et la méthode des approximations successives. Journal de math., *8*, 269–300 (1929).

[29_2]. ——: Sur les problèmes de Dirichlet généralisés. Ann. École norm., *46*, 131–245 (1929).

[29_3]. ——: Sur les équations aux dérivées partielles du type elliptique. Bulletin sc. math., Ser. 2, *53*, 369–395 (1929).

[27]. Hopf, E.: Elementare Bemerkungen über die Lösungen partieller Differentialgleichungen zweiter Ordnung vom elliptischen Typus. Sitzber. Akad. Berlin, *1927*, 147–152.

[52]. ——: A remark on linear elliptic differential equations of second order. Proceedings Amer. math. Soc., *3*, 791–793 (1952).

[36]. Kneser, H.: Ordnung und Nullstellen bei ganzen Funktionen zweier Veränderlicher. Sonderausgabe a. d. Sitzber. preuss. Akad. Wiss. physik.-math Kl., *31*, 19 Seiten (1936).

[38]. ——: Zur Theorie der gebrochenen Funktionen mehrerer Veränderlicher. Jber. D. M. V., *48*, 1–28 (1938).

[36]. Nevanlinna, R.: Eindeutige analytische Funktionen. Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften in Einzeldarstellungen, Bd. *46*, (1936).

[23]. Perron, O.: Eine neue Behandlung der ersten Randwertaufgabe $\Delta u = 0$. Math. Zeitschr., *18*, 42–54 (1923).

[24]. Sternberg, W.: Über die lineare elliptische Differentialgleichung zweiter Ordnung mit drei unabhängigen Veränderlichen. Math. Zeitschr., *21*, 286–311 (1924).

[52] = [I]. Stoll, W.: Mehrfache Integrale auf komplexen Mannigfaltigkeiten. Math. Zeitschr., *57*, 116–154 (1952).

[53]. ——: Ganze Funktionen endlicher Ordnung mit gegebenen Nullstellenflächen. Math. Zeitschr. *57*, 211–237 (1953).

[38]. Weyl, H. und J. Weyl: Meromorphic curves. Ann. Math., (2), *39*, 516–538 (1938).

[41]. Weyl, J.: Analytic curves. Ann. Math., (2), *42*, 371–408 (1941).

[43] = W [43]. Weyl, H. und J. Weyl: Meromorphic functions and analytic curves. Princeton, University press. (1943). (Annals of mathematics studies.)