ÜBER p-GRUPPEN VON MAXIMALER KLASSE.

Von

A. WIMAN

in LUND.

I.

1. Das Zentrum einer p-Gruppe G bezeichnen wir mit $\zeta_1(G)$ und die zugehörige Faktorgruppe mit $\frac{G}{\zeta_1(G)}$. Für diese Faktorgruppe sei das Zentrum $\frac{\zeta_2(G)}{\zeta_1(G)}$. In dieser Weise können wir fortsetzen und bekommen zunächst für $\frac{G}{\zeta_2(G)}$ das Zentrum $\frac{\zeta_3(G)}{\zeta_2(G)}$. Die so erhaltene Folge $\zeta_1(G)$, $\zeta_2(G)$, $\zeta_3(G)$, ... muss mit der Gruppe G selbst enden. Hat man $G=\zeta_l(G)$ so heisst l *die Klasse der Gruppe*, und die Folge $\zeta_1(G)$, $\zeta_2(G)$, ... $\zeta_l(G)$ nennt man *die obere Zentralreihe.* Bei maximaler Klasse müssen die Ordnungen der sukzessiven Faktorgruppen möglichst klein ausfallen. Nun gilt für die letzte Faktorgruppe $\frac{G}{\zeta_{l-1}(G)}$, dass ihre Ordnung $\geqq p^2$ sein muss; hierbei wird natürlich vom einfachsten Falle, wo G zyklisch von der Ordnung p ist, abgesehen. Für die vorhergehenden Faktorgruppen existiert dagegen die Möglichkeit, dass die Ordnung auch $=p$ sein kann. Man versteht hieraus, dass, falls p^n die Ordnung von G bezeichnet, so bekommt man $n-1$ als Maximalwert der Klasse. Die Gruppen, mit denen wir uns in dieser Arbeit beschäftigen werden, sind also durch *eine Ordnung* p^n *und eine Klasse* $n-1$ charakterisiert.

Bei den hier folgenden Untersuchungen wird aber nicht von der oberen sondern von *der unteren Zentralreihe* ausgegangen. Doch enthalten bei maximaler Klasse diese beiden Zentralreihen dieselben Gruppen, nur in umgekehrter Reihenfolge. Die Untere Zentralreihe bekommt man durch sukzessive Kommutatorbildung mit Ausgangspunkt von G. Als nächstes Glied hat man die Kommutatorgruppe $(G, G)=G_2$. Wir bezeichnen letztere Gruppe mit G_2 und nicht mit G_1, da wir sogleich zwischen G und ihrer Kommutatorgruppe eine neue charakteristische Untergruppe G_1 von G einschieben

wollen. Die untere Zentralreihe erhält man nun durch Kommutatorbildung: $(G_1 G_2) = G_3, \ldots (G_1 G_\nu) = G_{\nu+1}, \ldots$. Es bedeutet also $G_{\nu+1}$ die Gruppe, welche sich durch Kommutatoren zweier Elemente, von denen eines zu G und das andere zu G_ν gehört, erzeugen lässt. Ist G von der Ordnung p^n, so bekommen wir hiernach für das Zentrum die Bezeichnung G_{n-1}. Als untere Zentralreihe ergibt sich somit $G_1 G_2, \ldots G_{n-1}$, und der Zusammenhang mit der oberen Zentralreihe findet seinen Ausdruck in den Identitäten: $\zeta_1 = G_{n-1}$, $\zeta_2 = G_{n-2}, \ldots$ Nach der Einführung eines neuen Gliedes G_1 in der unteren Zentralreihe zwischen G und G_2 bekommen wir für die Elemente von G eine Verteilung in das Zentrum G_{n-1} und in $n-1$ einander umschliessende Hüllen: $G_{n-2} - G_{n-1}$, $G_{n-3} - G_{n-2}, \ldots G - G_1$. Wie wir finden werden, unterscheidet sich die äusserste Hülle $G - G_1$ in sehr wesentlicher Weise von den übrigen Hüllen; vielleicht könnte man dieselbe als die harte Hülle bezeichnen. Mit den Eigenschaften dieser Hülle werden wir uns hauptsächlich im ersten Abschnitte beschäftigen. Im folgenden Abschnitte gelten unsere Untersuchungen die von der äussersten Hülle eingeschlossenen Bestandteile der Gruppe G_1. Als erstes Hilfsmittel wird dabei, wie wir hier oben angedeutet haben, die Kommutatorbildung benutzt.[1] In diesen beiden Abschnitten gilt die Frage nur die allgemeinen Eigenschaften der Gruppen. Erst in späteren Abschnitten wollen wir zur Bestimmung von besonderen Gruppen übergehen.

Für $p = 2$ sind die Gruppen von maximaler Klasse schon bekannt, und man hat für $n \geqq 4$ drei solche Gruppen.[2] Die gemeinsame Untergruppe G_1 ist zyklisch, und die drei Gruppen unterscheiden sich von einander nur in der äusseren Hülle $G - G_1$. Wenn s_1 ein erzeugendes Element von G_1 bedeutet, so hat man also $s_1^{2^{n-1}} = 1$. Für die drei Gruppen mögen die Bezeichnungen G, $\overline{G}$ und $\overline{\overline{G}}$ gelten. Für ein beliebiges Element s in $G - G_1$ hat man $s^2 = 1$. Gehört dagegen s zu $\overline{G} - G_1$, so ist $s^2 = s_1^{2^{n-2}} = s_{n-1}$ und also erst $s^4 = 1$. Für die dritte Gruppe $\overline{\overline{G}}$ sind dagegen die Werte von s^2 und $(s s_1)^2$ verschieden; ist $s^2 = 1$, so folgt $(s s_1)^2 = s_{n-1}$ und umgekehrt. Der allgemein benutzte Name ist für G *Diedergruppe* und für $\overline{G}$ *dizyklische Gruppe*. Wie wir oben geseben haben, nimmt $\overline{\overline{G}}$ gewissermassen eine Mittelstellung zwischen den beiden anderen Gruppen ein. Der Kürze halber bezeichnen wir dieselbe als *Gruppe von der mittleren Art*. Ein Hauptzweck für die folgenden Untersuchungen ist es zu zeigen, dass *auch für p ungerade die Elemente von $G - G_1$ sich in drei verschiedenen Weisen verhalten können, die ganz dem Falle für $p = 2$ entsprechen*. In solcher Weise bekommen wir

[1] Wir folgen hier dem Beispiel von P. A. HALL in seiner für die Theorie der p-Gruppen im allgemeinen wichtigen Arbeit, „*A contribution to the theory of groups of prime-power order*", Proc. London Math. Soc. (2) 36 (1933), S. 29—95.

[2] Sieh etwa J. A. SÉGUIER, „*Éléments de la théorie des groupes abstraits*" (Paris, 1904), S. 121.

drei Haupttypen von p-Gruppen maximaler Klasse, auf welche wir die oben gegebenen Benennungen für den speziellen Fall $p=2$ überführen. Diese erste Einteilung nach den Eigenschaften der Elemente von $G-G_1$, welche uns vom Falle $p=2$ bekannt ist, gilt also für die p-Gruppen maximaler Klasse im allgemeinen.

2. Wir betrachten die Identität

$$st=tss^{-1}t^{-1}st=ts(s,t).$$

Der Faktor $s^{-1}t^{-1}st=(s,t)$ heisst aus sofort einzusehenden Gründen *Kommutator von s und t.* Offenbar hat man

$$(t,s)=(s,t)^{-1}.$$

Sind s oder t Produkte von mehreren Elementen, so lässt sich nach HALL der Kommutator durch Produkte von einfacheren Kommutatoren ausdrücken. Dies wird gezeigt durch die Identitäten:

(1) $$(st,u)=s^{-1}u^{-1}su\cdot u^{-1}s^{-1}ust^{-1}s^{-1}u^{-1}sut\cdot t^{-1}u^{-1}tu=(s,u)\cdot((s,u),t)\cdot(t,u);$$

(2) $$(s,tu)=s^{-1}u^{-1}su\cdot s^{-1}t^{-1}st\cdot t^{-1}s^{-1}tsu^{-1}s^{-1}t^{-1}stu=(s,u)\cdot(s,t)\cdot((s,t),u).$$

Für den wichtigen Spezialfall, wo die Kommutatorgruppe zum Zentrum gehört, bekommt man die Vereinfachung:

(1_1) $$(st,u)=(s,u)\cdot(t,u);$$

(2_1) $$(s,tu)=(s,u)\cdot(s,t).$$

Wie unmittelbar ersichtlich ist, gilt unter derselben Voraussetzung die allgemeinere Relation:

(3) $$(s_1s_2\ldots s_m,\ t_1t_2\ldots t_n)=\prod_{\mu=1}^{m}\prod_{\nu=1}^{n}(s_\mu,t_\nu).$$

Insbesondere hat man

(3_1) $$(s^m,t^n)=(s,t)^{mn}.$$

Für die Faktorgruppe $\frac{G}{G_2}$, welche ja vom Typus (p,p) ist, denken wir uns eine Basis von zwei Elementen, s und s_1. Für die $p+1$ Untergruppen G_p, welche in dieser Gruppe enthalten sind, können wir als Erzeugende s und s^hs_1 $(h=0,1,\ldots p-1)$ annehmen. Die $p+1$ Untergruppen der Ordnung p^{n-1} von G lassen sich jetzt mit $\{s,G_2\}$ und $\{s^hs_1,G_2\}$ $(h=0,\ldots p-1)$ bezeichnen. Unsere Aufgabe ist es jetzt nachzuweisen, dass *für $n>3$ wenigstens eine von diesen $p+1$ $G_{p^{n-1}}$ eine charakteristische Untergruppe von G ist.* Für den Kommutator von s mit s_1 schreiben wir

(4) $$(s,s_1)=s_2.$$

Es bedeutet hier s_2 ein Element der Hülle $G_2 - G_3$, und man kann s_2 als Erzeugende der Faktorgruppe $\frac{G_2}{G_3}$ betrachten. Ersetzt man s und s_1 durch $s^a s_1^b$ und $s^c s_1^d$, so ergibt sich ohne Schwierigkeit:

$$(4_1) \qquad (s^a s_1^b,\ s^c s_1^d) \equiv s_2^{a\,d\ \ b\,c},$$

wo rechts ein etwa hinzukommender zu G_3 gehörender Faktor für uns ohne Interesse ist. Es ist ja

$$s^c s_1^d \equiv (s^a s_1^b)^{\frac{c}{a}} s_1^{\frac{a\,d-b\,c}{a}},$$

und das linke Glied von (4_1) lässt sich mithin durch $\left(s^a, s_1^{\frac{a\,d-b\,c}{a}}\right)$ ersetzen. Selbstverständlich hat hier im Exponenten $\frac{1}{a}$ die Bedeutung von a_1 für $a\,a_1 \equiv 1 \pmod p$.

Beim nächsten Schritt operieren wir in der Faktorgruppe $\frac{G}{G_4}$. Wir bezeichnen mit s_3 eine Erzeugende von $\frac{G_3}{G_4}$. Für die Kommutatoren von s und s_1 mit s_2 gelten Relationen:

$$(5) \qquad (s_1,\ s_2) \equiv s_3^{\alpha};\ (s_1,\ s_2) \equiv s_3^{\beta}.$$

Ist hier einer von den Exponenten α oder $\beta \equiv 0$, so ist es zulässig anzunehmen, dies sei der Fall für β. Anderenfalls hat man

$$(s^{\beta} s_1^{-\alpha},\ s_2) \equiv 1,$$

und wir können statt s_1 $s^{\beta} s_1^{-\alpha}$ oder eine Potenz davon einführen. Setzen wir jetzt $\alpha = 1$, was offenbar durch Feststellung von s_1 möglich ist, so ergibt sich:

$$(6) \qquad (s,\ s_2) \equiv s_3;\ (s_1,\ s_2) \equiv 1.$$

Die Untergruppe $\{s_1, G_2\}$ unterscheidet sich dann von den p übrigen Untergruppen der Ordnung p^{n-1} von G dadurch, dass in ihr kein Kommutator zur Hülle $G_3 - G_4$ gehört; hierin liegt, dass diese Gruppe eine charakteristische Untergruppe von G sein muss. Wir schalten dieselbe unter der Benennung G_1 in die untere Zentralreihe zwischen G und G_2 ein.

Bei jedem neuen Schritt in der unteren Zentralreihe stösst man auf ein ähnliches Problem. Es gelten also für $\nu = 3, 4, \ldots$ Relationen:

$$(7) \qquad (s,\ s_\nu) \equiv s_{\nu+1}^{\alpha};\ (s_1,\ s_\nu) \equiv s_{\nu+1}^{\beta}.$$

Aus diesen ist diejenige von den Operationen s und $s^h s_1$ $(h = 0, 1, \ldots p-1)$ zu be-

stimmen, für welche der Kommutator mit s_ν nicht in der Hülle $G_{\nu+1}-G_{\nu+2}$ liegt; wenn man die so erhaltene Operation mit G_2 kombiniert, so resultiert eine $G_{p^{n-1}}$ welche charakteristische Untergruppe von G sein muss. Hat man in (7) $\beta=0$, so kommt man hier auf die bereits bekannte charakterische Untergruppe G_1 zurück. Für $\nu=3$, also bei dem nächstfolgenden Schritte, ist dies immer der Fall, wie sich durch eine Durchmusterung der Gruppen von der Ordnung p^5, welche ja vollständig bekannt sind[1], konstatieren lässt. Es liegt hier nahe zu vermuten, dass man in solcher Weise nie zu einer anderen charakteristischen Untergruppe als G_1 gelangen kann. So einfach ist die Sache doch nicht, wie aus den Resultaten von M. POTRON hervorgeht.[2] Es gilt die Aufzählung dieses Verfassers von den Gruppen der Ordnung p^6 und der Klasse 5. Man findet nämlich hier einige Gruppen, für welche man als Exponenten in den obigen Relationen (7) $\alpha=1$, $\beta=0$ für $\nu=2, 3$ und $\alpha=0$, $\beta=1$ *für* $\nu=4$ erhält. Zu $\{s_1, G_2\}=G_1$ tritt also noch die neue charakteristische Untergruppe $\{s, G_2\}=G_1$ hinzu. Wie wir später näher ausführen wollen, erhält man für allgemeine n-Werte die entsprechenden Fälle mit einer zweiten charakteristischen G_p^{n-1} für $\alpha=1$, $\beta=0$ $(\nu=2, 3, \ldots n-3)$ und $\alpha=0$, $\beta=1$ $(\nu=n-2)$. Es wird aus unseren Untersuchungen hervorgehen, dass es andere Möglichkeiten für charakteristische Untergruppen von der Ordnung p^{n-1} als die oben behandelten nicht geben kann.

Es ist wohlbekannt, dass man *für* $n=3$ *zwei Fälle ohne charakteristische* G_{p^2} hat, nämlich für $p=2$ die Quaternionengruppe und für p ungerade diejenige nicht-Abelsche Gruppe, welche kein Element von höherer Ordnung als p enthält. Es muss als bemerkenswert betrachtet werden, dass es für $n>3$ keine Gruppe mit entsprechender Eigenschaft gibt.

Aus den obigen Betrachtungen versteht man, dass es möglich ist sämtliche Elemente von G in der Gestalt

$$(8) \qquad s^{\alpha} s_1^{\alpha_1} \ldots s_{n-2}^{\alpha_{n-2}} s_{n-1}^{\alpha_{n-1}} \quad (0 \leqq \alpha, \alpha_1, \ldots \alpha_{n-1} < p)$$

zu schreiben, wobei $s, s_1, \ldots s_{n-1}$ je aus den Hüllen $G-G_1$, $G_1-G_2, \ldots G_{n-2}-G_{n-1}$ und dem Zentrum G_{n-1} beliebig gewählt werden können. Man bemerke hierbei, dass, wenn s_ν ein Element der Hülle $G_\nu-G_{\nu+1}$ bedeutet, so muss s_ν^p zu $G_{\nu+1}$ gehören. Insbesondere kann man, mit Ausgangspunkt von s und s_1, für $s_2, \ldots s_{n-1}$ diejenigen Elemente wählen, welche man durch die oben beschriebene Kommutatorbildung bekommt.

---

[1] Sieh SÉGUIER, „*Groupes abstraits*", S. 146.

[2] „*Les groupes d'ordre* p^6", Thèse (Paris, 1904).

3. Für den Fall, dass nur eine einzige charakteristische Untergruppe G_p^{n-1} existiert, ist es jetzt leicht zu zeigen, dass auch für p ungerade die Gruppen von der Ordnung p^n sich auf drei Hauptarten verteilen; doch sind diese hier, mit einer einzigen Ausnahme, durch mehr als eine Gruppe vertreten. Wenn nun s ein Element von $G-G_1$ bezeichnet, so stellen wir uns die Frage, wie sich s^p in der Gestalt (8) ausdrücken lässt. Nach einer obigen Bemerkung ist s^p ein Element von G_1; bei der in Rede stehenden Darstellung ist also $\alpha=0$. Andererseits its s^p mit s vertauschbar. Hieraus folgt, dass s^p zur Zentrale $\{s_{n-1}\}$ gehören muss, da $s_1, s_2, \ldots s_{n-2}$ nicht mit s vertauschbar sind. Man hat mithin entweder $s^p=1$ oder $s^p=s_{n-1}^{\varkappa}$ $(\varkappa \not\equiv 0)$, in welchem letzteren Falle erst $s^{p^2}=1$.

Betreffend die Elemente von $G-G_1$ lassen sich hiernach drei Fälle unterscheiden: *entweder ist für sämtliche Elemente 1)* $s^p=1$, *2)* $s^p=s_{n-1}^{\varkappa}$ $(\varkappa \not\equiv 0)$ *oder endlich 3) ist für einige Elemente* $s^p=1$ *und für die anderen* $s^p=s_{n-1}^{\varkappa}$ $(\varkappa \not\equiv 0)$. Im Falle 3) lässt sich für die Darstellung von den Elementen der Gruppe in der Gestalt (8) s so wählen, dass $s^p=1$. Für die Elemente von $G-G_1$ ist der Exponent $\alpha \not\equiv 0$, und die p^{te} Potenz eines Elementes $=1$ oder $=s_{n-1}^{\varkappa}$ $(\varkappa \not\equiv 0)$, je nachdem der Exponent $\alpha_1 \equiv 0$ oder $\not\equiv 0$. Doch müssen wir für das volle Verständnis auch auf die Eigenschaften der Untergruppe G_1 Bezug nehmen, mit denen wir uns erst im folgenden Abschnitt beschäftigen werden.

Wenn G zwei grösste charakteristische Untergruppen G_1 und $\overline{G}_1$ enthält, so lässt sich, wie oben bemerkt, für s ein Element in G_1 wählen. Es ist dann s auch mit s_{n-2} vertauschbar, und als Zentrum von $\overline{G}_1$ hat man $\{s_{n-2}, s_{n-1}\}$. Bei solcher Wahl von s entsteht die Frage, in wie weit man auch, um s^p auszudrücken, s_{n-2} nötig haben kann. Doch genügt, wie wir später zeigen werden, auch in diesem Falle s_{n-1} für die Darstellung von s^p. Es folgt hieraus, dass *der obige Satz über die drei Möglichkeiten von* s^p *für die p-Gruppen maximaler Klasse allgemein gilt.*

Wie man sieht, sind die oben angegebenen drei Möglichkeiten für s^p denjenigen ganz entsprechend, nach denen, wie in der 1. Nummer hervorgehoben wurde, die 2-Gruppen maximaler Klasse in drei Hauptarten eingeteilt werden. Diese Einteilung lässt sich unmittelbar auf den allgemeineren Fall, wo p ungerade ist, überführen. *Für die p-Gruppen maximaler Klasse erhalten wir mithin eine Verteilung in drei Hauptarten: 1) von Diederart, 2) von dizyklischer Art, 3) von der mittleren Art.* In einer früher von uns veröffentlichten Note[1], wo alle p-Gruppen maximaler Klasse, für welche die Untergruppe G_1 Abelsch ist, bestimmt werden, haben wir diese Haupt-

[1] *„Über mit Diedergruppen verwandte p-Gruppen"*, Arkiv för Matematik Astronomi och Fysik, Bd. 33 A (1946).

arten als drei Gruppenfamilien charakterisiert. In der vorliegenden Arbeit wollen wir jedoch der Bezeichnung Gruppenfamilie eine andere Bedeutung geben; die Gruppen von derselben Ordnung p^n werden hierbei in Familien eingeteilt, so dass in einer Familie Gruppen von sämtlichen drei Hauptarten eingehen. Ein Beispiel hierzu findet man in unserer soeben zitierten Note, indem für jede Ordnung die Gruppen mit der dort vorgeschriebenen Eigenschaft eine Familie bilden. Da für $p=2$ die Untergruppe G_1 zyklisch ist, so schliessen sich in diesem Falle die drei Gruppen mit gegebener Ordnung in eine Familie zusammen; ist dagegen p ungerade, so gilt entsprechendes nur für $n=4$. Erst im dritten Abschnitte können wir näher auf diese Fragen eingehen.

4. Besonders leicht lassen sich alle Untergruppen von G bestimmen, welche Elemente von $G-G_1$ enthalten. Zunächst sei G_1 die einzige charakteristische Untergruppe der Ordnung p^{n-1} von G. Wir betrachten eine Untergruppe H_ν, welche mit $G-G_1$ das Element s und mit $G_\nu-G_{\nu+1}$ das Element s_ν gemeinsam hat; dagegen möge H_ν mit G_1-G_ν kein gemeinsames Element haben. Durch Kommutatorbildung, mit Ausgangspunkt von s und s_ν, lassen sich nun in $G_{\nu+1}-G_{\nu+2}, \ldots G_{n-1}$ Elemente $s_{\nu+1}, \ldots s_{n-1}$ bestimmen. H_ν enthält mithin die Gruppe $\{s_\nu, s_{\nu+1}, \ldots s_{n-1}\}=G_\nu$, und man bekommt für sie die Bezeichnung $\{s, G_\nu\}$, und als ihre Ordnung hat man $p^{n-\nu+1}$. Man erhält demnach eine Einteilung der fraglichen Gruppen nach der ersten in einer solchen enthaltenen Gruppe der unteren Zentralreihe. Die Anzahl der Untergruppen H_ν von der Ordnung $p^{n-\nu+1}$ findet man, indem man berücksichtigt, wie die p^n-p^{n-1} Elemente von $G-G_1$ sich auf diese Gruppen verteilen lassen. Für die gesuchte Anzahl ergibt sich demnach:

$$\frac{p^n-p^{n-1}}{p^{n-\nu+1}-p^{n-\nu}}=p^{\nu-1}.$$

Jede derartige Untergruppe ist von maximaler Klasse. Die untere Zentralreihe ist ja: $H_\nu, G_{\nu+1}, G_{\nu+2}, \ldots G_{n-1}$. Für die Gruppen G von Diederart oder dizyklischer Art sind G und H_ν immer von derselben Art. Ist aber G von der mittleren Art, so gibt es für H_ν zwei Möglichkeiten je nachdem $s^p=1$ oder $s^p=s_{n-1}^\varkappa$ $(\varkappa \not\equiv 0)$. Im ersten Falle ist H_ν von Diederart und im zweiten von dizyklischer Art. Man findet leicht, dass es $p^{\nu-2}$ Gruppen H_ν von der ersten Art und $p^{\nu-2}$ $(p-1)$ von der zweiten Art gibt.

Enthält G noch eine zweite charakteristische Untergruppe $\overline{G}_1$, so ist der Fall besonders zu berücksichtigen, in welchem das erzeugende Element s von H_ν in $\overline{G}_1$ liegt. Man kann ja in diesem Falle nicht durch Kommutatorbildung von s mit $s_\nu, s_{\nu+1}, \ldots$ zu s_{n-1} gelangen. Entweder enthält also die durch s und s_ν erzeugte Gruppe s_{n-1} nicht, und ihre Ordnung wird auf $p^{n-\nu}$ reduziert, oder hat sie als Zentrum

$\{s_{n-2}, s_{n-1}\}$ und ist somit keine Gruppe maximaler Klasse. Näheres hierüber lässt sich hier nicht sagen.

Auch die Faktorgruppen $\frac{G}{G_\nu}$ müssen stets von maximaler Klasse sein. Da eine solche Gruppe dadurch aus G entsteht, dass man $s_\nu, s_{\nu+1}, \ldots s_{n-1}$ durch 1 ersetzt, so muss dieselbe von Diederart sein, und dies auch in dem Falle, wo G zu einer von den beiden anderen Hauptarten gehört.

II.

5. In diesem Abschnitte wollen wir die maximale charakteristische Untergruppe G_1 näher untersuchen. Für den Fall $p=2$ ist G_1 bekanntlich zyklisch. Wir wollen zeigen, dass auch, wenn man p allgemein nimmt, für die Ordnung der Elemente einfache Gesetze gelten. Der Fall $p=2$ soll sich also als Spezialfall in diesen allgemeinen Gesetzen einordnen lassen.

Für s wählen wir ein Element von $G-G_1$ oder, falls G noch eine zweite charakteristische Untergruppe $\overline{G}_1$ enthält, von $G-G_1-\overline{G}_1$. Wenn nun s_1 ein Element von G_1-G_2 bedeutet, so lassen sich durch die Relationen

$$s^{-1} s_i s = s_i s_{i+1} \qquad (i=1, 2, 3, \ldots) \tag{9}$$

Elemente $s_2, s_3, \ldots s_{n-1}$ bestimmen, welche bzw. zu $G_2-G_3, G_3-G_4, \ldots G_{n-1}$ gehören. Da s^p ein Element der Zentrale $\{s_{n-1}\}$ bezeichnet, so hat man

$$s^{-p} s_i s^p = s_i \qquad (i=1, 2, 3, \ldots). \tag{10}$$

Nun erhält man in (10) rechts einen anderen Ausdruck, indem man zunächst $s^{-1} s_i s$ ausführt, dann $s^{-2} s_i s^2$, u. s. w. *Wenn man jetzt den in solcher Weise entstandenen Ausdruck mit s_i gleichsetzt, so bekommt man Relationen, aus denen die Ordnungen für $s_2, s_3, \ldots$ sich herleiten lassen.* Es ergibt sich dann für $s^{-1} s_i s$, $s^{-2} s_i s^2$, $s^{-3} s_i s^3$, ... bzw.

$$s_i s_{i+1},\ s_i s_{i+1} s_{i+1} s_{i+2},\ s_i s_{i+1} s_{i+1} s_{i+2} s_{i+1} s_{i+2} s_{i+2} s_{i+3},\ \ldots. \tag{11}$$

Ganz allgemein bekommt man das Produkt für $s^{-(h+1)} s_i s^{h+1}$ aus demjenigen für $s^{-h} s_i s^h$, indem man dem letzteren Produkt ein ähnliches hinzufügt; es sollen nur die entsprechenden Indizes je mit einer Einheit erhöht werden. Die Folge (11) endet mit dem Gliede für $h=p$. Wenn man hier den ersten Faktor s_i wegnimmt, so wird nach (10) das Restprodukt $=1$. In solcher Weise entstehen die Relationen:

$$s_i \cdot s_i s_{i+1} \cdot s_i s_{i+1} s_{i+1} s_{i+2} \ldots s_i s_{i+1} \ldots s_{i+p-1} = 1 \qquad (i=2, 3, \ldots), \tag{12}$$

wobei für $\nu > n-1$ $s_\nu = 1$ zu setzen ist. Das Produkt (12) denken wir uns in p Teilprodukte zerlegt, von denen das erste ein Glied, das zweite zwei Glieder, das dritte vier Glieder und endlich das letzte 2^{p-1} Glieder enthält. Wenn wir mit (11) vergleichen, so ergibt sich:

$$s_i \prod_{h=1}^{p-1} s^{-h} s_i s^h = 1 \qquad (i = 2, 3, \ldots). \tag{13}$$

Die Relationen (13) sind offenbar einer Ergänzung für $i = 1$ bedürftig. Vollständiger bekommen wir die Lösung unserer Aufgabe nach der folgenden Methode. Für $(s s_i^{-1})^{-p} = (s_i s^{-1})^p$ haben wir die Entwicklung:

$$(s_i s^{-1})^p = s_i \prod_{h=1}^{p-1} s^{-h} s_i s^h \cdot s^{-p} \qquad (i = 1, 2, 3, \ldots).$$

Man hat also:

$$s_i \prod_{h=1}^{p-1} s^{-h} s_i s^h = s^p (s s_i^{-1})^{-p} \qquad (i = 1, 2, 3, \ldots). \tag{14}$$

Da für $i = 2, 3, \ldots$ (14) eine Wiederholung von (13) sein muss, so ergibt sich:

$$(s s_i^{-1})^p = s^p \qquad (i = 2, 3, \ldots). \tag{15}$$

Offenbar hat (15) Gültigkeit, wenn für s_i ein beliebiges Element von G_2 eingeführt wird.

Für $i = 1$ braucht (15) nicht zu gelten. Jedenfalls ist doch das rechte Glied von (14) gleich einer Potenz von s_{n-1}. Als Ergänzung von (13) ergibt sich somit:

$$s_1 \prod_{h=1}^{p-1} s^{-h} s_1 s^h = s_{n-1}^{\alpha}. \tag{13_1}$$

Für $p = 2$ hat man in (13_1) $\alpha \equiv 0$ für die Diedergruppe und die dizyklische Gruppe und $\alpha \equiv 1$ für die dritte Gruppe. In Übereinstimmung hiermit gilt es auch für p ungerade, *dass in* (13_1) *die Gruppen von Diederart oder dizyklischer Art durch* $\alpha \equiv 0$ *und die Gruppen der mittleren Art durch* $\alpha \not\equiv 0$ *charakterisiert werden.*[1]

6. Um die eigentliche Bedeutung der Relationen (13) und (13_1) klarzulegen, ist eine Umformung wünschenswert. Am einfachsten lässt sich diese ausführen, falls G_1 eine Abelsche Gruppe bezeichnet. Man kann dann unmittelbar Elemente s_h mit demselben Index zusammenführen, und es gilt nur zu berechnen, wie oft links die

[1] Hier ist es von Bedeutung, dass $s^p (s s_1^{-1})^{-p}$ seinen Wert beibehält, wenn s durch $s s_1^k$ ersetzt wird, sodass man $(s s_1^k)^p (s s_1^{k-1})^{-p}$ bekommt. Einen Beweis hierfür wollen wir in einem anderen Zusammenhange geben.

verschiedenen s_h vorkommen. Dies findet man sehr leicht, indem man das letzte Glied der Folge (11) mit

$$(16) \qquad (1+x)^p = 1 + x + x(1+x) + x(1+x+x(1+x)) + x(\quad) + \cdots$$

vergleicht, wo jeder folgende Klammer die ganze vorangehende Entwicklung enthält; dabei entspricht jedem s_{i+h-1} in (11) ein x^h in (16). Die gesuchten Anzahlen sind mithin Binomialkoeffizienten. In dem betrachteten Falle lassen sich demnach (13) und (13_1) durch bzw.:

$$(17) \qquad s_i^p \, s_{i+1}^{\frac{p(p-1)}{2}} \ldots s_{i+p-2}^p s_{i+p-1} = 1;$$

$$(17_1) \qquad s_1^p \, s_2^{\frac{p(p-1)}{2}} \ldots s_{p-1}^p s_p = s_{n-1}^{\alpha} \qquad (\alpha \not\equiv 0).$$

ersetzen, wobei (17) für $i = 2, 3, \ldots n-1$ sowie auch für $i = 1$ bei den diedrischen und dizyklischen Hauptarten und (17_1) für die dritte Hauptart gelten. Durch (17) und (17_1) bekommt man Ausdrücke für $s_p, s_{p+1}, \ldots s_{n-1}$ in $s_1, s_2, \ldots s_{p-1}$, und zwar sind die Exponenten für diese letzteren Elemente immer durch p teilbar. *Als Basiselemente für G_1 hat man mithin* $s_1, s_2, \ldots s_{p-1}$. Hierbei bemerke man, dass für $n < p$ $s_n, \ldots s_{p-1}$ durch 1 zu ersetzen sind.

Die Ausnutzung der Relationen (17) lässt sich am einfachsten in der Reihenfolge $i = n-1, n-2, \ldots 1$ ausführen. Es ergibt sich zunächst:

$$s_{n-1}^p = s_{n-2}^p = \cdots = s_{n-p+1}^p = 1.$$

Die Elemente $s_{n-1}, s_{n-2}, \ldots s_{n-p+1}$ sind somit von der Ordnung p. Beim nächsten Schritt erhält man:

$$s_{n-p}^p \, s_{n-1} = 1,$$

woraus man schliesst, dass s_{n-p} von der Ordnung p^2 ist. Dasselbe Resultat findet man für die $p-2$ folgenden Elemente $s_{n-p-1}, \ldots s_{n-2p+2}$. Überhaupt bekommt man als allgemeine Regel, dass, *falls die Elemente in der Reihenfolge* $s_{n-1}, s_{n-2}, \ldots s_2, s_1$ *genommen werden, so haben die* $p-1$ *ersten die Ordnung* p, *die* $p-1$ *folgenden die Ordnung* p^2 *u. s. w., so dass jedesmal nach* $p-1$ *Schritten die Ordnung um einen neuen Faktor* p *erhöht wird.* Man beachte hier, dass es ohne Änderung der zugehörigen Ordnungen erlaubt ist, für $s_{n-1}, s_{n-2}, \ldots s_2, s_1$ beliebige Elemente von bzw. G_{n-1}, $G_{n-2} - G_{n-1}, \ldots G_1 - G_2$ einzusetzen. Nur für $i = 1$ und Gruppen von der mittleren Hauptart gibt es von der obigen Regel Ausnahmen, und zwar durch den Einfluss des rechten Gliedes von (17_1). Ist nämlich erstens $n \leqq p$, so reduziert sich (17_1) auf

$$(18) \qquad s_1^p = s_{n-1}^{\alpha},$$

da alle anderen Faktoren links $=1$ werden. Es ist demnach s_1 hier von der Ordnung p^2. Beispiele hierzu findet man bei den Gruppen von den Ordnungen p^3, p^4 und p^5. Hat man zweitens $n=p+1$, so nimmt (17_1) die Gestalt

$$(18_1) \qquad s_1^p s_{n-1} = s_{n-1}^{\alpha}.$$

Die Ordnung von s_1 ist hier für $\alpha=1$ nur p, sonst aber p^2, wie es für $n=p+1$ bei den diedrischen und dizyklischen Hauptarten der Fall ist. Das einfachste Beispiel bekommt man für $p=3$, $n=4$.

Mit e_p bezeichnet man ein Element, dessen p^{te} Potenz $=1$ ist. p-Gruppen maximaler Klasse, deren sämtliche Elemente e_p sind, gibt es nur von Diederart und für $n \leqq p$. Die höchste Ordnung einer Gruppe mit dieser Eigenschaft ist mithin p^p.

Ist $n>p+1$, so hat es für die Ordnung von s_1 keine Bedeutung, ob als rechtes Glied von (17_1) 1 oder s_{n-1}^{α} $(\alpha \not\equiv 0)$ steht.

7. Nun ist unser eigentliches Ziel in diesem Abschnitt nachzuweisen, *dass die Gleichungen* (17) *und* (17_1) *auch bei nicht-Abelschen Gruppen* G_1 *ihre Gültigkeit beibehalten.* Es entstehen zwar bei der Umtauschung der Elemente, so dass gleichbezeichnete s_i zusammengeführt werden, als neue Faktoren Kommutatoren. Im allgemeinen treten aber diese Kommutatoren in solchen Potenzen auf, welche sich auf die Identität reduzieren; doch mit der Ausnahme, dass in speziellen Fällen ein Faktor s_{n-1}^{β} übrig bleibt. Ohne nähere Kenntnis der Kommutatoren lässt sich selbstverständlich der Beweis für unsere obige Behauptung nicht vollständig ausführen. In diesem Abschnitt müssen wir uns mit der Herleitung eines Satzes begnügen, der für den Beweis von sehr wesentlicher Bedeutung ist.

Die hier zu lösende Aufgabe gilt, wie oft im Produkt (12) für $k>h$ ein Element s_{i+k} einem Elemente s_{i+h} vorangeht. Jedesmal, wenn dies geschieht, wird ja bei der besprochenen Umordnung ein Kommutator (s_{i+k}, s_{i+h}) erzeugt. Anschaulicher erscheint vielleicht die Aufgabe, wenn man fragt, wie oft in der Entwicklung (16) für $k>h$ eine Potenz x^k einer Potenz x^h vorangeht. Noch eine zweite Unformung des Problems lässt sich mit Vorteil ausführen, indem man in (16) von den Potenzen zu den Exponenten übergeht. Dabei erhalten wir in der folgenden Weise eine Darstellung für die Exponenten durch die dyadischen Zahlen. Die Entwicklung (16) besteht aus p Abschnitten. Für den ersten Abschnitt $1+x$ haben wir die Exponenten 0 und 1. Im nächsten Abschnitt $x(1+x)$ werden diese Exponenten je um 1 erhöht; hierfür geben wir Ausdrücke durch 10 und 11, also durch zweizifferige dyadische Zahlen. Um für die Exponenten beim folgenden Abschnitt $x((1+x)+x(1+x))$ dreizifferige

Zahlen zu bekommen, führen wir auch für $1+x$ im Klammer zwei Ziffern ein; nämlich 00 und 01, und erhalten mithin für die Exponenten der vier Glieder die Bezeichnungen: 100, 101, 110, 111. Wenn wir jetzt in der Reihe (16) die Glieder mit den in solcher Weise bezeichneten Exponenten ersetzen, so bekommen wir für $p=5$ die Folge:

(19) 0, 1, 10, 11, 100, 101, 110, 111, 1000, 1001, 1010, 1011, 1100, 1101, 1110, 1111, 10000, 10001, 10010, 10011, 10100, 10101, 10110, 10111, 11000, 11001, 11010, 11011, 11100, 11101, 11110, 11111.

Wie man sieht, erhalten, wir beim Übergang zu den Exponenten die dyadischen Zahlen nach steigender Grösse. Man beachte noch, dass einer Potenz x^h in (16) eine dyadische Zahl mit h Einsen in (19) entspricht. In der neuen Formulierung gilt also unsere Aufgabe zu entscheiden, *wie oft unter den 2^p ersten dyadischen Zahlen eine Zahl mit k Einsen einer Zahl mit h Einsen vorangeht.* Da man offenbar für k, h und $p-h$, $p-k$ dieselbe Antwort erhält, so können wir die Beschränkung $h+k\leqq p$ einführen. Für $p=5$ sind nur vier Fälle zu untersuchen, nämlich: $h=1$, $k=2$; $h=1$, $k=3$; $h=1$, $k=4$; $h=2$, $k=3$. Die Antworten lassen sich leicht aus (19) ablesen. Für die gesuchten Anzahlen führen wir die Bezeichnung $(k, h)_p$ ein und bekommen:

$$(2, 1)_5=10;\quad (3, 1)_5=5;\quad (4, 1)_5=1;\quad (3, 2)_5=24.$$

In den beiden ersten Fällen erhalten wir mithin durch 5 teilbare Zahlen und in den beiden letzteren durch 5 nicht teilbare. Die Vermutung liegt jetzt nahe, dass dieser Unterschied darauf beruht, ob in $h+k\leqq p$ das obere oder untere Zeichen gilt. *Für diese Vermutung wird in den folgenden Entwicklungen ein Beweis gegeben.*

8. Behufs der Berechnung von $(k, h)_p$ ist es vorteilhaft diese Zahl in Teilsummen zu zerlegen. Erstens können die beiden Zahlen mit k bzw. h Einsen eine verschiedene Zifferanzahl haben. Man erhält dann eine erste Teilsumme, indem man die Anzahl der höchstens n-zifferigen Zahlen mit k Einsen mit der Anzahl der $(n+1)$-zifferigen mit h Einsen multipliziert und zuletzt von $n=k$ bis $n=p-1$ summiert. Die erste Anzahl ist offenbar gleich den Koeffizienten für x^k in der Entwicklung von $(1+x)^n$, also:

$$\frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{\underline{|k}}. \tag{20}$$

In ähnlicher Weise ist die zweite Anzahl gleich dem Koeffizienten für x^h in der Entwicklung von $x(1+x)^n$, also:

$$\frac{n(n-1)\ldots(n-h+2)}{\underline{|h-1}}. \tag{21}$$

Als erste Teilsumme von $(k, h)_p$ erhält man mithin:

$$\sum_{n=k}^{p-1} \frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{\underline{|k}} \cdot \frac{n(n-1)\ldots(n-h+2)}{\underline{|h-1}}. \tag{22}$$

Die Summanden in (22) sind vom Grade $(k+h-1)$ in n. Führt man die Summation aus, so ergibt sich ein Resultat vom Grade $k+h$ in p. Sind andererseits die beiden Zahlen mit k bzw. h Einsen von gleicher Zifferanzahl, so kann man für dieselben die erste Ziffer 1 weglassen. Es handelt sich dann um Zahlen mit $k-1$ bzw. $h-1$ Einsen. Hiernach findet man für $(k, h)_p$ als zweite Teilsumme:

$$\sum_{n=k}^{p-1} (k-1, h-1)_n. \tag{23}$$

Ist $h=1$, so verschwindet diese zweite Teilsumme, und man bekommt für $(k, 1)_p$:

$$\frac{p(p-1)\ldots(p-k)}{\underline{|k+1}}. \tag{24}$$

Ist $h=2$, so lassen sich jetzt für die Glieder von (23) die Ausdrücke in n so fort angeben, und man findet für $(k, 2)_p$ durch Summation von (22) und (23):

$$\frac{(p+1)p(p-1)\ldots(p-k)}{\underline{|k\cdot(k+2)}}. \tag{25}$$

Vermittelst derselben Methode lassen sich nun für $h \geqq 3$ die Summanden $(k-1, h-1)_n$ von (23) in zwei Teile zerlegen. Für (23) bekommt man hierdurch eine Zerspaltung in zwei Teilsummen. In dieser Weise lässt sich fortsetzen, und als Endresultat ergibt sich eine Zerlegung von $(k, h)_p$ in h Teilsummen, welche mit (22) anfängt. Wenn wir den Ausdruck unter dem Summenzeichen in (22) mit $\varphi(n, k, h)$ bezeichnen, so wird in den übrigen Summen über $\varphi(n, k-1, h-1), \ldots \varphi(n, k-i, h-i), \ldots \varphi(n, k-h+1, 1)$ summiert. Als Gradzahl für $\varphi(n, k-i, h-i)$ in n hat man $k+h-2i-1$. Nun ist die Summation über $\varphi(n, k-i, h-i)$ eine $(i+1)$-fache. Da die Gradzahl nach jeder Summation mit einer Einheit steigt, so bekommt man als Endresultat einen Ausdruck vom Grade $k+h-i$ in p. Hierin hat man als Faktor $p(p-1)\ldots(p-k)$. Dies versteht man schon aus der Tatsache, dass für $p=0, 1, \ldots k$ sämtliche Teilsummen gleich Null sein müssen. Soll nun $(k, h)_p$ nicht durch p teilbar sein, so muss es wenigstens eine Teilsumme geben, für welche auch der Nenner den Faktor p

enthält. Wie aus (22) verständlich ist, hat $\varphi(n, k-i, h-i)$ als Nenner $\underline{|k-i} \cdot \underline{|h-i} \cdot \underline{|1}$, und durch die $(i+1)$-fache Summation können, wie wir sofort zeigen werden, als neue Faktoren im Nenner nur $k+h-2i, \ldots k+h-i$ hinzukommen. Da $k+h \leqq p$, so ist also ein Faktor p im Nenner nur für $i=0$ und $k+h=p$ möglich.

Zur näheren Begründung dieses Ergebnisses mag es genügen den Ausdruck (22) umzuformen. Wir schreiben (22) in der Gestalt

$$\sum_{n=k}^{p-1} \frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{\underline{|k}} \cdot f_{h-1}(n). \tag{26}$$

wo also

$$f_{h-1}(n) = a_0 + a_1(n+1) + \cdots + a_{h-1}(n+1)(n+2)\ldots(n+h-1). \tag{27}$$

Man kann jetzt (26) mit der Doppelreihe

$$\sum_{\nu=0}^{h-1} \sum_{n=k}^{p-1} a_\nu \frac{(n+\nu)(n+\nu-1)\ldots(n-k+1)}{\underline{|k}} \tag{28}$$

ersetzen. Nach Ausführung der zweiten Summation ergibt sich hieraus:

$$\sum_{\nu=0}^{h-1} a_\nu \frac{(p+\nu)(p+\nu-1)\ldots(p-k)}{\underline{|k} \cdot (k+\nu+1)}. \tag{29}$$

Für einen Faktor p im Nenner ist hier $\nu = h-1$, $k+h=p$ erforderlich. Da a_{h-1} gleich dem Koeffizienten für n^{h-1} in $f_h(n)$ sein muss, so hat man

$$a_{h-1} = \frac{1}{\underline{|h-1}}. \tag{30}$$

Als durch p für $k+h=p$ nicht teilbares Glied von (29) findet man also:

$$\frac{(p+h-1)\ldots(p+1)}{\underline{|h-1}} \cdot \frac{(p-1)\ldots(p-k)}{\underline{|k}} \equiv (-1)^k \pmod{p}. \tag{31}$$

Alle übrigen Beiträge zu $(k, h)_p$ sind dagegen, wie aus den obigen Entwicklungen hervorgeht, stets durch p teilbar. *Es ist mithin für* $k+h=p$ $(k, h)_p \equiv (-1)^k \pmod{p}$; *in den übrigen Fällen, also für* $k+h<p$, *ist* $(k, h)_p$ *immer durch* p *teilbar.*[1]

Auch für die übrigen Koeffizienten a_ν lassen sich ohne Schwierigkeit allgemeine Ausdrücke angeben. Zu dem Ende kann man verschiedene Methoden benutzen. Man kann z. B. in (27) sukzessive $n = -1, -2, \ldots -(h-1)$ einführen. Als Resultat ergibt sich:

[1] Dieses Resultat findet man schon in unserer Note, *„Ein Problem bei dyadischer Zahlendarstellung"*, Arkiv för Matematik, Bd. 1 (1950).

$$(32) \qquad a_\nu = (-1)^{h-1-\nu} \frac{(h-1)(h-2)\dots(h-\nu)}{(\underline{|\nu})^2}$$

Die Summation von (22) lässt sich jetzt ohne weiteres ausführen, und man bekommt hierfür:

$$(33) \qquad \sum_{\nu=0}^{h-1} (-1)^{h-1-\nu} \frac{(h-1)(h-2)\dots(h-\nu)}{(\underline{|\nu})^2} \cdot \frac{p+\nu \dots (p+1)p(p-1)\dots(p-k)}{\underline{|k} \cdot (k+\nu+1)}.$$

Man sieht leicht, dass sämtliche Glieder von (33) ganze Zahlen sind. Dass man durch die obige Methode, in welcher die Entwicklung (27) die Hauptsache ist, auch die Summation der übrigen Teilsummen von $(k, h)_p$ explizit ausführen kann, dürfte ohne weiteres verständlich sein.

9. Die eigentliche Frage für uns hier ist nun die Überführung von (13) und (13_1) in die Normalgestalt (8). Wenn G_1 Abelsch ist, haben wir als Resultat (17) und (17_1) gefunden. Für nicht-Abelsche G_1 gilt es zu entscheiden, wie die bei jener Überführung entstehenden Kommutatoren auf dieses Resultat einwirken. Eine Antwort hierauf ist es uns erst in den folgenden Entwicklungen möglich zu begründen. Doch erlauben wir uns hier die folgenden Bemerkungen. Nach den obigen Ergebnissen ist die Anzahl $(k, h)_p$ der entstandenen Kommutatoren (s_k, s_h) ein Vielfaches von p für $k+h<p$, für $k+h=p$ dagegen $\equiv(-1)^k \pmod p$. Nach einem später abzuleitenden Resultate sind für $k+h>p$ s_k und s_h stets vertauschbar, und für jeden Kommutator hat man $(s_k, s_h)^p = 1$. Wenn man die gleichbezeichneten Kommutatoren zusammenführt, so erhält man mithin für $k+h<p$ die Identität. In dem noch übrigen Falle $k+h=p$ werden wir finden, dass nur solche Kommutatoren möglich sind, welche dem Zentrum $\{s_{n-1}\}$ von G_1 angehören. Zunächst lässt sich hieraus schliessen, dass wenigstens in den Fällen, wo die Kommutatoren zum Zentrum von G_1 gehören, die besprochene Umformung auch jetzt zu (17) oder (17_1) führen; doch mit der Änderung, dass rechts eine Potenz von s_{n-1} hinzugefügt werden kann. Zu erwähnen ist unter den zu beweisenden Resultaten noch, dass die Gruppe $\{s_1^p, s_2^p \dots\}$, welche durch die p^{ten} Potenzen der Elemente von G_1 erzeugt wird, aus Elementen besteht, welche im Zentrum von G_1 liegen. Nun können (17) und (17_1) oder die ihnen nach den obigen Bemerkungen entsprechenden Relationen als Beziehungen zwischen $s_1^p, s_2^p, \dots$ und $s_p, s_{p+1} \dots$ betrachtet werden; aus den ersten Elementen lassen sich die zweiten bestimmen und umgekehrt. In Übereinstimmung hiermit gilt es auch, dass die Gruppe $\{s_p, s_{p+1}, \dots\}$ dem Zentrum von G_1 angehört.

Kompliziertere Verhältnisse treten ein, wenn es Kommutatoren (s_k, s_h) gibt, die nicht zum Zentrum von G_1 gehören. Es können dann bei dem Übergange zu (17) oder (17_1) neue Kommutatoren entstehen, zunächst von der Gestalt $(s_h, (s_k, s_l))$. Es gilt also die neue Aufgabe, wie die Anzahlen von solchen Kommutatoren sich berechnen lassen. Wie wir hier in aller Kürze skizzieren wollen, lässt sich die Antwort hierzu durch eine Verallgemeinerung der in der vorhergehenden Nummer entwickelten Methode erhalten. Die Frage gilt, wie oft unter den 2^p ersten dyadischen Zahlen für $k_1+k_2+\cdots+k_{r-1}+h \leqq p$ eine Kombination von r nach der Grösse geordneten Zahlen sich aufschreiben lässt, von denen die erste k_1 Einsen, die zweite k_2 Einsen, ... und die letzte h Einsen enthält. Dabei braucht man keine besondere Annahmen über die gegenseitigen Grössenverhältnisse von $k_1, k_2, \ldots$ zu machen; das oben hergeleitete Resultat im Falle $r=2$ hat ja in der Tat auch für $k<h$ Gültigkeit. Es lässt sich der allgemeine Fall in ganz ähnlicher Weise behandeln wie der Fall $r=2$. Man kann annehmen, dass man bereits eine Lösung für $r-1$ Zahlen mit bzw. $k_1, k_2, \ldots k_{r-1}$ Einsen besitzt, und dass diese Lösung vom Grade $k_1+k_2+\cdots+k_{r-1}$ in p ist und im Nenner keine höheren Faktoren als $k_1+k_2+\cdots+k_{r-1}$ enthält. Wir können dann für die gesuchte Anzahl eine mit (22) völlig analoge Summe aufstellen, in welcher die Summanden Produkte von zwei Faktoren sind, von denen eine vom Grade $k_1+k_2+\cdots+k_{r-1}$ und die andere vom Grade $h-1$ ist. Die Summierung lässt sich nach der Methode von Nr. 8 ausführen und liefert ein einziges Glied vom Grade $k_1+k_2+\cdots+k_{r-1}+h$ in p, welches im Nenner den Faktor $k_1+k_2+\cdots+k_{r-1}+h$ enthält. Es ist das fragliche Glied durch p teilbar oder nicht, je nachdem man $k_1+k_2+\cdots+k_{r-1}+h <$ oder $= p$ hat. Die übrigen Glieder, welche bei der Summation erhalten werden, sind durch p teilbar. Die Resultate stehen mithin in völliger Übereinstimmung mit denjenigen, welche wir in der vorhergehenden Nummer für $r=2$ erhalten haben. Setzt man voraus, dass die Kommutatorgruppe von G_1 Abelsch ist, doch ohne dem Zentrum anzugehören, so genügt es in den obigen Entwicklungen $r=3$ anzunehmen.

III.

10. In unserer bereits zitierten Arbeit „Verwandte p-Gruppen" haben wir die p-Gruppen maximaler Klasse bestimmt, für welche die Untergruppe G_1 Abelsch ist. Wir wollen jetzt zur Behandlung des übrig gebliebenen Falles, in welchem G_1 nicht-Abelsch ist, übergehen. Dass wir bei unseren Untersuchungen hier auf erhebliche Schwierigkeiten stössen werden, ist natürlich zu erwarten. Zunächst sei daran erinnert,

dass s ein Element von $G-G_1$ und, falls G noch eine zweite charakteristische Untergruppe $\bar{G}_1$ der Ordnung p^{n-1} enthält, von $G-G_1-\bar{G}_1$ bedeuten soll.

Eine erste Frage gilt die Möglichkeiten für die Kommutatoren (s_h, s_k), wobei wir stets $h<k$ annehmen können. Hier gilt der allgemeine Satz, dass, *falls* $(s_h, s_k)=1$ *für* $k=h+1$, *so hat man immer* $(s_h, s_k)=1$. Eine hinreichende Bedingung für eine Abelsche Gruppe G_1 ist also $(s_1, s_2)=(s_2, s_3)=(s_3, s_4)=\cdots=1$. *In Übereinstimmung hiermit lassen sich sämtliche Kommutatoren* (s_h, s_k) *berechnen, falls diejenigen von der Gestalt* (s_h, s_{h+1}) *bekannt sind.* Hierin liegt die Möglichkeit für einen Einteilungsgrund der p-Gruppen maximaler Klasse, indem wir eine Gruppe G, für welche i unter den Kommutatoren (s_h, s_{h+1}) von 1 verschieden sind, als von der i^{ten} Stufe bezeichnen. Die Gruppen G, für welche die Untergruppe G_1 Abelsch ist, sind somit von der nullten Stufe. In diesem Abschnitt wollen wir uns auf die Gruppen G von der ersten Stufe beschränken.

Wir nehmen jetzt an, dass zwei Elemente s_h und s_{h+1} stets mit einander vertauschbar sind. Es gilt zu beweisen, dass unter dieser Voraussetzung die Gruppe G_1 Abelsch ist. Für $h>r$ sei immer $(s_h, s_k)=1$. Es sei auch für $i>1$ $(s_r, s_{r+r_1})=1$ $(r_1=1, 2, \ldots i-1)$, so dass man also erst $(s_r, s_{r+i})\neq 1$ hat. Es ist mithin

$$(s_r, s_{r+i-1})=1. \tag{34}$$

Wir transformieren (34) mit s und bekommen

$$(s_r s_{r+1}, s_{r+i-1} s_{r+i})=1. \tag{35}$$

Diese Relation lässt sich nach (1) umformen, indem s durch s_r, t durch s_{r+1} und u durch $s_{r+i-1}s_{r+i}$ ersetzt werden. Man bekommt dann:

$$(s_r, s_{r+i-1}s_{r+i})\,((s_r, s_{r+i-1}s_{r+i}), s_{r+1})\,(s_{r+1}, s_{r+i-1}s_{r+i})=1.$$

Nach den Voraussetzungen sind hier die beiden letzten Faktoren $=1$. Aus (35) folgt somit:

$$(s_r, s_{r+i-1}s_{r+i})=1. \tag{35_1}$$

Nach der Identität (2) erhält man aus (35_1):

$$(s_r, s_{r+i})\,(s_r, s_{r+i-1})\,((s_r, s_{r+i-1}), s_{r+i})=1. \tag{36}$$

Hier sind aber nach den Annahmen die beiden letzten Faktoren $=1$, und aus (36) würde also

$$(s_r, s_{r+i})=1$$

folgen, was den Voraussetzungen widerspricht, Hiermit ist der Beweis erbracht, dass, falls sämtliche Kommutatoren von der Gestalt $(s_h, s_{h+1})=1$ sind, so ist G_1 Abelsch.

11. In erster Instanz interessiert uns der Fall, wo (s_1, s_2) der einzige von 1 verschiedene Kommutator (s_h, s_{h+1}) ist; mit anderen Worten bedeutet dies, dass die Gruppe G_2 Abelsch sein soll, Wir schreiben

$$(37) \qquad (s_1, s_2) = s_{n-i}^{\lambda} \cdot s_{n-i+1}^{\lambda_1} \ldots,$$

wo rechts s_{n-i}^{λ} den Hauptfaktor bedeutet. Es ist $n-i>3$. Wäre nämlich dies nicht der Fall, so würde man durch Übergang zur Faktorgruppe $\frac{G}{G_4}$ Gruppen von der Ordnung p^4 erhalten können, für welche s_1 und s_2 nicht vertauschbar sind, was bekanntermeise nach unserem Kenntnis von diesen Gruppen unmöglich ist. Durch Transformation mit s ergibt sich aus (37):

$$(38) \qquad s^{-1}(s_1, s_2)s = (s_1 s_2, s_2 s_3) = s_{n-i}^{\lambda} \ldots s_{n-i+1}^{\lambda_1} \ldots$$

Nach Umformung zuerst nach (1) und dann nach (2) erhalten wir:

$$(s_1 s_2, s_2 s_3) = (s_1, s_2 s_3) = (s_1, s_2)(s_1, s_3).$$

Aus (37) und (38) bekommt man mithin:

$$(39) \qquad (s_1, s_3) = s_{n-i+1}^{\lambda} \ldots$$

In gleicher Weise lässt sich fortsetzen, und es ergibt sich als Endresultat:

$$(40) \qquad (s_1, s_k) = s_{n-i+k-2}^{\lambda} \ldots \qquad (k = 2, 3, \ldots i+1).$$

Wir wollen beweisen, *dass in* (37) *für i nur die* $p-2$ *Werte* $i = 1, 2, \ldots p-2$ *möglich sind.* Nehmen wir an, es sei etwa $i = p-1$, so bekommt (40) für $k = p$ die Gestalt:

$$(s_1, s_p) = s_{n-1}^{\lambda}.$$

Nun lässt sich nach dem vorhergehenden Abschnitt s_p, von einem etwa hinzukommenden Faktor in s_{n-1} abgesehen durch ein Produkt von p^{ten} Potenzen in $s_1, s_2, \ldots s_{p-1}$ ausdrücken. In (s_1, s_p) ersetzen wir s_p durch das so erhaltene Produkt. Man erhält dann durch sukzessive Anwendung von (2) eine Entwicklung von (s_1, s_p) in ein Produkt, wobei stets der Faktor, welcher die Rolle von $((s, t), u)$ in (2) übernimmt, $= 1$ wird. Man schliesst hieraus, dass das in Rede stehende Produkt sich aus p^{ten} Potenzen von (s_1, s_2), (s_1, s_3), ... und (s_1, s_{p-1}) zusammensetzen lässt. Nach (40) werden aber (s_1, s_2), (s_1, s_3), ... (s_1, s_{p-1}) durch $s_{n-p+2}, s_{n-p+3}, \ldots s_{n-1}$ ausgedrückt, und die p^{ten} Potenzen der letzteren sind, nach Nr. 6, $= 1$. Man bekommt hieraus $(s_1, s_p) = 1$, und die Annahme $(s_1, s_p) = s_{n-1}^{\lambda}$ führt mithin auf einen Widerspruch. Der Fall $i > p-1$

in (37) lässt sich auf $i=p-1$ zurückführen und ist also, wie zu erwarten war, auch nicht möglich. Hat man nämlich $i=p-1+q$, so kann man ja G durch die Faktorgruppe $\frac{G}{G_{n-q-1}}$ ersetzen.

Es ist möglich (37) *in die Normalform*

$$(37_1) \qquad (s_1, s_2) = s_{n-i}$$

zu überführen. Durch die Wahl von s und s_1 werden $s_2, s_3, \ldots s_{n-1}$ und also auch die Kommutatoren (s_h, s_k) festgelegt. Man braucht doch nur s_1 zu ändern, um den Übergang von (37) zu (37_1) auszuführen. Zunächst wollen wir nachweisen, dass in (37) der Exponent $\lambda=1$ angenommen werden kann. Ersetzt man nämlich s_1 mit $\bar{s}_1=s_1^a$, so bekommt man für $\bar{s}_2, \bar{s}_3, \ldots \bar{s}_i, \ldots$ Entwicklungen mit den Hauptfaktoren $s_2^a, s_3^a, \ldots s_i^a, \ldots$. Indem wir jedes mal nur den Hauptfaktor aufschreiben, erhalten wir jetzt:

$$(41) \qquad (\bar{s}_1, \bar{s}_2) = (s_1, s_2)^{a^2} \ldots = s_{n-i}^{a^2\lambda} \ldots = \bar{s}_{n-i}^{a\lambda} \ldots$$

Wird hier a durch $a\lambda \equiv 1 \pmod{p}$ bestimmt, so hat man (37) auf den Fall mit $\lambda=1$ zurückgeführt. Nach der Einführung von $\lambda=1$ in (37) substituieren wir:

$$\bar{\bar{s}}_1 = s_1 s_2^a s_3^\beta \ldots$$

Da G_2 Abelsch ist, so führt dies mit sich:

$$\bar{\bar{s}}_h = s_h s_{h+1}^a s_{h+2}^\beta \ldots \qquad (h=2, 3, \ldots).$$

Untersucht man jetzt die Entwicklung von $(\bar{\bar{s}}_1, \bar{\bar{s}}_2)$ in ein Produkt (37), so ergibt sich als erster Faktor $\bar{\bar{s}}_{n-i}$, im Exponenten für $\bar{\bar{s}}_{n-i+1}$ erhält man ein Glied α, im Exponenten für $\bar{\bar{s}}_{n-i+2}$ ein Glied β u.s.w., und man hat die Möglichkeit $\alpha, \beta, \ldots$ so zu bestimmen, dass sämtliche diese Exponenten verschwinden. Als Endresultat ergibt sich dann $(\bar{\bar{s}}_1, \bar{\bar{s}}_2) = \bar{\bar{s}}_{n-i}$ oder mit anderen Bezeichnungen (37_1).

Wenn die Kommutatorgruppe G_2 von G Abelsch ist, sind also bezüglich der Kommutatoren nur $p-2$ Fälle möglich, auf welche alle andere sich zurückführen lassen. Diese Fälle bekommt man aus (37_1) *für* $i=1, 2, \ldots p-2$.

12. Es sei jetzt $h>1$, $(s_h, s_{h+1}) \neq 1$ und $(s_i, s_{i+1})=1$ für $i \geqslant h$. Die Gruppe $\{s, G_h\}$, welche von der Ordnung p^{n-h+1} ist, lässt sich dann in derselben Weise behandeln wie für $h=1$ die vollständige Gruppe G. Es entsteht aber hier eine neue Frage über die Beschaffenheit der Kommutatoren, für welche nicht beide eingehende Elemente zu G_h gehören. Der Einfachheit halber nehmen wir zunächst an, dass die Kom-

mutatorgruppe von G_1 sich auf die Zentrale $\{s_{n-1}\}$ von G beschränkt. Unser Ausgangspunkt ist also:

$$(s_h,\ s_{h+1}) = s_{n-1};\ (s_i,\ s_{i+1}) = 1 \qquad (i \gtrless h). \tag{42}$$

Wir transformieren beide Glieder mit s. Der Ausdruck für das rechte Glied bleibt dabei ungeändert; das linke Glied geht dagegen mit Rücksicht auf (3) in

$$(s_i s_{i+1},\ s_{i+1} s_{i+2}) = (s_i,\ s_{i+1})\,(s_{i+1},\ s_{i+2})\,(s_i,\ s_{i+2})$$

über, und dies auch für $i = h$. Man bekommt mithin:

$$(s_{i+1},\ s_{i+2})\,(s_i,\ s_{i+2}) = 1. \tag{43}$$

Nur für $i+1 = h$ ist also $(s_i,\ s_{i+2})$ von 1 verschieden, und zwar erhält man:

$$(s_{h-1},\ s_{h+1}) = s_{n-1}^{-1};\ (s_i,\ s_{i+2}) = 1 \qquad (i \gtrless h-1). \tag{44}$$

Wenn wir weiter fortschreiten, so finden wir, dass, falls alle $(s_i,\ s_{i+m})$ für $m = 1, 2, \ldots r$ bekannt sind, so kan man auch sämtliche $(s_i,\ s_{i+r+1})$ berechnen. Es ist ja nach (3) für $r > 1$:

$$s^{-1}(s_i,\ s_{i+r})\,s = (s_i s_{i+1},\ s_{i+r} s_{i+r+1}) = (s_i,\ s_{i+r})\,(s_{i+1},\ s_{i+r})\,(s_{i+1},\ s_{i+r+1})\,(s_i,\ s_{i+r+1}).$$

Man hat also:

$$(s_{i+1},\ s_{i+r})\,(s_{i+1},\ s_{i+r+1})\,(s_i,\ s_{i+r+1}) = 1. \tag{45}$$

Unter den Faktoren hier sind nach der Annahme die beiden ersten bekannt; es lässt sich also der dritte Faktor $(s_i,\ s_{i+r+1})$ aus (45) bestimmen. Dieser Faktor kann nur dann von 1 verschieden sein, wenn dies auch für wenigstens einen der beiden übrigen der Fall ist. Für $r = 2$ trifft dies nach (42) und (44) nur für $i = h-1$ und $i = h-2$ zu. In diesen beiden Fällen bekommt man:

$$(s_{h-1},\ s_{h+2}) = s_{n-1}^{-1};\ (s_{h-2},\ s_{h+1}) = s_{n-1}. \tag{46}$$

Betrachtet man in derselben Weise die Sache für $r = 3$, so findet man, dass der letzte Faktor von (45) nur für $i = h-2$ und $i = h-3$ von 1 verschieden sein kann; zu beachten ist hierbei, dass für $i = h-2$ beide der ersten Faktoren $= s_{n-1}^{-1}$ sind. In Übereinstimmung hiermit erhält man:

$$(s_{h-2},\ s_{h+2}) = s_{n-1}^{2};\ (s_{h-3},\ s_{h+1}) = s_{n-1}^{-1}. \tag{47}$$

In dieser Weise, durch Berechnungen für die niedrigsten r-Werte, lässt sich die Gültigkeit der allgemeinen Formel

$$(48) \qquad (s_{h-\mu}, s_{h+\nu}) = s_{n-1}^{\lambda_{\mu,\nu}}; \quad \lambda_{\mu,\nu} = (-1)^{\mu} \frac{\mu(\mu-1)\ldots(\mu-\nu+2)}{\underline{|\nu-1}}$$

erschliessen. Für $\mu \leqq \nu-2$ ist $\lambda_{\mu,\nu}=0$; es ist dies die Bedingung für die Vertauschbarkeit von $s_{h-\mu}$ und $s_{h+\nu}$. Für $\mu=\nu-1$ bekommt man in (48) rechts $s_{n-1}^{(-1)^{\mu}}$ und für $\mu=\nu$ $s_{n-1}^{(-1)^{\mu}\cdot\mu}$. Setzen wir $\mu=\nu+k$, so erhalten wir für $\lambda_{\mu,\nu}$ einen Ausdruck von der Gestalt:

$$(49) \qquad (-1)^{\mu} \frac{\mu(\mu-1)\ldots(k+2)}{\underline{|\mu-k-1}} = (-1)^{\mu} \frac{\mu(\mu-1)\ldots(\mu-k)}{\underline{|k+1}} = \frac{(-)^{\mu}\underline{|\mu}}{\underline{|\mu-k-1}\cdot\underline{|k+1}}.$$

Dass (48) und (49) in guter Übereinstimmung mit (44), (46) und (47) stehen, sieht man sofort. Die allgemeine Gültigkeit von (48) beweist man jetzt leicht durch einen Induktionsschluss. Setzt man $i=h-\mu$ und $i+r=h+\nu$, so geht (45) in

$$(50) \qquad (s_{h-\mu+1}, s_{h+\nu})\,(s_{h-\mu+1}, s_{h+\nu+1})\,(s_{h-\mu}, s_{h+\nu+1}) = 1$$

über, und man erhält (48) aus der Identität:

$$(51) \qquad \frac{\underline{|\mu-1}}{\underline{|\nu-1}\cdot\underline{|\mu-\nu}} + \frac{\underline{|\mu-1}}{\underline{|\nu}\cdot\underline{|\mu-\nu-1}} = \frac{\underline{|\mu}}{\underline{|\nu}\cdot\underline{|\mu-\nu}}.$$

Da sämtliche von 1 verschiedene Kommutatoren (s_i, s_k) in (48) angegeben sind, so hat man immer:

$$(52) \qquad (s_{h-\mu}, s_{h-\mu_1}) = 1 \quad (\mu, \mu_1 \geqq 0); \quad (s_{h+\nu}, s_{h+\nu_1}) = 1 \quad (\nu, \nu_1 > 0).$$

Die Frage ist nun, für welche h-Werte (s_h, s_{h+1}) von 1 verschieden sein kann. Eine Antwort hierzu ergibt sich durch die folgende Bemerkung. Für $\mu=h-1$, $\nu=h$ erhält man aus (48):

$$(s_1, s_{2h}) = s_{n-1}^{(-1)^{h-1}}.$$

Eine Folgerung hiervon ist $2h<p$. Wäre nämlich $2h>p$, so würde man auf eine ähnliche Fragestellung wie in der vorhergehenden Nummer kommen. Es liesse sich dann s_{2h} in ein Produkt von p^{ten} Potenzen von $s_{2h-1}, s_{2h-2}, \ldots$ und s_{2h-p+1} überführen. Hieraus folgert man für (s_1, s_{2h}) ein Produkt, dessen Glieder p^{te} Potenzen von (s_1, s_{2h-1}), (s_1, s_{2h-2}), $\ldots$ und (s_1, s_{2h-p+1}) sind. Man bekommt also $(s_1, s_{2h})=1$, was der Voraussetzung widerspricht. *Es bleiben mithin für* $(s_h, s_{h+1}) \neq 1$ *nur die* $\frac{p-1}{2}$ *Möglichkeiten* $h=1, 2, \ldots \frac{p-1}{2}$ *übrig.* Allgemeiner hat man $(s_l, s_m)=1$ für $l+m>p$. Für $\lambda_{\mu,\nu} \neq 0$ in (48) wird ja $\mu \geqq \nu-1$ erfordert, woraus $l+m=h-\mu+h+\nu \leqq 2h+1 \leqq p$ folgt.

Wir ersetzen jetzt (42) mit der allgemeineren Relation

$$(s_h,\ s_{h+1}) = s_{n-i}, \tag{53}$$

Zunächst bekommen wir in Analogie mit den Resultaten der vorhergehenden Nummer:

$$(s_h,\ s_{h+m}) = s_{n-i+m-1} \quad (m = 1,\ 2,\ \ldots\ i). \tag{54}$$

Der Einfachheit halber nehmen wir an, es gehöre s_{n-i} zum Zentrum von G_1. Mit Ausgangspunkt von (53) bekommen wir dann:

$$(s_{h-\mu},\ s_{h+\nu}) = s_{n-i}^{\lambda_{\mu,\nu}}, \tag{55}$$

wo $\lambda_{\mu,\nu}$ dieselbe Bedeutung wie in (48) hat. Wenn man allgemeiner von (54) ausgeht, so ergibt sich:

$$(s_{h-\mu},\ s_{h+\nu+m}) = s_{n-i+m}^{\lambda_{\mu,\nu}} \quad (m = 0,\ 1,\ \ldots\ i-1). \tag{55_1}$$

Hier bedeuten (55) und (55_1) nur einzelne Beiträge zu den Kommutatorn links. Führt man dieselben zusammen, so ergibt sich:

$$(s_{h-\mu},\ s_{h+\nu}) = \prod_{m=0}^{i-1} s_{n-i+m}^{\lambda_{\mu,\nu-m}}. \tag{56}$$

Man beachte hierbei, dass $\lambda_{\mu,\nu} = 0$ für $\nu \leqq 0$. Sucht man $(s_1,\ s_{2h+i-1})$, so erhält man hier nur einen Faktor, für welchen $\mu = h-1$, $\nu = h$ und $m = i-1$. Als Resultat bekommt man:

$$(s_1,\ s_{2h+i-1}) = s_{n-1}^{(-1)^{h-1}}. \tag{57}$$

Da, wie oben bewiesen wurde, s_1 und s_p mit einander vertauschbar sein müssen, so folgt hieraus $2h+i-1 < p$. Man hat also $i \leqq p-2h$. Die Anzahl der möglichen Kombinationen von h und i für die Gruppen der ersten Stufe ist also:

$$p-2+p-4+\cdots+1 = \left(\frac{p-1}{2}\right)^2. \tag{58}$$

Da $\mu \geqq \nu-1$, so hat man:

$$h-\mu+h+\nu+i-1 \leqq 2h+i \leqq p.$$

Hieraus folgt, dass, falls s_l und s_m mit einander nicht vertauschbar sind, so gilt auch hier $l+m \leqq p$.

13. Den Inbegriff der Gruppen G, welche zu einem und demselben Systeme von Kommutatoren für die Operationen der Untergruppe G_1 gehören, bezeichnen wir als *eine Gruppenfamilie.* Unsere nächste Aufgabe soll nun sein klarzulegen, wie viele

Gruppen von den drei besonderen Hauptarten eine in solcher Weise definierte Familie enthält. Nach Nr. 3 findet man die unterscheidenden Merkmale für die drei Hauptarten in den verschiedenen Möglichkeiten für s^p. Eine Gruppe von Diederart wird dadurch charakterisiert, dass immer $s^p = 1$. Hier sind die Bestimmungsgrössen schon vollständig festgelegt, und *es gibt in einer Familie nur eine Gruppe von dieser Hauptart.*

Wie wir gefunden haben, werden die Gruppen von dizyklischer Art, ebenso wie diejenigen von Diederart, durch $\beta \equiv 0$ im (13_1) charakterisiert; für die Gruppen der mittleren Hauptart gilt dagegen $\beta \not\equiv 0$. Hierin liegt ja auch der Grund dafür, dass die Gruppen von dizyklischer Hauptart sich dadurch von denjenigen der mittleren Hauptart unterscheiden, dass bei ihnen $s^p = (s\,s_1)^p = (s\,s_1^2)^p = \cdots = (s\,s_1^{p-1})^p$. Bei dem dizyklischen Falle nehmen wir an, es sei $s^p = s_{n-1}^{\varkappa}$. Die Frage gilt, in welche Werte der Exponent $\varkappa$ bei solchen Transformationen der Gruppe übergeführt werden kann, welche die Kommutatoren (s_i, s_k) ungeändert lassen. Die Transformationen der Gruppe werden durch die Substitutionen für die erzeugenden Elemente s und s_1 bestimmt. Für unseren Zweck genügt es mit den Substitutionen

$$\bar{s} = s^a; \qquad \bar{s}_1 = s_1^{a_1} \tag{59}$$

Man bekommt hieraus:

$$\bar{s}_2 = s_2^{a\,a_1}; \quad \ldots\ \bar{s}_h = s_h^{a^{h-1}a_1}\ \ldots; \quad \bar{s}_{h+1} = s_{h+1}^{a^h a_1}\ \ldots; \quad \ldots\ \bar{s}_{n-1} = s_{n-1}^{a^{n-2}a_1}. \tag{60}$$

In (60) sind rechts nur die Anfangsfaktoren, welche die eigentlich wichtigen sind, ausgeschrieben. Man hat $\bar{s}^p = s_{n-1}^{\varkappa a}$. Aus der Forderung $\bar{s}^p = \bar{s}_{n-1}^{\varkappa} = s_{n-1}^{\varkappa a^{n-2}a_1}$ folgt also die Bedingung:

$$a^{n-3}a_1 \equiv 1 \pmod{p}. \tag{61}$$

Ist nun $(\bar{s}_h, \bar{s}_{h+1}) = \bar{s}_{n-i}$, so ergibt sich hieraus eine zweite Bedingung. Man hat ja:

$$(\bar{s}_h, \bar{s}_{h+1}) = (s_h, s_{h+1})^{a^{2h-1}a_1^2} = s_{n-i}^{a^{2h-1}a_1^2}; \quad \bar{s}_{n-i} = s_{n-i}^{a^{n-i-1}a_1}.$$

Hieraus bekommen wir:

$$a_1 \equiv a^{n-2h-i} \pmod{p}. \tag{62}$$

Durch Kombination von (61) und (62) ergibt sich:

$$a^{2n-2h-i-3} \equiv 1 \pmod{p}. \tag{63}$$

Für die Anzahl der Lösungen von (63) hat man die Bezeichnung $(p-1,\ 2n-2h-i-3)$. Wie jetzt leicht zu verstehen ist, kann der Exponent $\varkappa$ für eine und dieselbe Gruppe

der ersten Stufe mit $(s_h, s_{h+1}) = s_{n-i}$ und $s^p = s_{n-1}^{\varkappa}$ $\frac{p-1}{(p-1,\, 2n-2h-i-3)}$ verschiedene Werte annehmen.

Hieraus folgt $(p-1, 2n-2h-i-3)$ *als Anzahl der Gruppen dizyklischer Art in einer Familie der ersten Stufe.*

Es bleibt noch übrig die Anzahl der Gruppen von der mittleren Art in einer Familie zu bestimmen. Wie wir gefunden haben, unterscheidet sich diese Hauptart von den beiden anderen Hauptarten durch $\alpha \not\equiv 0$ in (13_1). Durch Kombination von (13_1) und (14) erhalten wir:

$$s^p (s s_1^{-1})^{-p} = s_{n-1}^{\alpha} = s_1 \prod_{h=1}^{p-1} s^{-h} s_1 s^h. \tag{64}$$

Ersetzen wir hier s mit $s s_1$, so ergibt sich:

$$(s s_1)^p s^{-p} = s_{n-1}^{\alpha}.$$

Hieraus folgt

$$(s s_1)^p (s s_1^{-1})^{-p} = s_{n-1}^{2\alpha}.$$

Nach derselben Methode bekommt man allgemeiner:

$$(s s_1^c)^p (s s_1^{c_1})^{-p} = s_{n-1}^{(c-c_1)\alpha}.$$

Wenn insbesondere in (64) $s_1^{a_1}$ *für* s_1 *substituiert wird, so würde man also als mittleres Glied* $s_{n-1}^{a_1 a}$ *erhalten.* Dieser Schlussweise gegenüber lässt sich einwenden, dass, falls in (64) $s s_1$ für s eingesetzt wird, so führt dies neue Faktoren im rechten Gliede mit sich. Durch eine nähere Untersuchung lässt sich jedoch nachweisen, dass diese Faktoren sich auf die Identität reduzieren lassen. Die fraglichen neuen Faktoren erhält man als Kommutatoren von s_1 mit $s_{h+1}, s_{h+2}, \ldots, s_{2h-1+i}$, wobei zu berücksichtigen ist, dass $2h-1+i<p$. Es lässt sich beweisen, dass diese Faktoren sich in p^{te} Potenzen von $s_{n-i}, s_{n-i+1}, \ldots s_{n-1}$ zusammenführen lassen und also ohne Einwirkung auf den Wert des Ausdruckes sind.

Wir führen auch hier die Substitutionen

$$\bar{s} = s^a; \quad \bar{s}_1 = s_1^{a_1}$$

ein und erinnern an die hieraus hergeleiteten Relationen:

$$\bar{s}_{n-1} = s_{n-1}^{a^{n-2} a_1}; \quad (\bar{s}_h, \bar{s}_{h+1}) = s_{n-i}^{a^{2h-1} a_1^2}. \tag{65}$$

Als Bedingung für $(\bar{s}_h, \bar{s}_{h+1}) = \bar{s}_{n-i}$ haben wir bereits nach (62)

$$a_1 \equiv a^{n-2h-i} \pmod{p}$$

erhalten. Mit $\bar{s}$, $\bar{s}_1$ als erzeugende Elemente muss in Analogie mit (64) eine Relation von der Gestalt:

$$\bar{s}_1 \prod_{h=1}^{p-1} \bar{s}^{-h} \bar{s}_1 \bar{s}^h = \bar{s}_{n-1}^{\alpha'} \tag{66}$$

gelten. Wir fragen nach den Bedingungen für die Gleichheit der Exponenten α und α'. Die Antwort hierzu findet man wohl am leichtesten, indem man die Einwirkungen der Substitutionen $\bar{s} = s^a$ und $\bar{s}_1 = s_1^{a_1}$ jede für sich in Betracht nimmt. Wird s ungeändert, so bekommt man als linkes Glied von (66):

$$s_1^{a_1} \prod_{h=1}^{p-1} s^{-h} s_1^{a_1} s^h.$$

Die Faktoren hier erhält man dadurch, dass man die entsprechenden Faktoren des letzten Gliedes von (64) auf die $a_1$te Potenz erhöht. Nach den an (64) anknüpfenden Entwicklungen stehen auch die vollständigen Produkte in demselben Verhältnis zu einander, und man bekommt als rechtes Glied $s_{n-1}^{a a_1}$. Wird andererseits s_1 ungeändert, so reduziert sich das linke Glied von (66) auf

$$s_1 \prod_{h=1}^{p-1} s^{-ah} s_1 s^{ah}.$$

Die Faktoren sind hier dieselben wie beim letzten Gliede von (64). Es wird nur ihre Reihenfolge geändert, indem jetzt jeder folgende Faktor erst nach a Schritten genommen wird. Will man die alte Reihenfolge wieder herstellen, so entstehen Kommutatoren. Diese treten aber in solcher Weise auf, dass ihre Wirkungen auf den Wert des Ausdruckes sich aufheben. Doch scheint der Beweis hierfür nicht ohne ziemlich umständliche Rechnungen ausgeführt werden zu können. Als Resultat ergibt sich also für das rechte Glied von (66):

$$\bar{s}_{n-1}^{\alpha'} = s_{n-1}^{a a_1}.$$

Für $\alpha' = \alpha$ bekommen wir mithin die Bedingung:

$$\bar{s}_{n-1}^{a} = s_{n-1}^{a a^{n-2} a_1} = s_{n-1}^{a a_1},$$

woraus man als eine Folgerung

$$a^{n-2} \equiv 1 \pmod{p} \tag{67}$$

erhält. Lässt sich (67) befriedigen, so gilt dasselbe für die frühere Bedingung (62), da über a_1 noch zu verfügen ist. Da man für die Anzahl der inkongruenten Lösungen von (67) $(p-1, n-2)$ hat, so kann α für dieselbe Gruppe $\frac{p-1}{(p-1, n-2)}$ wesentlich

verschiedene Werte annehmen. *Hieraus folgert man für die Gruppen der ersten Stufe, dass die Anzahl der Gruppen von der mittleren Art, welche in einer Familie eingehen,* $(p-1, n-2)$ *ist. Dieselbe Antwort gilt noch für die nullte Stufe, wo also* G_1 *eine Abelsche Gruppe bedeutet.*

14. Wir gehen jetzt zu Anwendungen der obigen Resultate auf spezielle Fälle über. Da es nach Nr. 2 Fälle gibt, in denen für $n=3$ die charakteristische Untergruppe G_1 fehlt, so nehmen wir an, es sei $n \geqq 4$. Zunächst betrachten wir den Fall, der durch eine Abelsche Untergruppe G_1 charakterisiert wird.[1] Für jede Ordnung p^n gibt es hier nur eine Familie. In dieser Familie hat man sowohl von Diederart als auch von dizyklischer Art blos eine Gruppe; eine Bedingung (62) kommt ja hier nicht vor. Die Anzahl der Gruppen von der mittleren Art ist dieselbe wie bei dem Falle der ersten Stufe oder $(p-1, n-2)$.

Die p-Gruppen von den Ordnungen p^4 und p^5 können wir als bekannt voraussetzen. Wir wollen nachweisen, wie man dieselben im Falle von maximaler Klasse mit Hilfe der obigen Betrachtungen herleiten kann. Für $n=4$ muss G_1 Abelsch sein, und es gibt mithin nur eine einzige Gruppenfamilie. Für p ungerade ist $(p-1, 2)=2$; die Anzahl der Gruppen von der mittleren Art ist also 2, und man bekommt insgesamt vier Gruppen.[2] Die Abweichungen zwischen den Fällen $p=3$ und $p>3$ finden jetzt leicht ihre natürliche Erklärung. So muss nach Nr. 6 für die Gruppe von Diederart s_1 für $p>3$ von der Ordnung p und für $p=3$ von der Ordnung 9 sein. Die übrigen Gruppen werden von BURNSIDE in der folgenden Weise zusammengestellt:

$$P^{p^2}=1,\ Q^p=1,\ Q^{-1}PQ=P^{1+p},\ R^{-1}PR=PQ,\ R^{-1}QR=Q,\ R^p=P^{\alpha p}.$$

Je nachdem $\alpha=0$, quadratischer Rest oder quadratischer Nichtrest ist, werden drei Typen mit den Bezeichnungen (XI), (XII) und (XIII) unterschieden. Es ist ohne weiteres ersichtlich, dass in unserer Darstellung s, s_1, s_2 und s_3 bzw. den Elementen P, R, Q und P^p bei BURNSIDE entsprechen. Von den drei obigen Typen muss eine von der dizyklischen Hauptart und die beiden anderen von der mittleren Hauptart sein. Es ist hier bemerkenswert, dass der Fall der dizyklischen Hauptart eine andere Bestimmung von α für $p>3$ und $p=3$ erfordert. Nach Nr. 6 ist ja für $p>3$ s_1 von der Ordnung p und für $p=3$ von der Ordnung 9, und man bekommt $\alpha=0$ für $p>3$ und $\alpha \neq 0$ für $p=3$. Für die beiden Gruppen von der mittleren Art soll dagegen nach Nr. 6 s_1 im allgemeinen von der Ordnung p^2 sein; eine Ausnahme hiervon gibt es

[1] Die zugehörigen Gruppen haben wir bereits in unserer Note „*Verwandte p-Gruppen*" hergeleitet.

[2] Sieh hierzu BURNSIDE, „*Theory of groups of finite order*" (1910, S. 145).

nur für $p=3$, wo die Ordnung von s_1 für eine von diesen Gruppen auf 3 herabsinkt. Für die Gruppen von der mittleren Art muss es nach unseren Auseinandersetzungen möglich sein s auch so zu wählen, dass $s^p=1$. In Übereinstimmung hiermit zeigt man leicht, dass für $p>3$ und $\alpha \neq 0$ der Exponent β sich so wählen lässt, dass $(PR^\beta)^p=1$ ist. Betreffend den Fall $p=3$ ist schon oben bemerkt, dass eine von den beiden Gruppen mit $\alpha \neq 0$ zur dizyklischen Hauptart gehört. Dass es für diese Gruppe keine Möglichkeit gibt, s so zu wählen, dass $s^3=1$, lässt sich durch die folgende Rechnung bestätigen. Für α haben wir hier die drei Möglichkeiten: $\alpha=0,\ 1,\ -1$. Mit Benutzung der Bezeichnungen von BURNSIDE erhalten wir:

$$(PR^{\pm 1})^3 = P\cdot R^{\pm 1} P R^{\mp 1}\cdot R^{\pm 2} P R^{\mp 2}\cdot R^{\pm 3} = P^2\cdot Q^{\mp 1} P Q^{\pm 1}\cdot P^{\alpha 3} = P^3\cdot P^{\pm 3}\cdot P^{\alpha\cdot 3}.$$

Für $\alpha=1$ erhält man hieraus $(PR)^3=P^9=1$, und die Gruppe ist von der mittleren Hauptart. Für $\alpha=-1$ hat man dagegen $(PR^{\pm 1})^3=P^{\pm 3}\neq 1$, und die Gruppe ist mithin von dizyklischer Art.

Wir wollen noch die Gruppen maximaler Klasse von der Ordnung p^5 bestimmen.[1] Hier hat man zwei Gruppenfamilien. Für eine von diesen ist G_1 Abelsch, und für die andere ist der Kommutator $(s_1, s_2)=s_4$ charakteristisch. In jeder Familie gibt es $(p-1, 3)$ Gruppen von der mittleren Art; man hat also für $p\equiv 1 \pmod 6$ drei derartige Gruppen, für $p\equiv -1 \pmod 6$ und für $p=3$ nur eine. In der Familie, für welche G_1 nicht Abelsch ist, erhält man $(p-1, 4)$ Gruppen dizyklischer Art, also vier für $p\equiv 1 \pmod 4$ und zwei für $p\equiv -1 \pmod 4$ sowie für $p=3$. Wie man sieht, ist die Anzahl der verschiedenen G_{p^5} von den Resteigenschaften von p in Bezug auf 12 abhängig. In der folgenden Übersicht stellen wir das Resultat zusammen, wobei die Anzahlen der Gruppen als Summen von Gruppen der drei Hauptarten herauskommen.

1) $p\equiv 1 \pmod{12}$.	$2+5+6=13$.
2) $p\equiv 5 \pmod{12}$.	$2+5+2=9$.
3) $p\equiv 7 \pmod{12}$.	$2+3+6=11$.
4) $p\equiv 11 \pmod{12}$ und $p\neq 3$.	$2+3+2=7$.

Sämtliche existierende 3-Gruppen maximaler Klasse können wir auch jetzt angeben. Man hat $(n\geqq 5)$ zwei Familien von solchen Gruppen. Die Resultate sind in völliger Übereinstimmung mit den soeben gegebenen für $n=5$. Gruppen von der mittleren Art erhält man in jeder Familie $(2, n-2)$, also eine oder zwei, je nachdem n ungerade

[1] Die Resultate stimmen mit den früher in anderer Weise hergeleiteten überein. Man sehe etwa SÉGUIER, *„Groupes abstraits"*, S. 148.

oder gerade ist. Für die zweite Familie bekommt man $(2, 2(n-3))=2$ Gruppen dizyklischer Art. *Die Gesamtzahl der 3-Gruppen maximaler Klasse ist somit* $2+3+2=7$ *für* n *ungerade und* $2+3+4=9$ *für* n *gerade.*

15. Die in der vorhergehenden Nummer untersuchten Gruppen G besitzen die gemeinsame Eigenschaft, dass die zugehörigen Kommutatorgruppen G_2 Abelsch sind. Wir wollen jetzt zu dem allgemeinen Fall mit Abelscher Untergruppe G_2 übergehen. Die von 1 verschiedene Operation (s_h, s_{h+1}) kann hier nur (s_1, s_2) sein. Zunächst gilt es die Anzahl der Gruppenfamilien festzustellen. Diese Anzahl fällt mit der Anzahl von Möglichkeiten für i in der Relation

$$(37_1) \qquad (s_1, s_2) = s_{n-i}$$

zusammen. Nach Nr. 12 wird letztere Anzahl durch $2+i \leqq p$ bestimmt. Für i hat man mithin die $p-2$ Möglichkeiten: $i=1, 2, \ldots p-2$, und für die Anzahl der Familien erhält man also $p-2$. Hierbei muss selbstverständlich vorausgesetzt werden, dass n hinreichend gross ist. Andererseits wissen wir bereits, dass $n-i \geqq 4$ sein muss. Für $i=p-2$ ist also $n \geqq p+2$. *Die vollständige Anzahl von* $p-2$ *Gruppenfamilien bekommt man also nur für* $n \geqq p+2$, *und für* $n=p+2-k$ $(0<k<p-2)$ *reduziert sich diese Anzahl auf* $p-2-k$.

Wir nehmen jetzt an, es sei $n \geqq p+2$. In Nr. 13 haben wir Ausdrücke für die Anzahlen von Gruppen der verschiedenen Hauptarten in einer Familie gegeben. Für Gruppen von der mittleren Hauptart war dieser Ausdruck $(p-1, n-2)$. Die Anzahl von solchen Gruppen ist also dieselbe für sämtliche Familien bei einem bestimmten n-Wert. Mit einer Periode von $p-1$ für n kehrt dieselbe Anzahl immer wieder; wenn n $p-1$ sukzessive Zahlen durchläuft, so verteilen sich die Anzahlen zu je $\varphi\left(\frac{p-1}{d}\right)$ auf den Teilern d von $p-1$.

Von der dizyklischen Hauptart haben wir eine Anzahl von $(p-1, 2n-2h-i-3)$ Gruppen in einer Familie gefunden. Da hier $h=1$, handelt es sich also um eine Anzahl von $(p-1, 2n-i-5)$ Gruppen. In diesem Falle wird die Anzahl von Gruppen ungeändert, wenn n um ein Vielfaches von $\frac{p-1}{2}$ vermehrt oder vermindert wird. Für n scheint also eine Periode von $p-1$ zu gelten, nach welcher dieselben Gruppen wieder auftreten. Betreffend die Gruppen dizyklischer Hauptart in einer Familie ist noch zu bemerken, dass ihre Anzahl gerade oder ungerade ist, je nachdem i ungerade oder gerade ist.

Spezielle Fälle kann man erhalten, indem man entweder für n oder für p be-

stimmte Werte einführt. Setzt man zunächst $n=6$, so erhält man als Anzahl von Gruppen der mittleren Art $(p-1, 4)$. Man bekommt mithin vier derartige Gruppen in einer Familie für $p\equiv 1 \pmod 4$ und zwei für $p\equiv -1 \pmod 4$. Als Anzahl von Gruppen dizyklischer Art ergibt sich $(p-1, 7-i)$, wo i die Werte 1 und 2 annehmen kann. Für $i=1$ bekommt man sechs Gruppen für $p\equiv 1 \pmod 6$ und zwei Gruppen für $p\equiv -1 \pmod 6$. Für $i=2$ erhält man fünf Gruppen für $p\equiv 1 \pmod 5$ und in allen anderen Fällen nur eine Gruppe.

Zuletzt wollen wir noch den Fall $p=5$ in Betracht nehmen. Man hat hier für i die drei Möglichkeiten $i=1, 2, 3$, und die Anzahl der Familien ist also drei. In jeder Familie bekommen $(4, n-2)$ Gruppen von der mittleren Hauptart, also eine für n ungerade, vier für $n\equiv 2 \pmod 4$ und zwei für $n\equiv 0 \pmod 4$. Es gibt in einer Familie $(4, 2n-i-5)$ Gruppen von der dizyklischen Hauptart. Für $i=1$ erhält man hieraus $(4, 2(n-3))$ Gruppen, also vier Gruppen für n ungerade und zwei Gruppen für n gerade; für $i=2$ bekommt man $(4, 2n-7)$ Gruppen, was nur eine Gruppe bedeutet, und für $i=3$ $(4, 2(n-4))$ Gruppen oder zwei für n ungerade und vier für n gerade. Wir wollen noch die vollständige Anzahl von 5-Gruppen für $n\geqq 7$ unter der Voraussetzung, dass G_2 aber nicht G_1 Abelsch ist, angeben. Diese Anzahl geben wir als eine Summe, wobei die Summanden sich auf den drei Hauptarten beziehen. Wie aus den obigen Entwicklungen hervorgeht, sind drei besondere Fälle zu berücksichtigen:

1) n ungerade; $\quad 3+7+3=13.$

2) $n\equiv 2 \pmod 4$; $\quad 3+5+12=20.$

3) $n\equiv 0 \pmod 4$; $\quad 3+7+6=16.$

16. Es ist unsere Absicht in einer späteren Mitteilung die vorhergehenden Untersuchungen wieder aufzunehmen und zum Abschluss zu bringen. Dabei wollen wir insbesondere den allgemeinen Fall behandeln, wo man mehr als einen Kommutator $(s_h, s_{h+1})+1$ hat. Doch erlauben wir uns bereits hier einige Bemerkungen betreffend das Hauptziel zu machen, zu welchem wir in den folgenden Entwicklungen streben. Die Eigenschaft, um welche es sich hier in erster Instanz handelt, ist eine Art von Periodizität. Es lässt sich nämlich sagen, dass dieselben Gruppen G_{p^n} maximaler Klasse wieder auftreten, wenn n um $p-1$ vergrössert oder vermindert wird. Diese Periodizität tritt natürlich nur dann deutlich hervor, wenn n eine gewisse Grösse ereicht hat. Für kleinere n-Werte erscheinen die Gruppen sozusagen in nicht völlig entwickelter Gestalt. Bei den hier unten folgenden Erörterungen wird vorausgesetzt, dass n eine geweisse Grösse erreicht hat.

Wir betrachten die $n-1$ Bereiche G_1-G_2, G_2-G_3, ... $G_{n-2}-G_{n-1}$, G_{n-1}, in welche G_1 nach Nr. 2 sich zerlegen lässt. Diese Bereiche lassen sich in drei Abteilungen einteilen: G_1-G_p, G_p-G_{n-p+2}, G_{n-p+2}. Die beiden letzten Abteilungen, also die Gruppe G_p, sind dadurch charakterisiert, dass sie immer zum Zentrum von G_1 gehören. Für die letzte Abteilung G_{n-p+2} gilt es, dass sie immer die Kommutatorgruppe von G_1 als Untergruppe enthalten muss. Die Kommutatoren, welche von 1 verschieden sind, gehören also zur dritten Abteilung und werden in der ersten Abteilung erzeugt. Die mittlere Abteilung G_p-G_{n-p+2}, welche mit n zunimmt oder abnimmt, spielt für die möglichen Gruppen eine mehr indifferente Rolle. Wenn wir hier von periodisch wiederkehrenden Gruppen sprechen, so wird von dieser Abteilung abgesehen. Unser Hauptergebnis ist nun eine Verallgemeinerung von den Resultaten, welche wir für $p=3$ in Nr. 14 (sowie für $p=2$ in der einleitenden Nummer) gegeben haben. Wenn man n mit $p-1$ erhöht, so treten also dieselben Gruppen wieder auf, und die Gruppen maximaler Klasse verteilen sich mithin auf $p-1$ Systeme, den $p-1$ ganzzahligen Reihen mit der Periode $p-1$ für n entsprechend. Vorausgesetzt wird hier $n-p+2 \geqq p$ oder $n \geqq 2(p-1)$. Doch ist zu bemerken, dass, wie aus der einleitenden Nummer und Nr. 14 hervorgeht, das periodische Auftreten der Gruppen für $p=2$ und $p=3$ erst mit $n=4$ und $n=5$ beginnt.

Da G_p zur Zentralgruppe von G_1 gehört, so bekommt man durch Kombination eines beliebigen Elementes von G_1-G_p mit G_p stets eine Abelsche Gruppe. Insbesondere ist $G_{\frac{p+1}{2}}$ immer eine Abelsche Gruppe.

Es drängt sich jetzt die Frage auf, in wie weit der Satz von dem periodischen Wiederauftreten der p-Gruppen maximaler Klasse für n-Werte, welche (mod $p-1$) kongruent sind, sich verallgemeinern lässt, so dass er auch für andere Klassen $n-h$ ($h=2, 3, \ldots$) Gültigkeit hat, wobei man entweder an die p-Gruppen ganz allgemein oder nur an diejenigen mit den niedrigsten h-Werten denken kann. Hierzu ist zunächst zu bemerken, dass ohne Schwierigkeit aus einer G_{p^n} von der Klasse $n-1$ sukzessive Gruppen von den Ordnungen p^{n+1}, p^{n+2}, ... mit ungeänderter Klasse $n-1$ sich konstruieren lassen, für welche die fragliche Periodizität gültig bleibt. Die Frage ist nun, ob sämtliche p-Gruppen von den Ordnungen p^{n+h} ($h=1, 2, 3, \ldots$) und der Klasse $n-1$ sich in solcher Weise aus den Gruppen G_{p^n} von der Klasse $n-1$ herleiten lassen. Für die etwaigen Ausnahmen von der besprochenen Möglichkeit steht die Frage betreffend die hier in Rede stehende Periodizität noch unentschieden.