ÜBER TERNÄRE DEFINITE FORMEN

VON

DAVID HILBERT
in KÖNIGSBERG i. Pr.

Eine ganze rationale homogene Funktion f der drei Veränderlichen x, y, z, deren Ordnung n eine gerade Zahl ist und deren $N = \frac{1}{2}(n+1)(n+2)$ Coefficienten reelle Zahlen sind, möge eine ternäre definite Form genannt werden, wenn dieselbe für reelle Werte der Veränderlichen x, y, z stets positiv ausfällt oder den Werth 0 annimmt. Giebt es reelle Wertsysteme der Veränderlichen, für welche die definite Form f den Wert 0 annimmt, so ist, wie man leicht zeigt, die Diskriminante der Form f nothwendig gleich 0.

Die eben aufgestellte Definition lässt unmittelbar erkennen, dass durch beliebig oft wiederholte Addition und Multiplication von definiten Formen stets Formen entstehen, welche wiederum definit sind, d. h. die Gesammtheit aller definiten Formen bildet einen Formenbereich von der Beschaffenheit, dass jede durch Addition und Multiplication aus Formen des Bereiches zusammengesetzte Form wiederum dem Bereiche angehört. Ferner ist jedes Quadrat einer beliebigen Form mit reellen Coefficienten eine definite Form und wir erhalten daher durch Addition und Multiplication solcher Formenquadrate stets wiederum definite Formen. Ich habe jedoch in einer Abhandlung: »*Über die Darstellung definiter Formen als Summe von Formenquadraten*«[1] gezeigt, dass nicht jede definite Form auf diese

[1] Mathematische Annalen. Bd. 32, S. 342.

Weise als Summe von Formenquadraten dargestellt werden kann, und zwar lautet der bezügliche dort von mir bewiesene Satz, wie folgt

Eine jede ternäre quadratische und biquadratische definite Form lässt sich als Summe von drei Quadraten reeller Formen darstellen. Unter den definiten Formen von der 6^{ten} oder von höherer Ordnung giebt es jedoch stets solche, welche **nicht** *einer endlichen Summe von Quadraten reeller Formen gleich sind.*

Um dennoch zu einer allgemein gültigen Darstellungsform für die definiten Formen zu gelangen, beachten wir zunächst die Thatsache, dass allemal, wenn ein Faktor einer definiten Form definit ist, nothwendig auch der übrig bleibende Faktor eine definite Form sein muss; es würde daher der definite Charakter einer Form auch bereits dann erkennbar sein, wenn dieselbe sich als Bruch darstellen liesse, dessen Zähler und Nenner gleich Summen von Formenquadraten sind. *Eine solche Darstellung ist nun in der That stets möglich,* wie im folgendem gezeigt werden wird. Der Beweis dafür bietet erhebliche Schwierigkeiten dar; ich theile der Übersicht halber die Darlegung desselben in 9 Abschnitte und kennzeichne kurz am Anfange eines jeden Abschnittes das zu erstrebende Ziel, am Schlusse des Abschnittes die in demselben gefundenen Resultate.

1.

Um die Existenz von gewissen definiten Formen, deren Besonderheit später ausführlich dargelegt werden wird, nachzuweisen, bedienen wir uns des folgenden Hilfssatzes:

Es sei eine ternäre Form F von der n^{ten} Ordnung und mit reellen Coefficienten vorgelegt von der Beschaffenheit, dass die Curve $F = 0$ δ gewöhnliche Doppelpunkte $P_1, \ldots, P_\delta$ mit getrennt liegenden Tangenten und ausserdem beliebige andere Doppelpunkte besitzt; es sei ferner F' eine Form von derselben Ordnung n und mit reellen Coefficienten, welche in den Punkten $P_1, \ldots, P_\delta$ verschwindet, dagegen in sämmtlichen übrigen

Doppelpunkten der Curve $F = o$ einen von o verschiedenen Werth annimmt; endlich soll es möglich sein, $N - \delta$ Punkte in der Ebene zu bestimmen derart, dass durch diese und durch die δ Punkte $P_1, \ldots, P_\delta$ sich keine Curve n^{ter} Ordnung hindurch legen lässt: unter diesen Voraussetzungen giebt es stets eine Curve $G = o$ von der nämlichen Ordnung n, deren Coefficienten sich von den Coefficienten der Form F nur um beliebig kleine Grössen unterscheiden und welche in beliebiger Nähe der Punkte $P_1, \ldots, P_\delta$ je einen gewöhnlichen Doppelpunkt mit getrennten Tangenten besitzt, sonst aber keinen weiteren singulären Punkt aufweist.

Der Einfachheit halber setzen wir im Folgenden stets die dritte Coordinate z der Einheit gleich; die Coordinaten der δ Punkte $P_1, \ldots, P_\delta$ seien dann bezüglich

$$x = a_1, \ldots, x = a_\delta,$$
$$y = b_1, \ldots, y = b_\delta.$$

Die gesuchte Form G nehmen wir an in der Gestalt

$$G = F + t(F' + \Omega),$$

wo t eine Veränderliche und Ω wiederum eine Form n^{ter} Ordnung bedeutet: wir wollen dann die N Coefficienten $u_1, \ldots, u_N$ dieser Form Ω als Funktionen von t derart bestimmen, dass die Form G für genügend kleine Werthe von t die Bedingungen des obigen Hilfssatzes erfüllt. Zu dem Zwecke führen wir die folgenden Ausdrücke ein:

$$\begin{aligned} \alpha_s &= a_s + t(A_s + \xi_s), \\ \beta_s &= b_s + t(B_s + \eta_s), \end{aligned} \qquad (s=1,\ldots,\delta)$$

wo ξ_s, η_s noch zu bestimmende Funktionen von t sind und wo

$$A_s = \left[\frac{\dfrac{\partial F'}{\partial y}\dfrac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} - \dfrac{\partial F'}{\partial x}\dfrac{\partial^2 F}{\partial y^2}}{\dfrac{\partial^2 F}{\partial x^2}\dfrac{\partial^2 F}{\partial y^2} - \left(\dfrac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}\right)^2}\right]_{\substack{x=a_s \\ y=b_s}},$$

$$B_s = \left[\frac{\dfrac{\partial F'}{\partial x}\dfrac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} - \dfrac{\partial F'}{\partial y}\dfrac{\partial^2 F}{\partial x^2}}{\dfrac{\partial^2 F}{\partial x^2}\dfrac{\partial^2 F}{\partial y^2} - \left(\dfrac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}\right)^2}\right]_{\substack{x=a_s \\ y=b_s}}$$

einzusetzen sind. Nunmehr betrachten wir die 3δ Gleichungen

$$\begin{aligned} &G(\alpha_s, \beta_s) = 0, \\ &\frac{\partial G}{\partial x}(\alpha_s, \beta_s) = 0, \qquad\qquad {\scriptstyle (s=1,\ldots,\delta)} \\ &\frac{\partial G}{\partial y}(\alpha_s, \beta_s) = 0. \end{aligned}$$

Dieselben nehmen wegen

$$F(a_s, b_s) = 0, \qquad \frac{\partial F}{\partial x}(a_s, b_s) = 0, \qquad \frac{\partial F}{\partial y}(a_s, b_s) = 0, \qquad {\scriptstyle (s=1,\ldots,\delta)}$$
$$F'(a_s, b_s) = 0,$$

nach Weglassung des Faktors t auf der linken Seite, die Gestalt an

$$\begin{aligned} &\Omega(a_s, b_s) + t\Gamma_1 + t^2\Gamma_2 + \ldots = 0, \\ &\frac{\partial \Omega}{\partial x}(a_s, b_s) + \xi_s \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(a_s, b_s) + \eta_s \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}(a_s, b_s) + t\Gamma_1' + \ldots = 0, \qquad {\scriptstyle (s=1,2,\ldots,\delta)} \\ &\frac{\partial \Omega}{\partial y}(a_s, b_s) + \xi_s \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}(a_s, b_s) + \eta_s \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}(a_s, b_s) + t\Gamma_1'' + \ldots = 0, \end{aligned}$$

wo $\Gamma_1, \Gamma_2, \ldots, \Gamma_1', \ldots, \Gamma_1'', \ldots$ ganze rationale Ausdrücke in $u_1, \ldots, u_N$; ξ_s, η_s bedeuten.

Es gilt nun bekanntlich der folgende Satz:[1]

Wenn m Gleichungen von der Gestalt

$$\begin{aligned} &a_{11}x_1 + \ldots + a_{1m}x_m + t\mathfrak{P}_{11}(x_1, \ldots, x_m) + t^2\mathfrak{P}_{12}(x_1, \ldots, x_m) + \ldots = 0, \\ &\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ &a_{m1}x_1 + \ldots + a_{mm}x_m + t\mathfrak{P}_{m1}(x_1, \ldots, x_m) + t^2\mathfrak{P}_{m2}(x_1, \ldots, x_m) + \ldots = 0 \end{aligned}$$

gegeben sind, wo die linken Seiten Potenzreihen der $m + 1$ Veränderlichen $x_1, \ldots, x_m$, t bedeuten und die Determinante der Coefficienten

[1] Vergl. L. Königsberger, *Theorie der Differentialgleichungen mit einer unabhängigen Variabeln.* Leipzig 1889. S. 43.

$a_{11}, a_{12}, \ldots, a_{mm}$ einen von o verschiedenen Wert besitzt, so lassen sich für die Grössen $x_1, \ldots, x_m$ eindeutig bestimmte, nach ganzen Potenzen von t fortschreitende Reihen finden, welche obige m Gleichungen identisch für alle Werte von t befriedigen.

Nach der Voraussetzung des zu beweisenden Hilfssatzes gibt es in der Ebene $N - \delta$ Punkte $P_{\delta+1}, \ldots, P_N$ von der Beschaffenheit, dass durch die N Punkte $P_1, \ldots, P_N$ keine Curve n^{ter} Ordnung sich legen lässt. Die Coordinaten solcher $N - \delta$ Punkte bezeichnen wir bezüglich mit:

$$x = a_{\delta+1}, \ldots, x = a_N,$$
$$y = b_{\delta+1}, \ldots, y = b_N.$$

Wir fügen dann den obigen 3δ Gleichungen noch die folgenden $N - \delta$ Gleichungen

$$\Omega(a_s, b_s) = 0 \qquad {\scriptstyle (s=\delta+1,\ldots,N)}$$

hinzu und betrachten in dem so entstehenden Systeme von $N + 2\delta$ Gleichungen die Grösse t als unabhängige Veränderliche und die $N + 2\delta$ Grössen $u_1, \ldots, u_N;\ \xi_1, \eta_1;\ \xi_2, \eta_2;\ \ldots;\ \xi_\delta, \eta_\delta$ als die zu bestimmenden Funktionen von t. Auf dieses Gleichungssystem lässt sich der obige Satz anwenden; denn diese $N + 2\delta$ Gleichungen haben die verlangte Gestalt und die betreffende Determinante der Coefficienten von $u_1, \ldots, u_N;\ \xi_1, \eta_1;\ \xi_2, \eta_2;\ \ldots;\ \xi_\delta, \eta_\delta$ nimmt den Wert an

$$\prod^{s=1,2,\ldots,\delta} \left[\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}\frac{\partial^2 F}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}\right)^2\right]_{\substack{x=a_s\\ y=b_s}} \cdot \begin{vmatrix} a_1^n & a_1^{n-1} b_1 & a_1^{n-1} & \ldots & 1 \\ a_2^n & a_2^{n-1} b_2 & a_2^{n-1} & \ldots & 1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_N^n & a_N^{n-1} b_N & a_N^{n-1} & \ldots & 1 \end{vmatrix}.$$

Hier haben die δ Faktoren des Produktes Π sämmtlich einen von o verschiedenen Wert, da nach Voraussetzung die Punkte $P_1, \ldots, P_\delta$ für die Curve $F = 0$ gewöhnliche Doppelpunkte mit getrennten Tangenten sind und die N-reihige Determinante ist wegen der zuvor angenommenen Eigenschaft der Punkte $P_1, \ldots, P_N$ ebenfalls eine von o verschiedene Grösse.

Damit haben wir die Coefficienten der Form Ω als Funktionen von t bestimmt und es bleibt nur noch übrig zu zeigen, dass für genügend kleine Werte t die Curve $G = 0$ ausser den δ Doppelpunkten $\alpha_1, \beta_1; \ldots; \alpha_\delta, \beta_\delta$ keine anderen singulären Punkte besitzt. Dieser Nachweis geschieht, wie folgt. Die Coordinaten der singulären Punkte der Curve $G = 0$ bestimmen sich aus den Gleichungen

$$G = 0, \qquad \frac{\partial G}{\partial x} = 0, \qquad \frac{\partial G}{\partial y} = 0$$

und sind daher, wie man leicht durch Elimination erkennt, algebraische Funktionen von t. Besässen also diese 3 Gleichungen für beliebige Werte von t ausser den δ Lösungen $\alpha_1, \beta_1; \ldots; \alpha_\delta, \beta_\delta$ noch eine andere gemeinsame Lösung, so müsste dieselbe sich, wie folgt, entwickeln lassen

$$x = a_0 + a_1 t^{\nu_1} + a_2 t^{\nu_2} + \cdots,$$

$$y = b_0 + b_1 t^{\mu_1} + b_2 t^{\mu_2} + \cdots,$$

wo die Exponenten $\nu_1, \nu_2, \ldots, \mu_1, \mu_2, \ldots,$ positive rationale Zahlen und wo a_1, b_1 von 0 verschieden angenommen werden können. Für $t = 0$ folgt, dass der Punkt $x = a_0, y = b_0$ ein singulärer Punkt der Curve $F = 0$ ist. Nach der im Hilfssatze gemachten Voraussetzung nimmt die Form F' in den singulären Punkten der Curve $F = 0$ einen von 0 verschiedenen Wert an. Es sei $F'(a_0, b_0) = a$. Verlegen wir nun den Anfang des Coordinatensystems in den Punkt $x = a_0, y = b_0$, so nehmen die obigen 3 Gleichungen die Gestalt an

$$\begin{aligned} xy + \ldots + t(a + a'x + a''y + \ldots) + \cdots &= 0, \\ y + \ldots + t(a' + \ldots \qquad\qquad\qquad) + \cdots &= 0, \\ x + \ldots + t(a'' + \ldots \qquad\qquad\qquad) + \cdots &= 0 \end{aligned}$$

und man überzeugt sich leicht, dass diese Gleichungen durch die Reihen

$$x = a_1 t^{\nu_1} + \cdots, \qquad y = b_1 t^{\mu_1} + \cdots$$

nicht identisch für alle Werte t befriedigt werden können. Damit ist der Beweis für unseren Hilfssatz vollständig erbracht.

Der Hilfssatz ist nach verschiedenen Richtungen hin einer Verallgemeinerung fähig; ich möchte überdies hervorheben, dass derselbe in der Theorie der algebraischen Curven und Flächen zur Erledigung von Existenzfragen wesentliche Dienste leistet.

2.

In diesem Abschnitte werde ich eine ternäre definite irreducible Form G von der Beschaffenheit construiren, dass $G = 0$ eine Curve mit $\frac{1}{2}(n-1)(n-2)$ getrennt liegenden Doppelpunkten darstellt, welche zum Theil reell und isolirt, zum Theil paarweise conjugirt imaginär sind.

Ich nehme zu diesem Zweck an, es sei bereits eine ternäre definite irreducible Form Γ von der $n-2^{\text{ten}}$ Ordnung construirt von der Eigenschaft, dass $\Gamma = 0$ eine Curve mit $\frac{1}{2}(n-3)(n-4)$ getrennt liegenden Doppelpunkten darstellt; ferner nehme ich 2 lineare Formen l und l' mit reellen Coefficienten und von der Beschaffenheit an, dass die imaginäre gerade Linie $l + il' = 0$ die Curve $\Gamma = 0$ in $n-2$ getrennt liegenden imaginären Punkten $Q_1, \ldots, Q_{n-2}$ schneidet. Die conjugirt imaginäre Gerade $l - il' = 0$ schneidet dann die Curve $\Gamma = 0$ bezüglich in den $n-2$ conjugirt imaginären Punkten $Q'_1, \ldots, Q'_{n-2}$ und diese letzteren Punkte liegen wiederum alle untereinander und von den Punkten $Q_1, \ldots, Q_{n-2}$ getrennt. Ferner nehme man auf $\Gamma = 0$ irgend $3(n-2)$ paarweise conjugirt imaginäre Punkte $R_1, \ldots, R_{3(n-2)}$ und auf der Geraden $l + il' = 0$ zwei imaginäre Punkte S_1, S_2 an; die zu diesen conjugirt imaginären Punkte S'_1, S'_2 liegen auf der Geraden $l - il' = 0$. Endlich sei P irgend ein ausserhalb der Curven $\Gamma = 0$, $l + il' = 0$, $l - il' = 0$ gelegener reeller Punkt der Ebene. Ich construire jetzt eine Form F' von der n^{ten} Ordnung, welche in den $\frac{1}{2}(n-3)(n-4)$ Doppelpunkten von $\Gamma = 0$, ferner in den Punkten $Q_1, \ldots, Q_{n-3}, Q'_1, \ldots, Q'_{n-3}, R_1, \ldots, R_{3(n-2)}, S_1, S_2, S'_1, S'_2$, in dem Punkte P und in dem Schnittpunkte der beiden Geraden $l = 0$, $l' = 0$ verschwindet. Eine solche Form existirt stets, da die Gesammtzahl der angegebenen Punkte gleich $\frac{1}{2}n(n+3)$ ist. Die Form F' nimmt in den beiden Punkten Q_{n-2}, Q'_{n-2} einen von o verschiedenen Wert an; denn im entgegengesetzten Falle würde die Curve $F'=0$ mit der Curve $\Gamma=0$ mehr als $n(n-2)$ Punkte und mit den Geraden $l+il'=0$, $l-il'=0$ mehr als n Punkte gemein haben und folglich müsste die Form F' mit der Form $F=(l^2+l'^2)\Gamma$ bis auf einen constanten Faktor übereinstimmen. Dies ist aber nicht der Fall, da die letztere Form F im Punkte P einen von o verschiedenen Wert hat, die Form F' dagegen im Punkte P verschwindet.

Wir wenden jetzt den in Abschnitt 1 bewiesenen Hilfssatz auf die Curve $F=0$ an. Diese Curve hat die $\frac{1}{2}(n-3)(n-4)$ Doppelpunkte von $\Gamma=0$, ferner die Punkte $Q_1,\ldots,Q_{n-2}$, $Q'_1,\ldots,Q'_{n-2}$ und ausserdem den Punkt $l=0$, $l'=0$ zu gewöhnlichen Doppelpunkten mit getrennten Tangenten. Die Form F' verschwindet in diesen sämmtlichen Punkten, ausgenommen in den beiden Punkten Q_{n-2}, Q'_{n-2}. Es giebt daher nach jenem Satze eine Curve $G=0$ von der nämlichen Ordnung n, welche in der Umgebung der Doppelpunkte von $\Gamma=0$, der Punkte $Q_1,\ldots,Q_{n-3}$, $Q'_1,\ldots,Q'_{n-3}$ und des Punktes $l=0$, $l'=0$ je einen gewöhnlichen Doppelpunkt mit getrennten Tangenten besitzt, sonst aber keinen Doppelpunkt aufweist. Die Zahl der Doppelpunkte der Curve $G=0$ ist daher genau gleich $\frac{1}{2}(n-1)(n-2)$.

Die Form G ist für hinreichend kleine Werte des Parameters t eine definite Form. Denn hätte die Curve $G=0$ einen reellen Zug, so müsste dieser für $t=0$ sich in einen reellen isolirten Doppelpunkt der Curve $F=0$ zusammenziehen. Andererseits kann für jede um einen solchen Doppelpunkt abgegrenzte 'Umgebung ein von o verschiedener Wert von t gefunden werden, so dass die diesem Werte t entsprechende Form G in jener Umgebung positiv oder null ist. Man sieht dies leicht ein, wenn man den Mittelpunkt des Coordinatensystems in den variirenden Doppelpunkt verlegt.

Dass die erhaltene Form G für beliebige, zwischen gewissen Grenzen liegende Werthe von t irreducibel ist, kann durch folgende Betrachtung gezeigt werden. Wir denken uns durch die Gleichung $G=0$ die Grösse y als algebraische Funktion von x bestimmt und dann über der complexen x-Ebene die zu dieser Funktion y zugehörige Riemannsche Fläche construirt. Für $t = 0$ zerfällt diese Riemannsche Fläche in 3 getrennte den Gleichungen $\Gamma = 0$, $l + il' = 0$, $l - il' = 0$ entsprechende Theile: der erste der Gleichung $\Gamma = 0$ entsprechende Theil bedeckt die complexe x-Ebene $(n - 2)$-fach und ist wegen der Irreducibilität jener Gleichung in sich zusammenhängend; die beiden anderen Theile bedecken die x-Ebene je einfach. Lassen wir nun den Parameter t von 0 an wachsen, so werden die Doppelpunkte Q_{n-2}, Q'_{n-2} aufgelöst und in folge dessen erhalten die beiden letzteren Theile je 2 Verzweigungspunkte, welche dieselben mit dem ersteren Theile zu einer einzigen in sich zusammenhängenden Riemannschen Fläche verbinden. Damit ist der verlangte Beweis geführt.

Wir haben jetzt eine irreducible definite Form G von der Eigenschaft gefunden, dass die Gleichung $G = 0$ eine Curve mit $\frac{1}{2}(n-1)(n-2)$ gewöhnlichen getrennt liegenden Doppelpunkten darstellt.

3.

In diesem Abschnitt wollen wir die soeben construirte Form G als Bruch darstellen, dessen Zähler gleich der Summe von 3 Formenquadraten ist.

Zu dem Zwecke wählen wir auf der Curve $G = 0$ irgend $n - 4$ getrennt liegende und paarweise conjugirt imaginäre Punkte $A_1, \ldots, A_{n-4}$ aus und bilden dann 3 von einander linear unabhängige Formen $\rho, \sigma, \varkappa$ von der $n - 2^{\text{ten}}$ Ordnung und mit reellen Coefficienten, welche in den $\frac{1}{2}(n-1)(n-2)$ Doppelpunkten und in den $n - 4$ Punkten A_1, $\ldots, A_{n-4}$ verschwinden. Dies ist stets möglich, da die Zahl der auferlegten Bedingungen gerade um 3 kleiner ist, als die Zahl der Coefficienten einer Form von der $n - 2^{\text{ten}}$ Ordnung. Wenn wir nunmehr die Curve $G(x, y, z) = 0$ vermöge der Formeln

$$\xi : \eta : \zeta = \rho(x, y, z) : \sigma(x, y, z) : \varkappa(x, y, z)$$

transformiren, so erhalten wir eine Gleichung von der Gestalt $g(\xi, \eta, \zeta) = 0$. Hier ist g eine irreducible quadratische Form von ξ, η, ζ, da unter den $n(n-2)$ Schnittpunkten der beiden Curven $G = 0$ und $u\rho + v\sigma + w\varkappa = 0$

nur 2 mit den unbestimmten Parametern u, v, w veränderliche Punkte vorhanden sind. Die Ausführung der Transformation ergiebt Formeln von der Gestalt

$$x:y:z = r(\xi, \eta, \zeta):s(\xi, \eta, \zeta):k(\xi, \eta, \zeta),$$

wo r, s, k Formen der Veränderlichen ξ, η, ζ mit reellen Coefficienten sind. Hieraus folgt, dass g eine definite Form ist; denn wäre $g(\xi, \eta, \zeta) = 0$ die Gleichung eines reellen Kegelschnittes, so würden sich durch Berechnung der Formen r, s, k unendlich viele reelle Wertsysteme x, y, z ergeben, für welche G verschwindet. Die Form g gestattet daher eine Darstellung von der Gestalt

$$g(\xi, \eta, \zeta) = (c_1\xi + d_1\eta + e_1\zeta)^2 + (c_2\xi + d_2\eta + e_2\zeta)^2 + (c_3\xi + d_3\eta + e_3\zeta)^2,$$

wo c, d, e reelle Constanten sind, deren Determinante von 0 verschieden ist.

Wenn wir nun in der Form g statt der Veränderlichen ξ, η, ζ die Formen $\rho, \sigma, \varkappa$ einsetzen, so entsteht eine Form von der $2n - 4^{\text{ten}}$ Ordnung in x, y, z, welche die Form G als Faktor enthält. Wir setzen

$$g(\rho, \sigma, \varkappa) = h(x, y, z)G(x, y, z),$$

wo h eine definite Form von der $n - 4^{\text{ten}}$ Ordnung in x, y, z bedeutet.

Die 9 reellen Constanten c, d, e sind noch zum Theil willkürlich: man wähle die 3 Constanten c_1, d_1, e_1 derart, dass die Curve $n - 2^{\text{ter}}$ Ordnung $c_1\rho + d_1\sigma + e_1\varkappa = 0$ aus der Curve $G = 0$ ausser jenen $\frac{1}{2}(n-1)(n-2)$ Doppelpunkten und den $n - 4$ festen Punkten $A_1, \ldots, A_{n-4}$ zwei von diesen und unter einander getrennt liegende Punkte A und B ausschneidet.

Setzen wir der Kürze wegen

$$c_1\rho + d_1\sigma + e_1\varkappa = P(x, y, z),$$

$$c_2\rho + d_2\sigma + e_2\varkappa = \Sigma(x, y, z),$$

$$c_3\rho + d_3\sigma + e_3\varkappa = K(x, y, z),$$

so erhalten wir:

$$hG = P^2 + \Sigma^2 + K^2.$$

Aus dieser Formel sieht man unmittelbar, dass die Form h in den $n-4$ Punkten $A_1, \ldots, A_{n-4}$ verschwindet; ausserdem ist für die weitere Entwicklung der Umstand wesentlich, dass h in den Doppelpunkten der Curve $G=0$ nicht verschwindet. Um das letztere zu beweisen nehmen wir das Gegentheil an und verlegen den Anfang des Coordinatensystems in den betreffenden Doppelpunkt, für welchen $h=0$ ist. Dann haben die in Betracht kommenden Formen die Gestalt

$$\begin{aligned} h &= h_1 x + h_2 y + \ldots, \\ G &= G_{11}x^2 + 2G_{12}xy + G_{22}y^2 + \ldots, \\ P &= P_1 x + P_2 y + \ldots, \\ \Sigma &= \Sigma_1 x + \Sigma_2 y + \ldots, \\ K &= K_1 x + K_2 y + \ldots, \end{aligned}$$

wo nur die Glieder niedrigster Ordnung in x, y hingeschrieben sind. Aus der obigen Identität folgt leicht

$$(P_1x + P_2y)^2 + (\Sigma_1x + \Sigma_2y)^2 + (K_1x + K_2y)^2 = 0$$

und hieraus wiederum ergiebt sich, dass die 3 linearen Formen

$$P_1x + P_2y, \qquad \Sigma_1x + \Sigma_2y, \qquad K_1x + K_2y$$

entweder identisch 0 sind oder sich unter einander nur um einen constanten Faktor unterscheiden. Wir können daher jedenfalls aus den Formen P, Σ, K 2 lineare Combinationen Π_1, Π_2 herstellen, welche keine Glieder erster Ordnung in x, y enthalten. Dann wählen wir auf $G=0$ einen beliebigen Punkt P und bestimmen die Constanten λ_1, λ_2 so, dass die Form $\Pi = \lambda_1\Pi_1 + \lambda_2\Pi_2$ im Punkte P verschwindet. Die Curve $\Pi = 0$ besitzt dann in dem Anfangspunkte des Coordinatensystems einen Doppelpunkt und geht ausserdem durch die übrigen Doppelpunkte der Curve $G=0$ und durch die Punkte $A_1, \ldots, A_{n-4}, P$ je einfach hindurch; sie würde daher die Curve $G=0$ in mehr als $n(n-2)$ Punkten schneiden, was unmöglich ist. Die Annahme derzufolge h in jenem Doppelpunkte verschwindet ist daher unzulässig.

Wir haben in diesem Abschnitte gezeigt, dass die in Abschnitt 2 construirte Form G die Darstellung

$$G = \frac{P^2 + \Sigma^2 + K^2}{h}$$

gestattet, wo P, Σ, K Formen $n - 2^{\text{ter}}$ Ordnung mit reellen Coefficienten bedeuten, welche in den $\frac{1}{2}(n-1)(n-2)$ Doppelpunkten und ausserdem in den $n-4$ paarweise conjugirt imaginären Punkten $A_1, \ldots, A_{n-4}$ der Curve $G = 0$ verschwinden. Ausserdem ist h eine Form $n - 4^{\text{ter}}$ Ordnung, welche in jenen $\frac{1}{2}(n-1)(n-2)$ Doppelpunkten von 0 verschieden ist, dagegen in den $n-4$ Punkten $A_1, \ldots, A_{n-4}$ verschwindet. Die Curve $P = 0$ schneidet auf $G = 0$ noch die beiden weiteren einander conjugirt imaginären Punkte A, B aus, in welchen h von 0 verschieden angenommen werden kann.

4.

Die Form G ist eine Form mit verschwindender Diskriminante. Wir werden jetzt mit Hilfe dieser Form G eine Form f mit nicht verschwindender Diskriminante construiren, welche die nämliche Darstellung wie G gestattet.

Aus den am Schlusse des vorigen Abschnittes angestellten Betrachtungen folgt, dass für einen Doppelpunkt der Curve $G = 0$ die 3 Determinanten

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial P}{\partial x} & \frac{\partial P}{\partial y} \\ \frac{\partial \Sigma}{\partial x} & \frac{\partial \Sigma}{\partial y} \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} \frac{\partial P}{\partial x} & \frac{\partial P}{\partial y} \\ \frac{\partial K}{\partial x} & \frac{\partial K}{\partial y} \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} \frac{\partial \Sigma}{\partial x} & \frac{\partial \Sigma}{\partial y} \\ \frac{\partial K}{\partial x} & \frac{\partial K}{\partial y} \end{vmatrix}$$

nicht sämmtlich verschwinden und es ist daher möglich, 3 quadratische Formen p, q, m zu bestimmen von der Beschaffenheit, dass die Determinante

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial P}{\partial x} & \frac{\partial P}{\partial y} & p \\ \frac{\partial \Sigma}{\partial x} & \frac{\partial \Sigma}{\partial y} & q \\ \frac{\partial K}{\partial x} & \frac{\partial K}{\partial y} & m \end{vmatrix}$$

eine Funktion wird, welche in sämmtlichen Doppelpunkten von $G = 0$ einen von 0 verschiedenen Wert annimmt. Wir setzen nun

$$\varphi = P + thp,$$
$$\psi = \Sigma + thq,$$
$$\chi = K + thm,$$
$$f = G + 2t(Pp + \Sigma q + Km) + t^2 h(p^2 + q^2 + m^2)$$

und haben dann infolge der Formel für G die Identität

$$hf = \varphi^2 + \psi^2 + \chi^2,$$

wo die Formen $h, f, \varphi, \psi, \chi$ offenbar sämmtlich in den Punkten $A_1, \ldots, A_{n-4}$ gleich 0 sind.

Um den Nachweis zu führen, dass die Form f für beliebige zwischen gewissen Grenzen liegende Werte von t eine von 0 verschiedene Diskriminante besitzt, nehmen wir im Gegentheile an, es gebe für beliebige t stets ein Wertepaar x, y, welches den Gleichungen

$$f = 0, \qquad \frac{\partial f}{\partial x} = 0, \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = 0$$

genügt. Durch Elimination erkennt man leicht, dass die Lösungen x, y algebraische Funktionen von t sind und daher eine Entwicklung von der Gestalt

$$x = a_0 + a_1 t^{\nu_1} + a_2 t^{\nu_2} + \ldots,$$
$$y = b_0 + b_1 t^{\mu_1} + b_2 t^{\mu_2} + \ldots,$$

gestatten würden, wo die Exponenten $\nu_1, \nu_2, \ldots, \mu_1, \mu_2, \ldots$, positive rationale Zahlen sind und wo a_1, b_1 von 0 verschieden angenommen werden können. Für $t = 0$ folgt, dass der Punkt $x = a_0, y = b_0$ ein Doppelpunkt der Curve $G = 0$ ist. Verlegen wir den Anfang des Coordinatensystems in diesen Doppelpunkt, so erhalten die in Betracht kommenden Formen die Gestalt

$$G = G_{11}x^2 + 2G_{12}xy + G_{22}y^2 + \ldots,$$
$$Pp + \Sigma q + Km = C_1 x + C_2 y + \ldots,$$
$$h(p^2 + q^2 + m^2) = c_0 + \ldots$$

und es wird folglich

$$\frac{1}{2}\frac{\partial f}{\partial x} = G_{11}x + G_{12}y + C_1 t + \dots,$$

$$\frac{1}{2}\frac{\partial f}{\partial y} = G_{12}x + G_{22}y + C_2 t + \dots,$$

$$f - \frac{x}{2}\frac{\partial f}{\partial x} - \frac{y}{2}\frac{\partial f}{\partial y} = C_1 xt + C_2 yt + c_0 t^2 + \dots,$$

wo rechter Hand nur die Glieder niedrigster Ordnung in x, y, t hingeschrieben sind. Damit nun diese 3 Ausdrücke nach Einsetzung der Werte

$$x = a_1 t^{\nu_1} + \dots, \qquad y = b_1 t^{\nu_1} + \dots$$

identisch für alle t verschwinden, ist es, wie man leicht zeigt, nothwendig, dass jene Reihen für x, y nach *ganzen* Potenzen von t fortschreiten und dass die Determinante

$$\Delta = \begin{vmatrix} G_{11} & G_{12} & C_1 \\ G_{12} & G_{22} & C_2 \\ C_1 & C_2 & c_0 \end{vmatrix}$$

den Wert 0 hat.

Zur Berechnung der Determinante Δ setzen wir

$$P = P_1 x + P_2 y + \dots, \qquad p = p_0 t + \dots,$$

$$\Sigma = \Sigma_1 x + \Sigma_2 y + \dots, \qquad q = q_0 t + \dots,$$

$$K = K_1 x + K_2 y + \dots, \qquad m = m_0 t + \dots,$$

$$h = h_0 + \dots,$$

wo h_0 wegen der früher bewiesenen Eigenschaft der Form h von 0 verschieden ist. Aus der Formel

$$hG = P^2 + \Sigma^2 + K^2$$

folgt

$$h_0 G_{11} = P_1^2 + \Sigma_1^2 + K_1^2,$$

$$h_0 G_{12} = P_1 P_2 + \Sigma_1 \Sigma_2 + K_1 K_2,$$

$$h_0 G_{22} = P_2^2 + \Sigma_2^2 + K_2^2$$

und die Determinante Δ ist daher bis auf den Faktor h_0 gleich der Diskriminante der quadratischen Form

$$(P_1 X + P_2 Y + h_0 p_0 T)^2 + (\Sigma_1 X + \Sigma_2 Y + h_0 q_0 T)^2 + (K_1 X + K_2 Y + h_0 m_0 T)^2;$$

diese Diskriminante ist aber bis auf den Faktor h_0 gleich dem Quadrat der Determinante

$$\begin{vmatrix} P_1 & P_2 & p_0 \\ \Sigma_1 & \Sigma_2 & q_0 \\ K_1 & K_2 & m_0 \end{vmatrix},$$

welche ihrerseits infolge der vorhin getroffenen Wahl der quadratischen Formen p, q, m eine von o verschiedene Zahl darstellt. Wir sind somit auf einen Widerspruch geführt und hieraus folgt die Unzulässigkeit unserer Annahme, der zufolge die Diskriminante der Form f für alle Werte t verschwinden sollte.

Wir kehren zu den im vorigen Abschnitte construirten Formen zurück. Da die Form P im Punkte A verschwindet, so wird eine der beiden Formen $\Sigma + iK$ oder $\Sigma - iK$ ebenfalls in A gleich o; es sei dies etwa die Form $\Sigma + iK$. Dann wird zugleich die conjugirt imaginäre Form $\Sigma - iK$ in dem zu A conjugirt imaginären Punkte B gleich o und die Form $\Sigma + iK$ hat nothwendig in B, die Form $\Sigma - iK$ in A einen von o verschiedenen Wert; denn im entgegengesetzten Falle müssten Σ und K in A verschwinden und da h in A von o verschieden ist, so würde folgen, dass die Curve $G = 0$ in A einen Doppelpunkt besitzt, was nicht der Fall ist.

Wir beweisen ferner, dass die Curve $\Sigma + iK = 0$ die Curve $G = 0$ in A berührt. Zu dem Zwecke verlegen wir den Anfang des Coordinatensystems in den Punkt A und wählen die Tangente von $G = 0$ im Punkte A zur y-Achse; die in Betracht kommenden Formen nehmen dann die Gestalt an

$$\begin{aligned} P &= P_1 x + P_2 y + \ldots, & G &= G_1 x + \ldots, \\ \Sigma + iK &= T_1 x + T_2 y + \ldots, & h &= h_0 + \ldots, \\ \Sigma - iK &= T_0' + \ldots & & , \end{aligned}$$

wo T_0', G_1, h_0 von o verschiedene Zahlen sind. Aus der Relation

$$hG = P^2 + (\Sigma + iK)(\Sigma - iK)$$

folgt $T_2 = 0$, und damit ist die Behauptung bewiesen.

Die Formen f, φ, ψ, χ enthalten noch die Veränderliche t. Durch Wahl eines genügend kleinen Wertes für t können wir offenbar erreichen, dass die Schnittpunkte der Curve $f = 0$ mit den Curven $\psi + i\chi = 0$, $\psi - i\chi = 0$ in beliebige Nähe der bezüglichen Schnittpunkte der Curve $G = 0$ mit den Curven $\Sigma + iK$, $\Sigma - iK = 0$ fallen, wobei die Entfernung zweier Punkte etwa durch die Summe der absoluten Beträge der Coordinatendifferenzen gemessen werden möge. Wir grenzen nun unter Zugrundelegung eben derselben Definition der Entfernung um die $\frac{1}{2}(n-1)(n-2)$ Doppelpunkte von $G = 0$ je ein so kleines Gebiet ab, dass h in jedem Punkte dieser Gebiete von o verschieden ist, und dass ausserdem keine Form von der $n - 3^{\text{ten}}$ Ordnung existirt, welche in jedem dieser $\frac{1}{2}(n-1)(n-2)$ Gebiete eine Nullstelle besitzt. Dass letzteres stets möglich ist, geht aus dem Umstande hervor, dass es keine Curve $n - 3^{\text{ter}}$ Ordnung giebt, welche durch die sämmtlichen $\frac{1}{2}(n-1)(n-2)$ Doppelpunkte von $G = 0$ hindurch geht. Ausserdem grenze man auch um die beiden Punkte A, B je ein Gebiet ab, in welchem h von o verschieden ist. Nun wähle man t so klein, dass die Schnittpunkte der Curven $\psi + i\chi = 0$ und $\psi - i\chi = 0$ mit der Curve $f = 0$ sämmtlich in die abgegrenzten Gebiete fallen, abgesehen von den $n - 4$ Schnittpunkten $A_1, \ldots, A_{n-4}$, welche fest bleiben. Berücksichtigen wir dann die Identität

$$pf = \varphi^2 + \psi^2 + \chi^2$$

und die Thatsache, dass $f = 0$ keinen Doppelpunkt besitzt, so erhalten wir durch eine ähnliche Schlussweise, wie sie kurz zuvor angewandt worden ist, das folgende Resultat: die Curve $\psi + i\chi = 0$ berührt die Curve $f = 0$ in einem Punkte des um A abgegrenzten Gebietes und in je einem Punkte derjenigen Gebiete, welche um die $\frac{1}{2}(n-1)(n-2)$ Doppelpunkte von $G = 0$ abgegrenzt sind; wir bezeichnen die Berührungspunkte bezüglich mit A, $U_1, \ldots, U_{\frac{1}{2}(n-1)(n-2)}$. Die Curve $\psi - i\chi = 0$ berührt die Curve $f = 0$ in einem Punkte des um B abgegrenzten Gebietes und in je einem Punkte der um die $\frac{1}{2}(n-1)(n-2)$ Doppelpunkte abgegrenzten Gebiete; wir bezeichnen die Berührungspunkte bezüglich mit B, $V_1, \ldots, V_{\frac{1}{2}(n-1)(n-2)}$.

Somit haben wir eine definite Form f mit nicht verschwindender Diskriminante construirt, welche die Darstellung

$$f = \frac{\varphi^2 + \psi^2 + \chi^2}{h}$$

gestattet; dabei sind φ, ψ, χ Formen von der $n-2^{\text{ten}}$ Ordnung mit reellen Coefficienten und mit den folgenden Eigenschaften: die Curven $\varphi = 0$, $\psi = 0$, $\chi = 0$ haben mit der Curve $f = 0$ gewisse $n - 4$ paarweise conjugirt imaginäre Punkte $A_1, \ldots, A_{n-4}$ gemein; die Curve $\psi + i\chi = 0$ berührt ausserdem die Curve $f = 0$ in den $1 + \frac{1}{2}(n-1)(n-2)$ imaginären Punkten A, $U_1, \ldots, U_{\frac{1}{2}(n-1)(n-2)}$; die Curve $\psi - i\chi = 0$ berührt $f = 0$ in den conjugirt imaginären Punkten B, $V_1, \ldots, V_{\frac{1}{2}(n-1)(n-2)}$; die Curve $\varphi = 0$ schneidet die Curve $f = 0$ noch in den weiteren Punkten A, $U_1, \ldots, U_{\frac{1}{2}(n-1)(n-2)}$, B, $V_1, \ldots, V_{\frac{1}{2}(n-1)(n-2)}$. Sämmtliche in Betracht gezogene Punkte liegen von einander getrennt und die Berührungspunkte $U_1, \ldots, U_{\frac{1}{2}(n-1)(n-2)}$, sowie die Berührungspunkte $V_1, \ldots, V_{\frac{1}{2}(n-1)(n-2)}$ liegen nicht auf einer Curve $n-3^{\text{ter}}$ Ordnung.

5.

In den nun folgenden Abschnitten werden wir sowohl die Coefficienten der eben construirten Form f, als auch die auf der Curve $f = 0$ gelegenen Punkte A, B, U, V einer stetigen Veränderung unterwerfen und zwar derart, dass dabei die sämmtlichen Coefficienten von f und die Coordinaten der Punkte $A_1, \ldots, A_{n-4}$, A als die unabhängigen Veränderlichen, dagegen die Coordinaten der Punkte $U_1, \ldots, U_{\frac{1}{2}(n-1)(n-2)}$ als Funktionen jener unabhängigen Veränderlichen betrachtet werden. Dabei benutzen wir einige Thatsachen aus der Theorie der Abelschen Funktionen, welche sich für unseren Zweck, wie folgt, aussprechen lassen.

Es sei F eine beliebige Form von der n^{ten} Ordnung mit reellen Coefficienten und von nicht verschwindender Diskriminante. Durch die Gleichung $F = 0$ wird y als algebraische Funktion von x definirt. Da die Curve $F = 0$ keinen Doppelpunkt besitzt, so hat das Geschlecht derselben den Wert

$$p = \frac{1}{2}(n - 1)(n - 2).$$

Die p überall endlichen Integrale der Curve haben die Gestalt

$$w = \int \frac{x^\mu y^\nu}{\frac{\partial F}{\partial x}} dx,$$

wo die Summe der Exponenten μ, ν die Zahl $n - 3$ nicht überschreitet.

Für unseren Zweck kommt das Problem in Betracht, eine Curve von der $n - 2^{\text{ten}}$ Ordnung zu construiren, welche die gegebene Curve $F = 0$ in den gegebenen Punkten $A_1, \ldots, A_{n-4}$ schneidet, in dem ebenfalls gegebenen Punkte A berührt und endlich in p weiteren zu bestimmenden Punkten berührt. Dieses Problem führt auf eine Theilungsaufgabe; dasselbe ist daher mit Hilfe des Jacobischen Umkehrproblems lösbar.

Es seien p bestimmte überall endliche Integrale nach der von Riemann angegebenen Vorschrift ausgewählt; wir bezeichnen dieselbe mit $w_1, \ldots, w_p$ und verstehen allgemein unter $w(P)$ den Wert eines solchen Integrals im Punkte P.

I. Sind dann $P_1, \ldots, P_{n(n-2)}$ die Schnittpunkte irgend einer Curve $n - 2^{\text{ter}}$ Ordnung mit der Curve $F = 0$, so ist nach dem Abelschen Theorem

$$w_s(P_1) + \ldots + w_s(P_{n(n-2)}) \equiv \beta_s, \qquad (s=1,2,\ldots,p)$$

wo $\beta_1, \ldots, \beta_p$ gewisse Summen von überall endlichen Integralen bedeuten, welche nicht von den Punkten $P_1, \ldots, P_{n(n-2)}$, sondern nur von den Coefficienten der Form F abhängen.

Aus der Umkehrung des Abelschen Theorems ergiebt sich ferner der folgende Satz:

II. Wenn für $n(n - 2)$ Punkte $P_1, \ldots, P_{n(n-2)}$ der Curve $F = 0$ die in Satz I angegebenen Congruenzen erfüllt sind, so können diese durch eine Curve $n - 2^{\text{ter}}$ Ordnung ausgeschnitten werden.

Wir verstehen im Folgenden unter $w(x)$ den Wert, welchen das Integral w in dem Punkte mit den Coordinaten x, y annimmt. Es gelten dann für die zu unserem algebraischen Gebilde zugehörige Funktion θ von p Veränderlichen die folgenden Sätze:

III. Wenn die p Punkte $U_1, \ldots, U_p$ *nicht* auf einer Curve $n-3^{\text{ter}}$ Ordnung liegen, so verschwindet die Funktion

$$\theta[w_1(x) - w_1(U_1) - \ldots - w_1(U_p), \ldots, w_p(x) - w_p(U_1) - \ldots - w_p(U_p)]$$

nicht identisch für alle Werte von x.

IV. Wenn die obige Funktion θ nicht identisch für alle Werte von x verschwindet, so hat sie, als Funktion von x betrachtet, die p Punkte $U_1, \ldots, U_p$ und nur diese zu Nullstellen, und wenn man dann in jener Funktion θ die Werte

$$w_s(U_1) + \ldots + w_s(U_p) \equiv \frac{\beta_s}{2} - \frac{1}{2}[w_s(A_1) + \ldots + w_s(A_{n-4})] - w_s(A) \qquad (s=1,2,\ldots,p)$$

einsetzt, so sind die p Nullstellen die Berührungspunkte einer Curve $n-2^{\text{ter}}$ Ordnung, welche $F=0$ in den gegebenen Punkten $A_1, \ldots, A_{n-4}$ schneidet und in dem gegebenen Punkte A berührt.

V. Die Funktion θ verschwindet identisch, wenn es möglich ist, in jeder beliebig kleinen Umgebung der p Punkte $U_1, \ldots, U_p$ andere p Punkte $U_1', \ldots, U_p'$ zu finden von der Art, dass diese ebenfalls Berührungspunkte einer Curve $n-2^{\text{ter}}$ Ordnung sind, welche $F=0$ in den gegebenen Punkten $A_1, \ldots, A_{n-4}$ schneidet und in dem gegebenen Punkte A berührt.

VI. Umgekehrt wenn die obige Funktion θ identisch für alle Werte von x verschwindet, so giebt es in beliebiger Nähe der Punkte $U_1, \ldots, U_p$ stets p andere Punkte $U_1', \ldots, U_p'$ von der Art, dass die letzteren die Berührungspunkte einer durch $A_1, \ldots, A_{n-4}$ hindurch gehenden und in A berührenden Curve $n-2^{\text{ter}}$ Ordnung sind.

6.

Mit Hilfe der angeführten Sätze lässt sich die stetige Änderung der Coefficienten der Form f in der Weise vollziehen, wie dies am Anfang des vorigen Abschnittes in Aussicht genommen worden ist. Zu dem Zwecke bilden wir für die besondere Form f die Funktion

$$\theta[w_1(x) - w_1(U_1) - \ldots - w_1(U_p), \ldots, w_p(x) - w_p(U_1) - \ldots - w_p(U_p)]$$

und denken uns darin die auf die Punkte U bezüglichen Integralsummen durch die bekannten Grössen ersetzt, in der Weise, wie dies in Satz IV des vorigen Abschnittes geschehen ist. Da nach der in Abschnitt 4 ausgeführten Construction von f die p Berührungspunkte $U_1, \ldots, U_p$ nicht auf einer Curve $n-3^{\text{ter}}$ Ordnung liegen, so ist nach Satz III des vorigen Abschnittes die Funktion θ nicht identisch für alle Werte von x gleich 0. Die Funktion θ besitzt daher nach Satz IV nur in den p Punkten $U_1, \ldots, U_p$ den Wert 0. Die Perioden und Argumente der Funktion θ setzen sich in bestimmt vorgeschriebener Weise aus den zur Curve $f=0$ gehörigen überall endlichen Integralen zusammen. Wenn wir daher die Coefficienten der Form f und die gegebenen Punkte $A_1, \ldots, A_{n-4}, A$ einer stetigen Änderung unterwerfen, so ändern sich auch die Perioden und Argumente der Funktion θ stetig, solange nur die Diskriminante der Form f nicht 0 wird. Es lässt sich nun die Funktion θ nach Potenzen der Perioden und Argumente entwickeln und nach einem bekannten Satze von Weierstrass[1] sind folglich auch die Nullstellen der Funktion θ stetige Funktionen der Perioden und Argumente. Damit ist gezeigt, dass diese Nullstellen ebenfalls sich stetig ändern, wenn man die Coefficienten der Form f und die gegebenen Punkte $A_1, \ldots, A_{n-4}, A$ einer stetigen Änderung unterwirft.

Die Nullstellen $U_1, \ldots, U_p$ der Funktion θ sind, wie eben ausgeführt worden ist, die Berührungspunkte einer Curve $n-2^{\text{ter}}$ Ordnung. Da

[1] Vgl. die Abhandlung: *Einige auf die Theorie der analytischen Funktionen mehrerer Veränderlichen sich beziehende Sätze.* Abschnitt 1.

durch diese p Berührungspunkte und durch die gegebenen Punkte A_1, $\ldots, A_{n-4}, A$ die Berührungscurve $\phi + i\chi = 0$ völlig bestimmt ist, so folgt, dass auch die Coefficienten der Form $\phi + i\chi$ bei jener stetigen Änderung selber eine stetige Änderung erfahren und das gleiche gilt daher auch von den Coefficienten der Formen ϕ und χ.

Es kommt nun wesentlich darauf an, zu zeigen, dass jede durch stetige Änderung aus f entstehende Form F eine ebensolche Darstellung gestattet, wie die Form f. Um diesen Beweis zu führen, construiren wir zunächst aus den p Nullstellen der Funktion θ für die Curve $F = 0$ die bezügliche Berührungscurve; es sei $\Psi + iX = 0$ die Gleichung dieser Berührungscurve; dabei müssen die $n - 4$ einfachen Schnittpunkte dieser Berührungscurve mit $F = 0$ paarweise conjugirt imaginär gewählt sein; wir bezeichnen dieselben wiederum mit $A_1, \ldots, A_{n-4}$. Die Berührungspunkte heissen wiederum $A, U_1, \ldots, U_p$ und die zu diesen conjugirt imaginären Punkte $B, V_1, \ldots, V_p$ sind dann offenbar diejenigen Punkte, in welchen die ebenfalls durch $A_1, \ldots, A_{n-4}$ hindurch gehende Curve $\Psi - iX = 0$ die Curve $F = 0$ berührt.

Nach Satz I ist

$$w_s(A_1) + \ldots + w_s(A_{n-4}) + 2[w_s(A) + w_s(U_1) + \ldots + w_s(U_p)] \equiv \beta_s,$$

$$w_s(A_1) + \ldots + w_s(A_{n-4}) + 2[w_s(B) + w_s(V_1) + \ldots + w_s(V_p)] \equiv \beta_s \qquad (s=1,2,\ldots,p)$$

und wenn man diese beiden Formeln addirt und die so entstehende Congruenz durch 2 dividirt, so wird

$$w_s(A_1) + \ldots + w_s(A_{n-4}) + w_s(A) + w_s(U_1) + \ldots + w_s(U_p)$$

$$+ w_s(B) + w_s(V_1) + \ldots + w_s(V_p) \equiv \beta_s + \frac{\varepsilon}{2} \Pi_s, \qquad (s=1,2,\ldots,p)$$

wo $\Pi_1, \ldots, \Pi_p$ ein Periodensystem ist und wo ε entweder 0 oder 1 bedeutet. Um zu entscheiden, welcher von diesen beiden Fällen eintritt, beachten wir, dass die auf $f = 0$ gelegenen Punkte $A_1, \ldots, A_{n-4}, A$, $U_1, \ldots, U_p, B, V_1, \ldots, V_p$ sämmtlich durch eine Curve $n - 2^{\text{ter}}$ Ordnung, nämlich durch die Curve $\varphi = 0$ ausgeschnitten werden und dass daher nach Satz I

$$w_s(A_1) + \cdots + w_s(A_{n-4}) + w_s(A) + w_s(U_1) + \cdots + w_s(U_p)$$
$$+ w_s(B) + w_s(V_1) + \cdots + w_s(V_p) \equiv \beta_s \qquad {\scriptstyle (s=1,2,\ldots,p)}$$

ist. Da aber durch stetige Änderung der Coefficienten der Form F und der Coordinaten der Punkte $A_1, \ldots, A_{n-4}, A$ die obige Formel in diese letztere übergeführt wird und die Perioden $\Pi_1, \ldots, \Pi_p$ bei dieser Änderung nicht sämmtlich verschwinden können, so folgt, dass in der ersteren Formel ε den Wert 0 hat, und nach Satz II können daher die auf $F = 0$ gelegenen Punkte $A_1, \ldots, A_{n-4}, A, U_1, \ldots, U_p, B, V_1, \ldots, V_p$ ebenfalls durch eine Curve $n - 2^{\text{ter}}$ Ordnung ausgeschnitten werden; dieselbe sei durch die Gleichung $\Phi = 0$ dargestellt, wo Φ eine Form $n - 2^{\text{ter}}$ Ordnung mit reellen Coefficienten bedeutet.

Jede der beiden Curven $\Phi^2 = 0$ und $\Psi^2 + X^2 = 0$ schneidet die Curve $F = 0$ in den $n(n-2)$ Punkten $A_1, \ldots, A_{n-4}, A, U_1, \ldots, U_p, B, V_1, \ldots, V_p$ und zwar zählt offenbar jeder dieser Punkte als 2-facher Schnittpunkt. Bestimmen wir daher die Constante λ derart, dass die Form $\lambda\Phi^2 + \Psi^2 + X^2$ mit der Form F noch eine weitere Nullstelle gemein hat, so wird jene Form $\lambda\Phi^2 + \Psi^2 + X^2$ nothwendig die Form F als Faktor enthalten. Dabei ist die Constante λ eine reelle Zahl; denn wäre sie complex und bezeichnen wir ihren conjugirt imaginären Werth mit λ', so folgt, dass auch zugleich die Form $\lambda'\Phi^2 + \Psi^2 + X^2$ durch F theilbar sein müsste, was offenbar nicht zutrifft. Nehmen wir ferner die Quadratwurzel aus dem absoluten Wert von λ mit in die Bezeichnung der Form Φ auf, so erhalten wir eine Relation von der Gestalt

$$HF = \pm\, \Phi^2 + \Psi^2 + X^2.$$

Da wir durch stetige Änderung der Coefficienten von F, Φ, Ψ, X nothwendigerweise wieder zu den bezüglichen Coefficienten der Formen f, φ, ψ, χ, zurück gelangen können und zwischen diesen letzteren Formen die Relation

$$hf = \varphi^2 + \psi^2 + \chi^2$$

besteht, so muss auch in der obigen Formel das positive Vorzeichen gelten, und wir haben somit gezeigt, dass die Form F die Darstellung

$$F = \frac{\Phi^2 + \Psi^2 + X^2}{H}$$

gestattet. Dabei ist F eine Form mit reellen Coefficienten, welche aus der Form f durch beliebige stetige Änderung der Coefficienten entstanden ist, mit der Einschränkung jedoch, dass bei der vorgenommenen Änderung keine Form auftritt, deren Diskriminante gleich o ist oder für welche die betreffende Funktion θ identisch für alle Werte von x verschwindet.

7.

Wir untersuchen in diesem Abschnitte, unter welchen Umständen aus der Form f durch stetige Veränderung der Coefficienten eine Form entstehen kann, für welche die betreffende Funktion θ identisch verschwindet. Für diese Untersuchung brauchen wir einen Hilfssatz aus der Theorie der Elimination, der wie folgt lautet:

Es seien m Gleichungen von der Gestalt

$$G_1(x, y, \ldots, p, q, \ldots) = 0,$$
$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$
$$G_m(x, y, \ldots, p, q, \ldots) = 0$$

vorgelegt, wo $G_1, \ldots, G_m$ ganze rationale Funktionen der Unbekannten $x, y, \ldots$ und der Parameter $p, q, \ldots$ sind. Diese Gleichungen seien für $x = 0, y = 0, \ldots, p = 0, q = 0, \ldots$ erfüllt und es gebe ferner eine positive Grösse δ von der Art, dass allemal, wenn die Werte der Parameter $p, q, \ldots$, absolut genommen die Grösse δ nicht überschreiten, ein und nur ein System von Grössen $x, y, \ldots$ gefunden werden kann, welche jene Gleichungen befriedigen und deren absolute Beträge ebenfalls sämmtlich die Grösse δ nicht überschreiten: dann sind nothwendig die Grössen $x, y, \ldots$ algebraische Funktionen der Parameter $p, q, \ldots$ d. h. jede der Funktionen $x, y, \ldots$ genügt einer algebraischen Gleichung, deren Coefficienten rational von $p, q, \ldots$ abhängen.

Der Beweis bietet keine wesentliche Schwierigkeit; ich gehe jedoch auf denselben hier nicht näher ein.

Mit Hilfe des eben ausgesprochenen Satzes lässt sich der Beweis führen, dass die Coordinaten der Berührungspunkte $U_1, \ldots, U_p$ algebraische Funktionen der Coefficienten der Form F und der Coordinaten der Punkte $A_1, \ldots, A_{n-4}, A$ sind. In der That wenn man die Bedingungen dafür aufstellt, dass $U_1, \ldots, U_p$ die Berührungspunkte einer Curve $n-2^{\text{ter}}$ Ordnung sind, welche die Curve $F=0$ in den gegebenen Punkten $A_1, \ldots, A_{n-4}$ schneidet und in dem gegebenen Punkte A berührt, so erhält man ein System von algebraischen Gleichungen; und wenn wir dann die Coefficienten der Form F und die Coordinaten der Punkte $A_1, \ldots, A_{n-4}$, A stetig ändern lassen, so entspricht jedem dadurch entstehenden Systeme von Coefficienten und Coordinaten eine bestimmte Funktion θ, deren Nullstellen eben jene Berührungspunkte darstellen. Somit sind unter Berücksichtigung der Sätze IV und V in Abschnitt 5 alle Bedingungen unseres Hülfssatzes erfüllt und es folgt daher aus demselben, dass die Coordinaten der Berührungspunkte $U_1, \ldots, U_p$ algebraischen Gleichungen genügen, deren Coefficienten ganze rationale Funktionen von den gegebenen Grössen, nämlich von den Coordinaten der Form F und den Coordinaten der Punkte $A_1, \ldots, A_{n-4}, A$ sind. Wir denken uns diese algebraischen Gleichungen aufgestellt und nehmen an, dass die Coefficienten dieser Gleichungen nicht sämmtlich eine ganze rationale Funktion der gegebenen Grössen als gemeinsamen Faktor enthalten.

Soll nun die Form F die Besonderheit haben, dass die bezügliche Funktion θ für alle Werte von x und für alle Werte der Coordinaten von $A_1, \ldots, A_{n-4}$ identisch verschwindet, so giebt es nach dem Satze VI der Abschnittes 5 in beliebiger Nähe der Punkte $U_1, \ldots, U_p$ noch andere Werthe $U_1', \ldots, U_p'$, welche jene Gleichungen befriedigen, d. h. jene Gleichungen haben unendlich viele Lösungen und daher müssten in diesem Falle mindestens in einer jener Gleichungen sämmtliche Coefficienten verschwinden. Durch Nullsetzen dieser sämmtlichen Coefficienten entsteht dann ein Gleichungssystem von der Gestalt

$$C_1 = 0, \quad \ldots, \quad C_M = 0,$$

wo $C_1, \ldots, C_M$ ganze rationale Funktionen von den Coefficienten $a_1, \ldots, a_N$ der Form F sind. Diese Funktionen, können nicht sämmtlich ein und denselben Faktor enthalten, da ja die linken Seiten der obigen Gleichungen sonst ebenfalls diesen Faktor enthalten müssten, was unserer Festsetzung widerspricht. Wegen der gefundenen Eigenschaft definiren diese Gleichungen, wenn wir die Coefficienten $a_1, \ldots, a_N$ von F als homogene Punktcoordinaten in einem Raume R von $N - 1$ Dimensionen deuten, gewisse algebraische Gebilde, welche von niedrigerer als von der $N - 2^{\text{ten}}$ Dimension sind, und somit hat sich ergeben, dass die Funktion Θ bei beliebiger Wahl der Punkte $A_1, \ldots, A_{n-4}, A$ nur dann identisch verschwinden kann, wenn die Coefficienten $a_1, \ldots, a_N$ der betreffenden Form F im Raume R von $N - 1$ Dimensionen einen Punkt darstellen, welcher auf gewissen algebraischen Gebilden von niederer als der $N - 2^{\text{ten}}$ Dimension gelegen ist.

8.

Wir sind nun in den Stand gesetzt, die am Schlusse des Abschnittes 6 gefundenen Resultate auf alle definiten Formen auszudehnen. Zu dem Zwecke beweisen wir zuvor den folgenden Satz:

Es sei $f_1, f_2, \ldots$ eine unendliche Reihe definiter Formen, von denen jede eine Darstellung in der oben gefundenen Weise gestattet und deren Coefficienten in der Grenze bezüglich den Coefficienten einer bestimmten Form F gleich sind: diese Form F ist dann ebenfalls in der fraglichen Weise darstellbar.

Zum Beweise setzen wir

$$f_s = \frac{\varphi_s^2 + \psi_s^2 + \chi_s^2}{h_s} \qquad (s=1,2,\ldots)$$

und denken uns für jeden Wert von s den Bruch auf der rechten Seite so eingerichtet, dass der absolut grösste Coefficient in den Formen $\varphi_s, \psi_s, \chi_s$ der Einheit gleich wird, was sich offenbar stets erreichen lässt, indem wir Zähler und Nenner des Bruches durch das Quadrat dieses absolut grössten Coefficienten dividiren. Da nach der Voraussetzung auch die Coefficienten der Formen f_s sämmtlich absolut genommen unter einer gewissen Grenze liegen, so gilt das nämliche auch von den Coefficienten h_s. Betrachten wir nun die unendliche Reihe der Coefficienten in den Formen $\varphi_s, \psi_s, \chi_s, h_s$, so folgt aus einem bekannten Satze, dass sich mindestens *ein* System von zugehörigen Werten finden lässt, in dessen Umgebung sich die Coefficientenwerte der Formenreihe verdichten. Die aus diesen Verdichtungswerten gebildeten Formen bezeichnen wir mit Φ, Ψ, X, H. Dann ist es für ein beliebig klein vorgeschriebenes δ stets möglich, eine Zahl s zu finden, so dass

$$|\Phi - \varphi_s| < \delta, \qquad |\Psi - \psi_s| < \delta \qquad |X - \chi_s| < \delta, \qquad |H - h_s| < \delta$$

ausfällt. Hieraus kann leicht bewiesen werden, dass

$$HF = \Phi^2 + \Psi^2 + X^2$$

ist; wäre nämlich

$$HF - \Phi^2 - \Psi^2 - X^2 = \Delta,$$

wo Δ eine Form ist, welche mindestens *einen* von 0 verschiedenen Coefficienten hat, so setze man

$$H = h_s + \pi_s, \quad F = f_s + \varkappa_s, \quad \Phi = \varphi_s + \delta_s, \quad \Psi = \psi_s + \varepsilon_s, \quad X = \chi_s + \eta_s,$$

in die letztere Gleichung ein und beachte, dass durch geeignete Wahl von s sämmtliche Coefficienten der Formen $\pi_s, \varkappa_s, \delta_s, \varepsilon_s, \eta_s$ unter jeden noch so kleinen Wert herabgedrückt werden können. Hiermit aber wäre es unvereinbar, dass Δ einen von 0 verschiedenen Coefficienten hat.

Durch eine leichte Überlegung folgt zugleich, dass nothwendigerweise, wenn für jedes s die 3 Formen $\varphi_s, \psi_s, \chi_s$ eine gewisse Anzahl gemeinsamer Nullstellen haben, auch die Grenzformen Φ, Ψ, X ebenso viele gemeinsame Nullstellen besitzen müssen.

Der leichteren Darstellung wegen, deuten wir im folgenden die N Coefficienten $a_1, \ldots, a_N$ der Form F als homogene Punktcoordinaten im Raume R von $N-1$ Dimensionen und betrachten in diesem Raume zunächst die durch die Gleichung $D = 0$ dargestellte Fläche, wo D die Diskriminante der Form F bedeutet. Diese Fläche ist von der $N-2^{\text{ten}}$ Dimension und theilt den Raum in verschiedene Gebiete. Wir denken uns ferner in dem Raume R die durch die Gleichungen $C_1 = 0, \ldots, C_M = 0$ dargestellten algebraischen Gebilde construirt; dieselben sind den Ausführungen des vorigen Abschnittes zufolge von niederer als von der $N - 2^{\text{ten}}$ Dimension. Nunmehr fassen wir insbesondere diejenigen Punkte des Raumes R ins Auge, welche den definiten Formen entsprechen. Wie leicht einzusehen und auch bereits in meiner oben citirten Arbeit *Über die Darstellung definiter Formen als Summe von Formenquadraten*[1] bewiesen worden ist, können zwei definite Formen durch stetige Änderung der reellen Coefficienten in einander übergeführt werden, ohne dass dabei eine Form mit verschwindender Diskriminante passirt wird, d. h. die den definiten Formen entsprechenden Punkte des Raumes R erfüllen ein einziges zusammenhängendes Gebiet. An der Grenze dieses Gebietes liegen solche Punkte, denen definite Formen mit verschwindender Diskriminante entsprechen, und ausserdem ragen in jenes Gebiet der definiten Formen noch isolirte Gebilde von der $N - 3^{\text{ten}}$ und von niederen Dimensionen hinein, deren Punkte ebenfalls Formen mit verschwindender Diskriminante darstellen. Da die Gebilde $C_1 = 0, \ldots, C_M = 0$ ebenfalls höchstens von der $N - 3^{\text{ten}}$ Dimension sind, so können auch diese den Zusammenhang des Gebietes der definiten Formen nicht stören und wenn daher f und F zwei definite Formen sind, so ist es stets möglich durch stetige Änderung der reellen Coefficienten die Form f in die Form F überzuführen, ohne dass dabei ein Punkt der Diskriminantenfläche $D = 0$ oder ein Punkt des Gebildes $C_1 = 0, \ldots, C_M = 0$ überschritten wird.

Wir verstehen jetzt unter f die in Abschnitt 4 construirte definite Form. Da die Berührungspunkte $U_1, \ldots, U_p$ nicht auf einer Curve $n - 3^{\text{ter}}$ Ordnung liegen, so verschwindet die Funktion θ nicht identisch und der entsprechende Punkt im Raume R liegt daher nicht auf jenen Gebilden $C_1 = 0, \ldots, C_M = 0$, zugleich liegt derselbe ausserhalb der Diskriminantenfläche. Nun bezeichne F irgend eine beliebige definite Form, so dass der entsprechende Punkt entweder ausserhalb oder auf jenen besonderen Gebilden zu liegen kommt. Dann verbinde ich in der eben betrachteten Weise f mit F durch einen Weg, auf welchem die Form f stetig in F übergeht, ohne dass dabei ein auf jenen besonderen Gebilden gelegener Punkt passirt wird.

---

[1] Vgl. Mathematische Annalen. Bd. 32. S. 344.

Wir führen nunmehr den Beweis dafür, dass jedem Punkte dieses Weges eine Form entspricht, welche die fragliche Darstellung als Quotient gestattet. In der That, wenn wir den Weg bis zu einem bestimmten Punkte hin durchlaufen und wenn allen bis dahin durchlaufenen Punkten Formen entsprechen, welche jene Darstellung gestatten, so ist auch für die diesem Punkte entsprechende Form jene Darstellung möglich, wie aus dem zu Anfang dieses Abschnittes bewiesenen Satze folgt. Andererseits ergiebt sich aus Abschnitt 6 die folgende Thatsache: wenn für eine Form F, welche einem Punkte des construirten Weges entspricht die Darstellbarkeit bereits bewiesen worden ist, so lässt sich von diesem Punkte ab auf dem Wege stets ein endliches Stück abgrenzen derart, dass auch alle diesem Wegstücke entsprechende Formen jene Darstellung gestatten, und da die dem Endpunkt des Weges entsprechende Form F eine beliebige definite Form ist, so haben wir den folgenden Satz bewiesen:

Jede beliebige ternäre definite Form F von der n^{ten} Ordnung ist in der Gestalt darstellbar

$$F = \frac{\Phi^2 + \Psi^2 + X^2}{H},$$

wo Φ, Ψ, X Formen mit reellen Coefficienten von der $n-2^{\text{ten}}$ Ordnung sind, und H die $n-4^{\text{te}}$ Ordnung besitzt.

9.

Das eben gewonnene Ergebniss liefert unmittelbar den Beweis für den in der Einleitung ausgesprochenen Satz; denn die rechter Hand im Nenner des Bruches auftretende Form H von der $n-4^{\text{ten}}$ Ordnung ist offenbar ebenfalls eine definite Form und gestattet daher wiederum nach eben jenem Satze die Darstellung als Bruch, dessen Zähler eine Summe von 3 Formenquadraten und dessen Nenner eine definite Form von der $n-8^{\text{ten}}$ Ordnung ist. Durch Fortsetzung dieses Verfahrens gelangen wir schliesslich zu einem Bruche, dessen Nenner eine Constante oder eine quadratische definite Form ist. Da letztere ebenfalls einer Summe von

Formenquadräten gleich ist, so erhalten wir nach Ausführung der Multiplicationen eine Darstellung der ursprünglichen Form F als Quotient von Quadratsummen. Wir sprechen den so gewonnenen Satz, wie folgt, aus:

Eine jede ternäre definite Form F lässt sich in der Gestalt

$$F = \frac{\Phi_1^2 + \Phi_2^2 + \dots + \Phi_P^2}{\varphi_1^2 + \varphi_2^2 + \dots + \varphi_\rho^2}$$

darstellen, wo $\Phi_1, \Phi_2, \dots, \Phi_P, \varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_\rho$ Formen mit reellen Coefficienten sind.

Königsberg in Pr., 18 Februar 1892.