# ENTWICKLUNGEN ZUR TRANSFORMATION FÜNFTER UND SIEBENTER ORDNUNG EINIGER SPECIELLER AUTOMORPHER FUNCTIONEN

VON

ROBERT FRICKE
in GÖTTINGEN.

In den nachfolgenden Zeilen erlaube ich mir den Lesern der Acta mathematica einen Beitrag zur Theorie jener eindeutigen Functionen einer complexen Veränderlichen vorzulegen, welche von einem Teile der dabei interessierten Mathematiker als »automorphe Functionen» bezeichnet werden. Es sei gestattet, hier am Eingang der Kürze halber nur auf die grossen Abhandlungen Bezug zu nehmen, welche Poincaré in den ersten Bänden der vorliegenden Zeitschrift über die gedachten Functionen veröffentlichte; es lassen sich nämlich eben von diesen Abhandlungen aus die für das Folgende massgeblichen Gesichtspunkte von vornherein am deutlichsten angeben.

Es scheint, dass der von Poincaré gewählte Eingang in die Theorie wenigstens der »eindeutigen» automorphen Functionen der unmittelbarste ist; ich meine jene Methode, die Untersuchung automorpher Functionen auf das vorangegangene Studium der zugehörigen Gruppen linearer Substitutionen der Veränderlichen zu basieren, diese Gruppe selbst aber eben durch »Angabe ihrer Substitutionen» als definiert anzusehen. Bei jenem ersten Forschungsgange hatte nun Poincaré nur est ganz nebenher das Problem berührt, wie man Gruppen unserer Art etwa durch erschöpfende Angabe der Bildungsgesetze ihrer Substitutionscoefficienten thatsächlich herzustellen vermöchte; vielmehr galt es in erster Linie, die Summe der allgemein möglichen Folgerungen aus der Angabe einer fraglichen Gruppe zu ziehen, unangesehen alle jene Ergebnisse, die aus dem besonderen Bildungsgesetz der einzelnen Gruppe entspringen mögen.

In Anbetracht dieser letzteren Verhältnisse muss das Beispiel der Modulfunctionen vorbildlich sein. Weil nämlich dort die Gruppe von dem bekannten einfachen Bildungsgesetze vorlag, war es möglich für die zugehörigen Functionen jene weitverzweigte Theorie durchzubilden, welche den besonderen Namen der Theorie der elliptischen Modulfunctionen trägt. Hierüberhinaus ist es das Bestreben des Verfassers gewesen, auch für andere Gruppen von einem fest gefügten arithmetischen Bildungsgesetze auszugehen, und es sind in dieser Hinsicht eine Reihe von Ansätzen in den neueren Bänden der Mathematischen Annalen (von Band 38 an) sowie in den Göttinger Nachrichten vom vorigen Jahre veröffentlicht.

In dem vorliegenden Aufsatze wollte ich die bezeichneten Ansätze in das functionentheoretische Gebiet hinein verfolgen, um solcherweise ihre Tragweite nach dieser Richtung hin darzuthun. Dabei schränke ich mich von vornherein auf denkbar einfache Verhältnisse ein, um einerseits die darzulegenden Gesichtspunkte an möglichst elementaren Vorstellungen zu entwickeln, und um andererseits unmittelbaren Anschluss an gewisse bekannte functionentheoretisch-geometrische Entwicklungen zu gewinnen. In der That werden wir späterhin Gelegenheit finden, die Resultate älterer Arbeiten von KLEIN und GORDAN für unsere Zwecke zu benutzen, Arbeiten, die einmal die Ikosaedertheorie sodann die bei der Transformation 7^ter^ Ordnung der elliptischen Functionen auftretende Gruppe 168^ster^ Ordnung betreffen. Die näheren Literaturangaben sollen überall im Laufe des nachfolgenden Textes nachgetragen werden.

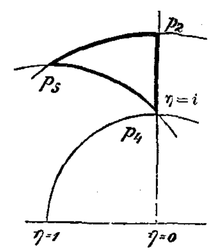
# ERSTER TEIL.

## Entwicklungen über die Dreiecksfunctionen von den Verzweigungen (2, 4, 5), (2, 5, 6).

### § 1. *Das arithmetische Bildungsgesetz der zum Kreisbogendreieck* (2, 4, 5) *gehörenden Gruppe.*

In der Ebene der complexen Veränderlichen $\eta$ sei ein von Kreisbogen begrenztes Dreieck gezeichnet, welches die Winkel $\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{5}$ darbietet; die Ecken des Dreiecks nennen wir in sofort verständlicher Zuordnung $p_2, p_4, p_5$, und dem entsprechend mögen die Seiten $(p_2, p_4)$, $(p_4, p_5)$, $(p_5, p_2)$ heissen. Das Dreieck habe die in Fig. 1 gezeichnete Lage; es soll also der Punkt $p_4$ mit $\eta = i$ coincidieren, während die Seite $(p_4, p_2)$ auf die imaginäre Axe oberhalb $\eta = i$ zu liegen kommt. Das in Rede stehende Kreisbogendreieck soll kurz als Dreieck (2, 4, 5) bezeichnet werden; es ist in der Figur zugleich so angenommen, dass seine drei begrenzenden Kreise bei Verlängerung die reelle $\eta$-Axe unter rechten Winkeln schneiden.

Fig. 1.




Auf das beschriebene Dreieck (2, 4, 5) wenden wir jetzt das von SCHWARZ ausgebildete Symmetrieprincip [1] an und gewinnen eine bekannte Dreieckseinteilung der oberhalb der reellen Axe gelegenen »positiven $\eta$-Halbebene». Die Dreiecke sind abwechselnd durch indirecte und directe Kreisverwandtschaft [2] mit einander aequivalent, und die li-

[1] Wegen des Näheren über diesen Gegenstand darf ich auf die von KLEIN und mir verfassten *Vorlesungen über elliptischen Modulfunctionen,* I, pag. 85 ff. verweisen; ich citiere dieses Werk in der Folge kurz als M. I oder M. II je nach dem gerade gemeinten Bande.

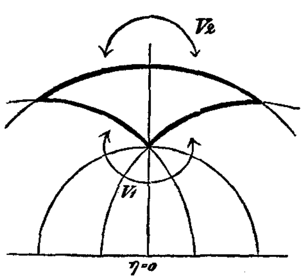
[2] M. I, pag. 88.

nearen $\eta$-Substitutionen, welche diese Kreisverwandtschaften analytisch darstellen, bilden die Gruppe, die hier näher untersucht werden soll.

Wollen wir zuvörderst nur mit directen Kreisverwandtschaften zu thun haben, so müssen wir etwa dem Dreieck der Fig. 1 sein durch Symmetrie längs der imaginären Axe entworfenes Spiegelbild anfügen; es entspringt solchergestalt ein »Doppeldreieck», welches wir $\Delta_0$ nennen. Indem wir je zwei im gleichen Sinne neben einander liegende Dreiecke der Halbebenenteilung zu Doppeldreiecken zusammenfügen, mögen wir die letzteren in irgend einer Folge $\Delta_0, \Delta_1, \Delta_2, \ldots$ nennen. Die linearen $\eta$-Substitutionen, welche $\Delta_0$ in die übrigen Doppeldreiecke transformieren, bilden die in Rede stehende Gruppe, welche $\Gamma(2, 4, 5)$ heisse; ihre Substitutionen, welche durchgehends die Gestalt $\eta' = \frac{\alpha\eta + \beta}{\gamma\eta + \delta}$ mit reellen $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ einer positiven Determinante $\alpha\delta - \beta\gamma$ haben, sollen symbolisch durch $V_0 = 1$, $V_1, V_2, \ldots$ bezeichnet werden, und zwar transformiere $V_k$ das Dreieck $\Delta_0$ in $\Delta_k$.

Als Fundamentalpolygon der Gruppe in KLEIN's Sinne[1] kann das Doppeldreieck $\Delta_0$ angenommen werden. Die Randcurven sind dabei so zusammengeordnet wie Fig. 2 angiebt; die Gruppe $\Gamma(2, 4, 5)$ lässt sich demgemäss aus zwei Substitutionen erzeugen, und es seien dies, wie schon in Fig. 2 angedeutet, die Substitutionen $V_1$ und $V_2$. Beide sind elliptisch, und sie haben die Perioden 4 bez. 2;[2] die ausgerechneten Gestalten dieser erzeugenden Substitutionen der Gruppe sind aber:

Fig. 2.




$$(1) \qquad (V_1)\ \eta' = \frac{\eta + 1}{-\eta + 1}, \qquad (V_2)\ \eta' = -\frac{\frac{1+\sqrt{5}}{2} + \sqrt{\frac{-1+\sqrt{5}}{2}}}{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} - \sqrt{\frac{-1+\sqrt{5}}{2}}\right)\eta}.$$

---

[1] M. I, pag. 183; nach POINCARÉ's Benennung »polygone générateur», cf. Acta mathematica, Bd. 1, pag. 16.

[2] M. I, pag. 165.

Um diese Angaben zu belegen, bemerke man erstlich, dass die Substitutionscoefficienten hier überall reell sind, und dass $V_1$, wie es sein muss, $\eta = i$ zum Fixpunkt [1] hat, $V_2$ aber einen auf der imaginären Axe oberhalb $\eta = i$ gelegenen Punkt. Durch diese Lagenbeziehungen, sowie andrerseits durch die Forderungen, dass die Substitutionen $V_1$, $V_2$ und $V_1 V_2$ die Perioden 4, 2 und 5 haben müssen, sind, wie man leicht ins einzelne nachweist, $V_1$ und $V_2$ gerade in der unter (1) angegebenen Gestalt eindeutig bestimmt.

Aus der Gestalt der erzeugenden Substitutionen suchen wir nun auf das Bildungsgesetz der ganzen Gruppe zu schliessen. Hier lehrt nun erstlich $V_2$, dass sich die Substitutionscoefficienten aus *ganzen algebraischen Zahlen desjenigen reellen quadratischen Zahlkörpers* [2] aufbauen werden, dessen Basis $\left[1, \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right]$ ist; dabei ist jedoch noch die *Quadratwurzel* aus der speciellen ganzen Zahl $P = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$ dieses Körpers adjungiert zu denken. Die Substitutionscoefficienten werden somit die Gestalt darbieten:

$$(2) \qquad \alpha = A + B\sqrt{P}, \qquad \beta = C + D\sqrt{P}, \quad \ldots,$$

wenn hierbei $A, B, C, D$ *ganze* Zahlen des genannten Körpers sind.

Aus der Gestalt von $V_1$ und $V_2$ wollen wir noch ein zweites Gesetz für die Coefficienten $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ der zu betrachtenden Substitutionen ableiten. Nennen wir für den Augenblick die beiden reellen Zahlen $(A \pm B\sqrt{P})$ conjugiert, *so sollen $\alpha$ und $\delta$, sowie $\beta$ und $-\gamma$ jeweils conjugiert sein.* Von diesem, bei $V_1$ und $V_2$ thatsächlich vorliegenden Bildungsgesetze zeigt man nun durch einfache Ausrechnung, dass es bei Combination von Substitutionen unzerstörbar ist: *Alle Substitutionen von $\Gamma(2, 4, 5)$ werden somit den Typus:*

$$(3) \qquad \eta' = \frac{(A + B\sqrt{P})\eta + (C + D\sqrt{P})}{(-C + D\sqrt{P})\eta + (A - B\sqrt{P})}$$

*aufweisen müssen.* [3]

---

[1] M. I, pag. 164; »point double» bei POINCARÉ.

[2] Wegen der zu benutzenden arithmetischen Begriffsbestimmungen vergleiche man die »Allgemeine Zahlentheorie» DEDEKIND's im Supplement XI von DIRICHLET's *Vorlesungen über Zahlentheorie,* (3[te] Auflage).

[3] Die allgemeine Tragweite des in der Substitutionsform (3) liegenden Ansatzes findet man in den Mathem. Annalen, Bd. 42, pag. 564 discutiert.

Aber es gehören noch keineswegs alle Substitutionen (3), die wir zu bilden vermögen, der Gruppe $\Gamma(2, 4, 5)$ an; vielmehr treten neue Einschränkungen ein, und diese letzteren haben wir im Anschluss an den Modul oder die Determinante der Substitution:

$$\alpha\delta - \beta\gamma = A^2 - PB^2 + C^2 - PD^2 \tag{4}$$

zu beschreiben. Die in der Folge zu brauchenden Zahlwerte der Verbindung (4) sollen auf 1, 2 und 4 eingeschränkt bleiben, und wir sprechen demgemäss von *unimodularen* bez. *duomodularen* und *quadrimodularen* Substitutionen (3). Der arithmetische Charakter der anfänglich vorgelegten Gruppe ist dann in einfachster Weise dahin zu formulieren, *dass sie aus allen duo- und quadrimodularen Substitutionen* (3) *besteht.* Wir wollen die so gemeinte Gruppe als die arithmetisch definierte $\Gamma(2, 4, 5)$ bezeichnen und ihre Identität mit der aus $V_1$, $V_2$ zu erzeugenden Gruppe von dreieckigem Fundamentalbereich nun im einzelnen nachweisen.

## § 2. *Identität der arithmetisch definierten* $\Gamma(2, 4, 5)$ *mit der Gruppe des Kreisbogendreiecks* $(2, 4, 5)$.

Das System aller unimodularen Substitutionen (3) § 1, welche aus ganzen Zahlen $A, B, C, D$ des öfter genannten Körpers unter der Voraussetzung $P = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}$ gebildet werden können, möge kurz durch $\Sigma_1$ bezeichnet werden, und wir brauchen weiter in sofort verständlichem Sinne die Bezeichnungen $\Sigma_2$ und $\Sigma_4$. Das System $\Sigma_4$ der quadrimodularen Substitutionen wird $\Sigma_1$ in sich enthalten, nur dass jede unimodulare Substitution mit 2 erweitert erscheint. Dass das System $\Sigma_1$ eine Gruppe vorstellt, ist unmittelbar evident; denn hier multiplicieren sich bei Combination zweier Substitutionen deren Determinanten. *Aber auch das System* $\Sigma_4$ *stellt eine Gruppe dar,* wo wir dann nach jedesmaliger Combination zweier Substitutionen den gemeinsamen Factor 2 aus allen vier Coefficienten müssen fortheben können, um solchergestalt zu einer quadrimodularen Substitution zurückzugelangen. Zum Beleg dieser Behauptung muss eine kurze arithmetische Betrachtung vorausgesandt werden.

Die Bedingung der quadrimodularen Substitutionen:

$$A^2 - PB^2 + C^2 - PD^2 = 4$$

liefert für die ganzen Zahlen $A, B, C, D$ der einzelnen Substitution die nachfolgende Congruenz:

$$(1) \qquad A^2 + C^2 \equiv P(B^2 + D^2), \ (\text{mod. } 4).$$

Es giebt nun im quadratischen Zahlkörper modulo 2 vier incongruente Zahlen, und also sind unter den 16 modulo 4 incongruenten Zahlen nur vier mod. 4 mit Quadraten congruent. Man wird sie als quadratische Reste von 4 bezeichnen und findet unter Gebrauch der Abkürzung:

$$a + b\frac{1+\sqrt{5}}{2} = (a, b)$$

für dieselben $(0, 0), (1, 1), (1, 0), (2, 3)$. Von hieraus berechnet man sofort weiter, dass unter den 16 Resten mod. 4 nur die zehn

$$(2) \qquad (0,0),(0,2),(2,0),(2,2),(1,0),(1,1),(2,1),(2,3),(3,0),(3,3)$$

mod. 4 mit der Summe zweier Quadrate congruent sind. Multipliciert man diese zehn Zahlen mit $P \equiv (-1, 1)$ einzeln, so kommen einmal die vier ersten Zahlen (2) wieder zum Vorschein, ausserdem aber gerade die sechs in der Reihe (2) noch fehlenden Reste modulo 4. Zufolge (1) wird man sonach $B^2 + D^2$ nur mit einer der vier Zahlen $(0, 0), (0, 2), (2, 0), (2, 2)$ mod. 4 identificieren können, worauf dann $P(B^2+D^2)$ d. h. $A^2+C^2$ wieder mit einer von diesen vier Zahlen congruent wird. Die vier ersten Zahlen (2) entstanden aber durch Verdoppelung eines quadratischen Restes von 4, und also ergiebt sich: *Bei den quadrimodularen Substitutionen bestehen immer die Congruenzen:*

$$(3) \qquad A \equiv C, \qquad B \equiv D, \ (\text{mod. } 2),$$

*und es giebt insgesamt nur vier modulo 2 incongruente quadrimodulare Substitutionen* (3) § 1.

Mögen nun die beiden quadrimodularen $V$ und $V'$ durch Combination $V'' = VV'$ liefern, so wird man, um $V''$ auf die Determinante 4 zurückzubringen, die vier Coefficienten durch 2 teilen. Ordnen wir alsdann

$V''$ wieder in der Gestalt (3) § 1 an, so haben wir für die zu $V''$ gehörenden $A''$, $B''$, $C''$, $D''$, die entweder ganze Zahlen oder Hälften solcher sind, die Gleichungen:

$$(4)\qquad \begin{cases} 2A'' = AA' + PBB' - CC' + PDD', \\ 2B'' = AB' + BA' + CD' - DC', \\ 2C'' = AC' + PBD' + CA' - PDB', \\ 2D'' = AD' + BC' - CB' + DA'. \end{cases}$$

Nun aber sind für $V$ und $V'$ die Congruenzen (3) in Gültigkeit, und also folgt aus (4) ohne weiteres, dass $A''$, $B''$, $C''$, $D''$ *ganze* Zahlen des quadratischen Körpers sind. $V''$ gehört somit wieder dem Systeme $\Sigma_4$ an, und dieses bildet also in der That eine Gruppe.

Die aus den quadrimodularen Substitutionen bestehende Gruppe wird durch die in § 1 mit $V_1$ bezeichnete Substitution in sich selbst transformiert,[1] indem man ohne Mühe die Gleichung:

$$V_1^{-1} V V_1 = \begin{pmatrix} A - D\sqrt{P}\,, & C + B\sqrt{P} \\ -C + B\sqrt{P}\,, & A + D\sqrt{P} \end{pmatrix}$$

verificiert, wo übrigens nur die vier Coefficienten der Substitution angegeben sind. Fügen wir sonach der Gruppe der quadrimodularen $V$ noch alle diejenigen Substitutionen hinzu, welche durch Combination ihrer $V$ mit $V_1$ in der Gestalt $V' = VV_1$ entspringen, so gelangen wir zu einer umfassenderen Gruppe, in welcher die aus dem System $\Sigma_4$ bestehende Gruppe eine ausgezeichnete Untergruppe des Index 2 ist.[2] Nun genügt aber die duomodulare Substitution $V_1$ ihrerseits auch der Bedingung (3). In den vier Coefficienten von $V' = VV_1$ tritt somit zufolge (4) der gemeinsame Factor 2 auf, nach dessen Forthebung wir in $V'$ wieder eine ganzzahlige *duomodulare* Substitution gewinnen. Auf der anderen Seite lässt sich *jedes* duomodulare $V'$ in der eben benutzten Gestalt $VV_1$ darstellen; denn $V'V_1$ ist quadrimodular und auch $V_1^2$ findet sich in $\Sigma_4$. *Die eben aufgestellte*

---

[1] M. I, pag. 261.
[2] M. I, pag. 308 ff.

*Gruppe, die $\Sigma_4$ umfasst, besteht also aus $\Sigma_4$ und $\Sigma_2$ und liefert somit nach der Verabredung von § 1 die »arithmetisch definierte» Gruppe:*

$$\Gamma(2, 4, 5) = \Sigma_2 + \Sigma_4.$$

Es ist nun weiter leicht beweisbar, *dass die Gruppe der duo- und quadrimodularen Substitutionen* (3) § 1 *eigentlich discontinuierlich ist.*[1] Man muss zu diesem Ende von der zu Grunde liegenden Gleichung:

$$(5) \qquad A^2 - PB^2 + C^2 - PD^2 = 2 \text{ oder } 4$$

zu derjenigen »conjugierten» Gleichung übergehen:

$$(6) \qquad A'^2 - P'B'^2 + C'^2 - P'D'^2 = 2 \text{ oder } 4,$$

die einfach durch Zeichenwechsel von $\sqrt{5}$ aus (5) hervorgeht. Hier ist nun der Umstand besonders folgenreich, dass $P' = -\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ negativ und dem absoluten Werte nach grösser als 1 ist. Die Folge ist, dass bei den Substitutionen unserer Gruppe nur solche Zahlen $A, B, C, D$ zur Geltung kommen, deren conjugierte Zahlen absolut $< 2$ sind. Nach einem bekannten Satze der Zahlentheorie[2] giebt es aber nur eine *endliche* Anzahl ganzer Zahlen eines Körpers $n^{\text{ten}}$ Grades, die selbst samt ihren conjugierten Zahlen, absolut genommen, eine festgesetzte endliche Grenze nicht überschreiten. Es kann somit nur eine *endliche* Anzahl von Substitutionen in der Gruppe geben, deren vier Coefficienten dem absoluten Betrage nach eine beliebig zu wählende endliche Constante nicht übersteigen. Solches aber wäre unmöglich, wenn infinitesimale Substitutionen in der Gruppe vorkämen, und also ist nach der eben citierten Abhandlung POINCARÉ's die eigentliche Discontinuität der Gruppe evident.

Um das Fundamentalpolygon der Gruppe zu gewinnen, benutze ich eine Operationsweise, die bei ähnlichen Gelegenheiten immer eine bedeutende Erleichterung der Überlegung bewirkt. Die fragliche Massnahme besteht darin, dass die Gruppe durch Zusatz sogenannter Substitutionen zweiter Art, die indirecte Kreisverwandtschaften bedeuten, erweitert wird.[3]

[1] Siehe POINCARÉ, Acta mathematica, Bd. 3, pag. 57 ff.

[2] Siehe DIRICHLET-DEDEKIND, a. a. O., pag. 556.

[3] Siehe SCHWARZ in Bd. 70 des CRELLE'schen Journals, pag. 105, oder M. I, pag. 82 ff.

Hierher gehören vor allem die Transformationen durch reciproke Radien an Kreisen der $\eta$-Ebene, Operationen, die kurz als Spiegelungen bezeichnet werden. Bedeutet $\bar{\eta}$ der zu $\eta$ conjugiert complexe Wert, so liefert der Übergang von $\eta$ zu $\eta' = -\bar{\eta}$ die Spiegelung an der imaginären Axe. Indem wir diese besondere Spiegelung den bisherigen Substitutionen »erster» Art hinzufügen, gelangen wir zu einer *erweiterten Gruppe, wobei die duo- und quadrimodularen Substitutionen zweiter Art:*

$$\eta' = \frac{(A + B\sqrt{P})\bar{\eta} - (C + D\sqrt{P})}{(-C + D\sqrt{P})\bar{\eta} - (A - B\sqrt{P})} \tag{7}$$

*als neu hinzukommen;* es mögen diese Substitutionen kurz $\overline{V}$ genannt werden.

Von besonderer Wichtigkeit sind unter den Substitutionen (7) diejenigen, welche Spiegelungen darstellen; die Bedingung, damit dies vorliegt, ist $B = 0$,[1] und der zugehörige Spiegelkreis ist, wenn wir $\eta = x + iy$ setzen, gegeben durch:

$$(C - D\sqrt{P})(x^2 + y^2) + 2Ax - (C + D\sqrt{P}) = 0. \tag{8}$$

Diese Gleichungen aber sind anzusetzen, einmal für alle innerhalb des quadratischen Körpers ganzzahligen Auflösungen der ternären Gleichung:

$$4 = A^2 + C^2 + \frac{1 - \sqrt{5}}{2} D^2, \tag{9}$$

— und wir erhalten hier eine *erste Classe von Spiegelkreisen* — sodann aber für alle ganzzahligen Auflösungen von:

$$2 = A^2 + C^2 + \frac{1 - \sqrt{5}}{2} D^2, \tag{10}$$

womit wir die *zweite Classe der Spiegelkreise* erhalten.

Die Spiegelkreise (8) sind, wie man sieht, sämtlich orthogonal gegen die reelle Axe gerichtet, und nun gilt es einzusehen, *dass diese Kreise in ihrer Gesamtheit gerade jene Dreiecksteilung* (2, 4, 5) *der $\eta$-Halbebene bewirken, welche wir am Anfang vom Kreisbogendreieck* (2, 4, 5) *aus durch immer wiederholte Spiegelung herstellen.* Von hieraus ist es dann leicht, die Identität der arithmetisch definierten Gruppe mit der Gruppe des Kreisbogendreiecks (2, 4, 5) zu erkennen.

---

[1] Siehe etwa M. I, pag. 196 ff.

Zu diesem Ende muss man zuvörderst feststellen, welche Perioden bei den elliptischen Substitutionen unserer Gruppe vorkommen mögen Für eine elliptische Substitution der Periode $\nu$ ist

$$A = 2\cos\frac{\pi}{\nu} \quad \text{oder} \quad = \sqrt{2}\cos\frac{\pi}{\nu}, \tag{11}$$

je nachdem eine quadrimodulare oder duomodulare Substitution vorliegt. Soll aber $2\cos\frac{\pi}{\nu}$ oder $\sqrt{2}\cos\frac{\pi}{\nu}$ eine ganze Zahl des für uns zu Grunde liegenden quadratischen Zahlkörpers sein, so ist nach elementaren Regeln $\nu$ auf die Werte $2, 3, 4, 5$ eingeschränkt; *es kommen also jedenfalls keine anderen als die Perioden:*

$$\nu = 2, 3, 4, 5 \tag{12}$$

*bei den elliptischen Substitutionen der Gruppe vor.* Die Perioden $2, 4, 5$ kommen auch sicher vor; denn sie sind in der Gruppe des Kreisbogendreiecks $(2, 4, 5)$ enthalten, die doch jedenfalls zufolge (1) § 1 sich in der arithmetisch definierten Gruppe vorfindet.

Man bemerke nun weiter, dass der Kreuzungspunkt zweier Symmetriekreise (8) immer den Fixpunkt für eine elliptische Substitution ergiebt, die durch Combination der beiden zugehörigen Spiegelungen entspringt. Es folgt, *dass jene Symmetriekreise einander nur unter Winkeln* $\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{5}$ *oder Vielfachen derselben schneiden können.* Da wir nun mit einer eigentlich discontinuierlichen Gruppe zu thun haben, so liefern die sämtlichen Kreise (8) eine Einteilung der positiven Halbebene in lauter aequivalente Kreisbogenpolygone mit Winkeln $\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{5}$.

Im weiteren Verfolg der geometrischen Verhältnisse innerhalb der $\eta$-Halbebene werden wir diejenige Maassbestimmung gebrauchen müssen, welche Poincaré für die Untersuchung der Gruppen reeller Substitutionen eingeführt hat.[1] Insbesondere ziehen wir die Formel für den Inhalt eines

[1] Siehe Acta mathematica, Bd. 1, pag. 6 ff. Die betreffende projective Maassbestimmung geht durch einen in M. I, pag. 239, geschilderten Projectionsprocess in diejenige Maassbestimmung über, welche Klein bei seinen bez. Untersuchungen (in Bd. 4 der Mathem. Annalen) der »hyperbolischen» Geometrie zu Grunde legt. Man vergl. übrigens auch Clebsch-Lindemann, Vorles. über Geometrie, Bd. 2, Abt. 1.

im Sinne der Maassbestimmung geradlinigen Polygons ohne entspringende Winkel heran; ist $I$ dieser Inhalt, $n$ aber die Anzahl der Polygonseiten und $\sigma$ die Summe der Winkel, so lautet der Ausdruck für $I$:

$$I = 4k^2[(n - 2)\pi - \sigma], \tag{13}$$

wo $k$ eine für die Maassbestimmung charakteristische Constante ist.

Wir greifen nun ein einzelnes der aequivalenten Polygone unserer Halbebenenteilung auf und nehmen an, es sei ein $n$-eck mit $\lambda$ Winkeln $\frac{\pi}{2}$, $\varkappa$ Winkeln $\frac{\pi}{3}$, $\mu$ Winkeln $\frac{\pi}{4}$ und endlich $\nu$ Winkeln $\frac{\pi}{5}$, so dass $\varkappa + \lambda + \mu + \nu = n$ ist. Unter den Spiegelkreisen der Gruppe finden sich jedenfalls alle Symmetriekreise der Dreiecksteilung $(2, 4, 5)$, und es möge das einzelne Dreieck $(2, 4, 5)$ aus $m$ Polygone bezeichneter Art zusammengesetzt erscheinen. Alsdann gilt die Gleichung:

$$4mk^2[(n - 2)\pi - \sigma] = \frac{4k^2\pi}{20}.$$

Setzt man hier für $\sigma$ seinen Wert ein, so kommt nach leichter Umgestaltung:

$$m.[60(n - 2) - (30\lambda + 20\varkappa + 15\mu + 12\nu)] = 3.$$

Hier steht aber links das Product zweier rationalen ganzen Zahlen; es sind also nur zwei Fälle möglich einmal $m = 3$, sodann $m = 1$.

Die Auswahl $m = 1$ liefert, falls wir noch für $n$ seinen Wert als Summe der vier ganzen Zahlen $\varkappa, \lambda, \mu, \nu$ eintragen:

$$20(n - 2) - \left[10\lambda + 20\left(\frac{\varkappa}{3}\right) + 5\mu + 4\nu\right] = 1,$$

$$10\lambda + 40.\left(\frac{\varkappa}{3}\right) + 15\mu + 16\nu = 41,$$

woraus man zugleich ersieht, dass $\varkappa$ durch 3 teilbar sein muss. Es ist eine einfache zahlentheoretische Überlegung, welche zu dem Schlusse führt, dass die *einzige* Auflösung der letzten Gleichung in ganzen, nichtnegativen Zahlen $\lambda, \frac{\varkappa}{3}, \mu, \nu$ die folgende ist:

$$\varkappa = 0, \qquad \lambda = \mu = \nu = 1.$$

Hier hat man also $n = 3$, und zwar ein Dreieck der Winkel $\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{5}$, und dies ist das Ausgangsdreieck der in § 1 besprochenen Halbebenenteilung, ein Resultat, welches ja nur in anderer Gestalt eine Bestätigung der Gleichung $m = 1$ liefert.

Prüfen wir nun den Fall $m = 3$, wo wir die diophantische Gleichung gewinnen:

$$40\varkappa + 30\lambda + 45\mu + 48\nu = 121.$$

Man stellt ohne Mühe fest, dass diese Gleichung eine Auflösung in ganzen, nicht-negativen Zahlen $\varkappa, \lambda, \mu, \nu$ überhaupt nicht besitzt. Damit aber ist in der That evident, dass die Kreise (8) die Dreiecksteilung $(2, 4, 5)$ der Halbebene bewirken.

Der Abschluss unserer Überlegung gestaltet sich endlich wie folgt: Sollte das einzelne Kreisbogendreieck in seinem Innern noch *zwei* bezüglich der erweiterten Gruppe aequivalente Punkte aufweisen, so würde es eine Substitution geben, welche die gesamte Dreiecksteilung derart in sich überführen würde, dass speciell das Ausgangsdreieck in sich selbst transformiert erscheint. Nach den einfachsten Sätzen über Kreisverwandtschaft[1] ist aber evident, dass ein Kreisbogendreieck mit drei verschiedenen Winkeln *nur* durch die Identität $\eta' = \eta$ in sich übergeführt wird. Es hat sich somit bewährt, *dass die Gruppe des Kreisbogendreiecks* $(2, 4, 5)$ *thatsächlich in der am Schlusse von* § 1 *angegebenen Art arithmetisch zu definieren ist.*

Übrigens entspringen aus den gewonnenen Resultaten eine Reihe von Ergebnissen betreffs der Auflösung der quaternären Gleichungen (5) in ganzen algebraischen Zahlen $A, B, C, D$ des oft genannten quadratischen Körpers, sowie auch betreffs der Einheiten desjenigen biquadratischen Körpers, der durch Adjunction von $\sqrt{P}$ entsteht. Auch bemerke man etwa noch, dass die Kreisbogen (8) von der ersten Classe die Einteilung der Halbebene in lauter reguläre rechtwinklige Fünfecke liefern, während die Kreise der zweiten Classe die Symmetrielinien der Fünfecke darstellen u. s. w.

---

[1] cf. M. I, pag. 88 ff.

## § 3. *Arithmetischer Charakter der zum Kreisbogendreieck* (2 , 5 , 6) *gehörenden Gruppe.*

Die grosse Ausführlichkeit, mit welcher soeben das Kreisbogendreieck (2 , 4 , 5) besprochen wurde, wird uns gestatten, in dem nun noch zu erledigenden Falle (2 , 5 , 6) um so kürzer zu verfahren. Um wieder ausschliesslich mit reellen Coefficienten der Substitutionen zu thun zu haben, legen wir das Ausgangsdreieck mit den Ecken $p_2, p_5, p_6$ so, dass die reelle $\eta$-Axe den gemeinsamen Orthogonalkreis der drei Seiten bildet. Im übrigen liege $p_2$ bei $\eta = i$, $p_6$ auf der imaginären Axe oberhalb $\eta = i$, während als Ausgangsdreieck der Gruppe $\Gamma(2, 5, 6)$ dasjenige »Doppeldreieck» genommen werden möge, welches durch den zwischen $\eta = i$ und $p_6$ verlaufenden Teil der imaginären Axe symmetrisch gehälftet wird.

Die Gruppe $\Gamma(2, 5, 6)$ lässt sich, wie man eben sah, aus zwei elliptischen Substitutionen $V_1$ und $V_2$ erzeugen, die $\eta = i$ bez. $p_6$ zu Fixpunkten haben und die Perioden 2 bez. 6 aufweisen. $V_1$ ist hiermit völlig bestimmt; bei $V_2$ ist noch die genaue Lage von $p_6$ unbekannt, und dieserhalb bleibt im Ausdruck von $V_2$ noch eine Constante zu bestimmen. Diese letztere ist in der Art zu wählen, dass $V_1 V_2$ die Periode 5 bekommt; *es ergeben sich so als Erzeugende der Gruppe* $\Gamma(2, 5, 6)$:

$$(1) \qquad V_1 = \begin{pmatrix} 0, & 1 \\ -1, & 0 \end{pmatrix}, \qquad V_2 = \begin{pmatrix} \sqrt{3}, & \frac{1+\sqrt{5}}{2} + \sqrt{\frac{1+\sqrt{5}}{2}} \\ -\frac{1+\sqrt{5}}{2} + \sqrt{\frac{1+\sqrt{5}}{2}}, & \sqrt{3} \end{pmatrix}.$$

Indem wir nun $V_1$ und $V_2$ mit einander combinieren, müssen wir die allgemeinen Gesetze klarlegen, nach denen die Coefficienten der Substitutionen von $\Gamma(2, 5, 6)$ gebildet sind. Es ist evident, dass hier wieder die ganzen Zahlen $A, B, C, D$ des quadratischen Körpers von der Basis $\left[1, \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right]$ in Betracht kommen; ausserdem aber kommen noch zwei

Quadratwurzeln zur Geltung, nämlich diejenigen aus den beiden ganzen Zahlen:

$$(2)\qquad P = \frac{1+\sqrt{5}}{2}, \qquad Q = 3$$

des quadratischen Körpers. Der Erfolg lehrt nun, dass man hier auf zwei verschiedene Typen von Substitutionen kommt: einmal haben wir Substitutionen:

$$(3)\qquad V = \begin{pmatrix} A + B\sqrt{P}\,, & C\sqrt{Q} + D\sqrt{PQ} \\ -C\sqrt{Q} + D\sqrt{PQ}\,, & A - B\sqrt{P} \end{pmatrix},$$

und hier ist evident, dass die Bauart dieser Substitutionen bei Combinationen unzerstörbar ist. Hat man aber eine Gruppe aus Substitutionen $V$ zusammengesetzt, so lehrt eine leichte Rechnung, dass dieselbe mit der unter (1) mit $V_1$ bezeichneten Substitution vertauschbar ist. Wir werden also nach bekannten Regeln zu einer erweiterten Gruppe gelangen, wenn wir neben jedes $V$ noch die Substitution:

$$(4)\qquad V' = \begin{pmatrix} C\sqrt{Q} + D\sqrt{PQ}\,, & A + B\sqrt{P} \\ -A + B\sqrt{P}\,, & C\sqrt{Q} - D\sqrt{PQ} \end{pmatrix}$$

reihen.

Nun ist $V_2$ quadrimodular und $V_1$ kann sofort zu einer ebensolchen Substitution ausgestaltet werden; beide subsumieren sich alsdann unter die allgemeine Gestalt (4), wenn wir die gegenwärtig vorliegende Bedeutung von $A, B, \ldots, P, Q$ berücksichtigen. Bei dieser Sachlage schreiben wir jetzt vor, dass die Substitutionen (3), (4), welche wir gebrauchen wollen, durchweg *quadrimodular* sein sollen.

Der weiteren Untersuchung stellt sich nun die nachfolgende Schwierigkeit entgegen. Nehmen wir das Ausgangsdreieck (2, 5, 6) so an, dass $p_6$ mit $\eta = i$ coincidiert, während $p_2$ oberhalb $\eta = i$ auf der imaginären Axe liegt, so subsumieren sich die erzeugenden Substitutionen gleichfalls unter die quadrimodularen $V'$. Auch in der neuen Gestalt besteht die Gruppe aus quadrimodularen $V, V'$, und also gilt es, noch neue Bedingungen für $A, B, C, D$ aufzustellen, welche uns in den Stand setzen, die Substitutionen von einander zu sondern, je nachdem sie bei der ersten oder zweiten Gruppengestalt auftreten. In diesem Betracht gilt nun der Satz: *Die Gruppe* $\Gamma(2, 5, 6)$ *in ihrer ursprünglichen Fixierung wird von allen quadrimodularen Substitutionen* (3) *und* (4) *gebildet, welche die Bedingungen befriedigen:*

$$(5)\qquad A + \frac{1+\sqrt{5}}{2}B + D \equiv 0, \qquad B + C + \frac{1+\sqrt{5}}{2}D \equiv 0, \ (\mathrm{mod.}\ 2).$$

Um dies nachzuweisen, betrachten wir nur erst die quadrimodularen $V$ mit der Bedingung (5) und haben an die Stelle des Schemas (4) § 2 das nachfolgende zu setzen:

$$(6)\qquad \begin{cases} 2A'' = AA' + PBB' - QCC' + PQDD', \\ 2B'' = AB' + BA' + QCD' - QDC', \\ 2C'' = AC' + PBD' + CA' - PDB', \\ 2D'' = AD' + BC' - CB' + DA'. \end{cases}$$

Sind die Bedingungen (5) für $A, B, \ldots$ und $A', B', \ldots$ erfüllt, so müssen einmal $A'', B'', \ldots$ wieder ganze Zahlen sein, sodann müssen für diese ganzen Zahlen die Bedingungen (5) selbst wieder gelten:

Der erste Punkt erledigt sich so, dass man aus den Gleichungen (6) Congruenzen modulo 2 macht und dabei für $A'$ und $C'$ die mod. 2 mit ihnen congruenten Zahlen $PB' + D'$ und $B' + PD'$ einträgt. So findet z. B. für $A''$ die nachfolgende Rechnung statt:

$$2A'' \equiv A(PB' + D') + PBB' + QC(B' + PD') + PQDD',$$

$$2A'' \equiv B'(PA + PB + C) + D'(A + PC + PD);$$

hier stehen aber rechter Hand in den Klammern durch 2 teilbare Zahlen, wenn man nur berücksichtigen will, dass $P^2 + P + 1 \equiv 0$ (mod. 2) ist; $A''$ ist deshalb wirklich eine ganze Zahl des Körpers, und ein Gleiches beweist man in analoger Art für $B''$, $C''$ und $D''$.

Endlich ist noch die Unzerstörbarkeit der Bedingungen (5) gegenüber Combination von Substitutionen zu beweisen, und zu diesem Ende bilden wir aus (6) modulo 4 die Congruenz:

$$2(A'' + PB'' + D'') \equiv A(A' + PB' + D') + B(PA' + PB' + C') \\ + C(C' - B' - PD') + D(A' + PC' - PD'), \ (\mathrm{mod.}\ 4).$$

Hier stehen rechter Hand in den Klammern allenthalben durch 2 teilbare Zahlen, und also können wir $A$ und $C$ auf Grund von (5) ersetzen; es folgt alsdann nach kurzer Zwischenrechnung:

$$2(A'' + PB'' + D'') \equiv 2B(PA' + PB' + C') + 2D(A' + PC' - PD'),$$

und hier stehen wieder rechter Hand in den Klammern durch 2 teilbare Zahlen, so dass die erste Congruenz (5) für $A''$, $B''$, ... thatsächlich erfüllt ist. Nicht anders beweist man das Bestehen der zweiten Congruenz (5).[1]

Dass die Gruppe der quadrimodularen $V$ mit der Bedingung (5) eigentlich discontinuierlich ist, ergiebt sich gerade wie im vorigen Paragraphen durch Discussion der Gleichung:

$$A^2 - PB^2 + QC^2 - PQD^2 = 4,$$

wobei zur Geltung kommt, dass die mit $P$ conjugierte Zahl $P' = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ negativ, die mit $Q = 3$ conjugierte Zahl $Q' = 3$ dagegen positiv ist. Es wird demnach auch die Gruppe der quadrimodularen $V$, $V'$ von der Bedingung (5) eigentlich discontinuierlich sein; denn sie enthält die Gruppe der $V$ als Untergruppe vom Index 2 in sich.

Die eben zuletzt hergestellte Gruppe enthält jedenfalls die Gruppe des Kreisbogendreiecks (2, 5, 6) in sich; denn die Erzeugenden $V_1$, $V_2$ erfüllen als Substitutionen $V'$ die Bedingungen (5). Es gilt nun noch zu zeigen, dass beide Gruppen geradezu identisch sind. Zu diesem Ende benutzen wir wieder die Symmetriekreise der durch Spiegelungen erweiterten Gruppe der $V$, $V'$, und hier finden wir wieder zwei verschiedene Classen von Kreisen (den Typen $V$ und $V'$ entsprechend). Durch die gesamten Spiegelkreise wird eine Einteilung der Halbebene in lauter aequivalente Kreisbogenpolygone mit Winkeln $\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{5}, \frac{\pi}{6}$ geleistet; denn man stellt leicht fest, dass unter den quadrimodularen $V$, $V'$ an elliptischen Substitutionen nur solche der Perioden 2, 3, 5 und 6 auftreten können. Mögen wir mit einer $n$-eckteilung zu thun haben, wobei das einzelne Polygon $\varkappa$ Winkel $\frac{\pi}{2}$, $\lambda$ Winkel $\frac{\pi}{3}$, $\mu$ Winkel $\frac{\pi}{5}$ und $\nu$ Winkel $\frac{\pi}{6}$

[1] Die eben zuletzt gegebene Entwicklung giebt einen speciellen Fall einer allgemeinen Untersuchung in den Mathem. Annalen, Bd. 42, pag. 586.

aufweist; alsdann ergiebt sich aus der Berechnung des Polygoninhalts im Sinne der nicht-euklidischen Maassbestimmung die diophantische Gleichung:

$$m(15\varkappa + 20\lambda + 24\mu + 25\nu - 60) = 4,$$

wenn $m$ Polygone ein einzelnes Dreieck von Typus $(2, 5, 6)$ zusammensetzen. Nimmt man hier $m = 2$ oder $m = 4$, so ist beide Male eine Auflösung der diophantischen Gleichung in ganzen, nicht-negativen Zahlen $\varkappa, \lambda, \mu, \nu$ nicht aufzufinden. Die einzige Möglichkeit ist somit $m = 1$, womit wir zum Kreisbogendreieck $(2, 5, 6)$ direct zurückkommen. Von hieraus zeigt sich dann endlich wie im vorigen Paragraphen, dass im Innern des genannten Dreiecks keine zwei bezüglich der Gruppe der $V, V'$ aequivalente Punkte mehr vorkommen können. Die arithmetische Definition der in Rede stehenden Gruppe des Kreisbogendreiecks $(2, 5, 6)$ ist also oben in richtiger Weise gegeben.

## § 4. *Einführung zweier Riemann'schen Flächen von je 120 Blättern.*

Nach sehr bekannten Sätzen der Riemann'schen Functionentheorie existiert eine Function $z(\eta)$, welche ein Kreisbogendreieck der $\eta$-Ebene auf eine Halbebene $z$ conform abbildet;[1] in unseren beiden Fällen $(2, 4, 5)$ und $(2, 5, 6)$ mögen zugehörige automorphe Functionen $z(\eta)$ dadurch eindeutig fixiert sein, dass wir in den Ecken $p_2, p_4, p_5$ resp. $p_2, p_5, p_6$ die Werte $z = 0$ bez. $1$ und $\infty$ vorschreiben. In der Theorie dieser beiden Functionen $z(\eta)$ spielen alsdann die arithmetisch definierten Gruppen der beiden vorigen Paragraphen eben dieselbe Rolle, wie in der Theorie der Modulfunctionen die Gruppe der rational-ganzzahligen, unimodularen $\eta$-Substitutionen.

In wie weit dies für eine *Transformationstheorie* der Functionen $z(\eta)$ Bedeutung gewinnt, soll hier kurz ohne Beweis angegeben werden. Möge

---

[1] Wie die allgemeinen Riemann'schen Existenztheoreme durch die Methoden von SCHWARZ und NEUMANN ihre endgültigen Beweise gefunden haben, wolle man z. B. in M. I, pag. 508 ff. nachsehen; für die im Texte vorliegenden Verhältnisse vergl. man auch noch RITTER in den Mathem. Annalen, Bd. 41, pag. 12 ff.

$\Gamma$ eine der beiden Gruppen sein und $z(\eta)$ die zugehörige Function, so wollen wir auf $\eta$ eine Substitution $W$ ausüben, die vollständig die Bauart der Substitutionen von $\Gamma$ bewahrt mit der einen Ausnahme, dass $W$ nicht quadrimodular oder duomodular sein soll, sondern als Determinante eine beliebige ganze Zahl des quadratischen Körpers darbieten mag. *Stets ist alsdann die transformierte Function* $z'(\eta) = z(W(\eta))$ *an die ursprüngliche durch eine algebraische Relation* $f(z', z) = 0$ *gebunden, die wir als Transformationsgleichung zu bezeichnen haben.* Als Ordnung der ausgeübten Transformation kann man etwa die Norm der Determinante von $W$ benutzen.

Dieser allgemeine Satz ist einfach dadurch zu belegen, dass die Gruppe $\Gamma$ durch Transformation vermöge $W$ in eine Gruppe $\Gamma' = W^{-1}\Gamma W$ übergeführt wird, welche mit $\Gamma$ im Sinne POINCARÉ's commensurabel[1] ist. Nennen wir $n$ die Ordnung der Transformation $W$, so wird in der That durch die Forderung:

$$B \equiv C \equiv D \equiv 0, \ (\text{mod. } n) \tag{1}$$

an die Substitutionen $V$ von $\Gamma$ eine Untergruppe ausgesondert, welche in $\Gamma$ und $\Gamma'$ zugleich enthalten ist. Dass aber die als *Hauptcongruenzgruppe* $n^{\text{ter}}$ *Stufe* zu bezeichnende Untergruppe der Bedingungen (1) innerhalb $\Gamma$ eine Untergruppe von *endlichem* Index ist, zeigt man durch elementare Betrachtungen.[2]

Wir folgen nun dem Vorbilde der Theorie der Modulfunctionen, wenn wir an Stelle der Transformation $n^{\text{ter}}$ Ordnung sogleich eine ausführliche Theorie der Hauptcongruenzgruppe $n^{\text{ter}}$ Stufe innerhalb der einzelnen unserer beiden Gruppen treten lassen. Im übrigen sollen hier keineswegs allgemeine Entwicklungen über die Tragweite der angedeuteten Principien angestellt werden; vielmehr soll nur am nächstliegenden Beispiel aufgewiesen werden, wie sich die fraglichen Ansätze nach der functionentheoretischen Seite ausgestalten lassen. Wenn wir dabei Congruenzgruppen fünfter Stufe betrachten, so mag durch das Voraufgehende gerechtfertigt sein, warum wir von Entwicklungen zur Transformation *fünfter* Ordnung unserer automorphen Functionen $z(\eta)$ sprechen.

---

[1] Siehe wegen dieser Benennung POINCARÉ's Abhandlung *Les fonctions fuchsiennes et l'Arithmétique,* in LIOUVILLE's Journal, 4[te] Folge, Bd. 3.

[2] Man sehe etwa wieder M. I, pag. 308 ff.

Wenn wir modulo 5 congruente Substitutionen nicht als verschieden ansehen, so reducieren sich die beiden Gruppen $\Gamma(2, 4, 5)$ und $\Gamma(2, 5, 6)$ auf gewisse zwei Gruppen von endlicher Ordnung, die nach bekannten gruppentheoretischen Sätzen[1] den Hauptcongruenzgruppen fünfter Stufe innerhalb der Gruppen $\Gamma$ zugeordnet sind. Da aber 5 innerhalb unseres quadratischen Zahlkörpers keine Primzahl ist, so sind die beiden in Rede stehenden endlichen Gruppen nicht einfach. Demnach giebt es dann umgekehrt in den Gruppen $\Gamma$ noch umfassendere ausgezeichnete Untergruppen, welche die Hauptcongruenzgruppen fünfter Stufe in sich enthalten.

Um die hiermit gemeinten Gruppen zu gewinnen, schreiben wir $j = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$ und bemerken, dass modulo 5 die folgende Congruenz gilt:

$$j^2 - j - 1 \equiv (j - 3)^2 \equiv 0, \text{ (mod. 5)}.$$

Die neue Reduction, welche wir vornehmen wollen, besteht hiernach darin, dass wir $j \equiv 3$ (mod. 5) schreiben; es folgt dann:

$$j \equiv 3, \qquad P = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2} \equiv 2, \text{ (mod. 5)}$$

für (2, 4, 5), während im Falle (2, 5, 6) zu setzen ist:

$$j \equiv 3, \qquad P \equiv Q \equiv 3, \text{ (mod. 5)}.$$

Nach kurzer Zwischenrechnung aber entspringen die Sätze: *Die Gruppe* $\Gamma(2, 4, 5)$ *reduciert sich durch die bezeichnete Maassnahme auf die Gruppe aller* mod. 5 *incongruenten Substitutionen:*

$$(2) \qquad \eta' \equiv \frac{(a + b\sqrt{2})\eta + (c + d\sqrt{2})}{(-c + d\sqrt{2})\eta + (a - b\sqrt{2})}, \text{ (mod. 5)}$$

*einer gegen* 5 *primen Determinante;* dabei sind $a, b, c, d$ rationale ganze Zahlen, und ein gleichzeitiger Zeichenwechsel der vier Coefficienten ist hier überall ohne Wirkung. Die quadrimodularen $V$ führen auf die Substitutionen (2), deren Determinante quadratischer Rest von 5 ist, die duomodularen $V$ liefern entsprechend die Nichtreste. Andrerseits folgt: *Die Gruppe* $\Gamma(2, 5, 6)$ *reduciert sich auf alle incongruenten Substitutionen:*

[1] Man vergl. hier des näheren M. I, pag. 320.

$$(3) \qquad \eta' \equiv \frac{(a + b\sqrt{3})\eta + (c + d\sqrt{3})}{(c - d\sqrt{3})\eta + (a - b\sqrt{3})}, \text{ (mod. 5)}$$

*einer gegen* 5 *primen Determinante;* letztere ist Rest oder Nichtrest von 5, je nachdem eine Substitution (3) oder (4) § 3 vorliegt.

Um über Ordnung und Structur unserer endlichen Gruppen alles Wesentliche auszusagen, transformieren wir die Substitutionen (2), (3) vermöge:

$$(4) \qquad 2\eta \equiv \frac{1 - \sqrt{2}\omega}{1 + \sqrt{2}\omega} \quad \text{bez.} \quad \eta \equiv \frac{1 - \sqrt{3}\omega}{1 + \sqrt{3}\omega}$$

und gewinnen solchergestalt bez.:

$$\left.\begin{aligned} \omega' &\equiv \frac{(a - 2c)\omega - (b + 2d)}{-2(b - 2d)\omega + (a + 2c)} \\ \omega' &\equiv \frac{(a - c)\omega - (b + d)}{-3(b - d)\omega + (a + c)} \end{aligned}\right\} \text{ (mod. 5).}$$

Hier stehen überall durchaus rationale Substitutionscoefficienten, und also lassen sich unsere beiden Gruppen isomorph beziehen auf die Gruppe aller incongruenten ganzzahligen Substitutionen:

$$\omega' \equiv \frac{\alpha\omega + \beta}{\gamma\omega + \delta}, \text{ (mod. 5)}$$

einer gegen 5 primen Determinante. Diese letztere Gruppe ist nun aus der Theorie der elliptischen Functionen sehr bekannt: *sie ist eine* $G_{120}$ *der Ordnung* 120 *und isomorph mit der Permutationsgruppe von fünf Dingen.*

Indem wir hiermit zwei ausgezeichnete Untergruppen $\Gamma_{120}$ je vom Index 120 in den beiden Gruppen $\Gamma$ auffanden, betrachten wir vor allen Dingen noch die beiden zugehörigen Fundamentalpolygone. Als geschlossene Flächen gedacht[1] liefern dieselben zwei Flächen je mit einer regulär-symmetrischen Einteilung in 2.120 Dreiecke, und dabei kreuzen sich die Symmetrielinien der Einteilung im einen Falle immer zu 4 bez. 8 und 10, im anderen Falle zu 4 bez. 10 und 12. Beide Flächen gestatten 120 Transformationen in sich, und die beiden zugehörigen Gruppen $G_{120}$ sind isomorph. Bilden wir diese Flächen vermöge der zugehörigen $z(\eta)$

[1] Siehe hier und in der Folge M. I, pag. 328 ff.

ab, so entspringen zwei Riemann'sche Flächen von 120 Blättern über den betreffenden Ebene $z$; diese Flächen sind je nur an den drei Stellen $z = 0, 1, \infty$ verzweigt, und zwar hängen die Blätter zu $2, 4, 5$ bez. zu $2, 5$ und $6$ zusammen. Nach einer bekannten Formel berechnet man von hieraus, *dass die beiden fraglichen Flächen die Geschlechter* $p = 4$ *bez.* $p = 9$ *aufweisen.*

## § 5. *Von den algebraischen Functionen der 120-blättrigen Riemann'schen Flächen.*

Die vorangehenden Entwicklungen sollen dadurch zum Abschluss gebracht werden, dass wir über die algebraischen Functionen der beiden gewonnenen Riemann'schen Flächen erschöpfenden Aufschluss geben. Bei dem nicht ganz geringen Geschlechte sowie der erheblichen Blätteranzahl der fraglichen Flächen würde diese Untersuchung freilich aussichtslos erscheinen, hätten wir nicht in dem Umstande, *dass die beiden zugehörigen algebraischen Gebilde je durch 120 eindeutige Transformationen in sich übergehen,* das Mittel, Anschluss an gewisse Untersuchungen von Klein und Gordan zu gewinnen, die wir unmittelbar für den vorliegenden Zweck verwerten können. Wir schliessen zunächst unter alleinigem Gebrauch der ersten der beiden Flächen etwa so:

Die Normalcurve der Functionen $\varphi$[1] eines algebraischen Gebildes vom Geschlechte $p = 4$ ist eine Curve sechster Ordnung im Raume von drei Dimensionen: *Es giebt also eine Raumcurve* $C_6$ *sechster Ordnung des Geschlechtes* $p = 4$, *welche durch 120 Collineationen in sich übergeht.* Diese $C_6$ ist der vollständige Durchschnitt einer Fläche zweiter Ordnung mit einer solchen dritter Ordnung. Des genaueren gelten nach Weber und Noether l. c. die Sätze: durch die Curve $C_6$ lässt sich überhaupt nur eine einzige Fläche zweiter Ordnung hindurch legen, sowie drei linear-unabhängige Flächen dritter Ordnung. Betrachten wir vorab allein die Fläche zweiter Ordnung, die wir $F_2$ nennen.

---

[1] Siehe über diesen Gegenstand Weber, Mathem. Annalen, Bd. 13, Noether, Mathem. Annalen, Bd. 17, sowie übrigens M. I, pag. 569.

Die Fläche $F_2$ muss den Substitutionen der $G_{120}$ entsprechend durch 120 Transformationen in sich selbst übergehen. Die beiden Schaaren geradliniger Erzeugender der Fläche $F_2$, die wir uns zweckmässig als Hyperboloid denken, werden bei der einzelnen Transformation entweder permutiert oder jede Schaar wird in sich transformiert. Sind $\lambda$ und $\mu$ die Parameter der beiden Geradenschaaren, so werden entsprechend diesem Umstande die 120 Transformationen teils durch:

$$(1) \qquad \lambda' = \frac{a\lambda + b}{c\lambda + d}, \qquad \mu' = \frac{a'\mu + b'}{c'\mu + d'}$$

darzustellen sein, teils aber durch:

$$(2) \qquad \lambda' = \frac{a\mu + b}{c\mu + d}, \qquad \mu' = \frac{a'\lambda + b'}{c'\lambda + d'}.$$

Nun giebt es aber mit Rücksicht auf die in § 4 erkannte Structur der $G_{120}$ an Gruppen linearer Substitutionen einer Variabelen bekanntlich[1] keine brauchbare $G_{120}$ und nur eine $G_{60}$, nämlich die Ikosaedergruppe. *Bei der in unserer $G_{120}$ enthaltenen $G_{60}$ erfahren somit $\lambda$ und $\mu$ simultan die sechzig Ikosaedersubstitutionen; die* 60 *restierenden Transformationen entspringen alsdann durch Vertauschung der beiden Geradenschaaren.*

Hier haben wir nun den unmittelbaren Anschluss an Entwicklungen Klein's in der Ikosaedertheorie gewonnen.[2] Es erledigt sich erstlich die Frage, welcher Art die in (1) vorliegende isomorphe Beziehung der Ikosaedergruppe auf sich selbst ist. Es können hier nur zwei Arten der Zuordnung in Frage kommen, die in »Ikos.» als cogrediente und contragrediente Zuordnungen unterschieden sind.[3] Es ist kein Zweifel, dass für uns der Fall der *Contragredienz* zur Geltung kommt, und dass deshalb die analytische Darstellung der $G_{120}$ eben jene ist, wie sie in »Ikos.», pag. 197 u. f., geleistet wird. Denn indem wir statt $\lambda, \mu$ die homogenen

---

[1] Siehe Klein, Mathem. Annalen, Bd. 9, und Gordan, Mathem. Annalen, Bd. 12.

[2] Man sehe Klein's *Vorlesungen über das Ikosaeder,* die weiterhin als »Ikos.» citiert sind; namentlich kommen die Entwicklungen pag. 179 ff. sowie pag. 197 ff. in Betracht.

[3] Siehe auch M. II, pag. 135, wo übrigens »digredient» statt contragredient geschrieben ist.

Variabelen $\lambda_1 : \lambda_2$ und $\mu_1 : \mu_2$ gebrauchen, muss unsere auf dem Hyperboloid $F_2$ gelegene Curve $C_6$ nach »Ikos.», pag. 180, durch Nullsetzen einer doppelt-binären Form $f(\lambda_1, \lambda_2; \mu_1, \mu_2)$ von der Dimension 3 in jeder Variabelenreihe dargestellt werden können; und *nur* im Falle der Contragredienz wird uns eine, und zwar auch nur eine Form dieser Art geliefert.

Das volle System der Formen, welche sich bei der für uns vorliegenden $G_{120}$ invariant verhalten, ist nun bereits vor langer Zeit von Gordan[1] aufgestellt und »Ikos.», pag. 196, reproduciert; dieses System besteht aus vier Formen, die l. c. durch $\alpha, \beta, \gamma, \nabla$ bezeichnet sind, und die in der einzelnen Variabelenreihe $\lambda_1, \lambda_2$ bez. $\mu_1, \mu_2$ die Dimensionen $3, 4, 5, 10$ haben. Um Collisionen der Bezeichnungsweise zu vermeiden, nenne ich die fraglichen Formen $A_3, A_4, A_5, A_{10}$ und muss die beiden ersten unter ihnen hier ausführlich angeben, da sie gleich weiter gebraucht werden:

$$(3) \quad \begin{cases} A_3(\lambda_1, \lambda_2; \mu_1, \mu_2) = -\lambda_1^3\mu_1^2\mu_2 - \lambda_1^2\lambda_2\mu_2^3 - \lambda_1\lambda_2^2\mu_1^3 + \lambda_2^3\mu_1\mu_2^2, \\ A_4(\lambda_1, \lambda_2; \mu_1, \mu_2) = -\lambda_1^4\mu_1\mu_2^3 + \lambda_1^3\lambda_2\mu_1^4 + 3\lambda_1^2\lambda_2^2\mu_1^2\mu_2^2 - \lambda_1\lambda_2^3\mu_2^4 + \lambda_2^4\mu_1^3\mu_2. \end{cases}$$

Die vier Formen $A$ sind nicht von einander unabhängig; vielmehr besteht zwischen ihnen die nachfolgende Relation identisch:

$$(4) \quad A_{10}^2 = 108A_3^5A_5 - 135A_3^4A_4^2 + 90A_3^2A_4A_5^2 - 320A_3A_4^3A_5 + 256A_4^5 + A_5^4,$$

die aus »Ikos.», pag. 182, direct herübergenommen ist. Was nun die durch Nullsetzen unserer vier Formen dargestellten Raumcurven angeht, so haben wir in $A_3 = 0$ und $A_4 = 0$ zwei nicht-zerfallende Raumcurven $C_6$ und $C_8$ von sechster und achter Ordnung. Demgegenüber stellen $A_5 = 0$ und $A_{10} = 0$ zerfallende Gebilde dar, nämlich Systeme von fünf bez. zehn Kegelschnitten; die letzteren sind die Symmetrielinien gewisser zehn der $G_{120}$ angehörender »Spiegelungen» des Hyperboloids $F_2$ in sich.

Dass nun die durch $A_3 = 0$ dargestellte $C_6$ die Normalcurve der $\varphi$ für unsere erste 120-blättrige Fläche ist, geht aus der bisherigen Überlegung hervor. Immerhin müssten wir hier noch dem Einwande begegnen, ob wir nicht vielleicht mit einem hyperelliptischen Gebilde zu thun haben,

[1] Cf. Mathem. Annalen, Bd. 13.

wo die Überlegungen am Eingang des Paragraphen ungültig würden. Dass aber die durch $A_4 = 0$ dargestellte $C_8$ eine Specialcurve der anderen Riemann'schen Fläche ist, dürfte von letzterer aus nur schwierig zu erkennen sein. Wir werden daher in beiden Fällen durch directe Betrachtung der beiden Curven zum Ziele kommen müssen.

Um das Geschlecht der einzelnen $C_{2n}$ zu bestimmen, projicieren wir sie von einem ihrer Punkte aus auf eine Ebene. Sie geht alsdann in eine ebene $C_{2n-1}$ mit zwei $(n-1)$-fachen Punkten über; die letzteren rühren in der That von jenen beiden geradlinigen Erzeugenden der $F_2$ her, die durch das Projectionscentrum gehen; jede derselben schneidet die $C_{2n}$ noch in $n-1$ Punkten. Sonstige mehrfache Punkte müssten auch auf der $C_{2n}$ solche sein; jedoch müssten auf der $C_{2n}$ mit einem Punkte alle bezüglich der $G_{120}$ aequivalenten Punkte mehrfach sein, man würde also immer eine für die Werte $n = 3$ und $4$ übergrosse Anzahl von mehrfachen Punkten auf $C_{2n-1}$ erhalten. Demgemäss ist das Geschlecht der $C_{2n}$:

$$p = \frac{(2n-2)(2n-3)}{2} - 2 \cdot \frac{(n-1)(n-2)}{2} = (n-1)^2,$$

*und also liefern uns die Curven $C_6$ und $C_8$ wirklich algebraische Gebilde der Geschlechter $p = 4$ und $9$ mit je $120$ eindeutigen Transformationen in sich.*[1]

Sollen wir hier nun thatsächlich mit den beiden algebraischen Gebilden des vorigen Paragraphen zu thun haben, so müssen wir auf den Curven $C_6$ und $C_8$ je eine $120$-wertige Function $z$ construieren können, die gegenüber den $120$ Transformationen des Gebildes in sich invariant ist, und die überdies von sich aus zu der einzelnen der oben betrachteten $120$-blättrigen Flächen hinführen muss.

Um dies zuvörderst für die Curve $C_6$ zu leisten, schreiben wir die Relation (4) speciell für die Voraussetzung $A_3 = 0$ in der Gestalt:

$$A_{10}^2 - A_5^4 - 256 A_4^5 = 0 \tag{5}$$

und führen $z$ als Parameter des Curvenbüschels $40^{\text{ter}}$ Ordnung ein:

$$A_{10}^2 - 256 z A_4^5 = 0. \tag{6}$$

[1] Dass die durch $A_3 = 0$ dargestellte Curve sechster Ordnung irreducibel und vom Geschlechte $p = 4$ ist, bemerkte KLEIN bereits in »Ikos.», pag. 202.

Die einzelne dieser Curven wird auf dem Hyperboloid $F_2$ durch eine Fläche $20^{\text{ster}}$ Ordnung ausgeschnitten, welche letztere die $C_6$ in einem System von 120 bezüglich der $G_{120}$ aequivalenten Punkten schneidet. Mit Hilfe von (5) können wir nun (6) umschreiben in die Proportion:

$$(7) \qquad z : z - 1 : 1 = A_{10}^2 : A_5^4 : 256 A_4^5$$

und haben damit eine 120-wertige, gegenüber $G_{120}$ invariante, algebraische Function $z$ des Gebildes construiert.

Nun ist aus (7) evident, dass die 120 Punkte der $C_6$ mit $z = 0$ zu Paaren an sechzig Stellen coincidieren, die durch $A_{10} = 0$ ausgeschnitten werden; desgleichen coincidieren die Punkte $z = 1$ zu 4 an 30 Stellen und die Punkte $z = \infty$ zu 5 an 24 Stellen. Unter der Voraussetzung, dass im einzelnen dieser drei besonderen Punktsysteme keine zwei Punkte mehr coincidieren, und dass ferner jedem von $z = 0, 1, \infty$ verschiedenen Werte $z$ stets 120 durchgängig getrennt liegende Punkte der $C_6$ entsprechen, gewinnen wir durch Abbildung der $C_6$ vermöge der algebraischen Function $z$ eine Riemann'sche Fläche des Geschlechtes $p = 4$, in Übereinstimmung mit dem Geschlechte der $C_6$. Jede andere Annahme würde aber auf eine Erhöhung der Geschlechtszahl $p$ führen, ist also unzulässig.

Um die Untersuchung der Curve $C_8$ vorab bis zu dem gleichen Punkte zu fördern, setzen wir die Relation (4) unter der Voraussetzung $A_4 = 0$ in die specielle Gestalt:

$$(8) \qquad A_{10}^2 = A_5(A_5^3 + 108 A_3^5).$$

Hier werden nun auf der $C_8$ zwei Systeme zu 24 bez. 40 Punkten durch $A_3 = 0$ und $A_5 = 0$ ausgeschnitten, die, wie man leicht beweist, jedenfalls keine Punkte gemeinsam haben. Der zweite Faktor auf der rechten Seite von (8) wird sonach, mit Null identisch gesetzt, auf $C_8$ lauter Punkte ausschneiden, die von den 40 Punkten $A_5 = 0$ sicher verschieden sind. Nun schneidet aber $A_{10}^2 = 0$ achtzig Punkte je doppelt gezählt aus; es folgt somit aus der Identität (8), dass $A_5 = 0$ vierzig Punkte ausschneidet, die zu Paaren coincidieren. Dem Rechnung tragend schreiben wir:

$$(9) \qquad z : z - 1 : 1 = \left(\frac{A_{10}}{\sqrt{A_5}}\right)^2 : 108 A_3^5 : (\sqrt{A_5})^6,$$

was mit der Relation (8) in Übereinstimmung ist. Von hieraus gestaltet sich die Schlussweise gerade so wie bei der $C_6$; wir gewinnen durch Abbildung des algebraischen Gebildes vermöge $z$ eine 120-blättrige Riemann'sche Fläche des Geschlechtes $p = 9$, welche an Lage und Art der Verzweigungspunkte mit der zweiten Riemann'schen Fläche des vorigen Paragraphen übereinstimmt.

Die beiden soeben auf algebraischem Wege abgeleiteten Riemann'schen Flächen von je 120 Blättern stimmen also mit den beiden arithmetisch gewonnenen Flächen des vorigen Paragraphen nach Zahl, Art und Lage der Verzweigungspunkte sowie auch in Ansehung der Gruppen $G_{120}$ eindeutiger Transformationen der Flächen in sich vollkommen überein. Von hieraus lässt sich aber die genaue Identität der in Rede stehenden Flächen wie folgt beweisen.

Nach einem Fundamentalsatze der Theorie der automorphen Functionen [1] existiert auf der einzelnen der beiden zu den Gleichungen (7) und (9) gehörenden Riemann'schen Flächen jeweils eine unverzweigte $\eta$-Function, welche die Fläche auf ein einfach bedecktes und einfach zusammenhängendes Kreisbogenpolygon mit Hauptkreis abbildet. Bei geschlossenen Wegen auf der Fläche erfährt $\eta$ lineare Substitutionen, die in ihrer Gesamtheit eine eigentlich discontinuierliche Gruppe bilden mit dem Abbild der Fläche als Fundamentalbereich. Es erleidet $\eta$ überdies bei allen eindeutigen Transformationen der Fläche in sich lineare Substitutionen. Nun ist leicht evident, *dass wir hier zu jenen beiden $\eta$-Functionen zurückgeführt werden, die wir in sofort verständlicher Abkürzung $\eta(2, 4, 5; z)$, $\eta(2, 5, 6; z)$ schreiben.* Man bemerke nur, dass Stücke der reellen Axe der einzelnen Fläche in der bezüglichen $\eta$-Ebene stets Kreisbogen als Abbilder liefern; denn symmetrische Umformungen der Fläche in sich, bei denen Teile der reellen $z$-Axe an ihrer Stelle bleiben, liefern Spiegelungen der $\eta$-Ebene. Dass aber dann ein einzelnes Halbblatt der Fläche sich auf ein Kreisbogendreieck $(2, 4, 5)$ bez. $(2, 5, 6)$ abbildet, ist aus der Verzweigung der Fläche sofort evident.

Bei dieser Sachlage wird die einzelne unserer Flächen vermöge $\eta(z)$ auf eine Netz von $2 \cdot 120$ Kreisbogendreiecken der Einteilung $(2, 4, 5)$ bez. $(2, 5, 6)$ abgebildet, und die offenen Randcurven dieses grossen Po-

---

[1] Siehe KLEIN in den Mathem. Annalen, Bd. 20, pag. 49.

lygons müssen so zusammengeordnet sein, dass dasselbe eine in der Gesamtgruppe $\Gamma(2, 4, 5)$ bez. $\Gamma(2, 5, 6)$ ausgezeichnete Untergruppe definiert. Hier zeigt sich nun, dass die gewünschte Zusammenordnung der Randcurven des Polygons überhaupt nur in einer einzigen Weise getroffen werden kann. Daraus aber würde folgen, *dass die einzelne unserer Flächen aus der Zahl, Lage und Art ihrer Verzweigungspunkte sowie ihrer Eigenschaft, die $G_{120}$ von Transformationen in sich zu besitzen, bereits eindeutig bestimmt ist.* Man kann dies durch wirkliche Herstellung der betreffenden Dreiecksnetze und Discussion derselben thatsächlich durchführen. Findet man aber die graphische Handhabung grösserer Dreiecksnetze zu umständlich, so lässt sich auf folgende Art eine wesentliche Vereinfachung der Schlussweise herbeiführen.

Sei $\Gamma$ eine unserer beiden Gruppen $\Gamma(2, 4, 5)$ und $\Gamma(2, 5, 6)$ und $\Gamma_{120}$ eine in $\Gamma$ ausgezeichnete Untergruppe, deren zugehörige endliche Gruppe $G_{120}$ mit der Permutationsgruppe von fünf Dingen isomorph sei. Die Function $z(\eta)$ nimmt im Polygon der Gruppe $\Gamma_{120}$ den einzelnen complexen Wert 120 Male an, und die Aufgabe, bei gegebenem $z$ den einzelnen Punkt des Polygons zu bestimmen, ist im Sinne einer in der Theorie der Modulfunctionen [1] gebräuchlichen Sprechweise als ein Galois'sches Problem $120^{\text{sten}}$ Grades zu bezeichnen. Bei der bekannten Structur der $G_{120}$ hat dieses Problem eine Resolvente fünften Grades, und umgekehrt kann die $G_{120}$ als Galois'sche Gruppe dieser Gleichung fünften Grades angesehen werden, das Polygon der $\Gamma_{120}$ aber als Riemann'sche Fläche der zugehörigen Galois'schen Resolvente. Es ist demnach evident, dass die $\Gamma_{120}$ mit jener Gleichung fünften Grades eindeutig bestimmt ist. Nun ist aber leicht zu zeigen, dass es für jeden unserer beiden Fälle $(2, 4, 5)$, $(2, 5, 6)$ nur *eine einzige* Gleichung fünften Grades giebt, deren Galois'sche Resolvente die hier zu fordernde Beschaffenheit hat. Um etwa bei $(2, 5, 6)$ zu verweilen, so müssen wir eine fünfblättrige Riemann'sche Fläche construieren, die nur bei $z = 0, 1, \infty$ verzweigt ist. Bei $z = \infty$ müssen alle fünf Blätter zusammenhängen, bei $z = 1$ müssen zwei Verzweigungspunkte zu zwei bez. drei Blättern vorliegen, endlich bei $z = 0$ hängen die Blätter zu Paaren zusammen oder sie verlaufen isoliert. Es existiert nur *eine* Riemann'sche Fläche, die diesen Anforderungen genügt;

[1] Siehe M. I, pag. 607 ff.

dieselbe liefert in der Dreiecksteilung der $\eta$-Ebene das in Fig. 3 gezeichnete Polygon, wobei übrigens zur Vereinfachung der Zeichnung eine gegen früher etwas veränderte Lage des Hauptkreises der Dreiecksteilung angenommen wurde. Ein analoges Resultat entspringt im Falle $(2, 4, 5)$, wo sich das Polygon der Fig. 4 als einzig brauchbares einstellt. Indem hiernach die Resolventen fünften Grades eindeutig bestimmt sind, gilt ein Gleiches von den Gruppen $\Gamma_{120}$, und alle voraufgehend aufgestellten Behauptungen sind damit verificiert.

Fig. 3.

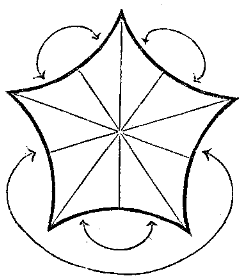
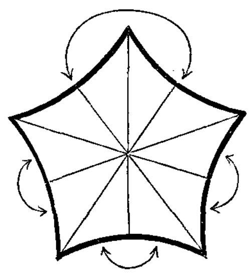


Fig. 4.



Es mag noch interessieren, die explicite Gestalt der beiden Gleichungen fünften Grades kennen zu lernen, die den zwei angegebenen Polygonen zugehören; man findet für die Fälle $(2, 4, 5)$ resp. $(2, 5, 6)$:

$$z : z - 1 : 1 = \tau^4(4\tau - 5) : (\tau - 1)^2(4\tau^3 + 3\tau^2 + 2\tau + 1) : -1,$$

$$z : z - 1 : 1 = \tau^2(\tau^3 - 5\tau^2 - 5\tau + 45) : (\tau - 3)^3(\tau + 2)^2 : 4 \cdot 27,$$

wobei $\tau$ als Unbekannte und $z$ als Parameter zu denken ist. Hier hat man mit zwei Gleichungen fünften Grades zu thun, die durch eindeutige Functionen von $\eta(2, 4, 5; z)$ bez. $\eta(2, 5, 6; z)$ auflösbar sind.

## § 6. *Von der Beziehung der beiden Curven $C_6$ und $C_8$ auf das Ikosaeder.*

Die gewonnenen Ergebnisse gestatten, eine grosse Reihe von Folgerungen nach Seiten der Geometrie zu ziehen; man wird die auf dem Hyperboloid $F_2$ vorliegenden Verhältnisse ausführlich mit den beiden geschlossenen Netzen zu 2.120 Dreiecken in Connex setzen können. Aus dem sich hier bietenden Untersuchungsbereich soll indes nur eine einzige Frage discutiert werden. Bevorzugen wir das eine System der geradlinigen Erzeugenden auf dem Hyperboloid $F_2$, so schneidet die einzelne Gerade die $C_6$ in drei, die $C_8$ in vier Punkten. Hier liegt also eine 3-4-deutige algebraische Correspondenz[1] zwischen beiden Curven vor, und diese wollen wir doch auch ganz direct von den Kreisbogendreiecken aus verstehen.

Zu diesem Ende sei zunächst bemerkt, dass der einzelnen geradlinige Erzeugenden vom Parameter $\lambda$ doch der Punkt $\lambda$ einer Kugel entsprechend gesetzt werden kann, welche letztere wir als Trägerin der complexen Werte $\lambda$ benutzen. Diese Kugel ist kurz als Ikosaeder zu bezeichnen, denn sie erfährt die Ikosaederdrehungen bei der Hälfte der Substitutionen der $G_{120}$. Man kann somit sagen: *Das Ikosaeder ist auf die $C_6$ ein-dreideutig, auf die $C_8$ ein-vierdeutig bezogen.*

Um nun die hier vorliegenden Correspondenzen in einfachster Weise durch Figuren zu illustrieren, gehen wir auf einen sehr wichtigen Satz Poincaré's über die Abhängigkeit verschiedener Dreiecksfunctionen von einander zurück.[2] Nach diesem Satze ist $\eta(2, 3, 5; z)$ — um sogleich diese sofort verständliche Bezeichnung zu gebrauchen — eine eindeutige Function von $\eta(2, 3, \infty; z)$, desgleichen ist $\eta(2, 4, 5; z)$ eindeutig in $\eta(2, 4, \infty; z)$ und $\eta(2, 5, 6; z)$ in $\eta(2, \infty, 6; z)$. Zu $\eta(2, 3, \infty; z)$ gehört die der Theorie der Modulfunctionen zu Grunde liegende Gruppe; die Gruppen von $\eta(2, 4, \infty; z)$ und $\eta(2, \infty, 6; z)$ lassen sich arithmetisch ohne Mühe mit Hülfe der Irrationalitäten $\sqrt{2}$ bez. $\sqrt{3}$ definieren, und es trifft sich, dass die Reduction dieser Gruppen modulo 5 genau auf jene beiden endlichen Gruppen $G_{120}$ führt, die wir in § 4 aus den damaligen Substitutionen (2) bez. (3) aufbauten.

Die Beziehung zwischen den Dreiecken $(2, 4, \infty)$ und $(2, 3, \infty)$ ist nun in Fig. 5 bezeichnet; man sieht, dass sich zwei Dreiecke $(2, 4, \infty)$ genau mit einem Complex dreier Dreiecke $(2, 3, \infty)$ decken. Demgemäss werden die 2.120 Dreiecke des zur Curve $C_6$ gehörenden Po-

---

[1] Siehe über diesen Gegenstand HURWITZ in den Mathem. Annalen, Bd. 28, sowie M. II, pag. 518.

[2] Siehe POINCARÉ in den Acta mathematica, Bd. 5.

lygons genau $3.(2.60)$ Dreiecke $(2, 3, \infty)$ bedecken, d. i. genau drei Abbilder des Ikosaeders, und hierin liegt die 1-3-deutige Beziehung des letzteren auf die $C_6$ offen vor. An der unteren Spitze der Figur 5 bei $\eta = 0$ deckt sich das Dreieck $(2, 4, \infty)$ gerade genau mit dem Dreieck $(2, 3, \infty)$; an der oberen nach $\eta = i\infty$ ziehenden Spitze decken sich erst zwei Dreiecke $(2, 3, \infty)$ mit einem Dreieck $(2, 4, \infty)$. Dies ergiebt den Satz: *Das durch die $C_6$ gegebene algebraische Gebilde lässt sich auch durch dreifache Überdeckung des Ikosaeders definieren, wobei an den zwölf Ikosaederecken immer zwei Blätter zusammenhängen.* Da $p = 4$ sein muss,

Fig. 5.

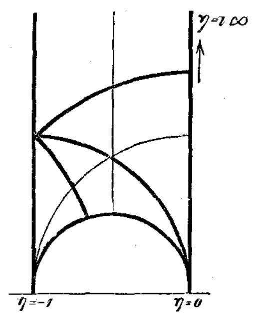
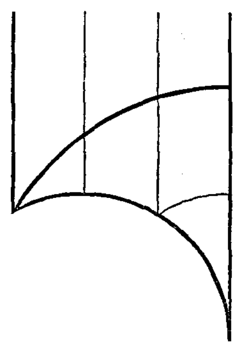



Fig. 6.



so treten weitere Verzweigungspunkte nicht auf, und also giebt es unter den Erzeugenden der einen Art auf $F_2$ nur 12 (gewöhnliche) Tangenten der Curve sechster Ordnung $C_6$.

Die Beziehung zwischen den Dreiecken $(2, 3, \infty)$ und $(2, 6, \infty)$ ist in Fig. 6 illustriert, es decken sich immer zwei Dreiecke $(2, 6, \infty)$ mit vier Dreiecken $(2, 3, \infty)$; damit aber wird die 1-4-deutige Beziehung der $C_8$ auf das Ikosaeder evident. Insbesondere lesen wir noch aus Fig. 6 ab: *Das durch $C_8$ gegebene Gebilde kann man auch durch ein vierfach überdecktes Ikosaeder definieren, wobei an der einzelnen Ecke immer 3 Blätter verzweigt sind;* dies liefert wirklich $p = 9$.

# ZWEITER TEIL.

## Entwicklungen über die Dreiecksfunctionen $\eta(2,3,7;z)$, $\eta(2,4,7;z)$ und einige verwandte Polygonfunctionen.

### § 1. *Bericht über die Gruppen der Dreiecke* $(2, 3, 7)$ *und* $(2, 4, 7)$ *und Aufstellung zweier zur Transformation siebenter Ordnung gehörender Untergruppen.*

Ohne die Berührung mit bekannten functionentheoretischen Untersuchungen zu verlieren, können wir die unternommenen Entwicklungen noch in das Gebiet der Transformation siebenter Ordnung fortsetzen. Hierbei ist zuvörderst kurz der arithmetische Charakter der zu den Kreisbogendreiecken $(2, 3, 7)$ und $(2, 4, 7)$ gehörenden Gruppen zu recapitulieren.[1]

Die fraglichen Gruppen lassen sich am einfachsten von der Gruppe des regulären rechtwinkligen Siebenecks aus beschreiben. Das Siebeneck soll dabei so liegen, dass die reelle $\eta$-Axe der Orthogonalkreis der Siebenecksseiten ist, während zwei unter diesen Seiten auf der imaginären $\eta$-Axe bez. dem Einheitskreise liegen. Zieht man alsdann in diesem Siebeneck die sieben Symmetrielinien, so entsteht die Dreiecksteilung $(2, 4, 7)$. Um die Einteilung $(2, 3, 7)$ zu gewinnen, bemerken wir, dass nach Formel (13), § 2, der Inhalt $I$ des Siebenecks:

$$I = 4k^2\left(5\pi - \frac{7\pi}{2}\right) = 6k^2\pi$$

ist, während für den Inhalt $\delta$ des Dreiecks $(2, 3, 7)$:

$$\delta = 4k^2\left(\pi - \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{7}\right) = \frac{2k^2\pi}{21}$$

[1] Die beiden Gruppen $(2, 3, 7)$ und $(2, 4, 7)$ sind ausführlich in den Mathem. Annalen, Bd. 41, pag. 443 ff. behandelt; die Bezeichnungsweise des vorliegenden Textes ist gegen die dortige ein wenig modificiert.

folgt. Es sind also 63 Dreiecke (2, 3, 7) zusammen inhaltsgleich mit dem Siebeneck, und dies wird geometrisch dadurch unmittelbar evident, dass sich das Siebeneck durch Hinzunahme neuer Symmetriekreise geradezu in 63 Dreiecke (2, 3, 7) zerlegt. Die betreffende Figur ist l. c. pag. 458 ausführlich gezeichnet, wo man dann auch nachsehen wolle, dass die fragliche Einteilung des Siebenecks eine unsymmetrische ist. Es sind in der That zwei Einteilungen möglich, die bei Inversion an einer Siebeneckdiagonale in einander übergehen.

Um jetzt die hier in Betracht kommenden $\eta$-Substitutionen bezeichnen zu können, haben wir den cubischen Zahlkörper der ganzzahligen Gleichung:

$$(1) \qquad j^3 + j^2 - 2j - 1 = 0$$

einzuführen. Dieser Körper besitzt in $[1, j, j^2]$ eine Basis, und es seien $A, B, C, D$ ganze Zahlen desselben. Wir haben dann hier wieder mit Substitutionen der Gestalt:

$$(2) \qquad \eta' = \frac{(A + B\sqrt{P})\eta + C + D\sqrt{P}}{(-C + D\sqrt{P})\eta + A - B\sqrt{P}}$$

zu thun, wobei $P$ die ganze Zahl $(j - 1)$ des cubischen Körpers ist. Des genaueren aber gelten nach den l. c. gegebenen Entwicklungen die Sätze: *Die Gruppe der Function $\eta(2, 4, 7; z)$ besteht aus allen duomodularen Substitutionen (2) im Verein mit denjenigen quadrimodularen, welche die Bedingungen:*

$$(3) \qquad A \equiv C, \qquad B \equiv D \pmod{2}$$

*befriedigen.* Bei der Gruppe (2, 3, 7) kommt die doppelte Möglichkeit, das Siebeneck in 63 Dreiecke zu teilen, zur Geltung. Wir müssen hier nämlich die gesamten quadrimodularen Substitutionen (2) in zwei Classen teilen; die Substitutionen der einen Classe sollen den Bedingungen genügen:

$$(4) \qquad A + B + (j^2 + j - 1)D \equiv 0, \qquad C + (j^2 + j - 1)B + D \equiv 0, \pmod{2},$$

diejenigen der anderen Classe aber den Bedingungen:

$$(5) \qquad A + (j^2 + j - 1)B + D \equiv 0, \qquad C + B + (j^2 + j - 1)D \equiv 0, \pmod{2}.$$

*Es bilden dann die Substitutionen der einen oder zweiten Classe die Gruppe*

$(2, 3, 7)$, *je nachdem wir von der einen oder andern Einteilung des Siebenecks ausgehen.*

Die linke Seite der Gleichung (1) reduciert sich nach dem Zahlmodul 7 auf den Cubus des linearen Ausdrucks $(j - 2)$. Wir wollen dementsprechend die beiden Gruppen $(2, 3, 7)$ und $(2, 4, 7)$ modulo 7 reducieren, indem wir zugleich $j \equiv 2$ und im Anschluss daran

$$\sqrt{P} = \sqrt{j-1} \equiv 1 \pmod{7}$$

schreiben. Die Determinanten der zur Verwendung kommenden Substitutionen (2) sind durchweg quadratische Reste modulo 7; man kann die modulo 7 reducierten Substitutionen dieserhalb dadurch zu unimodularen ausgestalten, dass man jeweils die vier Coefficienten mit einer ganzen rationalen Zahl als gemeinsamen Faktor versieht. *Auf die bezeichnete Weise lassen sich die beiden Gruppen* $(2, 3, 7)$, $(2, 4, 7)$, *wie man sieht, homomorph* [1] *auf die bekannte Gruppe* $G_{168}$ *der* 168 *incongruenten unimodularen Substitutionen mit ganzen rationalen Coefficienten:*

$$\omega' \equiv \frac{\alpha\omega + \beta}{\gamma\omega + \delta} \pmod{7}, \tag{6}$$

*beziehen.* Dabei entspricht einer Substitution der Gruppe $(2, 3, 7)$ bez. $(2, 4, 7)$ stets *eine* Operation der $G_{168}$, während natürlich umgekehrt einer Substitution (6) unendlich viele Substitutionen in der einzelnen jener beiden Gruppen zugeordnet sind.

Indem wir insbesondere diejenigen Substitutionen der Gruppe $(2, 3, 7)$ bez. $(2, 4, 7)$ sammeln, welche der Identität (6) zugehören, werden wir in jeder unserer beiden Dreiecksgruppen *eine ausgezeichnete Untergruppe* $\Gamma_{168}$ *von Index* 168 *gewinnen.* Unter diesen beiden Untergruppen $\Gamma_{168}$ ist die zur Gruppe $(2, 3, 7)$ gehörende sehr bekannt; sie spielt bei der Transformation siebenter Ordnung der elliptischen Functionen ihre bekannte wichtige Rolle.[2] Sollen wir die beiden Gruppen durch die Bezeichnungen $\Gamma_{168}(2, 3, 7)$ und $\Gamma_{168}(2, 4, 7)$ unterscheiden, so könnte man die zugehörigen Polygone bez. geschlossenen Flächen durch $F_{168}(2, 3, 7)$ und $F_{168}(2, 4, 7)$ bezeichnen. Man kann dieselben zu 168-blättrigen

[1] Wegen der hier gebrauchten Bezeichnungsweise sehe man den eben mehrfach genannten Band 41 der Annalen, pag. 466, Note.

[2] Siehe Klein, Bd. 14 der Annalen, pag. 429 ff. oder M. I, pag. 692 ff.

Riemann'schen Flächen umgestalten, welche über den Ebenen $y$ der zu $\eta(2, 3, 7; y)$ und $\eta(2, 4, 7; y)$ inversen Functionen gelagert sind. Aus der leicht festzustellenden Verzweigung dieser Flächen folgt alsdann, *dass sie zu den Geschlechtern* $p = 3$ *und* $p = 10$ *gehören*, was ein für die Gruppe $\Gamma(2, 3, 7)$ wieder sehr bekanntes Resultat einschliesst. Die nun zu entwickelnde functionentheoretische Behandlung der $\Gamma_{168}(2, 4, 7)$ basieren wir auf die Gruppe $G_{168}$ der Transformationen der Fläche in sich.

## § 2. *Vom functionentheoretischen Charakter der beiden Untergruppen* $\Gamma_{168}$.

Die functionentheoretische Behandlung der zu $(2, 3, 7)$ gehörenden Untergruppe $\Gamma_{168}$ ist von KLEIN l. c. geleistet worden. Es zeigte sich auf Grund geometrisch-functionentheoretischer Überlegungen, dass das durch die fragliche Gruppe definierte algebraische Gebilde vom Geschlechte $p = 3$ als Normalcurve [1] die durch

$$z_1^3 z_4 + z_4^3 z_2 + z_2^3 z_1 = 0 \tag{1}$$

gegebene ebene Curve vierter Ordnung besitzt, wobei $z_1, z_2, z_4$ homogene Punktcoordinaten einer Ebene sind. Diese Curve geht der $G_{168}$ entsprechend durch 168 ternäre lineare Substitutionen der $z_\alpha$ in sich selbst über, und in der Existenz und Gestalt [2] dieser ternären Gruppe gewann die Untersuchung eine neue Basis.

Einmal war nämlich die Gruppe $G_{168}$ als Collineationsgruppe für die $z_\alpha$-Ebene aufs neue einer geometrischen Untersuchung fähig. Fürs zweite konnte man die Hülfsmittel der linearen Invariantentheorie heranziehen, um neben der linken Seite der Gleichung (1) andere wichtige Formen $f(z_1, z_2, z_4)$ zu gewinnen, welche gegenüber der ternären Gruppe $G_{168}$ die Rolle absoluter Invarianten spielen. Es ist durch KLEIN [3] und GORDAN [4] sogar wieder das »volle System» der hier in Betracht kommenden

[1] M. I, pag. 569.

[2] Wegen der letzteren sehe man M. I, pag. 705.

[3] Math. Annalen, Bd. 14, pag. 446 und Bd. 15, pag. 265 ff.

[4] Math. Annalen, Bd. 17, pag. 370.

Formen aufgestellt. Dasselbe umfasst insgesamt *vier* Bildungen der Dimensionen $4, 6, 14$ und $21$; wir bezeichnen diese Formen kurz durch $f_4, f_6, f_{14}$ und $f_{21}$.[1] Zwischen ihnen besteht die algebraische Identität:

$$
\begin{aligned}
(2) \qquad f_{21}^2 = f_{14}^3 &+ 1728 f_6^7 - 88 f_4^2 f_6 f_{14}^2 + 16.63 f_4 f_6^4 f_{14} \\
&+ 17.64. f_4^4 f_6^2 f_{14} - 256 f_4^7 f_{14} - 128.469 f_4^3 f_6^5 \\
&+ 43.512 f_4^6 f_6^3 - 2048 f_4^9 f_6,
\end{aligned}
$$

die weiterhin mehrfach zur Verwendung kommt.

Sei jetzt irgend eine gegenüber der $G_{168}$ invariante Curve $n^{\text{ter}}$ Ordnung in der $z_\alpha$-Ebene durch $f_n(z_\alpha) = 0$ vorgelegt, so wird die links stehende Form $n^{\text{ten}}$ Grades gegenüber der $G_{168}$ absolut invariant sein.[2] Es ist demnach $f_n$ als ganze rationale, in den $z$ homogene, Verbindung der $f_4, f_6, \ldots$ darstellbar; und zwar genügen, wenn wir uns auf irreducibele Curven einschränken wollen, offenbar bereits $f_4$, $f_6$ und $f_{14}$ zur Darstellung aller $f_n$:

$$
(3) \qquad f_n(z_1, z_2, z_4) = G(f_4, f_6, f_{14}).
$$

Umgekehrt können wir auf diese Weise unendlich viele, gegenüber der $G_{168}$ invariante, irreducibele Curven der $z_\alpha$-Ebene gewinnen, und durch diese Curven sind alsdann ebenso viele algebraische Gebilde definiert, deren einzelnes 168 eindeutige Transformationen in sich zulässt.

Wenn nun das durch $f_4 = 0$ dargestellte Gebilde für die Transformation siebenter Ordnung der Modulfunctionen die Grundlage liefert, so kann man fragen, in wie weit alle die übrigen soeben aufgestellten algebraischen Gebilde bei der Transformation siebenter Ordnung sonstiger automorpher Functionen Rolle spielen mögen. Hier bietet sich nun als eine erste Anwendung das durch $f_6 = 0$ dargestellte algebraische Gebilde dar. Die ausführliche Gestalt von $f_6$ ist:

$$
(4) \qquad 5 z_1^2 z_2^2 z_4^2 - z_1^5 z_2 - z_2^5 z_4 - z_4^5 z_1 = 0.
$$

Die hierdurch dargestellte ebene Curve sechster Ordnung $C_6$ ist irredu-

---

[1] Wegen der invariantentheoretischen Definition und Gestalt der $f_4, f_6, \ldots$ sehe man M. I, pag. 733; die Relation (2) ist von GORDAN l. c. angegeben.

[2] Siehe dieserhalb etwa M. I, pag. 702.

cibel und singularitätenfrei, so dass sie das Geschlecht $p = 10$ besitzt; *es liegt also in* (4) *ein algebraisches Gebilde* $p = 10$ *mit* 168 *Transformationen in sich vor, welche die uns bekannte* $G_{168}$ *bilden.* Die Identität dieses Gebildes mit dem im vorigen Paragraphen auf arithmetischem Wege von der $\Gamma_{168}(2, 4, 7)$ aus abgeleiteten Gebilde des gleichen Geschlechtes lässt sich nun ohne besondere Mühe nachweisen.

Vorab sind zugleich zur Vorbereitung späterer Überlegungen einige geometrische Sätze über die Collineationsgruppe $G_{168}$ zusammenzufassen: Die Substitutionen der Periode 7 in $G_{168}$ besitzen in der $z_\alpha$-Ebene im ganzen 8 mal 3 Fixpunkte, die als Punkte $p_7$ bezeichnet werden mögen, und die bezüglich der $G_{168}$ alle mit einander aequivalent sind. Die 21 Paare einander inverser Substitutionen der Periode 4 haben 21 mal 3 Fixpunkte $p_4$; diese Punkte zerfallen in zwei Classen zu 42 bez. 21 Punkten, wobei nur die Punkte der gleichen Classe aequivalent sind; die 21 Punkte der zweiten Classe mögen allgemein $p_4'$ heissen. Die 28 Paare inverser Substitutionen der Periode 3 haben 28 mal 3 Fixpunkte, die wieder in zwei Classen zu 56 Punkten $p_3$ und 28 Punkten $p_3'$ zerfallen. Die noch fehlenden 21 Substitutionen haben den Charakter harmonischer Perspectivitäten; die 21 Axen sind die Verbindungslinien der 21 Paare zugeordneter Punkte $p_4$, die 21 Centren sind die Punkte $p_4'$.

Man bringe nun die durch (4) gegebene $C_6$ mit den Curven $C_4$, $C_{14}$, $C_{21}$ der Gleichungen $f_4 = 0$, $f_{14} = 0$, $f_{21} = 0$ zum Durchschnitt und specialisiere zugleich die Relation (2) für die hier vorliegende Annahme $f_6 = 0$ zu:

$$(5) \qquad f_{21}^2 = f_{14}^3 - 256 f_4^7 f_{14}.$$

*Dass die* $C_4$ *auf der* $C_6$ *die* 24 *Punkte* $p_7$ *ausschneidet, ist aus der Theorie der Modulfunctionen bekannt.*[1] Von den Punkten $p_3$, $p_3'$ liegt kein einziger auf $C_6$; zu den $p_3'$ gehört nämlich auch $z_1 = z_2 = z_4$, und dieser Punkt genügt der Gleichung (4) nicht; die Punkte $p_3$ sind hingegen die Schnittpunkte von $f_4 = 0$ und $f_{14} = 0$ und liegen deshalb nicht auf der $C_6$. Daraufhin prüfe man das System der 84 Schnittpunkte von $C_6$ und $C_{14}$. Da dieselben zufolge (5) auf den 21 Perspectivitätsaxen liegen, so kann es sich nur entweder um ein beliebiges System von 84 aequivalenten

[1] M. I, pag. 733.

Punkten der genannten Axen handeln, oder *im besonderen coincidieren die* 84 *Punkte auf* $C_6$ *und* $C_{14}$ *zu Paaren an den* 42 *Stellen* $p_4$. Aus der Gestalt der Gleichung (5) ergiebt sich leicht, dass der letztere Fall vorliegt; dann aber folgt sogleich weiter: Die $C_{21}$ schneidet $C_6$ in 126 Punkten, *nämlich einmal den* 42 *Punkten* $p_4$ *und sodann in weiteren* 84 *aequivalenten Punkten.*

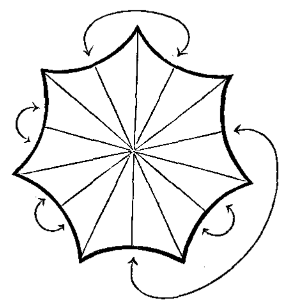
Bei dieser Sachlage wird durch

$$(6) \qquad y : y - 1 : 1 = f_{21}^2 : f_{14}^3 : -256 f_4^7 f_{14}$$

eine 168-wertige algebraische Function unseres Gebildes definiert, welche in aequivalenten Punkten der $C_6$ gleiche Werte annimmt. Dabei coincidieren die 168 Punkte $y = 0$ zu 2 an 84 Stellen, die Punkte $y = 1$ zu 4 an den 42 Stellen $p_4$ und die Punkte $y = \infty$ zu 7 an den 24 Stellen $p_7$. Indem wir somit die Curve $C_6$ auf die Ebene $y$ abbilden, entspringt eine 168-blättrige Riemann'sche Fläche des Geschlechtes $p = 10$, die nach Art und Lage der Verzweigungspunkte sowie betreffs der Gruppe $G_{168}$ der Transformationen in sich mit der im vorigen Paragraphen gewonnenen Fläche übereinstimmt. Die genaue Identität beider Flächen lässt sich am einfachsten unter Benutzung der Resolventen siebenten Grades wie folgt beweisen.

Um direct an die Vorstellungen des vorigen Paragraphen anzuknüpfen, so muss sich ein Polygon von $2 . 7$ Kreisbogendreiecken $(2, 4, 7)$ derart construieren lassen, dass bei Abbildung desselben auf die $y$-Ebene eine siebenblättrige Fläche der nachfolgenden Verzweigung entspringt: Nur bei $y = 0, 1, \infty$ sollen Verzweigungspunkte liegen, und zwar muss die Anzahl in Cyclus zusammenhängender Blätter bez. ein Teiler von 2, 4 und 7 sein, je nachdem $y = 0, 1$ oder $\infty$ vorliegt; es soll aber auch wirklich bei $y = 0$ wenigstens ein Verzweigungspunkt zu 2, bei $y = 1$ zu 4, bei $y = \infty$ zu 7 Blättern vorkommen. Die Untersuchung zeigt, dass sich im ganzen *fünf* Polygone dieser Art auffinden lassen. Indessen sind unter diesen Polygonen nur *zwei* unsymmetrische enthalten, die durch symmetrische Umformung in einander übergehen. Dass aber diese beiden Polygone die Resolventen $7^{\text{ten}}$ Grades ergeben, um welche es sich hier handelt, ist aus der Structur der Gruppe $G_{168}$ bekannt. Mit den beiden Gleichungen siebenten Grades ist nun auch die Riemann'sche Fläche ihrer gemeinsamen Galois'schen Resolvente eindeutig bestimmt, und also ist die genaue Identität der beiden auf functionentheoretischem und arithmetischem Wege gewonnenen Riemann'schen Flächen auf demselben Wege wie oben in § 5 bei der Transformation fünfter Ordnung erhärtet.

Fig. 7.



Es sei gestattet, das eine der beiden unsymmetrischen Polygone hierneben in Fig. 7 mitzuteilen. Gebrauchen wir jetzt wieder die in (6) eingeführte Function $y$ und wählen übrigens eine Hauptfunction $\tau(\eta)$ für das Polygon zweckmässig aus, so kann man nach einer bekannten Methode[1] die Gestalt der beiden Gleichungen siebenten Grades berechnen; es findet sich:

$$(7)\quad y-1:y:1=\tau^4(\tau-1)^2\left(\tau+\frac{1\pm i\sqrt{7}}{4}\right):\left(\tau^2-\frac{7\mp 3i\sqrt{7}}{14}\tau-\frac{1\pm i\sqrt{7}}{7}\right)^2$$
$$\left(\tau^3-\frac{21\pm 5i\sqrt{7}}{28}\tau^2-\frac{3\mp i\sqrt{7}}{7}\tau+\frac{7\pm 11i\sqrt{7}}{4\cdot 49}\right):\frac{49\pm 13i\sqrt{7}}{7^4}.$$

Man vergleiche dieses Resultat mit einer von Klein in Bd. 15 der Annalen, pag. 266, unter (12) aufgestellten Gleichung $7^{\text{ten}}$ Grades. Die letztere muss in (7) übergehen, wenn wir $\nabla = 0$ d. i. $f_6 = 0$ nehmen. Man hat hier nur folgende kleine Rechnung vorzunehmen: erstlich schreibe man an Stelle von (7):

$$(8)\qquad \tau^4(\tau-1)^2\left(\tau+\frac{1\pm i\sqrt{7}}{4}\right)=\frac{49\pm 13i\sqrt{7}}{7^4}(y-1).$$

Nun werde an Stelle von $\tau$ die neue Variabele $x$ durch die nachfolgende Bestimmung eingeführt:

$$x^2=-\frac{7\pm i\sqrt{7}}{2}\left(\tau+\frac{1\pm i\sqrt{7}}{4}\right).$$

Nach Ausführung dieser Substitution lässt sich aus (8) rechter und linker Hand die Quadratwurzel rational ausziehen, und es entspringt die Gleichung:

$$(9)\quad x^7+7\cdot\frac{1\pm i\sqrt{7}}{2}x^5-7(4\mp i\sqrt{7})x^3-7\cdot\frac{7\pm 3i\sqrt{7}}{2}x-16\sqrt{y-1}=0.$$

Hier liegt aber genau die l. c. abgeleitete Gleichung für $\nabla = 0$ vor.

[1] Cf. M. I, pag. 638.

## § 3. *Von den durch die Gleichung* $\mu_1 f_6^2 + \mu_2 f_4^3 = 0$ *definierten algebraischen Gebilden.*

Nächst den beiden im vorigen Paragraphen besprochenen Riemann'schen Flächen sind die einfachsten algebraischen Gebilde mit der Gruppe $G_{168}$ von Transformationen in sich diejenigen, welche durch die Gleichungen zwölften Grades:

$$f_{12} = \mu_1 f_6^2 + \mu_2 f_4^3 = 0 \tag{1}$$

definiert sind. An Stelle eines einzelnen Gebildes haben wir hier gleich zweifach unendlich viele, insofern der Wert der complexen (zwei reelle Parameter einschliessenden) Grösse $\mu = \mu_1 : \mu_2$ willkürlich wählbar bleibt. Hier gilt nun als erster Satz: *Unter den* $\infty^2$ *durch* (1) *gegebenen Curven* $C_{12}$ *giebt es nur zwei reducibele, diejenigen nämlich, welche den Werten* $\mu_1 = 0$ *und* $\mu_2 = 0$ *entsprechen.* Sollte nämlich für einen von $\mu = 0$ und $\infty$ verschiedenen Wert des Quotienten $\mu_1 : \mu_2$ die Form $f_{12}$ einen Factor $f_m$ vom Grade $m < 12$ besitzen, so wird die Form $f_m$ jedenfalls nicht durch *alle* 168 ternären Substitutionen der $G_{168}$ in sich selbst übergehen. Ist sie aber gegenüber einer Untergruppe invariant, welche innerhalb $G_{168}$ den Index[1] $\nu$ hat, so geht $f_m$ durch die Substitutionen der $G_{168}$ insgesamt in $\nu$ Gestalten $f_m, f'_m, \ldots, f_m^{(\nu-1)}$ über, und es werden diese $\nu$ unterschiedenen Formen $m^{\text{ten}}$ Grades durchgängig Factoren von $f_{12}$ sein. Nun ist, abgesehen von $\nu = 1$, der kleinste Wert von $\nu$ gleich 7. Bereits dieser würde $m = 1$ erfordern, und man hätte in

$$f_{12} = f_1 \cdot f'_1 \cdots f_1^{(6)} \cdot f_5$$

als letzten Factor eine Form fünften Grades $f_5$ mit 168 Substitutionen in sich; eine solche existiert indessen nicht. Auch die weiter folgenden Werte $\nu = 8, \ldots$ führen auf keine mögliche Zerfällung von $f_{12}$, und also sind alle $\infty^2$ algebraischen Gebilde (1) mit Ausnahme der beiden für $\mu = 0, \infty$ irreducibel.

[1] Vergl. M. I, pag. 309.

Um das Geschlecht der Gebilde (1) zu berechnen, bemerke man erstlich die Sonderstellung der 24 Punkte $p_7$. Sind in einem einzelnen derselben die Tangenten der beiden Curven $f_4 = 0$ und $f_6 = 0$ durch $x = 0$ bez. $y = 0$ bezeichnet, so hat man in der Nähe dieses Punktes als Gleichung der $C_{12}$ angenähert $\mu_1 y^2 + \mu_2 x^3 = 0$; *jede* $C_{12}$ *weist sonach in den* 24 *Punkten* $p_7$ *ebensoviele Spitzen auf.* Sonstige mehrfache Punkte treten aber im allgemeinen nicht auf. Denn es giebt ausser den Punkten $p_7$ keine weiteren Punkte der $z_a$-Ebene, welche zugleich auf allen $\infty^2$ Curven $C_{12}$ gelegen wären. Von partikulären Werten $\mu$ und von den Punkten $p_7$ abgesehen ist nämlich ein Punkt einer $C_{12}$ insgesamt mit 168 oder 84 Punkten eben dieser $C_{12}$ bezüglich $G_{168}$ aequivalent. Ausser jenen 24 Spitzen müssten demnach mit einem gleich 84 weitere singuläre Punkte auftreten, und dies würde dem Umstande widersprechen, dass die Geschlechtszahl $p$ einer irreducibelen Curve notwendig $\geqq 0$ ist.

Die eben skizzierte Überlegung liefert nach einer bekannten Formel das Resultat, *dass unsere algebraischen Gebilde im allgemeinen das Geschlecht* $p = 31$ *besitzen.* Eine Herabminderung dieser Zahl $p$ ist nur in zwei partikulären Fällen möglich. Da nämlich die Punkte $p_3$ und $p_4$ immer nur auf einer der beiden Curven $C_4$ und $C_6$ liegen (und nicht auf der anderen), so haben wir nur noch die beiden speciellen Curven zwölfter Ordnung $f_{12}^{(3)} = 0$ und $f_{12}^{(4)} = 0$ zu discutieren, welche durch die 28 Punkte $p_3'$ bez. durch die 21 Punkte $p_4'$ hindurchlaufen.

Einer unter den Punkten $p_3'$ hat die Coordinaten $z_a = 1$; somit ist die besondere Curve $C_{12}^{(3)}$ gegeben durch:

$$f_{12}^{(3)}(z_a) = 27 f_6^2 - 4 f_4^3 = 0. \tag{2}$$

Die Punkte $p_3'$ sind in der $z_a$-Ebene Fixpunkte von Diedergruppen $G_6$. Ein und derselbe Punkt einer Riemann'schen Fläche kann aber nicht zugleich Fixpunkt einer $G_2$ und $G_3$ sein, die eine Diedergruppe $G_6$ zusammensetzen; vielmehr bemerkt man leicht, dass alle Substitutionen, die einen einzelnen Punkt der Fläche an seiner Stelle lassen, notwendig eine *cyclische* Gruppe bilden. Die $C_{12}^{(3)}$ muss demnach durch den einzelnen Punkt $p_3'$ mehrfach hindurchziehen, und die nähere Sachlage ergiebt 28 Doppelpunkte $p_3'$ für $C_{12}^{(3)}$. *Diese Curve hat somit das Geschlecht* $p = 3$

*und die Classe $k = 4$, und stellt sich mit ihren 28 Doppel- und 24 Rückkehrpunkten als die reciproke Curve der durch $f_4 = 0$ gegebenen $C_4$ dar.*[1]

Für die besondere Curve $C_{12}^{(4)}$ gelten völlig analoge Überlegungen. Die Gleichung dieser Curve wird man etwa aus dem Umstande ableiten, dass sie ($\varepsilon$ als primitive $7^{\text{te}}$ Einheitswurzel gebraucht) durch den Punkt:

$$z_1 : z_2 : z_4 = (\varepsilon + \varepsilon^{-1} - \varepsilon^2 - \varepsilon^{-2}) : (\varepsilon^2 + \varepsilon^{-2} - \varepsilon^4 - \varepsilon^{-4}) : (\varepsilon^4 + \varepsilon^{-4} - \varepsilon - \varepsilon^{-1})$$

hindurch zieht, der einer der 21 Punkte $p_4'$ ist; es findet sich:

$$f_{12}^{(4)}(z_\alpha) = f_6^2 + 4 f_4^3 = 0. \tag{3}$$

Noch einfacher aber ist es, die hier vorliegenden Werte $\mu_1 = 1$, $\mu_2 = 4$ aus gewissen weiter unten zu entwickelnden Überlegungen zu entnehmen. Übrigens beweist man, wie vorhin, dass die Punkte $p_4'$ Doppelpunkte der $C_{12}^{(4)}$ sind; *es liegt demgemäss hier ein algebraisches Gebilde des Geschlechtes $p = 10$ vor.*

Gehen wir zu einer beliebigen Curve $C_{12}$ des Büschels (1) zurück, so hält es nicht schwer, auf dem zugehörigen algebraischen Gebilde eine 168-wertige Function zu construieren. Die 48 Schnittpunkte der $C_{12}$ mit der durch $f_4 = 0$ gegebenen $C_4$ fallen zu Paaren in den 24 Punkten $p_7$ zusammen. Schneiden wir die $C_{12}$ ferner mit der durch $f_{14} = 0$ gegebenen $C_{14}$ indem wir vorab annehmen, dass der Quotient $\mu$ von $\mu_1$ und $\mu_2$ nicht gerade einen der partikulären Werte:

$$\mu = 0, \infty, \frac{1}{4}, -\frac{27}{4} \tag{4}$$

habe. Das Schnittsystem kann dann sicher keines der speciellen Punktsysteme $p_7, p_3, p_3', p_4, p_4'$ enthalten; es kann aber auch im allgemeinen kein System zu 84 Punkten $p_2$ enthalten, weil die Schnittpunkte der 21 Perspectivitätsaxen und der $C_{12}$ mit $\mu$ sämtlich veränderlich sind. Der Schnitt der $C_{12}$ und der $C_{14}$ liefert demnach 168 im allgemeinen durchaus getrennt liegende bezüglich $G_{168}$ aequivalente Punkte, die nur für

---

[1] Betreffs der hier auftretenden Curve vierter Classe sei auch die Göttinger Dissertation (1890) von Hrn. M. W. Haskell genannt: *Über die zu der Curve $\lambda^3\mu + \mu^3\nu + \nu^3\lambda = 0$ im projectiven Sinne gehörende mehrfache Überdeckung der Ebene.*

partikuläre $\mu$ in gewissen Systemen coincidieren können. Man definiere daraufhin die zum algebraischen Gebilde gehörende Function $y$ wie folgt:

$$(5) \qquad 4y = \sqrt{-\mu} \cdot \frac{f_{14}}{(\sqrt{f_4})^7} \cdot$$

Das Quadrat von $y$ ist eine algebraische Function unseres Gebildes; $y$ selbst ist unverzweigt, aber infolge der Quadratwurzel im Nenner von (5) könnte $y$ bei Periodenwegen einen Zeichenwechsel erfahren oder auch in aequivalenten Punkten (bezüglich der $G_{168}$) entgegengesetzte Werte haben. Inzwischen können wir mit Hülfe der Identität (1) die Gleichung (5) in die andere Gestalt setzen:

$$(6) \qquad 4y = \mu^{-\frac{2}{3}} \frac{f_{14}}{(\sqrt[3]{f_6})^7};$$

und indem hier eine Cubikwurzel im Nenner steht, ist evident, *dass $y$ eine algebraische* 168-*wertige Function ist, die gegenüber den* 168 *Substitutionen absolut invariant ist.*

Nunmehr können wir unser algebraisches Gebilde auf eine 168-blättrige Riemann'sche Fläche über der $y$-Ebene beziehen. Verzweigungspunkte dieser Fläche werden immer dann eintreten, wenn für 168 bezüglich $G_{168}$ aequivalente Punkte der $C_{12}$ gewisse Coincidenzen eintreten. Wie wir schon sahen, kommen hier die Punkte $p_7$ in Betracht, jedoch im allgemeinen nicht die Punkte $p_3, p_4, p_3', p_4'$. Es bleibt somit nur noch die Discussion des Schnittes der $C_{12}$ mit der $C_{21}$. Die einzelne der 21 Axen schneidet $C_{12}$ in zwölf Punkten $p_2$, die zu je vier mit einander aequivalent sind. Einer dieser Punkte $p_2$ liegt im allgemeinen nur auf *einer* Axe; denn man stellt ohne Mühe durch gruppentheoretische Überlegungen fest, dass Schnittpunkte zweier Axen immer Punkte $p_3'$ oder $p_4'$ sind. Es folgt somit durch leichte Abzählung als Verzweigung unserer Riemann'schen Fläche: *Bei $y = \infty$ sind die Blätter zu je sieben in* 24 *Verzweigungspunkten verbunden; ausserdem finden sich an gewissen drei Stellen $y$ jedesmal* 84 *zweiblättrige Verzweigungspunkte.* Als Geschlecht dieser Fläche findet sich, wie es sein muss, $p = 31$.

Zur Berechnung der letzteren Verzweigungsstellen $y$ hat man in die Relation (2) § 2 die nachfolgenden Werte einzutragen:

$$(7) \qquad f_{21} = 0, \qquad f_{14} = \frac{4}{\sqrt{-\mu}} y (\sqrt{f_4})^7, \qquad f_6 = \frac{1}{\sqrt{-u}} (\sqrt{f_4})^3.$$

Neben $y = \infty$ ergeben sich daraufhin die drei im Endlichen gelegenen Verzweigungsstellen als Wurzeln der Gleichung:

$$\begin{aligned}(8)\qquad & \mu_1^2\mu_2 y^3 - 22\mu_1^2\mu_2 y^2 + \mu_1(16\mu_1^2 + 68\mu_1\mu_2 - 63\mu_2^2)y \\ & + (32\mu_1^3 + 344\mu_1^2\mu_2 + 938\mu_1\mu_2^2 + 27\mu_2^3) = 0.\end{aligned}$$

Der gleich folgenden Untersuchung halber müssen wir die Invarianten des durch die Verzweigungsstellen gegebenen Punktquadrupels aufstellen. Unter Gebrauch einer sehr bekannten Bezeichnungsweise findet sich:

$$(9)\qquad \begin{cases} g_2 = -2^2.3\mu_1^3\mu_2[3.(4\mu_1)^2 - 2.5.7.(4\mu_1)\mu_2 - 3^3.7\mu_2^2], \\ g_3 = -4\mu_1^4\mu_2^2[3^2.7(4\mu_1)^3 + 7.13.(4\mu_1)^2\mu_2 + 3^3.7.17(4\mu_1)\mu_2^2 + 3^6\mu_2^3], \\ \Delta = -2^4.3^6\mu_1^8\mu_2^3(4\mu_1 + 27\mu_2)^3(4\mu_1 - \mu_2)^4. \end{cases}$$

Weiter ergiebt sich für die absolute Invariante $I = g_2^3 : \Delta$, wenn wir uns der Abkürzung $4\mu_1 : \mu_2 = \tau$ bedienen:

$$\begin{aligned}(10)\qquad I : I - 1 : 1 = {} & \tau(3\tau^2 - 2.5.7\tau - 3^3.7)^3 \\ & : -(3^2.7\tau^3 + 7.13\tau^2 + 3^3.7.17\tau + 3^6)^2 \\ & : 27(\tau + 27)^3(\tau - 1)^4.\end{aligned}$$

Diese Formeln hat man näher zu discutieren, indem man zugleich auf die Beziehung zwischen der absoluten Invariante $I$ und dem Doppelverhältnis[1] der vier Verzweigungsstellen $y$ Rücksicht nimmt.

Diese Untersuchung wird in übersichtlichster Weise dadurch ausgeführt, dass man $\tau$ als complexe Veränderliche ansieht und in der Ebene derselben die sieben conformen Abbilder der $I$-Ebene zeichnet, wie sie der Gleichung (10) entsprechen. Um diese Abbilder für das Auge in Evidenz zu bringen, kann man etwa diejenigen Linienzüge der $\tau$-Ebene graphisch markieren, welche Abbilder der reellen $I$-Axe sind. Diese Linienzüge werden sich dreimal zu Paaren überkreuzen und dort Punkte mit $I = 1$ liefern; einer dieser Punkte liegt bei $\tau = 4\mu = -0{,}23\ldots$, die beiden anderen tragen conjugiert complexe Werte $\tau$. Des ferneren werden die in Rede stehenden Linienzüge einander zu dreien in den beiden Punkten

[1] Siehe etwa M. I, pag. 70.

$4\mu = \tau = \frac{35 \pm 16\sqrt{7}}{3}$ überkreuzen und dortselbst Punkte mit $I = 0$ festlegen. Endlich liefern noch die beiden Kreuzungsstellen $4\mu = \tau = -27$ und $= 1$ Punkte mit $I = \infty$. Eine diesen Vorschriften entsprechende Zeichnung der $\tau$-Ebene wird man sich leicht herstellen.

Liegen die vier Verzweigungsstellen $y$ auf einem Kreise, so ist das Doppelverhältnis reell und $I$ ist reell und $\geqq 1$. Sehen wir etwa nur auf die Punkte der reellen $\mu$-Axe, so tritt dies nur für $4\mu \leqq -27$ ein: *Alle vier Verzweigungsstellen $y$ sind stets und nur dann reell, wenn $\mu$ im Intervall $-\infty \leqq \mu \leqq -\frac{27}{4}$ der reellen Axe liegt; für alle übrigen reellen $\mu$ liegt ausser $y = \infty$ nur noch eine Verzweigungsstelle auf der reellen $y$-Axe, die beiden andern sind dann conjugiert complex.* Hierneben merken wir noch den Punkt $\tau = 4\mu = -0{,}23\ldots$ als solchen an, dem ein *harmonisches* Doppelverhältnis entspricht, während für die beiden Verschwindungsstellen des Ausdrucks $(3\tau^2 - 70\tau - 189)$ *aequianharmonisches* Doppelverhältnis vorliegt.

Die beiden Werte $\tau = 1$ und $\tau = -27$ liefern $I = \infty$; hier fallen beide Male zwei unter den vier Verzweigungsstellen zusammen. Die 168-blättrige Fläche degeneriert dabei so, dass bei $\tau = 1$ je zwei coincidierende Verzweigungspunkte einen neuen zu *vier* Blättern ergeben, während bei $\tau = -27$ durch Zusammenfall zweier Verzweigungspunkte je ein *drei*blättriger entsteht. Dass hier die beiden im voraufgehenden Paragraphen behandelten Flächen wieder entstehen, ist aus den damaligen Entwicklungen leicht ersichtlich.

Die Coincidenz von *zweien* unter vier Punkten eines Quadrupels hat man in projectiver Hinsicht stets als etwas Partikuläres anzusehen; aber es gilt nicht notwendig das Gleiche für den Zusammenfall dreier oder aller vier Punkte. Man kann nämlich immer eine lineare Substitution auf $y$ (oder besser auf homogene $y_1, y_2$) ausüben, die im Sinne unserer Sprechweise hyperbolisch ist und einen oder auch zwei Punkte des Quadrupels zu Fixpunkten hat. Öfter wiederholte Anwendung dieser Substitution wird alsdann offenbar drei bez. alle Punkte des Quadrupels immer mehr zusammenrücken lassen. Um in diesem Sinne den Charakter unseres Punktquadrupels der Verzweigungsstellen $y$ für $\mu_1 = 0$ bez. $\mu_2 = 0$ näher zu untersuchen, muss man auf die zugehörigen Werte $I$ recurrieren.

Man findet aber $I = 0$ bez. $I = 1$ und hat somit für $\mu_2 = 0$ harmonisches, für $\mu_1 = 0$ aequianharmonisches Doppelverhältnis. Für $\mu = \infty$ und $\mu = 0$ sind sonach die eintretenden Coincidenzen allein Folgen einer unzweckmässigen Auswahl des $y$: *die vier Punkte $y$ haben bei $\mu = \infty$ eine Lage, die in projectivem Sinne von einem beliebigen harmonischen Punktquadrupel nicht verschieden ist, und Analoges gilt für $\mu = 0$.* Diese Auffassung wird für das Verständnis der gleich folgenden Entwicklungen notwendig sein.

## § 4. *Von den zu den Gebilden $\mu_1 f_6^2 + \mu_2 f_4^3 = 0$ gehörenden $\eta$-Functionen.*

Die letzt vorangehenden Entwicklungen hatten den Zweck, die Betrachtung der zu unseren algebraischen Gebilden gehörenden $\eta$-Functionen vorzubereiten. Zur Einführung der letzteren müssen wir gegenwärtig auf die bezüglichen Existenztheoreme zurückgreifen, wie sie in den Arbeiten von Klein in Bd. 21 der Math. Annalen sowie in den gleichzeitigen Abhandlungen Poincaré's aufgestellt und behandelt worden sind.

Auf einer vorgelegten Riemann'schen Fläche giebt es eine grosse Mannigfaltigkeit derartiger Functionen $\eta$, die bei geschlossenen Wegen auf der Fläche lineare Substitutionen erfahren, und es galt, unter denselben diejenigen herauszugreifen, welche besonders einfache Eigenschaften haben. Man wird erstlich verlangen, dass die Gruppe der zugehörigen linearen Substitutionen eigentlich discontinuirlich sei, wobei dann ein zugehöriger Discontinuitätsbereich gerade genau ein conformes Abbild der zerschnittenen Riemann'schen Fläche sein soll. Des ferneren sollen die Substitutionscoefficienten durchaus reell sein, so dass wir mit einer Hauptkreisgruppe zu thun haben, und es soll die zugehörige Polygonteilung nur die eine Halbebene bedecken.

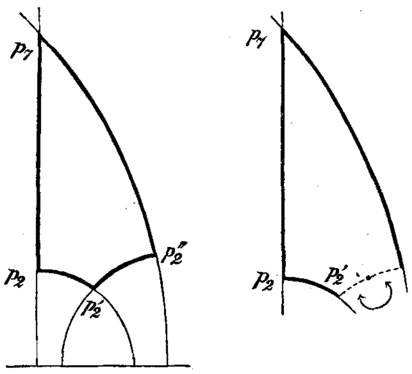
Um jetzt gleich auf eine einzelne unserer 168-blättrigen Flächen zurückzugehen, so ist durch die bisherigen Forderungen eine $\eta$-Function noch keineswegs eindeutig bestimmt. Vielmehr genügen denselben noch unendlich viele $\eta$-Functionen, deren Gruppen alsdann auf einander homomorph bezogen sind. Man kann aber eine einzelne unter diesen Functionen durch die Forderung aussondern, dass die Abbildung der Riemann'schen Fläche auf das Polygon der $\eta$-Halbebene *ohne Ausnahme* conform sei. Dieser Forderung zufolge wird sich z. B. die Umgebung eines einzelnen Windungspunktes der Fläche, die sich über sich selbst mehrfach hinüberzieht, in der $\eta$-Halbebene auf einen einfach bedeckten Vollkreis abbilden.

Man hat hier nun ein Beispiel jene Continuitätsbetrachtungen zu illustrieren, deren sich Klein und Poincaré beim Existenzbeweise der charakterisierten $\eta$-Function bedienten. Um dies weiter auszuführen, haben wir vorab den Umstand zu verwerten, dass die Fläche 168 eindeutige Transformationen in sich zulässt. Die $\eta$-Function erfährt entsprechend 168 lineare Substitutionen, und weiter ist eine Folge hiervon, dass sich das Polygon der $\eta$-Halbebene aus 168 mit einander aequivalenten Polygonen aufbauen lässt. Die Gruppe der $\eta$-Substitutionen, die den geschlossenen Wegen auf der Riemann'schen Fläche entsprechen, wird als ausgezeichnete Untergruppe $\Gamma_{168}$ vom Index 168 in einer umfassenderen Gruppe $\Gamma$ enthalten sein. *Diese letztere Gruppe $\Gamma$ wird aber vom Geschlechte $p = 0$ sein und lässt sich aus vier elliptischen Substitutionen $V_1$, $V_2$, $V_3$, $V_4$ der Perioden 7, 2, 2, 2 erzeugen, zwischen denen die Relation $V_1 \cdot V_2 \cdot V_3 \cdot V_4 = 1$ besteht.* Letztere Angaben folgen bei den Eigenschaften von $\eta$ aus dem Umstande, dass der Discontinuitätsbereich von $\Gamma$ ein Abbild der $\eta$-Ebene ist.

Den Parametern der Vierecksgruppe mit fest gegebenen Winkeln $\frac{\pi}{7}, \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}$ stehen nun die (beiden reellen) Parameter in dem System unserer algebraischen Gebilde gegenüber. Aber wir wollen die gegenseitige Abhängigkeit der beiderlei Parameter hier nicht in voller Allgemeinheit, sondern nur für die *symmetrischen* Riemann'schen Flächen verfolgen, deren zugehörige Vierecksgruppen $\Gamma$ der Erweiterung durch Spiegelungen fähig sind. Hier ist der Parameter $\mu$ auf diejenigen Linienzüge seiner Ebene eingeschränkt, die wir im vorigen Paragraphen als Abbilder der reellen $I$-Axe markierten; und dieser *einfach* unendlichen Mannigfaltigkeit von Werten $\mu$ steht der *eine* reelle Parameter symmetrischer Vierecksgruppen gegenüber.

Man hat nun zwei wesentlich verschiedene Arten symmetrischer Vierecksgruppen $\Gamma$. Im einen Falle lässt sich die erweiterte Gruppe $\overline{\Gamma}$ *ausschliesslich* aus Spiegelungen erzeugen, im zweiten Falle sind die Erzeugenden von $\overline{\Gamma}$ drei Spiegelungen und eine elliptische Substitution der Periode zwei; die nebenstehenden Zeichnungen versinnlichen dies näher. Die Figuren sind so angenommen, dass der Punkt $p_2$ beide Male mit $\eta = i$ coincidiert, während die Verbindungslinie der Eckpunkte $p_2$ und $p_7$ auf die imaginäre $\eta$-Axe zu liegen kommt.

Fig. 8.

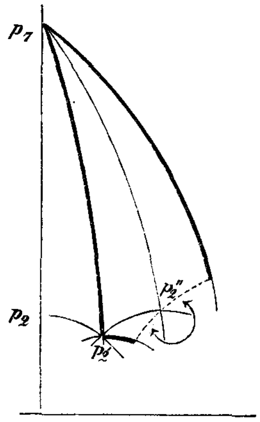



Wenn wir hier etwa nur auf die reellen Werte von $\mu$ achten sollen, so würde einem Viereck von der ersten in Fig. 8 gegebenen Gestalt ein $\mu \leqq -\frac{27}{4}$ entsprechen. Mit der Entfernung $p_2$, $p_7$ ist das Viereck eindeutig bestimmt; dieselbe ist so gross anzunehmen, dass der Kreis $(p_7, p_2'')$ den Einheitskreis nicht schneidet, und sie darf andrerseits so klein gewählt werden, dass die Entfernung $(p_2, p_2')$ im Sinne der hier in Betracht kommenden Maassbestimmung grösser als $(p_2', p_2'')$ ist. Die beiden Grenzlagen des Kreisbogenvierecks sind hiermit bereits markiert: Für $4\mu = -27$ degeneriert das Viereck in ein Kreisbogendreieck der Winkel $\frac{\pi}{7}, \frac{\pi}{2}, 0$. Auf der geschlossenen Fläche, die eine reguläre Einteilung in $2.168$ Vierecke trägt, ist dieser Grenzfall dadurch charakterisiert, dass längs gewisser 28 Symmetrielinien Abschnürungen der Fläche eintreten, wobei an Stelle jeder Symmetrielinie ein Punktepaar unter entsprechender Verminderung des Zusammenhanges der Fläche tritt.

Der andere Grenzfall des Kreisbogenvierecks liefert $\mu = \infty$ und $I = 1$; wir haben ein längs seiner Diagonale $p_7, p_2'$ symmetrisches Viereck und entsprechend die harmonische Lage der vier Verzweigungsstellen $y$. Die Gruppe $\Gamma_{168}$ lässt sich jetzt als $\Gamma_{2.168}$ innerhalb der Dreiecksgruppe $(2, 4, 14)$ ansehen, aber wie wir am Schlusse des vorigen Paragraphen bereits bemerkten, versagt die Darstellung des zugehörigen algebraischen Gebildes vermöge der Curven $C_4$, $C_6$ der $z_\alpha$-Ebene.

Im gerade besprochenen Grenzfall tritt als neue Symmetrielinie die Diagonale $p_7, p_2'$ auf. Indem wir $\mu$ jetzt über $\infty$ reelle positive Werte annehmen lassen, bleibt die letztere Symmetrielinie allein in Geltung, während übrigens die bisherigen Symmetrielinien ihren Charakter als solche einbüssen. Der hiermit geometrisch bezeichnete Übergang, den die beigefügte Fig. 9 noch näher versinnlichen soll, verificiert ganz unmittelbar, dass sich der Übergang über $\mu = \infty$ ohne Zerfall des algebraischen Gebildes vollzieht.

Fig. 9.




Man wird in ähnlicher Weise für die positiven Werte von $\mu$ die begonnenen Betrachtungen fortsetzen. Der partikuläre Fall des Geschlechtes $p = 10$ für $4\mu = 1$ wird dann entstehen, wenn die beiden durch die elliptische Substitution der Periode 2 auf einander bezogenen Randcurven des gehälfteten Ausgangsvierecks unendlich klein geworden sind. Man kommt dann wieder auf das Kreisbogendreieck $\frac{\pi}{7}, \frac{\pi}{2}, 0$ zurück. Hierbei ist bemerkenswert, dass wir sowohl jetzt wie vorhin bei $4\mu = -27$ durch Grenzübergang gar nicht die $\eta$-Functionen

$$(1) \qquad \eta(2, 3, 7; y) \quad \text{und} \quad \eta(2, 4, 7; y)$$

gewinnen, die doch im Sinne unserer allgemeinen Massnahme zu den beiden Gebilden mit $4\mu = 1$ und $-27$ gehören; vielmehr erhalten wir in beiden Fällen die $\eta$-Function $\eta(2, \infty\, 7; y)$, welche auf die unter (1) genannten Functionen nur erst homomorph bezogen ist. Im übrigen dürfte nur noch die Betrachtung der aequianharmonischen Fälle $I = 0$ von Interesse sein. Hier wird, wie man leicht überblickt, $\Gamma_{168}$ eine Untergruppe $\Gamma_{3.168}$ innerhalb der Dreiecksgruppe $(2, 4, 21)$. Die Zahl der Symmetrien verdreifacht sich, und dem entspricht die Möglichkeit, das Viereck von hieraus auf dreifachem Wege als symmetrisches continuirlich abzuändern. Diese Möglichkeit aber documentierte sich in der Figur des vorigen Paragraphen dadurch, dass sich an den Stellen $I = 0$ *drei* Linienzüge überkreuzten.

Analoge Untersuchungen von immer mannigfaltigerem Charakter lassen sich an die algebraischen Gebilde knüpfen, wie sie durch Curven $C_{14}$, $C_{18}$ etc.:

$$\mu_1 f_{14} + \mu_2 f_6 f_4^2 = 0,$$

$$\mu_1 f_{14} f_4 + \mu_2 f_6^3 + \mu_3 f_6 f_4^3 = 0, \text{ etc.}$$

zu definieren sind. Zumal die $C_{14}$ würden zu ganz analogen Betrachtungen Anlass geben, wie voraufgehend die Curven $C_{12}$. An Stelle des Kreisbogenvierecks mit drei rechten Winkeln und einem Winkel $\frac{\pi}{7}$ tritt hier das Kreisbogenfünfeck mit drei rechten Winkeln, einem Winkel $\frac{\pi}{3}$ und einem Winkel $\frac{\pi}{4}$. Hier stellt sich dann als eine der Ausartungen das Kreisbogenviereck der Winkel $\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{4}$ ein, bei welcher aber kein Zerfall des algebraischen Gebildes stattfindet. Eine Vierecksgruppe dieser Art ist nun von arithmetischer Seite her bereits länger bekannt; es ist die reproducierende Gruppe der ternären quadratischen Form $(x^2 + y^2 - 11z^2)$ im Sinne POINCARÉ's.[1] Dabei ist das Zustandekommen einer ausgezeichneten Untergruppe $\Gamma_{168}$ vom Index 168 auch aus dem arithmetischen Bildungsgesetze der Gruppe verständlich. Die Coefficienten der betreffenden $\eta$-Substitutionen setzen sich nämlich numerisch rational aus den Irrationalitäten $\sqrt{2}$ und $\sqrt{11}$ zusammen. Die Reduction modulo 7 liefert demgemäss nur 168 incongruente Substitutionen, da 2 und 11 quadratische Reste von 7 sind. Es ergiebt sich von hieraus die Existenz einer geschlossenen Fläche vom Geschlechte $p = 36$ mit einer regulären Einteilung in 2.168 Vierecke der Winkel $\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{4}$, und man könnte insbesondere in den Symmetrielinien dieser Fläche ein interessantes Gegenbild der Gruppenstructur $G_{168}$ entwickeln. Alle $\infty^1$ Gruppen der Kreisbogenvierecke $\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{4}$ (mit Hauptkreis) sind übrigens einander isomorph, und es soll durch die vorangehenden Mitteilungen noch keineswegs be-

[1] Vergl. die schon oben genannte Abhandlung POINCARÉ's *Les fonctions fuchsiennes et l'arithmétique* in LIOUVILLE's Journal, 4[te] Folge, Bd. 3.

hauptet sein, dass die besondere Gruppe des Rationalitätsbereiches $\sqrt{2}$, $\sqrt{11}$ gerade auch die aus der speciellen $C_{14}$ sich ergebende Gruppe sei. Inzwischen scheint es sehr schwierig zu sein, hierüber zu entscheiden. Die Continuitätsbetrachtungen über die Gestalt der Kreisbogenpolygone wiederholen sich natürlich gleichfalls unter immer grösserer Mannigfaltigkeit der in Betracht kommenden Verhältnisse. Es scheint aber, dass man bei Betrachtungen dieser Art erst noch eine grössere Reihe von Einzelerfahrungen wird sammeln müssen, ehe die allgemeinen Erwägungen, durch welche die Begründer der Theorie der automorphen Functionen die Existenztheoreme der $\eta$-Functionen darzulegen versuchten, als allseitig geklärt angesehen werden können.

Braunschweig, März 1893.