Acta Math., 165 (1990), 1–103

# Fibrés déterminants, métriques de Quillen et dégénérescence des courbes

par

J.-M. BISMUT et J.-B. BOST

*Université Paris-Sud*
*Orsay, France*

*I.H.E.S.*
*Bures-sur-Yvette, France*

**Table des matières**



## 1. Introduction

Dans cet article, nous étudions la métrique de Quillen sur le fibré déterminant associé à une famille de courbes complexes qui admet des fibres singulières.

Soient $X$ et $S$ des variétés analytiques complexes et soit $\pi: X \to S$ une application holomorphe propre. La construction de Grothendieck–Knudsen–Mumford ([KM], [BGS3]) permet d'associer à tout fibré vectoriel holomorphe $\xi$ sur $X$ le fibré en droites holomorphe sur $S$ « déterminant de l'image directe de $\xi$ », noté $\det(R\pi_* \xi)$. Le théorème de Riemann–Roch–Grothendieck exprime([1]) la première classe de Chern de $\det(R\pi_* \xi)$ comme intégrale le long des fibres de $\pi$ de classes caractéristiques du fibré $\xi$ et du fibré virtuel $TX-\pi^*TS$.

Supposons que $\pi$ soit une submersion, c'est-à-dire un morphisme lisse au sens de la géométrie analytique. Le fibré virtuel $TX-\pi^*TS$ est alors représenté par le fibré tangent relatif de $\pi$, $TX/S$. Supposons aussi que $\xi$ et $TX/S$ soient munis de métriques hermitiennes. Dans [Q], Quillen a montré comment munir le fibré $\lambda(\xi)=[\det(R\pi_* \xi)]^{-1}$ d'une métrique hermitienne, obtenue comme produit de la métrique $L^2$ sur le déterminant de la cohomologie de $\xi$ dans les fibres de $\pi$ et de la torsion analytique de Ray–Singer [RS] du complexe de Dolbeault sur les fibres. Les résultats de Bismut, Gillet et Soulé [BGS3], généralisant ceux de Quillen [Q], fournissent un raffinement du théorème de Riemann–Roch–Grothendieck en exprimant la courbure de la connexion holomorphe hermitienne sur $\lambda(\xi)$ associée à la métrique de Quillen comme intégrale le long des fibres de $\pi$ de polynômes de Chern–Weil associés aux connexions holomorphes hermitiennes sur les fibrés $\xi$ et $TX/S$.

L'objet de ce travail est d'obtenir un raffinement analogue du théorème de Riemann–Roch–Grothendieck dans le cas où $\pi: X \to S$ est une famille de courbes complexes à singularités ordinaires. Soit $\Delta$ le diviseur paramétrant les fibres singulières de $\pi$. Comme $\pi$ est une submersion sur $X-\pi^{-1}(\Delta)$, les considérations précédentes s'appliquent au fibré $\lambda(\xi)|_{S-\Delta}$, qui peut donc être muni d'une métrique de Quillen. Cette métrique ne se prolonge pas en une métrique continue sur $S$ tout entier, et, dans cet article, nous décrivons ses singularités au voisinage de $\Delta$. Ces singularités sont suffisamment raisonnables pour que l'on puisse définir comme courant sur $S$, singulier le long de $\Delta$, la courbure de $\lambda(\xi)$ muni de la métrique de Quillen. Le calcul de ce courant fournit le raffinement souhaité du théorème de Riemann–Roch–Grothendieck.

Compte tenu de sa définition, l'étude de la métrique de Quillen au voisinage de $\Delta$ conduit à considérer le comportement de la torsion analytique d'un fibré sur une surface de Riemann lorsque celle-ci dégénère. L'étude de ce comportement apparaît naturellement en théorie des cordes et en théorie des champs en dimension 2. En fait, l'une des motivations initiales de notre travail était de comprendre mathématiquement les résultats sur cette question de divers physiciens, notamment de Belavin et Knizhnik ([BK]) et de Moore, Cohen et Polchinski (non publié).

Nos résultats principaux sont énoncés dans la partie 2, où nous donnons aussi une

([1]) Du moins lorsque $X$ et $S$ sont quasi projectives et $\pi$ et $\xi$ algébriques.

description détaillée du contenu de cet article (section 2(d)). Ces résultats ont été annoncés dans [BB].

Nous tenons à remercier pour leurs conseils H. Gillet, F. Loeser, G. Moore et C. Soulé.

## 2. Enonce des résultats

### 2(a) Notations et rappels

(i) *Formes différentielles et courants*. On note $\alpha^{(k)}$ la composante de degré $k$ d'une forme différentielle $\alpha$ sur une variété différentiable.

Si $\pi: X \to S$ est une application $C^\infty$ entre variétés $C^\infty$ orientées, et $\omega$ un courant sur $X$ tel que $\pi$ restreinte au support de $\omega$ soit propre, nous désignerons par $\int_\pi \omega$ son image directe par $\pi$; c'est le courant sur $S$ défini par l'égalité, pour toute forme différentielle $\alpha$ sur $X$, $C^\infty$ à support compact

$$\int_S \left( \alpha \wedge \int_\pi \omega \right) = \int_X \pi^* \alpha \wedge \omega.$$

Si $\pi$ est une submersion en tout point du support de $\omega$ et si $\omega$ est de classe $C^\infty$, alors $\int_\pi \omega$ est de classe $C^\infty$.

Il vient, pour tout courant $\omega$ sur $X$ tel que la restriction de $\pi$ au support de $\omega$ soit propre

$$d \int_\pi \omega = \int_\pi d\omega. \tag{2.1}$$

De plus, si $X$ et $S$ sont des variétés analytiques complexes, et si $\pi$ est holomorphe, alors

$$\partial \int_\pi \omega = \int_\pi \partial \omega \quad \text{et} \quad \bar{\partial} \int_\pi \omega = \int_\pi \bar{\partial} \omega. \tag{2.2}$$

Cela découle de (2.1) et du fait que si les fibres de $\pi$ sont de dimension complexe $d$ et si $\omega$ est de type $(p, q)$, alors $\int_\pi \omega$ est de type $(p-d, q-d)$.

Si $M$ est une variété analytique complexe, nous désignerons par $\omega_M$ son fibré en droites canonique, c'est-à-dire le fibré des formes de type $(d, 0)$, où $d$ est la dimension complexe de $M$.

Si $D$ est une sous-espace analytique fermé de $M$, on définit le courant d'intégration sur $D$, $\delta_D$, par l'égalité, pour toute forme différentielle $\alpha$ sur $X$, $C^\infty$ à support compact

$$\int_M \delta_D \wedge \alpha = \int_{D_r} \alpha$$

où $D_r$ désigne le lieu des points réguliers de $D$. Par linéarité, on étend cette définition à tout cycle analytique sur $M$.

(ii) *Classes caractéristiques des fibrés vectoriels holomorphes hermitiens.* Soient $\xi$ un fibré vectoriel holomorphe sur une variété analytique complexe $M$, et $\| \ \|$ une métrique hermitienne $C^\infty$ sur $\xi$. Il existe une unique connexion $\nabla$ sur $\xi$ de type $(1,0)$ et compatible à la métrique $\| \ \|$ (cf. [Ch]). Au moyen de cette connexion et des formules de Chern–Weil, on peut associer à $(\xi, \| \ \|)$ des formes différentielles fermées de composantes homogènes de type $(p,p)$ $(p \in \mathbf{N})$, qui représentent en cohomologie de De Rham ses diverses classes caractéristiques (cf. [Ch]) : les « formes de Chern » $c_k(\xi, \| \ \|)$, la « forme caractère de Chern » $\mathrm{ch}(\xi, \| \ \|)$ et la « forme de Todd » $\mathrm{Td}(\xi, \| \ \|)$.

Plus précisément, si $R$ désigne la courbure de $\nabla$, considéré comme section de $\Lambda^2 T^*M \otimes \mathrm{End}\, \xi$, on a

$$\mathrm{ch}(\xi, \| \ \|)^{(2k)} = \left(\frac{i}{2\pi}\right)^k \mathrm{Tr}\, R^k.$$

En particulier, si l'on note $\mathrm{rg}\, \xi$ le rang du fibré $\xi$, on a

$$\mathrm{ch}(\xi, \| \ \|)^{(0)} = \mathrm{rg}\, \xi; \tag{2.3}$$

de plus

$$\mathrm{ch}(\xi, \| \ \|)^{(2)} = c_1(\xi, \| \ \|). \tag{2.4}$$

Lorsque $\xi$ est un fibré en droites, il vient (localement)

$$c_1(\xi, \| \ \|) = \frac{1}{2\pi i} \partial\bar{\partial} \log \|\sigma\|^2, \tag{2.5}$$

où $\sigma$ désigne une section holomorphe non nulle de $\xi$. De plus, on a

$$\mathrm{ch}(\xi, \| \ \|) = \sum_{k \geqslant 0} \frac{1}{k!} c_1(\xi, \| \ \|)^k \tag{2.6}$$

et

$$\mathrm{Td}(\xi, \| \ \|) = 1 + \frac{1}{2} c_1(\xi, \| \ \|) + \frac{1}{12} c_1(\xi, \| \ \|)^2 + (\text{termes de degré} \geqslant 6). \tag{2.7}$$

Nous noterons $\| \ \|^{-1}$ la métrique sur le fibré dual $\xi^{-1}$ d'un fibré en droites $\xi$ déduite par dualité d'une métrique $\| \ \|$ sur $\xi$.

(iii) *Métriques généralisées*. Nous appellerons *métrique généralisée* sur un fibré en droites complexes $\mathscr{L}$ sur une variété différentiable $V$ une métrique hermitienne $\| \ \|$ sur $\mathscr{L}$ définie sur le complémentaire d'une partie $N$ de $V$, négligeable pour la classe de mesure de Lebesgue, telle qu'il existe une métrique continue $\| \ \|_0$ sur $\mathscr{L}$, partout définie, et une fonction localement sommable $\varphi: V \to \mathbf{R}$ telle que

$$\| \ \| = e^{\varphi} \| \ \|_0 \quad \text{sur} \quad V \setminus N.$$

Par partition de l'unité, il suffit en fait de vérifier localement cette condition.

Si $V$ est une variété analytique complexe et $\mathscr{L}$ un fibré en droites holomorphe muni d'une métrique généralisée $\| \ \|$, on peut encore définir $c_1(\mathscr{L}, \| \ \|)$ comme courant de type $(1, 1)$, au moyen de la formule (2.5). Ce courant représente encore la première classe de Chern de $\mathscr{L}$ en cohomologie de De Rham.

Par exemple, si $D$ est un diviseur sur la variété analytique complexe $V$, on définit une métrique généralisée $\| \ \|$ sur le fibré en droites $\mathcal{O}(D)$ sur $V$ en posant

$$\|\mathbf{1}\|(x) = 1$$

pour tout $x \in V$ dans le complémentaire du support $|D|$ de $D$, où $\mathbf{1}$ désigne la section canonique de diviseur $D$ de $\mathcal{O}(D)$. La formule de Poincaré–Lelong peut alors s'écrire

$$c_1(\mathcal{O}(D), \| \ \|) = \delta_D.$$

(iv) *Déterminants régularisés*. Nous noterons $\det' P$ le déterminant régularisé d'un opérateur différentiel elliptique positif opérant sur les sections d'un fibré vectoriel au dessus d'une variété fermée, tel qu'il est défini par Ray et Singer [RS]. Si $(\lambda_n)_{n \in \mathbf{N}}$ est la suite des valeurs propres non nulles de $P$, répétées suivant leur multiplicité, alors la série de Dirichlet $\Sigma_{n=0}^{\infty} \lambda_n^{-s}$ converge si $\operatorname{Re} s$ est suffisamment grand et définit une fonction holomorphe sur un demi-plan, qui admet un prolongement méromorphe sur tout le plan complexe. La fonction méromorphe $\zeta_P$ ainsi définie est holomorphe en 0, et, par définition,

$$\det' P = \exp[-\zeta_P'(0)].$$

## 2 (b) Familles holomorphes de surfaces de Riemann à singularités ordinaires, fibrés déterminants et métriques de Quillen

Nous appellerons *famille holomorphe de surfaces de Riemann à singularités ordinaires* (*f.s.o.*) toute application holomorphe, propre et surjective $\pi: X \to S$ entre deux variétés complexes, telle que, pour tout point $w$ de $S$, la fibre analytique de $\pi$ en $w$ soit une courbe réduite dont les seules singularités éventuelles sont des points doubles ordinaires. Le sous-ensemble $\Sigma$ de $X$ formé des points doubles des fibres de $\pi$ est alors une sous-variété fermée de codimension 2 de $X$, l'application $\pi|_\Sigma$ est une immersion propre, et on définit le *diviseur* $\Delta$ *des courbes singulières de* $\pi$ comme son image, en tant que cycle analytique. On définit le *dualisant relatif* de $\pi$ comme le fibré en droites holomorphe sur $X$

$$\omega_{X/S} = \omega_X \otimes (\pi^* \omega_S)^{-1}.$$

La restriction de $\omega_{X/S}$ à une fibre lisse $Z$ de $\pi$ s'identifie canoniquement à $\omega_Z$. (Nous revenons, avec plus de détails, sur ces définitions dans la partie 3, où nous décrivons aussi diverses propriétés des f.s.o.)

Comme l'application $\pi$ est une submersion en dehors de la partie $\Sigma$, Lebesgue-négligeable, l'image réciproque par $\pi$ d'une partie Lebesgue-négligeable de $S$ est Lebesgue-négligeable dans $X$. Par dualité, on en déduit que pour tout courant $\alpha$ localement intégrable sur $X$, le courant $\int_\pi \alpha$ est localement intégrable sur $S$.

Soient $\pi: X \to S$ une f.s.o. et $\xi$ un fibré vectoriel holomorphe sur $X$. Posons, pour tout $w \in S$,

$$Z_w = \pi^{-1}(w)$$

et

$$\lambda(\xi)_w = [\Lambda^{\max} H^0(Z_w, \xi)]^{-1} \otimes \Lambda^{\max} H^1(Z_w, \xi). \tag{2.8}$$

La famille des déterminants de la cohomologie $\lambda(\xi) = (\lambda(\xi)_w)_{w \in S}$ est munie d'une structure naturelle de fibré en droites holomorphe sur $S$, que l'on définit par la variante en géométrie analytique de la théorie du déterminant de Grothendieck, Knudsen et Mumford (cf. [KM], [BGS, III.3.a] et la partie 4, où l'on présente aussi une description plus élémentaire de cette structure holomorphe).

Soit $w$ un point de $S$ n'appartenant pas au support $|\Delta|$ du diviseur $\Delta$ des courbes singulières de $\pi$. Si $\omega_{Z_w}$ est muni d'une structure hermitienne $C^\infty$, on dispose d'une densité positive sur $Z_w$, définie par la formule (locale) suivante, où $\alpha$ désigne une section non nulle de $\omega_{Z_w}$

$$dv = i \frac{\alpha \wedge \bar{\alpha}}{\|\alpha\|^2}.$$

Si de plus $\xi|_{Z_w}$ est muni d'une structure hermitienne $C^\infty$, alors il en va de même de $\xi|_{Z_w}\otimes\bar{\omega}_{Z_w}$, par produit tensoriel, et l'on peut définir des produits scalaires $L^2$ sur $C^\infty(Z_w, \xi)$ et $C^\infty(Z_w, \xi\otimes\bar{\omega}_{Z_w})$ par la formule

$$\langle \sigma_1, \sigma_2 \rangle_{L^2} = \int_{Z_w} \langle \sigma_1(x), \sigma_2(x) \rangle \, dv(x).$$

L'opérateur $\bar{\partial}$ sur $Z_w$ à coefficients dans $\xi$

$$\bar{\partial}_{\xi, w}: C^\infty(Z_w, \xi) \to C^\infty(Z_w, \xi \otimes \bar{\omega}_{Z_w})$$

possède un adjoint $\bar{\partial}^*_{\xi, w}$ relativement à ces produits scalaires, qui nous permettent de munir de structures hermitiennes

$$H^0(Z_w, \xi) \cong \ker \bar{\partial}_{\xi, w} \subset C^\infty(Z_w, \xi)$$

et

$$H^1(Z_w, \xi) \cong \ker \bar{\partial}^*_{\xi, w} \subset C^\infty(Z_w, \xi \otimes \bar{\omega}_{Z_w}).$$

Nous désignons par $\| \ \|_{L^2}$ la métrique hermitienne sur $\lambda(\xi)_w$ déduite par puissance extérieure, dualité et produit tensoriel de ces structures hermitiennes, et nous définissons la métrique de Quillen sur $\lambda(\xi)_w$ par

$$\| \ \|_Q = (\det{}' \bar{\partial}^*_{\xi, w} \bar{\partial}_{\xi, w})^{1/2} \| \ \|_{L^2}.$$

D'après [BGS3], lorsque $\xi$ et $\omega_{X/S}$ sont munies de structures hermitiennes $C^\infty$ sur $\pi^{-1}(S-\Delta)$, alors les métriques de Quillen sur les $\lambda(\xi)_w$, $s \in S-\Delta$, construites au moyen des métriques sur $\xi_w$ et $\omega_{Z_w}$ qui s'en déduisent, déterminent une métrique hermitienne $C^\infty$ sur le fibré holomorphe $\lambda(\xi)|_{S-\Delta}$.

### 2(c) Enoncé des résultats

Nous nous proposons d'établir dans cet article le résultat suivant.

THÉORÈME 2.1. *Soient $\pi: X \to S$ une f.s.o., $\Delta$ le diviseur sur $S$ des courbes singulières de $\pi$ et $|\Delta|$ son support, et soit $\xi$ un fibré vectoriel holomorphe sur $X$. Supposons $\xi$ et $\omega_{X/S}$ munis de métriques hermitiennes $C^\infty$ que nous noterons $\| \ \|$, et désignons par $\| \ \|_Q$ la métrique de Quillen sur le fibré déterminant $\lambda(\xi)$ restreint à $S-|\Delta|$, construite à partir de ces métriques.*

*La métrique $\| \|_Q$ définit une métrique généralisée sur $\lambda(\xi)$, au dessus de $S$ tout entier, et l'on a l'égalité de courants de type* $(1,1)$ *sur* $S$

$$c_1(\lambda(\xi), \| \|_Q) = -\int_\pi [\mathrm{Td}(\omega_{X/S}^{-1}, \| \|^{-1})\, \mathrm{ch}(\xi, \| \|)]^{(4)} - \frac{1}{12} \mathrm{rg}\, \xi\, \delta_\Delta. \tag{2.9}$$

Compte-tenu des formules (2.4) et (2.7), on peut expliciter l'intégrand dans le membre de droite de (2.9) :

$$[\mathrm{Td}(\omega_{X/S}^{-1}, \| \|^{-1})\, \mathrm{ch}(\xi, \| \|)]^{(4)} = \frac{1}{12} \mathrm{rg}\, \xi \cdot c_1(\omega_{X/S}, \| \|)^2 - \frac{1}{2} c_1(\xi, \| \|)\, c_1(\omega_{X/S}, \| \|)$$
$$+ \mathrm{ch}(\xi, \| \|)^{(4)}.$$

Si $\xi$ est un fibré en droites, cette expression devient

$$\frac{1}{12} c_1(\omega_{X/S}, \| \|)^2 - \frac{1}{2} c_1(\xi, \| \|)\, c_1(\omega_{X/S}, \| \|) + \frac{1}{2} c_1(\xi, \| \|)^2.$$

Sur $S - \Delta$, la formule (2.9) est un cas particulier des résultats de [BGS3], valables pour les familles lisses kähleriennes de variétés complexes compactes de dimension arbitraire.

Lorsque $\pi: X \to S$ est un morphisme algébrique entre variétés quasi projectives et que $\xi$ un fibré algébrique sur $X$, $\lambda(\xi)$ est naturellement un fibré en droites algébrique sur $S$ et le théorème de Riemann–Roch–Grothendieck montre que la formule (2.9) est encore vérifiée par les classes caractéristiques de $\lambda(\xi), \xi$ et $\omega_{X/S}^{-1}$ dans les groupes de Chow rationnels de $X$ et $S$, à condition de remplacer l'intégration dans la fibre $\int_\pi$ par l'image directe $\pi_*$ des classes de cycles, et $\delta_\Delta$ par la classe du diviseur $\Delta$ (cf. [M, p. 100–102]) pour le détail du calcul; voir aussi § 11 (b)). Cette égalité de classes de cycles algébriques implique déjà que les deux membres de (2.9) ont même classe en cohomologie de De Rham. Le théorème 2.1 apparaît ainsi comme un raffinement du théorème de Rieman–Roch–Grothendieck en cohomologie de De Rham, valable comme égalité de formes différentielles. Il en allait déjà ainsi des résultats de [Q] et [BGS3]; toutefois, contrairement à ces derniers, le théorème 2.1 permet de considérer des morphismes $\pi$ qui ne sont pas lisses.

Nous établirons aussi l'énoncé suivant, qui précise le comportement de la métrique de Quillen $\| \|_Q$ sur $\lambda(\xi)$ au voisinage de $|\Delta|$.

THÉORÈME 2.2. *Reprenons les notations et les hypothèses du théorème* 2.1. *Soient $\Omega$ un ouvert de $S$ et $l_i$, $1 \leq i \leq N$, des fonctions holomorphes sur $\Omega$ telles que*

$$dl_i(x) \neq 0$$

*pour tout* $x \in \Omega$, *et telles qu'il existe des entiers* $n_i > 0$, $1 \leq i \leq N$, *de sorte que la restriction à* $\Omega$ *du diviseur* $\Delta$ *soit défini par l'annulation de*

$$f = \prod_{i=1}^{N} l_i^{n_i}.$$

*Pour toute section* $\sigma$ *de* $\lambda(\xi)$ *sur* $\Omega$, $C^\infty$ *et partout non nulle, il existe des fonctions* $\varphi_i \in C^\infty(\Omega, \mathbf{R})$, $0 \leq i \leq N$, *telles que*

$$\log \|\sigma\|_Q = \frac{1}{12} \operatorname{rg} \xi \log |f| + \varphi_0 + \sum_{i=1}^{N} \varphi_i |l_i|^2 \log |l_i|. \tag{2.10}$$

*En particulier, la fonction* $|f|^{-\operatorname{rg}\xi/12} \|\sigma\|_Q$, *définie sur* $\Omega \setminus |\Delta|$, *se prolonge en une fonction continue et partout non nulle sur* $\Omega$.

On remarquera que tout point de $S$ admet un voisinage ouvert $\Omega$ sur lequel sont définies $l_i$ et $\sigma$ satisfaisant aux hypothèses du corollaire.

Le prolongement à $\Omega$ de $|f|^{-\operatorname{rg}\xi/12} \|\sigma\|_Q$, n'est pas, en général, $C^\infty$ sur $\Omega$ tout entier. Les fonctions $\varphi_i$ peuvent en effet prendre des valeurs non nulles sur $l_i^{-1}(0)$ (cf. § 13 (b) pour un exemple explicite de ce phénomène). Toutefois, ce prolongement est $C^\infty$ lorsque les courbures de $(\xi, \|\ \|)$ et $(\omega_{X/S}, \|\ \|)$ sont nulles au voisinage des points doubles de fibres de $\pi$ (cf. § 12 (a)).

L'énoncé du théorème 2.2 se simplifie lorsque $S$ est le dimension 1. Il vient ainsi

COROLLAIRE 2.3. *Reprenons les notations et les hypothèses du théorème* 2.1. *Si* $S = \{z \in \mathbf{C} \mid |z| < 1\}$ *et si* $\pi^{-1}(0)$ *possède* $n$ *points doubles, alors, pour toute section continue* $\sigma$ *de* $\lambda(\xi)$ *au voisinage de* 0 *telle que* $\sigma(0) \neq 0$, *il existe* $c \in \mathbf{R}_+^*$ *tel que*

$$\|\sigma(w)\|_Q \sim c |w|^{(n/12) \operatorname{rg} \xi}$$

*lorsque* $w$ *tend vers* 0.

**2 (d)** La démonstration du théorème 2.1 proprement dit occupe les sections 5 à 11 de cet article. Elle est précédée de rappels sur les f.s.o. (§ 3) et sur les fibrés déterminants (§ 4). Nous terminons l'article par la démonstration du théorème 2.2 (§ 12) et par quelques exemples (§ 13).

Indiquons les grandes lignes de la démonstration du théorème 2.1.

On commence par établir diverses « formules d'anomalie » (cf. [BGS1,3]) qui montrent que la validité du théorème 2.1 est indépendante du choix des métriques et est compatible aux isomorphismes de fibrés déterminants associés aux suites exactes courtes de fibrés sur $X$ (§ 5).

On montre ensuite que la métrique $\| \|_{L^2}$ sur $\lambda(\xi)$ est à singularités logarithmiques au voisinage de $\Delta$ (§ 7).

Sous des hypothèses de positivité convenables sur $\xi$, on établit alors des inégalités sur la trace du noyau de la chaleur associé à $\xi$ sur les fibres $\pi^{-1}(s)$ de $\pi$, puis des inégalités sur $\det'(\bar{\partial}^*_{\xi,s}\bar{\partial}_{\xi,s})$, valables lorsque $s \in S-\Delta$ décrit un voisinage $\Omega$ suffisamment petit d'un point donné de $\Delta$. Pour cela, on utilise notamment le fait que, munies des métriques définies par une métrique $C^\infty$ sur $\omega_{X/S}$, les surfaces de Riemann $\pi^{-1}(s)$, $s \in \Omega$, forment une famille de variétés riemanniennes de géométrie bornée (§ 8–9).

On déduit de ces inégalités que, lorsque $\xi$ est « assez positif », la métrique de Quillen sur $\lambda(\xi)$, définie et $C^\infty$ sur $S-\Delta$, « ne croît pas trop vite » près de $\Delta$, et détermine donc une métrique généralisée sur tout $S$. Les formules d'anomalie du § 6 montrent alors qu'il en va ainsi pour tout $\xi$. Compte-tenu de la validité de (2.9) en dehors de $\Delta$, cela établit (2.9) avec le courant $\frac{1}{12}\mathrm{rg}\,\xi\,\delta_\Delta$ remplacé par un courant de la forme $\Sigma_i\,\eta_i(\xi)\,n_i\,\delta_{\Delta_i}$, où $\Delta=\Sigma_i\,n_i\,\Delta_i$ est la décomposition de $\Delta$ en composantes irréductibles et où les $\eta_i(\xi)$ sont des nombres réels. De plus, les majorations du § 9 sur $\det'(\bar{\partial}^*_{\xi,s}\bar{\partial}_{\xi,s})$ impliquent que

$$\eta_i(\xi) \geq \frac{1}{12}\,\mathrm{rg}\,\xi,$$

si $\xi$ est suffisamment positif (§ 10).

La comparaison avec le théorème de Riemann–Roch–Grothendieck de la formule ainsi obtenue pour la classe de cohomologie $c_1(\lambda(\xi))$ prouve enfin que

$$\eta_i(\xi) = \frac{1}{12}\,\mathrm{rg}\,\xi,$$

du moins lorsque $X$ est projective. Le cas général s'en déduit par des arguments d'espaces de modules et de déformation (§ 11).

La section 6, dont les résultats ne sont pas utilisés par la suite, fait le lien entre le théorème 2.1 et les résultats de Witten et Bismut–Freed ([W], [BF]) sur le calcul au moyen d'invariants êta de l'holonomie du fibré déterminant (d'une famille sans singularité).

**2(e)** Ce travail était achevé, lorsque P. Deligne nous a signalé qu'il est possible de déduire le théorème 2.2 des résultats de son article [D], au moins lorsque $\xi=\mathcal{O}$ et que

$\pi: X \rightarrow S$ est une famille de courbes stables, de genre $g \geqslant 3$. En effet, il montre dans [D] que l'isomorphisme de Mumford sur $S-\Delta$

$$\lambda(\mathcal{O})^{\otimes(-12)} \cong \langle \omega_{X/S}; \omega_{X/S} \rangle$$

est une isométrie (à un facteur ne dépendant que de $g$ près) lorsque $\lambda(\mathcal{O})$ est muni de la métrique de Quillen et $\langle \omega_{X/S}; \omega_{X/S} \rangle$ de la métrique de Deligne (cf. [D]) définies par une métrique $C^\infty$ sur $\omega_{X/S}$. Or, cet isomorphisme se prolonge sur $S$ en

$$\lambda(\mathcal{O})^{\otimes(-12)} \otimes \mathcal{O}(-\Delta) \cong \langle \omega_{X/S}; \omega_{X/S} \rangle$$

et un calcul local montre que la métrique sur $\langle \omega_{X/S}; \omega_{X/S} \rangle$ définie par une métrique $C^\infty$ sur $\omega_{X/S}$ se prolonge en une métrique continue sur tout $S$. On retrouve ainsi le comportement de la métrique de Quillen près de $\Delta$.

Signalons enfin que le comportement du déterminant du laplacien sur une famille de surfaces de Riemann qui dégénèrent a été étudié par S. Wolpert, lorsque celles-ci sont munies de leur métrique de Poincaré ([Wo]).

## 3. Familles holomorphes de surfaces de Riemann à singularités ordinaires

### 3(a) Description locale des f.s.o.

PROPOSITION 3.1. *Soient $X$ et $S$ deux variétés complexes et $\pi: X \rightarrow S$ une application holomorphe et surjective. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) *pour tout point $s \in S$, la fibre analytique de $\pi$ en $s$ est une courbe réduite dont les seules singularités sont des points doubles ordinaires;*

(ii) *pour tout point $x \in X$, il existe des coordonnées locales holomorphes $(z_0, z_1, \ldots, z_n)$ (resp. $(w_1, \ldots, w_n)$) sur un voisinage ouvert de $x$ dans $X$ (resp. de $s$ dans $S$) telles que, exprimée dans ces coordonnées, l'application $\pi$ soit définie par les équations*

$$w_i = z_i, \quad i = 1, \ldots, n \tag{3.1}$$

*ou par les équations*

$$w_1 = z_0 z_1; \quad w_i = z_i, \quad i = 2, \ldots, n. \tag{3.2}$$

*Démonstration.* L'implication (ii)$\Rightarrow$(i) est évidente. L'implication réciproque est une conséquence immédiate de l'énoncé suivant.

PROPOSITION 3.2. *Soit* $f\colon (\mathbf{C}^{n+1},0)\to(\mathbf{C}^n,0)$ *un germe d'application analytique et soit* $F_0$ *la fibre analytique de* $f$ *en* 0.

(i) *Si* $F_0$ *est un germe de courbe réduite et lisse, alors* $f$ *est un germe de morphisme lisse : on peut trouver des coordonnées locales* $(z_0,z_1,\dots,z_n)$ *(resp.* $(w_1,\dots,w_n)$*) au voisinage de* 0 *dans* $\mathbf{C}^{n+1}$ *(resp.* $\mathbf{C}^n$*) telles que, exprimée dans ces coordonnées,* $f$ *soit définie par les équations*

$$w_i = z_i, \quad i=1,\dots,n.$$

(ii) *Si* $F_0$ *est un germe de courbe réduite, possédant un point double ordinaire en* 0, *alors on peut trouver des coordonnées locales* $(z_0,z_1,\dots,z_n)$ *(resp.* $(w_1,\dots,w_n)$*) au voisinage de* 0 *dans* $\mathbf{C}^{n+1}$ *(resp.* $\mathbf{C}^n$*) telles que, exprimée dans ces coordonnées,* $f$ *soit définie par les équations*

$$w_1 = z_0 z_1; \quad w_i = z_i, \quad i=2,\dots,n.$$

*Démonstration.* L'assertion (i) est une conséquence du théorème des fonctions implicites. L'assertion (ii) découle des théorèmes classiques sur les déformations de germes d'espace analytique à singularité isolé (cf. [T]), appliqués au germe de courbe plane d'équation $xy=0$. □

Il résulte immédiatement de la proposition 3.1 que si $\pi\colon X\to S$ est une f.s.o., alors le sous-ensemble $\Sigma$ de $X$ formé des points doubles des fibres de $\pi$ est une sous-variété fermée de codimension 2 de $X$. De plus, l'application :

$$\pi|_\Sigma\colon \Sigma\to S$$

est une immersion propre, tandis que, restreinte à $X-\Sigma$, $\pi$ est une submersion (au sens de la géométrie différentielle, i.e. un morphisme lisse au sens de la géométrie analytique).

Soient $(\Sigma_i)_{i\in I}$ les composantes connexes de $\Sigma$. Les $\pi(\Sigma_i)$ sont des hypersurfaces analytiques fermées irréductibles de $X$ et la famille des $\pi(\Sigma_i)$ est localement finie dans $S$. On peut donc définir le diviseur des courbes singulières de la famille $\pi\colon X\to S$ comme

$$\Delta = \sum_{i\in I}\pi(\Sigma_i).$$

Soit $(\Delta_j)_{j\in J}$ la famille des composantes irréductibles de $\Delta$; cette famille a les mêmes éléments que la famille $(\pi(\Sigma_i))_{i\in I}$, mais chacun d'eux y apparaît une fois exactement. La multiplicité $n_j$ de $\Delta_j$ dans $\Delta$, définie par

$$\Delta = \sum_{j \in J} n_j \Delta_j,$$

est le nombre de points doubles de la fibre $\pi^{-1}(z)$ pour tout point lisse $z$ du support $|\Delta|$ de $\Delta$ appartenant à $\Delta_i$.

### 3(b) Changement de base des f.s.o.

On établit aisément le résultat suivant.

PROPOSITION 3.3. *Conservons les notations de la section précédente. Soient $S'$ une variété complexe et $f: S' \to S$ une application holomorphe. Considérons l'espace analytique produit fibré $X' = X \times_S S'$ et le diagramme cartésien d'espaces analytiques qui le définit*

$$\begin{array}{ccc} X' & \xrightarrow{F} & X \\ \downarrow{\scriptstyle \pi'} & & \downarrow{\scriptstyle \pi} \\ S' & \xrightarrow{f} & S \end{array} .$$

*Les assertions suivantes sont équivalentes :*

(i) *$f: S' \to S$ et $\pi|_\Sigma: \Sigma \to S$ sont transversales,* i.e., *si $s' \in S'$, $\sigma \in \Sigma$ et $f(s') = \pi(\sigma) =: s$, alors*

$$T_s S = \operatorname{Im} T_{s'} f + \operatorname{Im} T_\sigma \pi|_\Sigma.$$

(ii) *$X'$ est une variété et $\pi'$ est une f.s.o.*

*Lorsque ces conditions sont réalisées le diviseur $\Delta'$ sur $S'$ des courbes singulières de la f.s.o. $\pi'$ est $f^{-1}(\Delta)$.*

Lorsque $|\Delta|$ est une hypersurface lisse, la condition (i) n'est autre que la transversalité de $f$ à $|\Delta|$.

### 3(c) Le fibré dualisant relatif d'une f.s.o.

Nous rappelons dans cette section quelques résultats élémentaires bien connus, et précisons à cette occasion diverses notations.

Si $M$ est une variété complexe, nous noterons $T_M$ le fibré tangent holomorphe de

$M$, et $T_M^*$ ou $\Omega_M^1$ son dual, le fibré des 1-formes holomorphes sur $M$. Sa puissance extérieure maximale est le fibré en droites canonique $\omega_M$.

Reprenons les notations de la section 3(a). On définit le faisceau $\Omega_{X/S}^1$ des différentielles relatives sur $X$ comme le conoyau du morphisme de faisceaux

$$\pi^*(\Omega_S^1) \to \Omega_X^1$$

défini par la différentielle de $\pi$. En dehors de $\Sigma$, $\Omega_{X/S}^1$ est localement libre de rang 1, et s'identifie au dual du fibré tangent relatif $T_{X/S}$, défini sur $X-\Sigma$ comme le noyau de la différentielle de $\pi$

$$T_\pi : T_X \to \pi^* T_S.$$

De plus, la suite exacte de fibrés vectoriels sur $X-\Sigma$

$$0 \to \pi^*\Omega_S^1 \to \Omega_X^1 \to \Omega_{X/S}^1 \to 0$$

détermine, par passage aux puissances extérieures maximales, un isomorphisme de fibrés en droites sur $X-\Sigma$

$$\Omega_{X/S}^1 \cong \omega_X \otimes (\pi^*\omega_S)^{-1} = \omega_{X/S}.$$

Ainsi, $\omega_{X/S}$ est un fibré en droites sur $X$ qui prolonge sur tout $X$ le fibré en droites $\Omega_{X/S}^1$ sur $X-\Sigma$. Comme $\Sigma$ est de codimension 2 dans $X$, cette propriété caractérise $\omega_{X/S}$ (à isomorphisme unique près).

Soit $s$ un point de $\Sigma$. Il existe un voisinage ouvert $V$ de $s$ dans $X$, des coordonnées locales $(z_0, z_1, \dots, z_n)$ sur $V$ et des coordonnées locales $(w_1, \dots, w_n)$ au voisinage de $\pi(s)$ telles que, sur $V$, $\pi$ soit définie en terme de ces coordonnées par les formules

$$w_1 = z_0 z_1; \quad w_i = z_i, \quad i \geqslant 2.$$

Décrivons explicitement le prolongement de $\omega_{X/S}$ à $X$ tout entier en exhibant une section holomorphe partout non nulle de $\omega_{X/S}$ sur un tel ouvert $V$.

La sous-variété $\Sigma \cap V$ est définie par les équations

$$z_0 = 0 \quad \text{et} \quad z_1 = 0.$$

Les formes différentielles $dz_0/z_0$ et $-dz_1/z_1$, sections de $\Omega_X^1$, définies respectivement sur les ouverts $\{z_0 \neq 0\}$ et $\{z_1 \neq 0\}$, ont des images dans $\Omega_{X/S}^1$ qui coïncident sur l'ouvert

$\{z_0 z_1 \neq 0\}$ puisque

$$\frac{dz_0}{z_0}+\frac{dz_1}{z_1}=\frac{d(z_0 z_1)}{z_0 z_1}=\pi^*\frac{dw_1}{w_1}.$$

Elles définissent donc une section holomorphe $\sigma$ sur $V-\Sigma$ du fibré en droites $\omega_{X/S}$. De plus, $\sigma$ ne s'annule pas sur $V-\Sigma$; en effet, les restrictions de $dz_0/z_0$ et $-dz_1/z_1$ à une fibre de $\pi|_{V-\Sigma}$ ne s'annulent pas, puisque $z_0$ ou $z_1$ est toujours une coordonnée locale sur une telle fibre. Comme $\Sigma$ est de codimension 2 dans $V$, $\sigma$ se prolonge en une section partout non nulle de $\omega_{X/S}$ sur $V$ tout entier.

Signalons enfin que la construction du dualisant relatif est compatible au changement de base : lorsque les conditions de la proposition 3.3 sont réalisées, on dispose d'un isomorphisme canonique

$$\omega_{X'/S'}\cong F^*\omega_{X/S}$$

qui prolonge le dual de l'isomorphisme évident au dessus de $X'-|\Delta'|$

$$T_{X'/S'}\cong F^*T_{X/S}.$$

### 3(d) Projectivité relative des f.s.o.

Les familles de surfaces de Riemann compactes à singularités ordinaires possèdent la propriété suivante de projectivité relative, localement sur la base.

Proposition 3.4. *Soit $\pi: X\to S$ une f.s.o. Pour tout point $s$ de $S$, il existe un voisinage ouvert $V$ de $s$, un entier naturel $N$ et un plongement*

$$i:\pi^{-1}(V)\to V\times\mathbf{P}^N\mathbf{C}$$

*tel que le diagramme suivant commute*

$$\begin{tikzcd}
\pi^{-1}(V) \arrow[rr, "i"] \arrow[dr, "\pi"'] & & V\times\mathbf{P}^N\mathbf{C} \arrow[dl, "\mathrm{pr}_1"] \\
& V &
\end{tikzcd}$$

*Démonstration.* Soient $C_i$, $i=1,\dots,n$, les composantes irréductibles de $\pi^{-1}(s)$ et soit, pour tout $i=1,\dots,n$, $P_i$ un point lisse de $C$ dans $C_i$. D'après [Grau, Satz 4, p. 347 et Korollar, p. 344], le fibré en droite $\mathscr{L}=\mathcal{O}(\Sigma_{i=1}^m P_i)$ est ample. Il existe donc un entier $n>0$ tel que $\mathscr{L}^{\otimes n}$ soit très ample sur $\pi^{-1}(s)$ et que $H^1(\pi^{-1}(s), \mathscr{L}^{\otimes n})=0$.

Comme l'application $\pi$ est une submersion au voisinage de chacun des points $P_i$, il existe un voisinage ouvert $U$ de $s$ dans $S$ et des sections holomorphes $\sigma_i: U \to X$ de $\pi$ telles que $\sigma_i(s)=P_i$. Le fibré en droites $\mathscr{M}=\mathcal{O}(\Sigma_{i=1}^m n\sigma_i(U))$ sur $\pi^{-1}(U)$ est alors par construction tel que :

(i) $\mathscr{M}|_{\pi^{-1}(y)}$ est très ample sur $\pi^{-1}(y)$;

(ii) $H^1(\pi^{-1}(y), \mathscr{M}|_{\pi^{-1}(y)})=0$.

Il découle alors de [Gro, théorème 2.1] qu'il existe un voisinage ouvert $V$ de $s$ dans $S$ tel que $\mathscr{M}|_{\pi^{-1}(V)}$ soit très ample relativement à $\pi : \pi^{-1}(V) \to V$. $\square$

*Remarque*. On obtient une variante plus « constructive » de la démonstration en montrant que si

$$\sigma_i: V \to X, \quad i=1,\dots,n$$

sont des sections de $\pi$ telles que, pour tout $s' \in V$, chaque composante rationnelle de $\pi^{-1}(s')$ contienne au moins deux distincts des points $\sigma_i(s')$, alors

$$[\omega_{\pi^{-1}(V)/V} \otimes \mathcal{O}(\sigma_1(V)+\dots+\sigma_n(V))]^{\otimes 3}$$

est très ample relativement à

$$\pi: \pi^{-1}(V) \to V;$$

cf. [K, Corollary 1.9].

PROPOSITION 3.5. *Soient $\pi: X \to S$ une f.s.o. et $\xi$ un fibré vectoriel holomorphe, de rang $r$, sur $X$. Pour tout point $s$ de $S$, il existe un voisinage ouvert $U$ de $s$ dans $S$ et une filtration*

$$\xi_1 \subset \dots \subset \xi_r = \xi|_{\pi^{-1}(U)}$$

*par des fibrés vectoriels holomorphes $\xi_i$ de rang $i$ du fibré $\xi$ sur $\pi^{-1}(U)$.*

*Démonstration*. Il suffit d'établir l'existence d'un sous-fibré $\xi_1$ de rang 1 lorsque $r \geq 2$. La proposition s'en déduit par récurrence sur $r$, en considérant le fibré quotient $\xi/\xi_1$.

D'après la proposition 3.4, on peut supposer que $X$ est une sous-variété de $S\times\mathbf{P}^N\mathbf{C}$ et que $\pi$ est la restriction à $X$ de la projection sur $S$. Soit alors $\mathcal{L}$ le fibré en droites sur $X$ image inverse par la projection sur $\mathbf{P}^N\mathbf{C}$ du fibré en droites sur $\mathbf{P}^N\mathbf{C}$ défini par une section hyperplane. D'après [GR, Satz $I_n$], il existe $q\geqslant 0$ tel que, sur un voisinage $\pi^{-1}(U)$ de $\pi^{-1}(s)$, $\xi\otimes\mathcal{L}^q$ soit engendré par ses section globales. Une section générale de $\xi\otimes\mathcal{L}^q$ ne s'annule pas sur $\pi^{-1}(s)$ et définit un morphisme $i\colon \mathcal{L}^{-q}\to\xi$ dont l'image est un sous-fibré en droites holomorphe de $\xi$ sur $\pi^{-1}(U)$. □

### 3(e) Algébrisation des f.s.o.

Nous dirons qu' *une f.s.o.* $\pi\colon X\to S$ *satisfait à la condition* (C) si, pour tout point $s$ de $S$, il existe une courbe complexe compacte lisse $M$ dans $S$, contenant $s$, telle que $\pi^{-1}(M)$ soit une surface projective lisse et que $\pi\colon\pi^{-1}(M)\to M$ soit une f.s.o.

Pour déduire le théorème 2.1, dans sa forme générale, du cas particulier où $X$ est une surface projective, nous ferons appel au résultat suivant (cf. section 11(c)).

THÉORÈME 3.6. *Soient* $\pi\colon X\to S$ *une f.s.o. et* $\sigma_1,\dots,\sigma_n$ *des sections holomorphes de* $\pi$, *définies sur* $S$. *Pour tout point* $s$ *de* $S$, *il existe un voisinage ouvert* $V$ *de* $s$ *dans* $S$, *une f.s.o.* $\pi'\colon X'\to S'$ *satisfaisant à la condition* (C), *des sections holomorphes* $\sigma'_1,\dots,\sigma'_n$ *de* $\pi'$, *définies sur* $S'$ *et des applications holomorphes*

$$\varphi\colon V\to S' \quad et \quad \Phi\colon\pi^{-1}(V)\to X'$$

*tels que le diagramme*

$$\begin{tikzcd} \pi^{-1}(V) \arrow[r, "\Phi"] \arrow[d] & X' \arrow[d, "\pi'"] \\ V \arrow[r, "\varphi"] & S' \end{tikzcd}$$

*soit cartésien et que*

$$\Phi\circ\sigma_i=\sigma'_i\circ\varphi,\quad i=1,\dots,n.$$

*Démonstration.* (a) L'idée de la démonstration est très simple: il suffit de traiter le cas où les fibres de $\pi$ sont connexes, et quitte à réduire $S$ et à ajouter de nouvelles sections $\sigma_i$ de $\pi$, on peut supposer que $\pi\colon X\to S$, muni des $\sigma_i$, est une courbe marquée stable sur $S$ (cf. [K]). Soit $g$ son genre. Si le champ des modules des courbes complexes $n$-marquées stables de genre $g$ était une vraie variété, on pourrait la prendre comme $S'$

et prendre comme $X'$ la courbe universelle sur cette variété de modules. Ce n'est malheureusement pas le cas, à cause des automorphismes des courbes marquées stables : pour tout $g>1$ (resp. $g=1$) et tout $n\geq 0$ (resp. $n\geq 1$), il existe une courbe $n$-marquée stable de genre $g$ admettant un automorphisme non trivial. Aussi la démonstration doit procéder de façon un peu plus compliquée.

La démonstration proprement dite de la proposition est donnée dans les paragraphes (e) et (f) ci-dessous. Auparavant, nous procédons à quelques préliminaires sur les espaces de modules des courbes marquées stables.

(b) Rappelons tout d'abord quelques résultats sur les courbes marquées stables (cf. [K]). Pour tout $(g,n)\in \mathbf{N}^2$ tel que $2g-2+n>0$, nous notons $\bar{M}_{g,n}$ l'espace de modules grossier des courbes complexes $n$-marquées stables. C'est une variété algébrique complexe projective, dont le sous-ensemble $\bar{M}^0_{g,n}$ des classes des courbes marquées n'admettant pas d'automorphisme non trivial forme un ouvert (de Zariski) lisse.

Nous noterons aussi abusivement $\bar{M}^0_{1,1}$ l'ouvert de $M_{1,1}$ formé des courbes de genre 1 marquées stables $(C,x)$ admettant un unique automorphisme non trivial (son complémentaire est formé des deux courbes elliptiques dont l'invariant $j$ vaut 0 et 1728).

On dispose entre ces divers espaces des morphismes de « contraction »

$$\bar{M}_{g,n+1}\to \bar{M}_{g,n}$$

et de « recollement »

$$M_{g_1,n_1+1}\times \bar{M}_{g_2,n_2+1}\to \bar{M}_{g_1+g_2,n_1+n_2}$$

$$\bar{M}_{g-1,n+2}\to \bar{M}_{g,n}.$$

Sur $\bar{M}^0_{g,n}$, on dispose d'une courbe $n$-marquée stable de genre $g$ universelle :

$$C_{g,n}\underset{\pi}{\overset{\sigma_i}{\leftrightarrows}} \bar{M}^0_{g,n}. \tag{3.3}$$

De plus, la variété $C_{g,n}$ est lisse.

Il vient immédiatement :

LEMME 3.7. *Si une courbe $(n+1)$-marquée stable de genre $g$ admet un automorphisme non trivial, alors la courbe $n$-marquée stable qui s'en déduit par contraction admet elle aussi un automorphisme non trivial (on suppose $2g-2+n>0$).* □

On a de plus :

LEMME 3.8. *Soient* $(g,n)\in\mathbf{N}^2$ *tels que* $g+n\geqslant 3$. *Une courbe générique de* $\bar{M}_{g,n}$ *n'admet pas d'automorphisme non trivial.*

*Démonstration.* Cet énoncé est bien connu lorsque $g+n=3$ ou $g\geqslant 3$ et $n=0$ (cf. par exemple [Rau]). On ramène à ce cas le cas général, par récurrence sur $n$, au moyen du lemme 3.7. □

Nous laissons au lecteur le soin d'établir l'énoncé suivant, au moyen des lemmes 3.7 et 3.8.

LEMME 3.9. *Si* $g=0$ *et* $n\geqslant 4$, *alors* $\bar{M}^0_{g,n}=\bar{M}_{g,n}$. *Si* $(g,n)\in\mathbf{N}^*\times\mathbf{N}$ *et* $n+g\geqslant 4$, *alors la seule composante de codimension* 1 *de* $\bar{M}_{g,n}-\bar{M}^0_{g,n}$ *est l'image* $E_{g,n}$ *du recollement*

$$\bar{M}_{g-1,n+1}\times\bar{M}_{1,1}\rightarrow\bar{M}_{g,n}. \tag{3.4}$$ □

(c) En tant qu'espace analytique, $\bar{M}_{g,n}$ admet la description locale suivante.

*Soient* $(C,x_1,\dots,x_n)$ *une courbe n-marquée stable de genre* $g$, *et* $\Gamma$ *son groupe (fini) d'automorphismes. L'espace vectoriel*

$$E=\mathrm{Ext}^1(\Omega^1_C\otimes\mathcal{O}(x_1+\dots+x_n),\mathcal{O}_C)$$

$$\cong H^0(C,\omega_C\otimes\Omega^1_C\otimes\mathcal{O}(x_1+\dots+x_n))^*$$

*est de dimension* $3g-3+n$, *et est muni d'une action naturelle de* $\Gamma$. *De plus, il existe un voisinage ouvert* $\Omega$ *de* 0 *dans* $E$, $\Gamma$*-invariant, et une courbe n-marquée stable de genre* $g$, *analytique complexe, sur* $\Omega$

$$X\underset{\pi}{\overset{\sigma_i}{\leftrightarrows}}\Omega,\quad i=1,\dots,n \tag{3.5}$$

*telle que :*

· *X soit lisse;*

· $(\pi^{-1}(0),\sigma_1(0),\dots,\sigma_n(0))$ *soit isomorphe à* $(C,x_1,\dots,x_n)$;

· (3.5) *soit une déformation universelle (en géométrie analytique complexe) de* $(\pi^{-1}(0),\sigma_1(0),\dots,\sigma_n(0))$;

· *l'action de* $\Gamma$ *sur* $\pi^{-1}(0)$ *se prolonge en une action holomorphe sur X, telle que les applications* $\pi$ *et* $\sigma_i$ *soient* $\Gamma$*-équivariantes.*

*L'application de* $\Omega$ *vers* $\bar{M}_{g,n}$ *définie par* (3.5) *se factorise alors en*

$$\begin{tikzcd} \Omega \arrow[r] \arrow[d] & \bar{M}_{g,n} \\ \Omega/\Gamma \arrow[ur, "\varphi"'] & \end{tikzcd}$$

*et $\varphi$ établit un isomorphisme* **C**-*analytique entre des voisinages ouverts de* $[0]$ *dans* $\Omega/\Gamma$ *et de* $[(C, x_1, \ldots, x_n)]$ *dans* $\bar{M}_{g,n}$. *De plus, pour tout* $s \in \Omega$, *le groupe des automorphismes de* $(\pi^{-1}(s), \sigma_1(s), \ldots, \sigma_n(s))$ *s'identifie au stabilisateur dans* $\Gamma$ *de* $s$.

Indiquons comment déduire ces énoncés des résultats de [K].

Avec les notations de [K], p. 210, $\bar{M}_{g,n}$ est la variété (algébrique) quotient $H_{g,n}/PGL(\nu-1)$. La variété $H_{g,n}$ est lisse et l'action de $PGL(\nu-1)$ sur $H_{g,n}$ est propre et localement libre (au sens de la géométrie différentielle). De plus, $H_{g,n}$ est munie d'une courbe $n$-marquée stable, de genre $g$ « $e$-canoniquement plongée » universelle

$$Z_{g,n} \underset{\pi'}{\overset{\sigma_i'}{\leftrightarrows}} H_{g,n}, \quad i = 1, \ldots, n \tag{3.6}$$

et $Z_{g,n}$ est lisse.

Soit $h$ un point de $H_{g,n}$ d'image dans $\bar{M}_{g,n}$ la classe de $(C, x_1, \ldots, x_n)$. Le stabilisateur de $h$ dans $PGL(\nu-1)$ s'identifie au groupe $\Gamma$. De plus, l'on dispose d'une suite exacte canonique

$$0 \to \operatorname{Lie} PGL(\nu-1) \to T_h H_{g,n} \xrightarrow{K} \operatorname{Ext}^1(\Omega_C^1 \otimes \mathcal{O}(x_1 + \ldots + x_n), \mathcal{O}_C) \to 0.$$

Soit $V$ un voisinage ouvert $\Gamma$-invariant de $0$ dans

$$E = \operatorname{Ext}^1(\Omega_C^1 \otimes \mathcal{O}(x_1 + \ldots + x_n), \mathcal{O}_C)$$

et soit

$$j \colon V \to H_{g,n}$$

une application holomorphe telle que

$$j(0) = h \quad \text{et} \quad K \circ T_0 j = \mathrm{Id}_E.$$

Considérons la courbe $n$-marquée stable au dessus de $V$

$$V \times_{H_{g,n}} Z_{g,n} \underset{\pi}{\overset{\sigma_i}{\leftrightarrows}} V, \quad i = 1, \ldots, n \tag{3.7}$$

déduite de (3.6) par le changement de base $j$. Il découle de la proposition 3.3 que l'espace analytique $V\times_{H_{g,n}} Z_{g,n}$ est lisse au voisinage de $\pi^{-1}(0)$. De plus, la famille (3.7) est une déformation universelle de sa fibre en 0, qui s'identifie à $(C, x_1, \ldots, x_n)$. Cela se déduit facilement du fait que la courbe $Z_{g,n}$ sur $H_{g,n}$ représente le foncteur « courbe $n$-marquée stable de genre $g$ muni d'un plongement « $e$-canonique » (cf. [K], p. 210), non seulement en géométrie algébrique complexe, mais aussi en géométrie analytique complexe. Cette dernière assertion est elle-même une conséquence directe des théorèmes de comparaison GAGA (cf. [Gro, § 3] et [R]).

L'unicité des germes de déformation universelle fournit une action naturelle de $\Gamma$ sur un voisinage ouvert $\Omega$ de 0 dans $V$, et une action naturelle de $\Gamma$ sur $\pi^{-1}(\Omega)$ qui prolonge l'action de $\Gamma$ sur $\pi^{-1}(0)$; les applications $\pi$ et $\sigma_i$ sont alors $\Gamma$-équivariantes. De plus, comme toute action d'un groupe fini sur une variété analytique se linéarise analytiquement au voisinage de l'un de ses points fixes, on peut supposer que cette action de $\Gamma$ sur $\Omega$ coïncide avec l'action naturelle de $\Gamma$ sur $E$.

Enfin, si $\Omega$ est suffisamment petit, $X=\pi^{-1}(\Omega)$ est lisse, et puisque l'action de $PGL(\nu-1)$ est localement libre, propre et transversale à $j$ en $h$, on a bien

$$\begin{aligned}\Omega/\Gamma &\simeq (j(\Omega)\cdot PGL(\nu-1))/PGL(\nu-1)\\ &\simeq \varphi(\Omega/\Gamma)\end{aligned}$$

et le stabilisateur dans $\Gamma$ de $s\in\Omega$ s'identifie au stabilisateur dans $PGL(\nu-1)$ de $j(s)$.

(d) Désignons par $E^0_{g,n}$ l'image par le recollement (3.4) de l'ouvert

$$\bar{M}^0_{g-1,n+1}\times\bar{M}^0_{1,1}.$$

C'est l'ouvert (de Zariski) de $E_{g,n}$ formé des classes de courbes marquées possédant un unique automorphisme non trivial : elles sont obtenues par recollement d'une courbe marquée stable sans automorphisme et d'une courbe elliptique 1-marquée sans automorphisme; leur unique automorphisme non trivial se déduit de la « symétrie » par rapport au point marqué de la courbe elliptique.

Avec les notations des paragraphes précédents, si $[(C, x_1, \ldots, x_n)]\in E^0_{g,n}$, alors l'application $\Omega\to\bar{M}_{g,n}$ est un revêtement double ramifié le long de $E^0_{g,n}$. En effet, le nombre de valeurs propres $-1$ de l'involution non triviale de $(C, x_1, \ldots, x_n)$ agissant sur

$$\mathrm{Ext}^1(\Omega^1_C\otimes\mathcal{O}_C(x_1+\ldots+x_n), \mathcal{O}_C)$$

est égal à 1; c'est en effet la codimension du fermé analytique dans $\varphi(\Omega/\Gamma)$ formé des classes de courbes marquées admettant un automorphisme non trivial, i.e. de

$E^0_{g,n} \cap \varphi(\Omega/\Gamma)$. Il en découle que $E^0_{g,n}$ est une hypersurface lisse de l'ouvert des points lisses de $\bar{M}_{g,n}$ et que

$$\bar{M}^1_{g,n} = \bar{M}^0_{g,n} \cup E^0_{g,n}$$

est un ouvert lisse de $\bar{M}_{g,n}$.

(e) Montrons que le théorème 3.6 découle de l'énoncé suivant, que nous établirons plus loin.

PROPOSITION 3.10. *Soit* $(C, x_1, \ldots, x_n)$ *une courbe n-marquée stable de genre g, dépourvue d'automorphisme non trivial, et soit c sa classe dans* $\bar{M}_{g,n}$.

*Il existe un ouvert de Zariski lisse V dans* $\bar{M}^1_{g,n}$, *une variété quasiprojective complexe lisse* $\tilde{V}$, *un morphisme algébrique* $p: \tilde{V} \to V$, *faisant de* $\tilde{V}$ *un revêtement de degré 2 de V, et une courbe n-marquée stable analytique complexe de genre g sur* $\tilde{V}$

$$\tilde{\pi}: \tilde{\mathscr{C}} \overset{\tilde{\sigma}_i}{\leftrightarrows} \tilde{V}, \quad i = 1, \ldots, n \tag{3.8}$$

*tels que*

(i) $\bar{M}_{g,n} \setminus V$ *soit de codimension au moins 2 dans* $\bar{M}_{g,n}$;

(ii) *c appartienne à V, mais n'appartienne pas au diviseur R sur V des points de ramification de p*;

(iii) $\tilde{\mathscr{C}}$ *soit lisse et que, au dessus de* $p^{-1}(V \cap \bar{M}^0_{g,n} \setminus R)$, *la courbe n-marquée* (3.8) *soit isomorphe à la courbe n-marquée déduite de* (3.3) *par le changement de base p.*

On remarquera que, puisque $\tilde{V}$ est lisse, le diviseur $R$ est nécessairement réduit et lisse.

Comme $\tilde{\mathscr{C}}$ est lisse, $\tilde{\pi}: \tilde{\mathscr{C}} \to \tilde{V}$ est une f.s.o. Prouvons qu'elle satisfait à la condition (C). Pour cela, choisissons un plongement projectif $i: \bar{M}_{g,n} \to \mathbf{P}^N\mathbf{C}$ et désignons par $q$ la codimension de $i(\bar{M}_{g,n})$ dans $\mathbf{P}^N\mathbf{C}$. Soit $s$ un point quelconque de $\tilde{\mathscr{C}}$. L'intersection de $i(\bar{M}_{g,n})$ et d'un sous-espace projectif de dimension $q+1$ de $\mathbf{P}^N\mathbf{C}$, contenant $i \circ p(s)$ et en position générale, est une courbe compacte lisse $i(M)$ incluse dans $i(V)$ (d'après (*i*)), qui rencontre transversalement $i(R)$ et $i(\Delta)$, où $\Delta$ est le diviseur de $\bar{M}_{g,n}$ formé des classes des courbes singulières. La courbe $M' = p^{-1}(M)$ est alors une courbe compacte lisse dans $\tilde{V}$, et $\tilde{\pi}: \tilde{\pi}^{-1}(M') \to M'$ est une f.s.o. (proposition 3.3). Enfin, $\tilde{\pi}^{-1}(M')$ est une surface projective; en effet, $M'$ est une courbe projective et $\tilde{\pi}^{-1}(M')$ possède un fibré en droites très ample relativement à $\tilde{\pi}$, puisque c'est l'espace total d'une courbe marquée stable sur $M'$ (cf. 3 (d), Remarque).

Lorsque $\pi: X \to S$, $(\sigma_1, \dots, \sigma_n)$ et $s$, dans le théorème 3.6, sont tels que la courbe marquée $(\pi^{-1}(s), \sigma_1(s), \dots, \sigma_n(s))$ soit stable et dépourvue d'automorphisme non trivial, alors la conclusion du théorème 3.6 découle immédiatement de la proposition 3.10 appliquée à cette courbe marquée : on prend $X' = \mathscr{C}, S' = \tilde{V}, \pi' = \tilde{\pi}$ et $\sigma_i' = \tilde{\sigma}_i$; l'existence de $\phi$ et $\Phi$ découle du fait que (3.3) est une déformation universelle de chacune de ses fibres et de l'assertion (iii).

Pour établir le théorème 3.6 en toute généralité, on remarque que l'on peut toujours supposer satisfaite cette condition sur $(\pi^{-1}(s), \sigma_1(s), \dots, \sigma_n(s))$, en remplaçant $S$ par un voisinage ouvert de $s$ dans $S$ et en adjoignant à la famille $(\sigma_1, \dots, \sigma_n)$ de nouvelles sections de $\pi$. Cela découle du lemme suivant, dont nous laissons la démonstration au lecteur.

LEMME 3.11. *Soit $C$ une courbe complexe compacte connexe, dont les seuls points siguliers sont des points doubles ordinaires. Il existe des points $P_1, \dots, P_n$ de $C$, distincts, tels que $(C, P_1, \dots, P_n)$ de $C$ soit une courbe marquée stable dépourvue d'automorphisme non trivial.* □

(f) Pour démontrer la proposition 3.10, nous commençons par établir deux lemmes.

LEMME 3.12. *Soient $U$ un ouvert dans $\bar{M}^1_{g,n}$, $\tilde{U}$ une variété analytique complexe et $p: \tilde{U} \to U$ un revêtement de degré 2, ramifié le long de $U \cap E^0_{g,n}$.*

*La famille de courbes marquées stables*

$$\tilde{\pi}^0: \tilde{C}^0 = C_{g,n} \times_U p^{-1}(U \setminus E^0_{g,n}) \overset{\tilde{\sigma}_i^0}{\leftrightarrows} p^{-1}(U \setminus E^0_{g,n}), \quad i = 1, \dots, n$$

*déduite par le changement de base $p$ de*

$$C_{g,n} \underset{\pi}{\overset{\sigma_i}{\leftrightarrows}} \bar{M}^1_{g,n} \setminus E^0_{g,n}, \quad i = 1, \dots, n$$

*admet un prolongement en une famille holomorphe de courbes marquées stables*

$$\tilde{\pi}: \tilde{C} \overset{\sigma_i}{\leftrightarrows} \tilde{U}, \quad i = 1, \dots, n$$

*unique à isomorphisme unique près. De plus, $\tilde{C}$ est lisse.*

*Démonstration.* L'unicité du prolongement est une conséquence de la stabilité : grâce aux opérations de contraction et de stabilisation (cf. [K]), on se ramène à établir l'unicité d'un prolongement stable d'une famille de courbes stables (non marquées) de genre $g \geqslant 2$, ou d'une famille de courbes 1-marquées stables de genre $g=1$; or cela découle de la théorie des modèles minimaux des surfaces (cf. [DM, lemma 1.12]).

Grâce à l'unicité, il suffit, pour établir l'existence du prolongement, de l'établir localement. Or un tel prolongement au voisinage d'un point $x$ de $p^{-1}(E^0_{g,n})$ est fourni par une déformation universelle d'une courbe marquée de classe $p(x)$, d'après la description locale de $\bar{M}_{g,n}$ rappelée plus haut.

La lissité de $\tilde{C}$ découle de la lissité de l'espace total d'une telle déformation au voisinage de la fibre de $p(x)$. □

LEMME 3.13. *Soient $W$ une variété quasi-projective complexe lisse, $D$ et $D'$ deux diviseurs (algébriques) positifs réduits de $W$, tels que $D$ ne contienne aucune composante de $D'$, et $x$ un point de $W \setminus D$.*

*Il existe une variété quasi-projective normale $\tilde{W}$ et un morphisme*

$$p: \tilde{W} \to W$$

*qui fasse de $\tilde{W}$ un revêtement ramifié de degré 2 de $W$, dont le diviseur $R$ des points de ramification (sur $X$) soit réduit, contienne $D$, mais ne contienne ni $x$, ni de composante de $D'$.*

*Démonstration.* Soit $\mathscr{L}$ un fibré en droites ample sur $W$. Si $n \in \mathbf{N}$ est suffisamment grand, alors $\mathscr{L}^{\otimes 2n} \otimes \mathcal{O}(-D)$ est très ample, et possède donc une section régulière non identiquement nulle, dont le diviseur des zéros $Z$ soit réduit et ne contienne ni $x$, ni de composante de $D$ ou de $D'$. Posons donc

$$\mathcal{M} = \mathscr{L}^{\otimes n} \quad \text{et} \quad R = D + Z.$$

Le revêtement de degré 2 de $W$ déterminé par l'isomorphisme

$$\mathcal{M}^{\otimes 2} \cong \mathcal{O}(R)$$

satisfait alors aux conditions requises. □

Terminons la démonstration de la proposition 3.10.

Appliquons le lemme 3.13 à $W = \bar{M}^1_{g,n}, D = E^0_{g,n}, D' = \Delta - E^0_{g,n}$ et $x = [(C, x_1, \ldots, x_n)]$. Notons $W_s, R_s$ et $\Delta_s$ les fermés des points singuliers de $W, R$ et $\Delta$, respectivement, et posons $V = W \setminus [W_s \cup R_s \cup \Delta_s \cup (R \cap D')]$ puis $\tilde{V} = p^{-1}(V)$. Les conditions (i) et (ii) de la proposition 3.10 sont alors satisfaites par construction. Sur $\tilde{V} \setminus p^{-1}(E^0_{g,n})$, on dispose de la courbe marquée stable déduite de (3.3) par le changement de base $p: \tilde{V} \setminus p^{-1}(E^0_{g,n}) \to \bar{M}^0_{g,n}$. D'après le lemme 3.12, elle se prolonge en une courbe marquée stable $\tilde{\mathscr{C}}$ sur $\tilde{V}$ tout entier, d'espace total lisse, qui satisfait par construction à la condition (iii) de la proposition 3.10.

## 4. Le fibré déterminant

### 4(a) Le foncteur det $R\pi_*$ en géométrie analytique

Dans [KM], Knudsen et Mumford développent d'après Grothendieck une théorie du déterminant des complexes parfaits de $\mathcal{O}_X$-modules sur un schéma $X$. Leur construction admet une variante valable en géométrie analytique complexe, décrite dans [BGS3], § 3.a. Rappelons quelques propriétés de cette dernière.

Soit $\pi: X \to B$ un morphisme propre d'espaces complexes, où $B$ est une variété complexe. A tout faisceau analytique cohérent $\mathscr{F}$ sur $X$, on peut associer un fibré en droites (gradué(1)) sur $B$, $\det(R\pi_*\mathscr{F})$, et à tout isomorphisme de faisceaux analytiques cohérents sur $X$, $\mathscr{F} \cong \mathscr{G}$, un isomorphisme :

$$\det(R\pi_*\mathscr{F}) \cong \det(R\pi_*\mathscr{G}).$$

Cette construction est « locale sur $B$ » : si $U$ est un ouvert de $B$, alors

$$\det(R_*\mathscr{F})|_U \cong \det(R\pi_*\mathscr{F}|_{\pi^{-1}(U)}).$$

Elle possède de plus les propriétés suivantes :

(i) Pour toute suite exacte courte de faisceaux analytiques cohérents sur $X$

$$0 \to \mathscr{F} \to \mathscr{G} \to \mathscr{H} \to 0,$$

il existe un isomorphisme canonique, compatible aux isomorphismes et aux suites exactes courtes de suites exactes courtes

$$\det(R\pi_*\mathscr{G}) \cong (R\pi_*\mathscr{F}) \otimes \det(R\pi_*\mathscr{H}).$$

(ii) Lorsque les faisceaux analytiques cohérents (sur $B$) $R^i\pi_*\mathscr{F}$, sont localement libres, il existe un isomorphisme canonique

$$\det(R\pi_*\mathscr{F}) \cong \bigotimes_i \Lambda^{\max}(R^i\pi_*\mathscr{F})^{(-1)^i}.$$

(iii) Lorsque $\mathscr{F}$ est plat relativement à $\pi$, $\det(R\pi_*\mathscr{F})$ « commute à tout changement

(1) Nous négligerons par la suite les questions de graduations et de signe.

de base » : à tout diagramme cartésien d'espaces analytiques

$$\begin{array}{ccc} X' & \xrightarrow{U} & X \\ \downarrow{\scriptstyle \pi'} & & \downarrow{\scriptstyle \pi} \\ B' & \xrightarrow{u} & B \end{array}$$

où $B$ et $B'$ sont des variétés, on associe un isomorphisme canonique

$$u^*\det(R\pi_*\mathscr{F}) \cong \det R\pi'_*(U^*\mathscr{F})$$

de façon compatibles aux changements de base successifs et aux isomorphismes décrits plus hauts.

(iv) Lorsque $\mathscr{F}$ est plat relativement à $\pi$, il existe, au moins localement sur $B$, un complexe fini $(\mathscr{E})$ de faisceaux analytiques sur $B$ localement libres et de rang fini, dont la cohomologie est $R\pi_*\mathscr{F}$ « universellement », c'est-à-dire après tout changement de base (cf. [KV], § 4.4.1). On a alors un isomorphisme canonique, compatible au changement de base

$$\det(R\pi_*\mathscr{F}) \cong \bigotimes_i (\Lambda^{\max}\mathscr{E}^i)^{(-1)^i}.$$

En particulier, lorsque $B$ est réduit à un point, $\det(R\pi_*\mathscr{F})$ est l'espace vectoriel complexe de dimension 1

$$\det H^*(X, \mathscr{F}) = \bigotimes_i [\Lambda^{\max} H^i(X, \mathscr{F})]^{(-1)^i}.$$

et lorsque $\mathscr{F}$ est plat relativement à $\pi$, la fibre en $s \in S$ du fibré en droites $\det(R\pi_*\mathscr{F})$ s'identifie canoniquement à $\det H^*(\pi^{-1}(s), i_s^*\mathscr{F})$, où $i_s$ désigne le morphisme canonique $\pi^{-1}(s) \to X$.

De plus, cette théorie « analytique » du déterminant est compatible à la théorie « algébrique » de Knudsen et Mumford. Par exemple, l'énoncé suivant découle facilement des propriétés qui précèdent, des propriétés analogues du foncteur $\det R\pi_*$ en géométrie algébrique et des énoncés « GAGA » usuels (cf. [R]).

Soient $X$ et $S$ des variétés algébriques complexes (au sens de Serre), $\pi: X \to S$ un morphisme algébrique projectif, et $\mathscr{F}$ un faisceau algébrique cohérent sur $x$, plat relativement à $\pi$. Supposons en outre que $S$ est lisse. On désignera par $X^{\mathrm{an}}, S^{\mathrm{an}}$ (resp. $\pi^{\mathrm{an}}, \mathscr{F}^{\mathrm{an}}, \ldots$) les espaces analytiques (resp. morphisme d'espace analytique, faisceau analytique cohérent, ...) déduits de $X, S$ (resp. $\pi, \mathscr{F}, \ldots$). On sait que $\mathscr{F}^{\mathrm{an}}$ est plat relativement à $\pi^{\mathrm{an}}$. De plus, pour tout $s \in S$, on dispose d'isomorphismes canoniques

$$H^i(\pi^{-1}(s), i_s^* \mathscr{F}) \xrightarrow{\sim} H^i(\pi^{\mathrm{an}-1}(s), i_s^{\mathrm{an}*} \mathscr{F}^{\mathrm{an}}),$$

donc d'un isomorphisme

$$I_s\colon \det H^*(\pi^{-1}(s), i_s^* \mathscr{F}) \xrightarrow{\sim} \det H^*(\pi^{\mathrm{an}-1}(s), i_s^{\mathrm{an}*} \mathscr{F}^{\mathrm{an}}).$$

Le terme de gauche (resp. de droite) dans cet isomorphisme s'identifie à la fibre en $s$ de $\det(R\pi_* \mathscr{F})$ (respectivement de $\det(R\pi_*^{\mathrm{an}} \mathscr{F}^{\mathrm{an}})$), et la famille d'isomorphismes détermine un isomorphisme de fibrés en droites holomorphes sur $S$

$$I\colon (\det(R\pi_* \mathscr{F}))^{\mathrm{an}} \xrightarrow{\sim} \det(R\pi_*^{\mathrm{an}} \mathscr{F}^{\mathrm{an}}).$$

### 4(b) Le fibré déterminant associé à un fibré vectoriel sur une famille de surfaces de Riemann à singularités ordinaires

Dans la suite de cet article, nous ne considérerons les fibrés $\det(R\pi_* \mathscr{F})$ que lorsque $\pi\colon X \to S$ est une f.s.o. et $\mathscr{F}$ le faisceau des sections holomorphes d'un fibré vectoriel $\xi$ sur $X$. Nous noterons alors :

$$\lambda(\xi) := [\det(R\pi_* \mathscr{F})]^{-1}.$$

Le morphisme $\pi$ est alors plat, donc le faisceau localement libre $\mathscr{F}$ est plat relativement à $\pi$. Par conséquent, la fibre en $s \in S$ du fibré en droites $\lambda(\xi)$ s'identifie à

$$[\det H^*(Z_s, \xi)]^{-1} := [\Lambda^{\max} H^0(Z_s, \xi)]^{-1} \otimes \Lambda^{\max} H^1(Z_S, \xi).$$

où $Z_s = \pi^{-1}(s)$.

Ainsi, la donnée de $\lambda(\xi)$ n'est autre que celle d'une structure de fibré en droites holomorphe sur la famille de droites vectorielles complexes $(\det H^*(Z_s, \xi)^{-1})_{s \in S}$.

Il est en fait possible de présenter la théorie du fibré déterminant associé à un fibré vectoriel sur une f.s.o. de façon plus élémentaire, grâce à la proposition suivante.

PROPOSITION 4.1. *Soit $\pi\colon X \to S$ une f.s.o. Il est possible, de façon unique, d'associer, à tout ouvert $U$ de $S$ et tout fibré vectoriel $\xi$ sur $\pi^{-1}(U)$, une structure de fibré en droites holomorphe sur la famille de droites vectorielles complexes* $(\lambda(\xi)_s)_{s \in S} = (\det H^*(Z_s, \xi)^{-1})_{s \in S}$, *de sorte que*

(1) *ces structures soient compatibles, en un sens évident, aux isomorphismes de fibrés et soient définies « localement sur la base »* (i.e., *si* $V$ *est un ouvert dans* $U$, *alors les structures holomorphes sur* $(\lambda(\xi)_s)_{s\in V}$ *définies par* $\xi$ *et* $\xi|_{\pi^{-1}(V)}$ *coïncident*);

(2) *lorsque les fonctions* $(s\mapsto \dim H^i(Z_s,\xi))$ *sont constantes sur* $U$ *et que* $\mathbf{H}^0=(H^0(Z_s,\xi))_{s\in S}$ *et* $\mathbf{H}^1=(H^1(Z_s,\xi))_{s\in S}$ *sont munis de leurs structures naturelles de fibrés vectoriels holomorphes (telles que le faisceau des sections holomorphes de* $\mathbf{H}^i$ *s'identifie à* $R^i\pi_*\mathscr{F}$, *où* $\mathscr{F}$ *désigne le faisceau des sections holomorphes de* $\xi$), *alors la famille d'isomorphismes*

$$\lambda(\xi)_s \cong [\Lambda^{\max}\mathbf{H}^0_s]^{-1}\otimes\Lambda^{\max}\mathbf{H}^1_s$$

*détermine un isomorphisme de fibrés en droites holomorphes entre* $(\lambda(\xi)_s)_{s\in U}$ *et* $[\Lambda^{\max}\mathbf{H}^0]^{-1}\otimes\Lambda^{\max}\mathbf{H}^1$;

(3) *si* $0\to\xi_1\to\xi_2\to\xi_3\to 0$ *est une suite exacte courte de fibrés vectoriels sur* $\pi^{-1}(U)$, *alors les isomorphismes*

$$\lambda(\xi_2)_s\cong\lambda(\xi_1)_s\otimes\lambda(\xi_3)_s,$$

*déduits des suites exactes de cohomologie*

$$0\to H^0(Z_s,\xi_1)\to H^0(Z_s,\xi_2)\to H^0(Z_s,\xi_3)$$
$$\to H^1(Z_s,\xi_1)\to H^1(Z_s,\xi_2)\to H^1(Z_s,\xi_3)\to 0$$

*par passage aux puissances exterieures maximales, définissent un isomorphisme de fibrés en droites holomorphes.*

Comme la construction « fibré déterminant » satisfait aux conditions (1)–(3), on voit que l'on peut définir $\lambda(\xi)$ comme la famille $(\lambda(\xi)_s)_{s\in S}$ munie de la structure de fibré en droites holomorphe décrite par cette proposition.

Nous laissons au lecteur le soin d'en établir la preuve, qui ne présente pas de difficulté, pourvu que l'on dispose du lemme suivant.

LEMME 4.2. *Soient* $U$ *un ouvert de* $S$ *et* $\xi$ *un fibré vectoriel sur* $\pi^{-1}(U)$. *Pour tout point* $s$ *de* $U$, *il existe un voisinage ouvert* $V$ *de* $s$ *dans* $U$, *un fibré vectoriel* $\xi'$ *sur* $\pi^{-1}(V)$ *et un morphisme injectif de fibrés vectoriels*

$$i\colon \xi|_{\pi^{-1}(V)}\to\xi'$$

*tels que, pour tout* $w\in V$

$$H^1(Z_w, \xi') = 0 \quad et \quad H^1(Z_w, \xi'/i(\xi)) = 0. \tag{4.1}$$

*Démonstration.* La proposition 3.4 assure l'existence d'un voisinage ouvert $V_0$ de $s$ dans $U$ et d'un plongement

$$j: \pi^{-1}(V_0) \to V_0 \times \mathbf{P}^N$$

tels que $\mathrm{pr}_1 \circ j = \pi$. Soit

$$p = \mathrm{pr}_2 \circ j: \pi^{-1}(V_0) \to \mathbf{P}^N,$$

soit $\mathscr{L}$ le fibré en droites $\mathcal{O}(H)$ sur $\mathbf{P}^N\mathbf{C}$, où $H$ est un hyperplan de $\mathbf{P}^N\mathbf{C}$, et soit $\mathscr{L}' = p^*\mathscr{L}$.

Comme $\mathscr{L}$ est ample, $\mathscr{L}'$ est ample sur $\pi^{-1}(s)$. Il existe donc un entier $q \geqslant 0$ tel que

$$H^1(Z_s, \xi \otimes \mathscr{L}'^q) = 0.$$

On a alors

$$H^1(Z_w, \xi \otimes \mathscr{L}'^q) = 0 \tag{4.2}$$

pour tout $w$ dans un voisinage ouvert $V$ de $s$ dans $V_0$, par semicontinuité.

Par ailleurs, le fibré $\mathscr{L}^q$ est engendré en tout point de $\mathbf{P}^N\mathbf{C}$ par ses sections globales. Il existe donc $s_1, \ldots, s_n$ dans $H^0(\pi^{-1}(V), \mathscr{L}'^q)$ tels que, pour tout $x \in \pi^{-1}(V)$, l'un des $s_i(x)$ soit non nul.

Posons alors

$$\xi' = (\xi \otimes \mathscr{L}'^q) \otimes \mathbf{C}^n$$

et

$$i(t) = (t \otimes s_1, \ldots, t \otimes s_n).$$

La condition (4.2) implique la première des conditions (4.1). La second s'en déduit, compte tenu de la suite exacte de cohomologie associée à la suite exacte de fibrés sur $Z_w$

$$0 \to \xi \xrightarrow{i} \xi' \to \xi'/i(\xi) \to 0. \qquad \square$$

Le lecteur vérifiera aussi très facilement la compatibilité avec les changements de bases des f.s.o. (cf. proposition 3.3) de la construction du fibré déterminant fournie par la proposition 4.1.

Remarquons enfin que, si $\pi: X \to S$ est une f.s.o. et $\Delta$ le diviseur sur $S$ des courbes singulières de $\pi$, alors $\pi: X - \pi^{-1}(|\Delta|) \to S - |\Delta|$ est une fibration localement kählerienne au sens de [BGS3]. Par conséquent, pour tout fibré $\xi$ sur $X$, la structure holomorphe de $\lambda(\xi)$ restreint à $S - |\Delta|$ peut être aussi décrite au moyen de la construction de [BGS3].

## 5. Formules d'anomalie au voisinage du diviseur des courbes singulières

Dans cette section, on rappelle les résultats de [BGS1,3] concernant le lien entre formules d'anomalie et classes de Bott–Chern, et on étudie le comportement de ces formules au voisinage du diviseur des courbes singulières $\Delta$.

En (a), on rappelle les résultats de [BGS1,3]. En (b), on étudie l'intégrale dans la fibre d'une forme $C^\infty$ de degré 2 sur $X$ au voisinage de $\Delta$. En (c), on applique les résultats de (b) aux formules d'anomalie.

### 5(a) Formules d'anomalie et classes de Bott–Chern

On fait ici les mêmes hypothèses qu'à la section 4(b). Ainsi $\pi: X \to S$ désigne une fonction à singularités ordinaires de fibre $Z_s = \pi^{-1}\{s\}$. On note $\Delta$ le diviseur des courbes signulières de la famille $\pi: X \to S$. $\Sigma$ désigne l'ensemble des points doubles des fibres de $\pi$.

On désigne par $TZ$ le fibré tangent relatif sur $X - \Sigma$ associé à la submersion $\pi: X - \Sigma \to S$. Pour $x \in Z$, la fibre $T_x Z$ s'identifie à la fibre en $x$ du fibré tangent à $Z_{\pi(x)}$.

Soit $P_X$ l'ensemble des formes différentielles $C^\infty$ sur $X$ qui sont somme de formes différentielles de type $(p, p)$. Soit $P_X^0$ le sous-espace des $\alpha \in P_X$ tels que $\alpha = \partial\beta + \bar\partial\beta'$ où $\beta$ et $\beta'$ sont des formes $C^\infty$ sur $X$.

Soit$\| \ \|_\xi$ *et* $\| \ \|'_\xi$ deux métriques hermitiennes sur le fibré $\xi$.

Dans Bott–Chern [BotC] et Donaldson [D], on a construit une classe $\widetilde{\mathrm{ch}}(\xi, \| \ \|_\xi, \| \ \|'_\xi) \in P_X / P_X^0$ telle que

$$\frac{1}{2i\pi} \bar\partial\partial \widetilde{\mathrm{ch}}(\xi, \| \ \|_\xi, \| \ \|'_\xi) = \mathrm{ch}(\xi, \| \ \|'_\xi) - \mathrm{ch}(\xi, \| \ \|_\xi). \tag{5.1}$$

La classe $\widetilde{\mathrm{ch}}(\xi, \| \ \|_\xi, \| \ \|'_\xi)$ a été construite axiomatiquement dans [BGS1, Section 1.f)].

De même, si $\| \ \|_{TZ}, \| \ \|'_{TZ}$ sont deux métriques hermitiennes sur $TZ|_{X-\Sigma}$, on construit dans [BGS1, Théorème 1.29] une classe $\widetilde{\mathrm{Td}}(TZ, \| \ \|_{TZ}, \| \ \|'_{TZ})$ dans $P_X / P_X^0$ telle que

$$\frac{1}{2i\pi} \bar\partial\partial \widetilde{\mathrm{Td}}(TZ, \| \ \|_{TZ}, \| \ \|'_{TZ}) = \mathrm{Td}(TZ, \| \ \|'_{TZ}) - \mathrm{Td}(TZ, \| \ \|_{TZ}). \tag{5.2}$$

Soit $\| \|_Q$ et $\| \|'_Q$ les métriques de Quillen sur le fibré $\lambda(\xi)|_{S-\Delta}$ associées aux métriques $(\| \|_{TZ}, \| \|_\xi)$ et $(\| \|'_{TZ}, \| \|'_\xi)$.

THÉORÈME 5.1. *Sur $S-\Delta$, on a l'identité*

$$\log\left(\frac{\| \|'^2_Q}{\| \|^2_Q}\right) = \left[\int_\pi \left\{ \widetilde{\mathrm{Td}}(TZ, \| \|_{TZ}, \| \|'_{TZ})\widetilde{\mathrm{ch}}(\xi, \| \|_\xi) + \mathrm{Td}(TZ, \| \|'_{TZ})\widetilde{\mathrm{ch}}(\xi, \| \|_\xi, \| \|'_\xi)\right\}\right]^{(0)}. \tag{5.3}$$

*Démonstration.* (5.3) est la formule d'anomalie conforme écrite à l'aide de classes de Bott–Chern comme dans [BGS3, Théorème 1.23]. □

### 5(b) Intégrale dans la fibre de formes de degré 2

Soit $\alpha$ une forme $C^\infty$ de type $(1,1)$ sur $X$. L'intégrale dans la fibre $\int_\pi \alpha$ est $C^\infty$ sur $S-\Delta$. La restriction de $\int_\pi \alpha$ à $S-\Delta$ définit un courant localement intégrable sur $S$, qui est l'intégrale dans la fibre du courant $\alpha$.

Nous allons préciser le comportement de la fonction $\int_\pi \alpha$ au voisinage de $\Delta$.

PROPOSITION. 5.2 *Soit $\alpha$ une forme $C^\infty$ de type $(1,1)$ sur $X$. La fonction $C^\infty$ sur $S-\Delta$ $\int_\pi \alpha$ se prolonge par continuité à $S$ tout entier.*

*Démonstration.* Supposons tout d'abord que $X=\mathbf{C}^2$, et que $\pi$ est l'application de $\mathbf{C}^2$ dans $\mathbf{C}$ définie par

$$\pi(z_0, z_1) = z_0 z_1 \tag{5.4}$$

dont la fibre singulière unique est ici $Z_0$.

On supposera $\alpha$ à support dans $\{(z_0, z_1) \in \mathbf{C}^2;\ |z_0| \leq 1, |z_1| \leq 1\}$. On peut écrire $\alpha$ sous la forme

$$\alpha = \beta\, dz_0\, d\bar z_0 + \gamma\, dz_1\, d\bar z_1 + \delta\, dz_0\, d\bar z_1 + \varepsilon\, dz_1\, d\bar z_0.$$

On désigne par $\int_{Z_w}$ l'intégrale dans la fibre $Z_w$. Quand $w \neq 0$, $w \to 0$, on a par convergence dominée

$$\int_{Z_w} (\beta\, dz_0\, d\bar z_0 + \gamma\, dz_1\, d\bar z_1) \to \int_{Z_0} (\beta\, dz_0\, d\bar z_0 + \gamma\, dz_1\, d\bar z_1). \tag{5.5}$$

De plus, pour $w \neq 0$

$$\int_{Z_w} \delta\, dz_0\, d\bar{z}_1 = -\bar{w} \int_{|w| \leq |z_0| \leq 1} \delta\left(z_0, \frac{w}{z_0}\right) \frac{dz_0\, d\bar{z}_0}{\bar{z}_0^2},$$

et donc, quand $w \to 0$

$$\int_{Z_w} \delta\, dz_0\, d\bar{z}_1 \to 0. \tag{5.6}$$

On a aussi

$$\int_{Z_w} \varepsilon\, dz_1\, d\bar{z}_0 \to 0. \tag{5.7}$$

De (5.5)–(5.7), on en déduit le résultat dans le cas particulier où $X = \mathbf{C}^2$ et où $\pi$ est donné par (5.4).

Par partition de l'unité, on se ramène facilement à ce cas pour une fonction à singularités ordinaires générale.

La proposition est démontrée. □

## 5(c) Formules d'anomalie et lieu singulier

Rappelons que sur $X - \Sigma$, $TZ \simeq \omega_{X/S}^{-1}$. Toute métrique hermitienne $\| \|_{\omega_{X/S}}$ sur $\omega_{X/S}$ induit donc une métrique hermitienne $\| \|_{TZ}$ sur le fibre $TZ|_{X-\Sigma}$.

Si $\| \|_{\omega_{X/S}}$ et $\| \|_\xi$ sont des métriques hermitiennes sur $\omega_{X/S}$ et $\xi$, on construit la métrique de Quillen $\| \|_Q$ sur le fibré $\lambda(\xi)|_{S-\Delta}$ associée aux métriques $\| \|_{\omega_{X/S}^{-1}}$ et $\| \|_\xi$.

Soit maintenant $\| \|_{\omega_{X/S}}, \| \|'_{\omega_{X/S}}$ deux métriques hermitiennes sur $\omega_{X/S}$ et $\| \|_\xi, \| \|'_\xi$ deux métriques hermitiennes sur $\xi$. Soit $\| \|_Q$ et $\| \|'_Q$ les métriques de Quillen sur le fibré $\lambda(\xi)|_{S-\Delta}$ respectivement associées aux métriques $(\| \|_{\omega_{X/S}^{-1}}, \| \|_\xi)$ et $(\| \|'_{\omega_{X/S}^{-1}}, \| \|'_\xi)$.

THÉORÈME 5.3. *La fonction $C^\infty$ sur $S - \Delta$ $\log(\| \|_Q'^2 / \| \|_Q^2)$ se prolonge en une fonction continue sur $S$ tout entier. On a l'égalité de courants sur $S$*

$$\begin{aligned} \frac{\bar{\partial}\partial}{2i\pi} \log\left(\frac{\| \|_Q'^2}{\| \|_Q^2}\right) \\ = \left[\int_\pi \{\mathrm{Td}(\omega_{X/S}^{-1}, \| \|'_{\omega_{X/S}^{-1}})\,\mathrm{ch}(\xi, \| \|'_\xi) - \mathrm{Td}(\omega_{X/S}^{-1}, \| \|_{\omega_{X/S}^{-1}})\,\mathrm{ch}(\xi, \| \|_\xi)\}\right]^{(2)}. \end{aligned} \tag{5.8}$$

*Si les courbures des connexions holomorphes hermitiennes sur les fibrés $\omega$ et $\xi$ associées aux métriques $\| \|_{\omega_{X/S}}, \| \|'_{\omega_{X/S}}$ et $\| \|_\xi, \| \|'_\xi$ sont nulles au voisinage de $\Sigma$, la fonction $\log(\| \|_Q'^2/\| \|_Q^2)$ est $C^\infty$ sur $S$ tout entier.*

*Démonstration.* Par le théorème 5.1, on sait que sur $S-\Delta$

$$\log\left(\frac{\| \|_Q'^2}{\| \|_Q^2}\right) = \left[\int_\pi \left\{\widetilde{\mathrm{Td}}(\omega_{X/S}^{-1}, \| \|_{\omega_{X/S}^{-1}}, \| \|'_{\omega_{X/S}^{-1}})\,\mathrm{ch}(\xi, \| \|_\xi) + \mathrm{Td}(\omega_{X/S}^{-1}, \| \|'_{\omega_{X/S}^{-1}})\,\widetilde{\mathrm{ch}}(\xi, \| \|_\xi, \| \|'_\xi)\right\}\right]^{(0)}. \tag{5.9}$$

Or à droite de (5.9), on intègre le long de $Z$ une forme $C^\infty$ sur $X$ tout entier. De la proposition 5.2, on tire que la fonction $\log(\| \|_Q'^2/\| \|_Q^2)$ se prolonge en une fonction continue sur $S$ tout entier. Cette fonction est, en tant que courant, l'intégrale dans la fibre du courant $C^\infty$ sur $X$ qui apparaît à droite de (5.9).

De (5.1), (5.2), (5.9), on déduit (5.8).

Si les courbures des connexions considérées sont nulles au voisinage de $\Sigma$, la forme différentielle

$$\gamma = \mathrm{Td}(\omega_{X/S}^{-1}, \| \|'_{\omega_{X/S}^{-1}})\,\mathrm{ch}(\xi, \| \|'_\xi) - \mathrm{Td}(\omega_{X/S}^{-1}, \| \|_{\omega_{X/S}^{-1}})\,\mathrm{ch}(\xi, \| \|_\xi)$$

est nulle au voisinage de $\Sigma$. Il en résulte que la forme $\beta = \int_\pi \gamma$ est $C^\infty$ sur $S$.

Soit $(w_1, \ldots, w_n)$ des coordonnées holomorphes sur $S$. Le laplacien $\Delta$ en les variables $(w_1, \ldots, w_n)$ est donné par

$$\Delta = 4\sum_1^n \frac{\partial^2}{\partial w_i \partial \bar{w}_i}.$$

De l'équation (5.8), on tire que puisque $\beta$ est $C^\infty$, la distribution $\Delta(\log(\| \|_Q'^2/\| \|_Q^2))$ est $C^\infty$. Comme $\Delta$ est elliptique, la fonction $\log(\| \|_Q'^2/\| \|_Q^2)$ est $C^\infty$.

Le théorème est démontré. □

Soient maintenant $(\xi_j, \| \|_{\xi_j})_{0\leq j\leq 2}$ des fibrés holomorphes hermitiens sur $X$, et $v_0, v_1$ des morphismes de fibrés holomorphes tels que la suite

$$\xi\colon 0 \to \xi_0 \xrightarrow[v_0]{} \xi_1 \xrightarrow[v_1]{} \xi_2 \to 0$$

soit exacte.

Par [KM], on sait que le fibré $\tilde{\lambda}=\lambda(\xi_0)\otimes\lambda^{-1}(\xi_1)\otimes\lambda(\xi_2)$ est trivial, et possède une section holomorphe canonique $\sigma$ non nulle.

Soit $\| \ \|_{\omega_{X/S}}$ une métrique hermitienne sur $\omega_{X/S}$. On munit les fibrés $\lambda(\xi_j)|_{S-\Delta}$ $(0\leq j\leq 2)$ des métriques de Quillen associées aux métriques $(\| \ \|_{\omega_{X/S}^{-1}}, \| \ \|_{\xi_j})_{0\leq j\leq 2}$. Soit $\| \ \|_{\tilde{Q}}$ la métrique sur $\tilde{\lambda}|_{S-\Delta}$ qui est le produit alterné des métriques de Quillen sur $\lambda(\xi_0)$, $\lambda(\xi_1)$, $\lambda(\xi_2)$.

Soit $\widetilde{\mathrm{ch}}(\xi)$ la classe de Bott–Chern associée à la suite exacte de fibrés holomorphes hermitiens $\xi$ [BGS1, théorème 1.29]. On sait que

$$\frac{1}{2i\pi}\bar{\partial}\partial\,\widetilde{\mathrm{ch}}(\xi)=\sum_0^2(-1)^{j+1}\mathrm{ch}(\xi_j, \| \ \|_{\xi_j}). \tag{5.10}$$

Dans [BGS3, théorèmes 2.4 et 2.8], on a calculé $\|\sigma\|^2_{\tilde{Q}}$. On a plus précisément :

THÉORÈME 5.4. *Sur $S-\Delta$, on a l'égalité*

$$\log\|\sigma\|^2_{\tilde{Q}}=-\left[\int_\pi \mathrm{Td}(\omega_{X/S}^{-1}, \| \ \|_{\omega_{X/S}^{-1}})\,\widetilde{\mathrm{ch}}(\xi)\right]^{(0)}. \tag{5.11}$$

*La fonction $\log\|\sigma\|^2_{\tilde{Q}}$ possède un prolongement continu à $S$ tout entier. On a l'identité de courants sur $S$*

$$\frac{\bar{\partial}\partial}{2i\pi}\log\|\sigma\|^2_{\tilde{Q}}=\left[\int_\pi \mathrm{Td}(\omega_{X/S}^{-1}, \| \ \|_{\omega_{X/S}^{-1}})\left(\sum_0^2(-1)^j\mathrm{ch}(\xi_j, \| \ \|_{\xi_j})\right)\right]^{(2)}. \tag{5.12}$$

*Si les courbures des connexions holomorphes sur des fibrés $\omega_{X/S}, \xi_0, \xi_1, \xi_2$ sont nulles au voisinage de $\Sigma$, la fonction $\log\|\sigma\|^2_{\tilde{Q}}$ est $C^\infty$ sur $S$.*

*Démonstration.* (5.11) est le résultat de [BGS3, théorèmes 2.4 et 2.8]. La première partie du théorème est une conséquence immédiate de la proposition 5.2. Pour démontrer la fin du théorème, on utilise (5.10) et on procède comme au théorème 5.3. □

### 6. L'holonomie du fibré déterminant au voisinage de la fibre singulière

Soit $D_\varepsilon$ le disque complexe de rayon $\varepsilon$, et soit $\pi: X\to D_\varepsilon$ une fonction à singularités ordinaires dont la fibre singulière est $\pi^{-1}\{0\}$. Soit $c$ un lacet dans $D_\varepsilon\setminus\{0\}$.

Dans cette section, nous calculons l'holonomie sur le lacet $c$ de la connexion holomorphe sur le fibré hermitien $(\lambda(\xi), \| \ \|_Q)$, par application d'un résultat de Bismut–Freed [BF], où une formule d'anomalie globale suggérée par Witten [W] était démontrée.

Dans [A], Atiyah a appliqué le théorème d'holonomie de [BF] aux familles d'opérateurs de Dirac associés au complexe de signature d'une fibration. Le théorème d'holonomie fournit en effet dans ce cas un représentant explicite du logarithme de l'holonomie. Dans [A], Atiyah compare dans certains cas ce représentant du logarithme de l'holonomie avec le résultat correspondant obtenu par une trivialisation explicite du fibré déterminant.

La situation considérée ici est différente, et le théorème d'holonomie laisse persister une ambiguïté dans le calcul de la courbure de la métrique de Quillen. Cette ambiguïté sera levée dans les sections qui suivent par une méthode différente.

Dans (a), nous calculons une limite de courants représentant la classe de Todd de $X$ quand on explose la métrique de $X$ dans des directions horizontales.

Dans (b), on calcule l'holonomie d'un lacet $c$ pour une métrique de Quillen particulière.

Enfin dans (c), on obtient une forme partielle de notre résultat principal énoncé au Théorème 2.1. L'intérêt essentiel de ce résultat est qu'il ne fait intervenir que la géométrie locale de la fibration.

Les résultats de cette section ne seront pas utilisés dans la suite.

### 6(a) Limite adiabatique de courants de Todd

Notons pour $0<\varepsilon\leqslant+\infty$: $D_\varepsilon=\{w\in\mathbf{C}; |w|<\varepsilon\}$.

Soit $\pi: X\to D_\varepsilon$ une f.s.o. Pour $w\in D_\varepsilon$, on pose $Z_w=\pi^{-1}\{w\}$. On suppose que $Z_0=\pi^{-1}\{0\}$ est la seule fibre singulière. $\Sigma$ est ici constitué d'un ensemble fini de points $P_1,\dots,P_n\in Z_0$.

Pour $1\leqslant i\leqslant n$, soit $(z_0,z_1)$ un système de coordonnées holomorphes sur un voisinage de $P_i$ tel que $\pi(z_0,z_1)=z_0z_1$. On munit $TX$ sur ce voisinage de la métrique

$$|dz_0|^2+|dz_1|^2. \tag{6.1}$$

Par partition de l'unité, on peut trouver une métrique $\|\ \|_{TX}$ sur $TX$ qui coïncide avec chacune des métriques (6.1) sur un voisinage $U_i$ de $P_i$ $(1\leqslant i\leqslant n)$.

Soit $\|\ \|_{TZ}$ la métrique hermitienne sur $TZ|_{X-\Sigma}$ induite par la métrique $\|\ \|_{TX}$.

Soit $R^{TZ}$ la courbure de la connexion holomorphe hermitienne sur $TZ$.

PROPOSITION 6.1. *Sur le voisinage $U_i$ de $P_i(1\leqslant i\leqslant n)$, dans les coordonnées $(z_0,z_1)$, $R^{TZ}$ est donnée par*

$$R^{TZ}=\frac{(\bar z_1\,d\bar z_0-\bar z_0\,d\bar z_1)(z_1\,dz_0-z_0\,dz_1)}{(|z_0|^2+|z_1|^2)^2}. \tag{6.2}$$

*En particulier sur un voisinage de $P_i (1 \leqslant i \leqslant n)$*

$$R^{TZ} \wedge R^{TZ} = 0. \tag{6.3}$$

*Démonstration.* Dans les coordonnées $(z_0, z_1)$, une section holomorphe de $TZ$ est donnée par $(\partial/\partial z_0) - (z_1/z_0)(\partial/\partial z_1)$.

De (6.1), on tire que

$$\left\| \frac{\partial}{\partial z_0} - \frac{z_1}{z_0} \frac{\partial}{\partial z_1} \right\|^2 = 1 + \left| \frac{z_1}{z_0} \right|^2. \tag{6.4}$$

Comme

$$R^{TZ} = \bar{\partial} \partial \log \left\| \frac{\partial}{\partial z_0} - \frac{z_1}{z_0} \frac{\partial}{\partial z_1} \right\|^2,$$

on en déduit (6.2). (6.3) est une conséquence de (6.2). □

Soit $\| \ \|_{TD_\varepsilon}$ la métrique sur $D_\varepsilon$ donnée par $\|\partial/\partial w\|^2_{TD_\varepsilon} = 1$. Pour $\alpha > 0$, $Y \in TX$, on pose

$$\|Y\|^2_{TX, \alpha} = \|Y\|^2_{TX} + \frac{\|\pi_* Y\|^2_{TD_\varepsilon}}{\alpha}. \tag{6.5}$$

Soit $R^{TX}_\alpha$ la courbure de la connexion holomorphe hermitienne sur $(TX, \| \ \|_{TX, \alpha})$.

THÉORÈME 6.2. *La forme différentielle lisse sur $X - \Sigma$, $\mathrm{Td}(\tilde{TZ}, \| \ \|_{TZ})$ définit un courant localement intégrable sur la variété $X$.*

*De plus, sur la variété $X$, on a la convergence de courants*

$$\lim_{\alpha \downarrow 0} \mathrm{Td}(TX, \| \ \|_{TX, \alpha}) = \mathrm{Td}(TZ, \| \ \|_{TZ}) + \frac{1}{6} \sum_1^n \delta\{P_i\}. \tag{6.6}$$

*Démonstration.* Par (6.2), il est clair que $R^{TZ}$ est localement intégrable. Comme $R^{TZ} \wedge R^{TZ} = 0$ sur des voisinages ouverts de $P_1, \dots, P_n$, $R^{TZ} \wedge R^{TZ} = 0$ est aussi un courant intégrable. Donc le courant $\mathrm{Td}(TZ, \| \ \|_{TZ})$ sur $X - \Sigma$ s'étend en un courant localement intégrable.

Sur $X - \Sigma$, la formule (6.6) est essentiellement due à Bott–Chern [BotC]. Nous donnons une preuve rapide du fait que

$$\lim_{\alpha \downarrow 0} \mathrm{Td}\left( \frac{-R^{TX}_\alpha}{2i\pi} \right) = \mathrm{Td}\left( \frac{-R^{TZ}}{2i\pi} \right) \quad \text{uniformément sur les compacts de } X - \Sigma. \tag{6.7}$$

On considère la suite exacte de fibrés sur $X-\Sigma$

$$0\to TZ\to TX\to \pi^*TD_\varepsilon\to 0. \tag{6.8}$$

On identifie $\pi^*TD_\varepsilon$ à l'orthogonal $TZ^\perp$ à $TZ$ pour la métrique $\| \ \|_{TX}$.

Soit $\beta$ l'extension définissant la structure holomorphe de $TX$. $\beta$ est une $(0,1)$-forme à valeurs dans $\mathrm{Hom}(\pi^*TD_\varepsilon, TZ)$ telle que $\bar\partial\beta=0$.

L'opérateur $\nabla^{TX''}$ qui définit la structure holomorphe de $TX$ est donné sous forme matricielle par la formule

$$\nabla^{TX''}=\begin{bmatrix}\nabla^{TZ''} & \beta\\ 0 & \nabla^{TD''_\varepsilon}\end{bmatrix}. \tag{6.9}$$

Soit $\nabla^{TX'}_\alpha, \nabla^{TZ'}, \nabla^{TD'_\varepsilon}$ les parties holomorphes des connexions holomorphes hermitiennes sur $(TX, \| \ \|_{TX,\alpha}), (TZ, \| \ \|_{TZ})$ et $(TD_\varepsilon, \| \ \|_{TD_\varepsilon})$.

De (6.9), on tire que quand $\alpha\to 0$

$$\nabla^{TX'}_\alpha\to\begin{bmatrix}\nabla^{TZ'} & 0\\ 0 & \nabla^{TD'_\varepsilon}\end{bmatrix}\quad \text{uniformément sur les compacts de } X-\Sigma. \tag{6.10}$$

De (6.9), (6.10), on tire que quand $\alpha\to 0$

$$R^{TX}_\alpha\to\begin{bmatrix}R^{TZ} & \nabla'\beta\\ 0 & 0\end{bmatrix}\quad \text{uniformément sur les compacts de } X-\Sigma, \tag{6.11}$$

où $\nabla'\beta$ est la dérivée holomorphe covariante de $\beta$.

Comme le genre Td est multiplicatif, on déduit (6.7) de (6.11).

Montrons maintenant (6.6). Au voisinage de $P_i (1\leq i\leq n)$, dans les coordonnées $z_0$, $z_1$, la métrique $\| \ \|_{TX,\alpha}$ est telle que

$$\| \ \|^2_{TX,\alpha}=|dz_0|^2+|dz_1|^2+\frac{1}{\alpha}|z_0\,dz_1+z_1\,dz_0|^2. \tag{6.12}$$

Pour $\gamma>0$, soit $\delta_\gamma$ l'homothétie de $\mathbf{C}^2$, $(z_0,z_1)\to\delta_\gamma(z_0,z_1)=(\gamma z_0,\gamma z_1)$. On a

$$\| \ \|^2_{TX,\alpha}=\alpha\delta^*_{\alpha^{-1/2}}\| \ \|^2_{TX,1}. \tag{6.13}$$

Soit $R^{\mathbf{C}^2}_\alpha$ la courbure de la connexion holomorphe hermitienne sur $\mathbf{C}^2$ muni de la métrique donnée par le membre de droite de (6.12). De (6.13), on tire que

$$R^{\mathbf{C}^2}_\alpha=\delta^*_{\alpha^{-1/2}}R^{\mathbf{C}^2}_1. \tag{6.14}$$

Soit $k$ une fonction continue à support compact définie sur le voisinage $U_i$ de $P_i$ dans $X$. De (6.13), (6.14), on tire que

$$\int_{U_i} k \operatorname{Td}\left(\frac{-R_\alpha^{TX}}{2i\pi}\right) = \int_{U/\sqrt{\alpha}} k(\sqrt{\alpha}\, z_0, \sqrt{\alpha}\, z_1) \operatorname{Td}\left(\frac{-R_1^{\mathbf{C}^2}}{2i\pi}\right). \tag{6.15}$$

On montre par le calcul que

$$R_1^{\mathbf{C}^2} = \frac{1}{(1+|z_0|^2+|z_1|^2)^2}\begin{bmatrix} (1+|z_0|^2)\, d\bar z_1\, dz_1 - z_0 \bar z_1\, d\bar z_0\, dz_1 & (1+|z_0|^2)\, d\bar z_1\, dz_0 - z_0 \bar z_1\, d\bar z_0\, dz_0 \\ (1+|z_1|^2)\, d\bar z_0\, dz_1 - \bar z_0 z_1\, d\bar z_1\, dz_1 & (1+|z_1|^2)\, d\bar z_0\, dz_0 - \bar z_0 z_1\, d\bar z_1\, dz_0 \end{bmatrix}. \tag{6.16}$$

De (6.16), on tire en particulier que

$$\begin{gathered} (\operatorname{Tr}[R_1^{\mathbf{C}^2}])^2 = 2(1+|z_0|^2+|z_1|^2)^{-3}\, d\bar z_0\, dz_0\, d\bar z_1\, dz_1 \\ \operatorname{Tr}[(R_1^{\mathbf{C}^2})^2] = -2(1+|z_0|^2+|z_1|^2)^{-3}\, d\bar z_0\, dz_0\, d\bar z_1\, dz_1. \end{gathered} \tag{6.17}$$

Si $\omega \in \Lambda(T_R^* X)$, si $0 \leqslant p \leqslant 4$, soir $\omega^{(p)}$ la composante de $\omega$ dans $\Lambda(T_R^* X)$. On a

$$\left[\operatorname{Td}\left(\frac{-R_1^{\mathbf{C}^2}}{2i\pi}\right)\right]^{(4)} = -\frac{1}{4\pi^2}\left[-\frac{\operatorname{Tr}[(R_1^{\mathbf{C}^2})^2]}{24} + \frac{1}{8}(\operatorname{Tr}[R_1^{\mathbf{C}^2}])^2\right]. \tag{6.18}$$

De (6.17), (6.18), on déduit que

$$\left[\operatorname{Td}\left(\frac{-R_1^{\mathbf{C}^2}}{2i\pi}\right)\right]^{(4)} = -\frac{1}{4\pi^2}\frac{1}{6}(\operatorname{Tr}[R_1^{\mathbf{C}^2}])^2. \tag{6.19}$$

De (6.17), (6.19), on tire que la forme $[\operatorname{Td}(-R_1^{\mathbf{C}^2}/2i\pi)]^{(4)}$ est intégrable sur $\mathbf{C}^2$. Par convergence dominée, on déduit de (6.15) que

$$\lim_{\alpha \downarrow 0} \int_{U_i} k \operatorname{Td}\left(-\frac{R_\alpha^{TX}}{2i\pi}\right) = k(0) \int_{\mathbf{C}^2} \operatorname{Td}\left(-\frac{R_1^{\mathbf{C}^2}}{2i\pi}\right). \tag{6.20}$$

De (6.17), (6.19), on tire que

$$\begin{aligned} \int_{\mathbf{C}^2} \operatorname{Td}\left(-\frac{R_\alpha^{\mathbf{C}^2}}{2i\pi}\right) &= \frac{4}{3}\int_{\mathbf{R}_+\times\mathbf{R}_+} \frac{rr'\, dr\, dr'}{(1+r^2+r'^2)^3} \\ &= \frac{1}{3}\int_{\mathbf{R}_+\times\mathbf{R}_+} \frac{du\, du'}{(1+u+u')^3} = \frac{1}{6}. \end{aligned} \tag{6.21}$$

De (6.20), (6.21), on déduit

$$\lim_{\alpha \downarrow 0} \int_U k \operatorname{Td}\left(-\frac{R_\alpha^{TX}}{2i\pi}\right) = \frac{1}{6} k(0). \tag{6.22}$$

Soit maintenant $k'$ une 2-forme continue à support compact inclus dans $U_i$. De (6.14), (6.16), on tire que

$$\begin{aligned} \int_{U_i} k' \operatorname{Td}\left(-\frac{R_\alpha^{TX}}{2i\pi}\right) &= -\frac{1}{4i\pi} \int_{U_i} k'(z_0, z_1)\, \delta^*_{\alpha^{-1/2}} \operatorname{Tr}\left[R_1^{\mathbf{C}^2}\right] \\ &= -\frac{1}{4i\pi} \int_{U_i} \frac{k'(z_0, z_1)}{\alpha(1+(|z_0|^2/\alpha)+(|z_1|^2/\alpha))^2} \end{aligned} \tag{6.23}$$
$$\times\left[\left(1+\frac{|z_0|^2}{\alpha}\right) d\bar{z}_1\, dz_1 - \frac{z_0 \bar{z}_1}{\alpha} d\bar{z}_0\, dz_1 + \left(1+\frac{|z_1|^2}{\alpha}\right) d\bar{z}_0\, dz_0 - \frac{\bar{z}_0 z_1}{\alpha} d\bar{z}_1\, dz_0\right].$$

On a les inégalités

$$\begin{aligned} \frac{|z_0|^2}{(\alpha+|z_0|^2+|z_1|^2)^2} &\leqslant \frac{|z_0|^2}{(|z_0|^2+|z_1|^2)^2} \\ \frac{\alpha}{(\alpha+|z_0|^2+|z_1|^2)^2} &\leqslant \frac{1}{4(|z_0|^2+|z_1|^2)} \end{aligned} \tag{6.24}$$

et les membres de droite de (6.24) sont intégrables sur les parties bornées de $\mathbf{C}^2$. Par le théorème de convergence dominée, on déduit de (6.23) que

$$\lim_{\alpha \downarrow 0} \int_U k' \operatorname{Td}\left(\frac{-R_\alpha^{TX}}{2i\pi}\right) = \frac{-1}{4i\pi} \int_U \frac{k'(z_0, z_1)}{(|z_0|^2+|z_1|^2)^2} \tag{6.25}$$
$$\times(|z_0|^2\, d\bar{z}_1\, dz_1 - z_0 \bar{z}_1\, d\bar{z}_0\, dz_1 + |z_1|^2\, d\bar{z}_0\, dz_0 - \bar{z}_0 z_1\, d\bar{z}_1\, dz_0).$$

De (6.2), (6.25), on tire que

$$\lim_{\alpha \downarrow 0} \int_U k' \operatorname{Td}\left(\frac{-R_\alpha^{TX}}{2i\pi}\right) = \int_U k' \operatorname{Td}\left(\frac{-R^{TZ}}{2i\pi}\right). \tag{6.26}$$

Le théorème résulte des équations (6.7), (6.22), (6.26). □

**6(b) Holonomie du fibré $(\lambda^{\xi}, \| \|'_Q)$ sur $D_\varepsilon \setminus \{0\}$**

Soit $\| \|_\xi$ une métrique hermitienne sur le fibré $\xi$. $\| \|_{TZ}$ désigne la métrique sur $TZ|_{X-\Sigma}$ considérée à la section 6(a).

Soit $\| \|'_Q$ la métrique de Quillen sur le fibré holomorphe $\lambda(\xi)|_{D_\varepsilon \setminus \{0\}}$ associée aux métriques $(\| \|_{TZ}, \| \|_\xi)$.

Soit $\nabla^{\lambda(\xi)}$ la connexion holomorphe hermitienne sur le fibré $(\lambda(\xi)|_{D_\varepsilon \setminus \{0\}}, \| \|'_Q)$. Le résultat qui suit ne fait intervenir que la restriction du fibré $\lambda(\xi)$ à $D_\varepsilon \setminus \{0\}$. En particulier, il ne dépend ni du fait que $\lambda(\xi)$ est un fibré holomorphe sur $D_\varepsilon$ tout entier, ni a fortiori de l'extension particulière de $\lambda(\xi)|_{D_\varepsilon \setminus \{0\}}$ à $D_\varepsilon$ définie par l'image directe $(\det R\pi_* \xi)^{-1}$.

Soit $c: s \in S^1 = R/Z \to c_s \in D_\varepsilon \setminus \{0\}$ une courbe lisse dans $D_\varepsilon \setminus \{0\}$, sans point double, qui entoure une seule fois 0, et ceci positivement. Soit $C$ l'intérieur de $c$.

Soit $\tau_1^0$ l'opérateur de transport parallèle de $\lambda_{c_0}(\xi)$ en $\lambda_{c_1}(\xi)$ pour la connexion $\nabla^{\lambda(\xi)}$ le long de la courbe $s \in S^1 \to c_s$. $\tau_1^0$ agit sur $\lambda_{c_0}(\xi)$ par multiplication par un nombre complexe de module 1, qu'on note encore $\tau_1^0$.

Rappelons que $n = \mathrm{Card}(\Sigma)$.

THÉORÈME 6.3. *Le nombre complexe $\tau_1^0$ est donné par la formule*

$$\tau_1^0 = \exp\left\{-2i\pi\left(\int_C \int_\pi \mathrm{Td}(TZ, \| \|_{TZ})\,\mathrm{ch}(\xi, \| \|_\xi) + \frac{n}{6}\,\mathrm{rg}\,\xi\right)\right\}. \tag{6.27}$$

*Démonstration.* Pour montrer le théorème, on va utiliser deux arguments essentiels :

– Le théorème d'indice pour des variétés à bord d'Atiyah–Patodi–Singer [APS1, Théorème 4.2];

– Le théorème d'holonomie de Bismut–Freed [BF, théorème 3.16].

Toutefois, le résultat de [BF] n'est applicable que si la métrique sur les fibres $Z$ est restriction d'une métrique kählérienne sur $X$. Comme en général $\| \|_{TX}$ n'est pas kählérienne, un argument supplémentaire de déformation est nécessaire.

Par [BGS1, théorème 0.1], la courbure de la connexion holomorphe hermitienne sur $\lambda(\xi)|_{D_\varepsilon \setminus \{0\}}$ est donné par

$$2i\pi\left[\int_\pi \mathrm{Td}(TZ, \| \|_{TZ})\,\mathrm{ch}(\xi, \| \|_\xi)\right]^{(2)}.$$

Il suffit donc d'établir le théorème quand $c$ est une courbe arbitrairement proche de

0. Or, par la Proposition 3.4, comme $P^N\mathbf{C}$ et $D_\varepsilon$ sont kählériennes, pour $0<\varepsilon'<\varepsilon$ si $\varepsilon'$ est assez petit, $\pi^{-1}(D_{\varepsilon'})$ est kählérienne.

On pourra donc supposer que la variété $X$ elle-même est kählérienne.

Soit donc $\| \ \|_{TX}^K$ une métrique kählérienne sur $TX$. Soit $\| \ \|_{TZ}^K$ la métrique induite par $\| \ \|_{TX}^K$ sur $TZ|_{X-\Sigma}$. Soit $\| \ \|_Q^K$ la métrique de Quillen sur le fibré $\lambda(\xi)|_{D_\varepsilon\setminus\{0\}}$ associée aux métriques $(\| \ \|_{TZ}^K, \| \ \|_\xi)$.

Soit $M$ la variété $\pi^{-1}(C)$. $M$ est une variété à bord, de bord $\partial M=\pi^{-1}(c)$.

En remplaçant dans la formule (6.5) la métrique $\| \ \|_{TX}$ par la métrique $\| \ \|_{TX}^K$, pour $\alpha>0$, on obtient une métrique kählérienne $\| \ \|_{TX,\alpha}^K$ sur $TX$.

Sur $X-\Sigma$, soit $TZ^\perp$ l'orthogonal de $TZ$ dans $(TX, \| \ \|_{TX}^K)$. $TZ^\perp$ est encore l'orthogonal de $TZ$ dans $(TX, \| \ \|_{TX,\alpha}^K)$.

On pose

$$T^H\partial M = T\partial M \cap T_R Z^\perp.$$

Alors, sur $\partial M$

$$T\partial M = T_R Z \oplus T^H\partial M. \tag{6.28}$$

Soit $\| \ \|_{Tc}$ une métrique sur $Tc$. On peut alors identifier $c$ à $S_1$. Comme $T^H\partial M \simeq \pi^* Tc$, on peut relever la métrique $\| \ \|_{Tc}$ à $T^H\partial M$. Soit $\| \ \|_{T\partial M}$ la métrique sur $T\partial M$ qui a les deux propriétés suivantes :

– La somme directe (6.28) est orthogonale.

– La métrique $\| \ \|_{T\partial M}$ coïncide avec $\| \ \|_{TZ}^K$ sur $TZ$ et avec $\pi^*\| \ \|_{Tc}$ sur $T^H\partial M$.

Soit $\mathcal{V}$ un voisinage de $c$ dans $C$ dont la distance à 0 est strictement positive, tel que $\mathcal{V}\simeq c\times[0,\gamma[$ $(\gamma>0)$. Soit $u$ la coordonnée variant dans $[0,\gamma[$. Si $\gamma$ est assez petit, $\pi^{-1}(\mathcal{V})\simeq\partial M\times[0,\gamma[$.

Soit $\| \ \|_{T_R M}$ une métrique sur $T_R M$ ayant les propriétés suivantes :

– Sur $\pi^{-1}(\mathcal{V})$, on a

$$\| \ \|_{T_R M}^2 = \| \ \|_{T\partial M}^2 + |du|^2;$$

– Au voisinage de $\Sigma$, $\| \ \|_{T_R M}^2$ coïncide avec la métrique $\| \ \|_{TX}^2$, i.e. est donnée par (6.1).

Soit enfin $\| \ \|'_{T_R D_\varepsilon}$ une métrique sur $T_R D_\varepsilon$ qui a les deux propriétés suivantes :

– Sur $\mathcal{V}\simeq c\times[0,\gamma[$, on a

$$\| \ \|_{TD_\varepsilon}'^2 = \| \ \|_{Tc}^2 + |du|^2; \tag{6.29}$$

– Au voisinage de 0, on a

$$\| \ \|'_{T_R D_\varepsilon} = \| \ \|_{TD_\varepsilon}. \tag{6.30}$$

Pour $\alpha > 0$, soit $\| \ \|_{T_R M, \alpha}$ la métrique sur $T_R M$ telle que si $Y \in T_R M$

$$\|Y\|^2_{T_R M, \alpha} = \|Y\|^2_{T_R M} + \frac{1}{\alpha} \|\pi_* Y\|'^2_{T_R D_\varepsilon}. \tag{6.31}$$

Notons que la métrique $\| \ \|_{T_R M, \alpha}$ est encore produit au voisinage de $\partial M$.

Soit $\| \ \|_{T\partial M, \alpha}$ la restriction de la métrique $\| \ \|_{T_R M, \alpha}$ à $T\partial M$. De (6.28)–(6.31), on tire que si $Y \in T\partial M$

$$\|Y\|^2_{T\partial M, \alpha} = \|Y\|^2_{T\partial M} + \frac{1}{\alpha} \|\pi_* Y\|^2_{Tc}. \tag{6.32}$$

Pour simplifier, on va supposer que la variété $X$ est spin, ou de manière équivalente que le fibré $\det TX$ possède une racine carrée, notée $(\det TX)^{1/2}$.

Soit $F_\alpha = F_{+,\alpha} \oplus F_{-,\alpha}$ le fibré hermitien des spineurs au-dessus de $(T_R M, \| \ \|_{T_R M, \alpha})$ associé à la structure spin définie par $(\det TX)^{1/2}$.

On munit le fibré $(\det TX)^{1/2}$ de la métrique hermitienne induite par la métrique $\| \ \|_{TX, \alpha}$. Le fibré holomorphe hermitien $\xi' = (\det TX)^{1/2} \otimes \xi$ est naturellement muni de la connexion holomorphe hermitienne $\nabla^{\xi'}_\alpha$.

Soit alors $D_\alpha$ l'opérateur de Dirac d'Atiyah–Patodi–Singer [APS1] agissant sur les sections $C^\infty$ de $F_\alpha \otimes \xi'$ sur la variété $M$ associé à la métrique $\| \ \|_{T_R M, \alpha}$ et à la connexion $\nabla^{\xi'}_\alpha$. Soit $D_{\alpha,+}$ la restriction de $D_\alpha$ aux sections de $F_{\alpha,+} \otimes \xi'$.

$F_{\alpha,+}|_{\partial M}$ est le fibré des spineurs sur la variété $(\partial M, \| \ \|_{T\partial M, \alpha})$. Soit $D^{\partial M}_\alpha$ l'opérateur de Dirac agissant sur les sections $C^\infty$ de $(F_{\alpha,+} \otimes \xi')_{\partial M}$ associé à la métrique $\| \ \|_{T\partial M, \alpha}$ et à la connexion $\nabla^{\xi'}_\alpha$.

Par [APS1, p. 55], l'opérateur $D_{\alpha,+}$ est un opérateur de Fredholm. Soit $\operatorname{Ind} D_{\alpha,+}$ son indice.

Soit $R^M_\alpha$ la courbure de la connexion de Levi–Civita $\nabla^{T_R M}_\alpha$ sur $(T_R M, \| \ \|_{T_R M, \alpha})$ et soit $L^{\xi'}_\alpha$ la courbure de la connexion $\nabla^{\xi'}_\alpha$. Soit enfin $\bar{\eta}_\alpha(0)$ l'invariant êta réduit de l'opérateur de Dirac $D^{\partial M}_\alpha$ [APS1].

Par la formule d'Atiyah–Patodi–Singer [APS1, théorème 4.2], on sait que si $\hat{A}$ est le genre de Hirzebruch

$$\operatorname{Ind} D_{\alpha,+} = \int_M \hat{A}\left(\frac{R^M_\alpha}{2\pi}\right) \operatorname{Tr}\left[\exp\left(\frac{-L^{\xi'}_\alpha}{2i\pi}\right)\right] - \bar{\eta}_\alpha(0). \tag{6.33}$$

De (6.33), on tire en particulier que

$$\bar{\eta}_\alpha(0) = \int_M \hat{A}\left(\frac{R^M_\alpha}{2\pi}\right) \operatorname{Tr}\left[\exp\left(\frac{-L^{\xi'}_\alpha}{2i\pi}\right)\right] \quad \operatorname{mod} Z. \tag{6.34}$$

On fait maintenant tendre $\alpha$ vers 0 dans (6.34).

(1) *Le membre de droite de* (6.34).

Soit $\nabla^{T_R M}$ la connexion de Levi–Civita sur $(T_R M, \| \|_{T_R M})$, et soit $\nabla^{T_R Z}$ la projection orthogonale de $\nabla^{T_R M}$ sur $T_R Z|_{X-\Sigma}$.

Il résulte de [BF, équation (3.196)] que si $R'^Z$ est la courbure de $\nabla^{T_R Z}$, alors quand $\alpha \downarrow 0$

$$\hat{A}\left(\frac{R^M_\alpha}{2\pi}\right) \to \hat{A}\left(\frac{R'^Z}{2\pi}\right) \quad \text{uniformément sur les compacts de } X-\Sigma. \tag{6.35}$$

De (6.11), on tire en particulier que comme la métrique $\| \|_{TD_\varepsilon}$ est plate, alors quand $\alpha \downarrow 0$

$$\operatorname{Tr}\left[\exp\left(\frac{-L^{\xi'}_\alpha}{2i\pi}\right)\right] \to \exp\left(\frac{-1}{2i\pi}\operatorname{Tr}\left[\frac{R^{TZ}}{2}\right]\right) \operatorname{ch}(\xi, \| \|_\xi) \tag{6.36}$$

uniformément sur les compacts de $X-\Sigma$.

La métrique $\| \|_{TX}$ est kählérienne au voisinage de $\Sigma$, et donc la métrique $\| \|_{TX,\alpha}$ est également kählérienne au voisinage de $\Sigma$. Or par hypothèse, on sait que, au voisinage de $\Sigma$, $\| \|_{T_R M,\alpha} = \| \|_{TX,\alpha}$. Donc

$$\hat{A}\left(\frac{R^M_\alpha}{2\pi}\right) \operatorname{Tr}\left[\exp\left(\frac{-L^{\xi'}_\alpha}{2\pi}\right)\right] = \operatorname{Td}\left(\frac{-R^{TX}_\alpha}{2i\pi}\right) \operatorname{ch}(\xi, \| \|_\xi) \quad \text{au voisinage de } \Sigma. \tag{6.37}$$

Du Théorème 6.2, de (6.35) et de (6.37), on déduit que

$$\begin{aligned} &\lim_{\alpha \downarrow 0} \int_M \hat{A}\left(\frac{R^M_\alpha}{2\pi}\right) \operatorname{Tr}\left[\exp\left(\frac{-L^{\xi'}_\alpha}{2i\pi}\right)\right] \\ &= \int_M \hat{A}\left(\frac{R'^Z}{2\pi}\right) \exp\left(\frac{-1}{2i\pi}\operatorname{Tr}\left[\frac{R^{TZ}}{2}\right]\right) \operatorname{ch}(\xi, \| \|_\xi) + \frac{n}{6} \operatorname{rg} \xi. \end{aligned} \tag{6.38}$$

Soit $B$ une réunion de boules ouvertes de centres $P_1, \ldots, P_n$ telles que, à l'intérieur de $B$, $\| \|_{T_R M} = \| \|_{TX}$ est donnée par (6.1). Comme la métrique (6.1) est kählérienne, on a

$$\int_B \hat{A}\left(\frac{R'^Z}{2\pi}\right) \exp\left(\frac{-1}{2i\pi}\operatorname{Tr}\left[\frac{R^{TZ}}{2}\right]\right) \operatorname{ch}(\xi, \| \|_\xi) = \int_B \operatorname{Td}\left(\frac{-R^{TZ}}{2i\pi}\right) \operatorname{ch}(\xi, \| \|_\xi). \tag{6.39}$$

Soit $E$ une forme de Chern–Simons de degré 3 telle que

$$\hat{A}\left(\frac{R^{TZ}}{2\pi}\right)-\hat{A}\left(\frac{R'^{Z}}{2\pi}\right)=dE \quad \text{sur} \quad M\setminus\mathring{B}. \tag{6.40}$$

On peut supposer que $E$ est nulle sur $\partial B$. On en déduit que

$$\begin{aligned}\int_{M\setminus\mathring{B}} \hat{A}\left(\frac{R'^{Z}}{2\pi}\right)\exp\left(\frac{-1}{2i\pi}\operatorname{Tr}\left[\frac{R^{TZ}}{2}\right]\right)\operatorname{ch}(\xi,\|\ \|_{\xi})\\ =\int_{M\setminus\mathring{B}}\operatorname{Td}\left(\frac{-R^{TZ}}{2i\pi}\right)\operatorname{ch}(\xi,\|\ \|_{\xi})-\operatorname{rg}\xi\int_{\partial M}E.\end{aligned} \tag{6.41}$$

De (6.38), (6.41), on tire que

$$\begin{aligned}\lim_{\alpha\downarrow 0}\int_M \hat{A}\left(\frac{R^M_\alpha}{2\pi}\right)\operatorname{Tr}\left[\exp\left(\frac{-L^{\xi'}_\alpha}{2i\pi}\right)\right]\\ =\int_M \operatorname{Td}\left(\frac{-R^{TZ}}{2i\pi}\right)\operatorname{ch}(\xi,\|\ \|_{\xi})+\frac{n}{6}\operatorname{rg}\xi-\operatorname{rg}\xi\int_{\partial M}E.\end{aligned} \tag{6.42}$$

(2) *Le membre de gauche de* (6.34).

On va appliquer le théorème d'holonomie de [BF, théorème 3.16] aux invariants êta réduits $\bar{\eta}_\alpha(0)$. Sur $X-\Sigma$, on a

$$\det TX = TZ\otimes\pi^*(TD_\varepsilon).$$

Notons que $TD_\varepsilon$ est un fibré trivial. Soit $(TD_\varepsilon)^{1/2}$ une racine carrée de $TD_\varepsilon$. On définit le fibré $(TZ)^{1/2}$ sur $X-\Sigma$ par la relation

$$(\det TX)^{1/2}=(TZ)^{1/2}\otimes\pi^*(TD_\varepsilon)^{1/2}. \tag{6.43}$$

De (6.43), on tire que le fibré $TZ$ est spin.

Soit $\nabla^{(\det TX)^{1/2}}_\alpha$ la connexion holomorphe hermitienne sur $(\det TX)^{1/2}$ muni de la métrique induite par $\|\ \|_{TX,\alpha}$. De (6.9), (6.10), il résulte, que quand $\alpha\to 0$, la connexion $\nabla^{(\det TX)^{1/2}}_\alpha$ converge vers la connexion $\nabla^{(\det TX)^{1/2}}$ associée à la métrique $(\|\ \|_{TZ}\otimes\pi^*\|\ \|_{TD_\varepsilon})^{1/2}$ sur le fibré $(\det TX)^{1/2}$. Notons que le fibré $(TD_\varepsilon,\|\ \|_{TD_\varepsilon})$ étant trivial, on peut identifier $\nabla^{(\det TX)^{1/2}}$ à la connexion holomorphe hermitienne $\nabla^{(TZ)^{1/2}}$ sur le fibré $(TZ)^{1/2}|_{X-\Sigma}$ muni de la métrique induite par $\|\ \|_{TZ}$.

On voit donc que quand $\alpha\to 0$

$$\nabla^{\xi'}_\alpha\to\nabla^{\xi'}=\nabla^{(TZ)^{1/2}}\otimes 1+1\otimes\nabla^{\xi}. \tag{6.44}$$

Soit $\tilde{\eta}'_\alpha(0)$ l'invariant êta réduit de l'opérateur de Dirac $D_\alpha^{\partial M}$ sur $\partial M$ associé à la métrique $\| \|_{T\partial M,\alpha}$ et à la connexion $\nabla^{\xi'}$.

De la formule locale de variation de l'invariant êta d'Atiyah–Patodi–Singer [APS2, section 4], [BF, théorème 2.10], on tire facilement que quand $\alpha \to 0$

$$\tilde{\eta}_\alpha(0)-\tilde{\eta}'_\alpha(0)\to 0 \quad \text{dans} \quad R/Z. \tag{6.45}$$

Soit $F^Z=F_+^Z\oplus F_-^Z$ le fibré des spineurs de $T_RZ$ pour la métrique $\| \|_{TZ}^K$ associé à la structure spin définie par $(\det TZ)^{1/2}$. Pour $w\in D_\varepsilon\setminus\{0\}$, soit $D_w$ l'opérateur de Dirac agissant sur les sections $C^\infty$ de $F^Z\otimes\xi'$ sur la fibre $Z_w$ associé à la métrique $\| \|_{TZ}^K$ et à la connexion $\nabla^{\xi'}$. Soit $D_{w,+}$ la restriction de $D_w$ aux sections $C^\infty$ de $F_+^Z\otimes\xi'$.

Soit $\tilde{\lambda}(\xi)$ le fibré déterminant construit dans [BF, section 1] associé à la famille $D_{w,+}$. $\tilde{\lambda}(\xi)$ est un fibré $C^\infty$ sur $D_\varepsilon\setminus\{0\}$.

Des résultats de [BF], on tire que la métrique sur $F^Z\otimes\xi'$ et la décomposition $T_RM=T_RZ\oplus T_RZ^\perp$ déterminent une métrique $C^\infty$ et une connexion unitaire $\tilde{\nabla}$ sur $\tilde{\lambda}(\xi)$. Soit $\tilde{\tau}_1^0\in S_1$ l'holonomie de la connexion $\tilde{\nabla}$ sur la courbe $c$.

Notons que comme bord de $C$, $c$ identifié à $S_1$ a une structure spin non triviale. Il résulte de [BF, théorème 3.16] et du fait que la structure spin de $c$ est ici non triviale (alors qu'elle est triviale dans [BF]) que quand $\alpha\to 0$

$$\begin{gathered}\tilde{\eta}'_\alpha(0)\to\tilde{\eta} \quad \text{dans} \quad R/Z\\ \tilde{\tau}_1^0=\exp(-2i\pi\tilde{\eta}).\end{gathered} \tag{6.46}$$

Or comme la métrique $\| \|_{TX}^K$ est kählérienne, il resulte de [BGS3, théorème 1.15] que

– On peut identifier les fibrés $\tilde{\lambda}(\xi)$ et $\lambda(\xi)$ en tant que fibrés $C^\infty$ sur $D_\varepsilon\setminus\{0\}$.

– La connexion $\tilde{\nabla}$ est exactement la connexion holomorphe hermitienne sur $(\lambda(\xi), \| \|_Q^\sim)$ où $\| \|_Q^\sim$ est la métrique de Quillen associé aux métriques

$$(\| \|_{TZ}^K, (\| \|_{TZ}/\| \|_{TZ}^K)^{1/2}\| \|_\xi).$$

(3) *Fin de la démonstration.*

De (6.34), (6.42), (6.45), (6.46), il résulte que

$$\tilde{\tau}_1^0=\exp\left\{-2i\pi\left(\int_M \mathrm{Td}\left(\frac{-R^{TZ}}{2i\pi}\right)\mathrm{ch}(\xi,\| \|_\xi)+\frac{n}{6}\,\mathrm{rg}\,\xi-\mathrm{rg}\,\xi\int_{\partial M}E\right)\right\}. \tag{6.47}$$

Or la connexion $\nabla^{T_RZ}$ est la projection orthogonale sur $T_RZ$ de la connexion de

Levi–Civita $\nabla^{T_R M}$. Sur $\partial M$, on sait que les restrictions de $\| \|_{T_R M}$ et $\| \|_{TX}^K$ à $T_R Z$ coïncident, et que de plus la décomposition $T\partial M = T^H \partial M \oplus T_R Z$ est orthogonale pour les métriques induites par $\| \|_{T_R M}$ et $\| \|_{TX}^K$. Il résulte de [BGS2, théorème 1.2] que sur $\partial M$, la connexion $\nabla^{T_R Z}$ coïncide avec la connexion $\nabla^{TZ,K}$, qui est la projection orthogonale sur $TZ$ de la connexion $\nabla^{TX,K}$.

Soit $R^{TZ,K}$ la courbure de la connexion $\nabla^{TZ,K}$. Soit $E'$ une forme de Chern–Simons sur $X - \Sigma$ telle que

$$\hat{A}\left(\frac{R^{TZ}}{2\pi}\right) - \hat{A}\left(\frac{R^{TZ,K}}{2\pi}\right) = dE'. \tag{6.48}$$

Il résulte des considérations qui précèdent que

$$\int_{\partial M} E = \int_{\partial M} E'.$$

Soit $H$ la classe de Bott–Chern de degré 2 [BGS1, section 1(f)] telle que

$$\hat{A}\left(\frac{R^{TZ}}{2\pi}\right) - \hat{A}\left(\frac{R^{TZ,K}}{2\pi}\right) = \frac{\bar{\partial}\partial H}{2i\pi}. \tag{6.49}$$

Alors, il résulte du formalisme des classes de Bott–Chern [BGS1] que $(1/2i\pi)(\partial - \bar{\partial})H/2$ est une forme de Chern–Simons $E'$ et que donc

$$\tilde{\tau}_1^0 = \exp\left\{ -2i\pi\left( \int_M \mathrm{Td}\left(\frac{-R^{TZ}}{2i\pi}\right) \mathrm{ch}(\xi, \| \|_\xi) + \frac{n}{6} \operatorname{rg} \xi \right) + \operatorname{rg} \xi \int_{\partial M} \partial H \right\}. \tag{6.50}$$

Or la formule d'anomalie du théorème 5.1 nous indique comment change la métrique de Quillen, quand on change les métriques sur $TZ$ ou $\xi$. Plus précisément, on écrit la formule d'anomalie à l'aide de classes de Bott–Chern et on vérifie immédiatement que

$$\tau_1^0 = \tilde{\tau}_1^0 \exp\left\{ -\operatorname{rg} \xi \int_{\partial M} \partial H \right\}. \tag{6.51}$$

(6.26) résulte de (6.50), (6.51). □

### 6(c) Application au calcul de la courbure du fibré $(\lambda(\xi), \| \|_Q)$

Soient $\| \|_{\omega_{X/D_\varepsilon}}, \| \|_\xi$ des métriques hermitiennes lisses sur les fibrés $\omega_{X/D_\varepsilon}, \xi$. Soit $\| \|_Q$ la métrique de Quillen sur le fibré $\lambda(\xi)|_{D_\varepsilon \setminus \{0\}}$ associée aux métriques $\| \|_{\omega_{X/D_\varepsilon}}, \| \|_\xi$.

Soit $\sigma$ une section holomorphe non nulle de $\lambda(\xi)$ sur $D_\varepsilon$.

A la proposition 10.1 et au théorème 10.5, on montrera par des arguments locaux sur $S$ qu'il existe une fonction continue $k(w)$ sur $D_\varepsilon$ et une constante $l(\xi) \in \mathbf{R}$ telle que sur $D_\varepsilon \setminus \{0\}$, on ait

$$\tag{6.52} \begin{gathered} \log \|\sigma\|_Q^2 = k(w) + l(\xi) \log(|w|^2) \\ c_1(\lambda(\xi), \| \, \|_Q) = -\left[ \int_\pi \mathrm{Td}(TZ, \| \, \|_{TZ}) \operatorname{ch}(\xi, \| \, \|_\xi) \right]^{(2)} - l(\xi)\, \delta_{\{0\}}. \end{gathered}$$

De plus, on montrera aussi à la proposition 10.6 que la constante $l(\xi)$ ne dépend pas des métriques $\| \, \|_{\omega_{X/D_\varepsilon}}, \| \, \|_\xi$.

La constante $l(\xi)$ sera complètement déterminée par la démonstration du théorème 2.1, qui utilisera des arguments globaux.

Nous allons ici obtenir une information partielle sur $l(\xi)$, par des arguments locaux sur $S$.

THÉORÈME 6.4. *Pour tout fibré holomorphe $\xi$ sur $X$*

$$\tag{6.53} l(\xi) = \frac{n \operatorname{rg} \xi}{12} \mod Z.$$

*Démonstration.* Soit $\| \, \|_\xi$ une métrique hermitienne sur $\xi$, telle que la courbure $L^\xi$ de la connexion holomorphe hermitienne correspondante s'annule au voisinage de $\Sigma$.

Soit $\| \, \|_{\omega_{X/D_\varepsilon}}$ une métrique hermitienne sur $\omega$ telle que, pour $i=1,\dots,n$ dans les coordonnées $(z_0, z_1)$ sur le voisinage $U_i$ de $P_i$ qu'on a considéré à la section 6(a), on ait

$$\left\| \frac{dz_0}{z_0} \right\|^2_{\omega_{X/D_\varepsilon}} = \left\| \frac{dz_1}{z_1} \right\|^2_{\omega_{X/D_\varepsilon}} = 2.$$

Sur $X-\Sigma$, on a l'identification canonique $TZ \simeq \omega^{-1}_{X/D_\varepsilon}$. Donc sur $X-\Sigma$, $\| \, \|_{\omega^{-1}_{X/D_\varepsilon}}$ peut être considérée comme une métrique hermitienne sur $TZ$.

Soient $\| \, \|_{TX}, \| \, \|_{TZ}$ les métriques hermitiennes sur les fibrés $TX$, $TZ|_{X-\Sigma}$ considérées à la section 6(a). Soient $R^{\omega^{-1}_{X/D_\varepsilon}}, R^{TZ}$ les courbures des connexions holomorphes hermitiennes sur les fibrés $(\omega^{-1}_{X/D_\varepsilon}, \| \, \|_{\omega^{-1}_{X/D_\varepsilon}})$ et $(TZ|_{X-\Sigma}, \| \, \|_{TZ})$.

Soient enfin $\| \, \|_Q$ et $\| \, \|'_Q$ les métriques de Quillen sur le fibré $\lambda(\xi)|_{D_\varepsilon \setminus \{0\}}$ associées aux métriques $(\| \, \|_{\omega^{-1}_{X/D_\varepsilon}}, \| \, \|_\xi)$ et $(\| \, \|_{TZ}, \| \, \|_\xi)$.

De la formule d'anomalie conforme du théorème 5.1, on tire facilement que sur

$D_\varepsilon \setminus \{0\}$, on a

$$(6.54)\quad \log\left(\frac{\|\ \|_Q'^2}{\|\ \|_Q^2}\right) = \frac{1}{2i\pi}\left\{\int_\pi \frac{\mathrm{rg}\,\xi}{6}\,\frac{R^{\omega_{X/D_\varepsilon}^{-1}}+R^{TZ}}{2}\log\left(\frac{\|\ \|_{TZ}^2}{\|\ \|_{\omega_{X/D_\varepsilon}^{-1}}^2}\right)+\int_\pi \frac{\mathrm{Tr}[L^\xi]}{2}\log\left(\frac{\|\ \|_{TZ}^2}{\|\ \|_{\omega_{X/D_\varepsilon}^{-1}}^2}\right)\right\}^{(0)}.$$

Puisque $\mathrm{Tr}[L^\xi]$ s'annule au voisinage de $\Sigma$,

$$\left[\int_\pi \frac{\mathrm{Tr}[L^\xi]}{2}\log\left(\frac{\|\ \|_{TZ}^2}{\|\ \|_{\omega_{X/D_\varepsilon}^{-1}}^2}\right)\right]^{(0)}$$

est une fonction $C^\infty$ sur $D_\varepsilon$.

On peut supposer que pour tout $i=1,\dots,n$, il existe $a>0$ tel que

$$U_i = \{(z_0, z_1);\ |z_0|<a;\ |z_1|<a\},$$

et que de plus les $U_i$ sont disjoints.

Pour $w \in D_\varepsilon \setminus \{0\}$, on paramètre $Z_w \cap U_i$ par la coordonnée $z_0$. On vérifie facilement que sur $Z_w \cap U_i$

$$(6.55)\qquad \frac{\|\ \|_{TZ}^2}{\|\ \|_{\omega_{X/D_\varepsilon}^{-1}}^2} = 2\left(1+\frac{|w|^2}{|z_0|^4}\right)|z_0|^2.$$

De plus par la proposition 6.1, sur $U_i$, on a

$$(6.56)\qquad R^{TZ} = \frac{4|w|^2|z_0|^2 d\bar z_0\, dz_0}{(|z_0|^4+|w|^2)^2}.$$

On a

$$(6.57)\qquad \begin{aligned} &\frac{1}{2i\pi}\int_{Z_w\cap U_i} \frac{R^{TZ}+R^{\omega_{X/D_\varepsilon}^{-1}}}{2}\log\left(\frac{\|\ \|_{TZ}^2}{\|\ \|_{\omega_{X/D_\varepsilon}^{-1}}^2}\right) \\ &= \frac{-i}{\pi}\int_{|w|/a<|z_0|<a} \frac{|w|^2|z_0|^2}{(|z_0|^4+|w|^2)^2}\log\left(2\left(|z_0|^2+\frac{|w|^2}{|z_0|^2}\right)\right) d\bar z_0\, dz_0 \\ &= 4\int_{|w|^{1/2}/a}^{a/|w|^{1/2}} \frac{r^3\,dr}{(1+r^4)^2}\log|w|\,dr + 4\int_{|w|^{1/2}/a}^{a/|w|^{1/2}} \frac{r^3\log(2(r^2+1/r^2))}{(1+r^4)^2}\,dr. \end{aligned}$$

Or

$$(6.58)\qquad \lim_{|w|\to 0} 4\int_{|w|^{1/2}/a}^{a/|w|^{1/2}} \frac{r^3\,dr}{(1+r^4)^2} = \int_0^{+\infty}\frac{du}{(1+u)^2} = 1.$$

De (6.54)–(6.58), on tire que

$$\lim_{|w|\to 0} \frac{\log(\|\ \|_Q'^2/\|\ \|_Q^2)}{\log(|w|^2)} = \frac{n \operatorname{rg} \xi}{12}. \tag{6.59}$$

Soit $\sigma$ une section holomorphe non nulle de $\lambda(\xi)$ sur $D_\varepsilon$. De (6.52), (6.59), on tire que

$$\lim_{|w|\to 0} \frac{\log(\|\sigma\|_Q'^2)}{\log(|w|^2)} = l(\xi) + \frac{n \operatorname{rg} \xi}{12}. \tag{6.60}$$

Or, par [BGS1, théorème 0.1], on sait que sur $D_\varepsilon \setminus \{0\}$

$$\frac{1}{2i\pi} \bar\partial\partial \log(\|\sigma\|_Q'^2) = \left[\int_\pi \operatorname{Td}\left(\frac{-R^{TZ}}{2i\pi}\right) \operatorname{Tr} \exp\left(\frac{-L^\xi}{2i\pi}\right)\right]^{(2)}. \tag{6.61}$$

Par (6.3), on sait que $R^{TZ} \wedge R^{TZ} = 0$ au voisinage de $\Sigma$. Comme $L^\xi = 0$ au voisinage de $\Sigma$, on en déduit que la forme

$$\left(\operatorname{Td}\left(\frac{-R^{TZ}}{2i\pi}\right) \operatorname{Tr}\left[\exp\left(\frac{-L^\xi}{2i\pi}\right)\right]\right)^{(4)} \tag{6.62}$$

est nulle au voisinage de $\Sigma$. Donc la forme (6.61) est $C^\infty$ sur $D_\varepsilon$.

De (6.60)–(6.62), et de l'ellipticité de l'opérateur $\bar\partial\partial$ sur $D_\varepsilon$, on tire qu'il existe une fonction $C^\infty$ $\psi(w)$ sur $D_\varepsilon$ telle que

$$\log(\|\sigma\|_Q'^2) = \psi(w) + \left(l(\xi) + \frac{n \operatorname{rg} \xi}{12}\right) \log(|w|^2). \tag{6.63}$$

Or, par le théorème 6.3, on connaît l'holonomie de n'importe quelle courbe entourant 0 pour la connexion holomorphe hermitienne sur $(\lambda(\xi)|_{D_\varepsilon \setminus \{0\}}, \|\ \|_Q')$.

De (6.27), (6.63), on tire que

$$l(\xi) + \frac{n \operatorname{rg} \xi}{12} = \frac{n \operatorname{rg} \xi}{6} \quad \operatorname{mod} Z. \tag{6.64}$$

Le théorème est démontré.

*Remarque* 6.5. Notre résultat principal énoncé au théorème 2.1 affirme que $l(\xi) = n \operatorname{rg} \xi/12$. On lève donc l'ambiguïté mod $Z$ dans l'égalité (6.53).

Les résultats de cette section ne seront pas utilisés dans la suite.

## 7. La métrique $L^2$ au voisinage du diviseur des courbes singulières

On fait les mêmes hypothèses qu'à la section 6.

On munit les fibrés $\omega_{X/D_\varepsilon}$ et $\xi$ de métriques hermitiennes $\| \|_{\omega_{X/D_\varepsilon}}$ et $\| \|_\xi$.

On fait ici l'hypothèse suivante : pour tout $w \in D_\varepsilon$, $H^1(Z_w, \xi)=0$.

Alors, il résulte de la proposition 4.1 que les $H^0(Z_w, \xi)$ sont les fibres d'un fibré holomorphe sur $D_\varepsilon$, qu'on note $H^0(Z, \xi)$.

Pour $w \in D_\varepsilon \setminus \{0\}$, $H^0(Z_w, \xi)$ est un sous-espace vectoriel de $C^\infty(Z_w, \xi)$. $H^0(Z_w, \xi)$ hérite donc du produit scalaire hermitien sur $C^\infty(Z_w, \xi)$ défini à la section 2(b). Cette métrique hermitienne est lisse sur $H^0(Z, \xi)|_{D_\varepsilon \setminus \{0\}}$.

Par la proposition 4.1, on a l'identification de fibrés holomorphes sur $D_\varepsilon$

$$\lambda(\xi) = (\det H^0(Z, \xi))^{-1}.$$

$\lambda(\xi)|_{D_\varepsilon \setminus \{0\}}$ est ainsi muni d'une métrique hermitienne qu'on note $\| \|_{L_2}$.

Soit $\chi(\xi)$ la caractéristique d'Euler de $\xi|_Z$, i.e. $\chi(\xi)=\dim H^0(Z, \xi)$.

PROPOSITION 7.1. *Soit $\sigma$ une section continue de $\lambda(\xi)$ partout non nulle. Pour $0<\varepsilon'<\varepsilon$, il existe des constantes $C'$ et $C''$ dans $R$ telles que pour tout $w \in D_{\varepsilon'}$, on ait*

$$C' \geq \log(\|\sigma\|_{L^2}^2) \geq -\chi(\xi)\log\left(\log\left(\frac{1}{|w|}\right)\right)+C''. \tag{7.1}$$

*Démonstration.* Le résultat ne dépend évidemment pas du choix des métriques $\| \|_{\omega_{X/D_\varepsilon}}$ et $\| \|_\xi$. En utilisant les notations de la section 6(a), on peut donc supposer que, pour $1 \leq i \leq n$, sur l'ouvert $U_i$, on a

$$\left\|\frac{dz_0}{z_0}\right\|^2_{\omega_{X/D_\varepsilon}} = \left\|\frac{dz_1}{z_1}\right\|^2_{\omega_{X/D_\varepsilon}} = 2. \tag{7.2}$$

L'énoncé de la proposition est vide si $H^0(Z, \xi)=\{0\}$. On suppose donc dans la suite que si $l=\chi(\xi)$, alors $l>0$.

Soit $s_1, \dots, s_l$ des sections continues du fibré $H^0(Z, \xi)$ qui forment une base de $H^0(Z, \xi)$ au voisinage de 0. On peut supposer que

$$\sigma = (s_1 \wedge \dots \wedge s_l)^{-1}.$$

Sur $X-\Sigma$, on a l'identification $TZ \simeq \omega_{X/D_\varepsilon}^{-1}$. Soit $dv(x)$ la mesure de volume sur $Z_w$ induite par la métrique $\| \|_{\omega^{-1}_{X/D_\varepsilon}}$ sur $TZ$.

Pour $w \neq 0$ $(1 \leq i, j \leq l)$, si $\langle\ ,\ \rangle$ est le produit scalaire dans $H^0(Z_w, \xi)$, on a

$$\langle s_i, s_j \rangle_{L^2_w} = \int_{Z_w} \langle s_i, s_j \rangle_\xi(x)\, dv(x). \tag{7.3}$$

Pour $0<\varepsilon'<\varepsilon$, les fonctions $\langle s_i, s_j \rangle (x)$ sont uniformément bornés sur $\pi^{-1}(D_{\varepsilon'})$. De (7.2), on tire que si $V_w$ est le volume de la fibre $Z_w$, il existe $C>0$ tel que si $w \in D_{\varepsilon'} \setminus \{0\}$, on a

$$V_w \leq C \log\left(\frac{1}{|w|}\right).$$

De (7.3), on tire qu'en changeant au besoin la constante $C$, on a

$$|\langle s_i, s_j \rangle_{L^2_w}| \leq C \log\left(\frac{1}{|w|}\right). \tag{7.4}$$

Or $\|\sigma\|^2_{L^2_w}$ est l'inverse du déterminant de la matrice $\langle s_i, s_j \rangle_{1 \leq i,j \leq l}$. De (7.2), (7.4), on tire qu'il existe une constante $k$ telle que

$$\|\sigma\|^2_{L^2_w} \geq k\left(C \log\left(\frac{1}{|w|}\right)\right)^{-l}. \tag{7.5}$$

Soit $U$ un voisinage ouvert de $\Sigma$ dans $X$. Soit $\lambda \in C^l$. On pose

$$s = \sum_1^l \lambda^i s_i.$$

Pour $w \in D_\varepsilon \setminus \{0\}$, on a

$$\|s\|^2_{L^2_w} = \int_{Z_w} \|s\|^2_\xi\, dv(x) \geq \int_{Z_w - U} \|s\|^2_\xi\, dv(x).$$

Quand $w \in D_\varepsilon \setminus \{0\} \to 0$, on a

$$\int_{Z_w - U} \|s\|^2_\xi\, dv(x) \to \|s\|^2_\xi\, dv(x), \tag{7.6}$$

et la convergence dans (7.6) est uniforme quand $\lambda$ varie dans la boule unité de $C^l$.

Si $\lambda \neq 0$, $s|_{Z_0}$ est une section holomorphe non identiquement nulle de $\xi$ sur $Z_0$. Ses zéros étant isolés, on en déduit que

$$\int_{Z_0 \cap U} |s|^2\, dv(x) \neq 0. \tag{7.7}$$

De (7.5)–(7.7), on tire qu'il existe une constante $c>0$ telle que, si $w\in D_{\varepsilon'}\setminus\{0\}$, alors

$$\left\|\sum_1^l \lambda^i s_i\right\|^2_{L^2_w} \geq c|\lambda|^2. \tag{7.8}$$

De (7.8), on tire que

$$\|\sigma\|^2_{L^2_w} \leq c^{-l}. \tag{7.9}$$

(7.1) résulte de (7.5) et (7.9). □

*Remarque* 7.2. La proposition 7.1 affirme que la métrique $L^2$ sur $\lambda(\xi)$ est à singularités logarithmiques le long du diviseur $\Delta$, lorsque $R^1\pi_*\xi=0$. La preuve est une variante d'un calcul de Faltings ([F, p. 355–356)] qui montre que la métrique utilisée pour définir la hauteur modulaire est à singularités logarithmiques.

## 8. Minoration de la plus petite valeur propre du Laplacien et fibrés positifs

Pour $0<\varepsilon<1$, on pose $D_\varepsilon=\{w\in C;\ |w|<\varepsilon\}$.

Soit $\pi: X\to D_\varepsilon$ une f.s.o. de fibre $Z_w=\pi^{-1}\{w\}$ dont $Z_0=\pi^{-1}\{0\}$ est la seule fibre singulière. Soit de plus $\xi$ un fibré holomorphe sur $X$. On suppose enfin que $\xi$ et $\omega_{X/D_\varepsilon}$ sont munis de métriques hermitiennes $C^\infty$, $\|\ \|_\xi$ et $\|\ \|_{\omega_{X/D_\varepsilon}}$. Soit $\|\ \|_{TZ}$ la métrique induite sur $TZ|_{X-\Sigma}$ par $\|\ \|_{\omega^{-1}_{X/D_\varepsilon}}$.

On utilise maintenant toutes les notations de la section 4, avec $S=D_\varepsilon$.

*Définition* 8.1. Nous disons que le fibré hermitien $(\xi, \|\ \|_\xi)$ vérifie l'hypothèse (A) sur $D_\varepsilon$ si

(a) $\forall w\in D_\varepsilon$, $H^1(Z_w, \xi)=\{0\}$.

(b) Il existe une constante $C>0$ telle que pour tout $w\in D_\varepsilon\setminus\{0\}$, la plus petite valeur propre $\mu_w$ de l'opérateur $\bar\partial_{\xi,w}\bar\partial^*_{\xi,w}$ sur $C^\infty(Z_w, \xi\otimes\bar\omega_{Z_w})$ est telle que

$$\mu_w \geq C\left(\log\left(\frac{1}{|w|}\right)\right)^{-2}. \tag{8.1}$$

PROPOSITION 8.1. *Soit* $(\xi_1, \|\ \|_{\xi_1})$ *et* $(\xi_2, \|\ \|_{\xi_2})$ *deux fibrés holomorphes hermitiens sur* $X$ *et* $v$ *un morphisme surjectif de fibrés holomorphes* $\xi_1\to\xi_2$. *Alors si* $(\xi_1, \|\ \|_{\xi_1})$ *vérifie l'hypothèse* (A) *sur* $D_\varepsilon$, *pour tout* $\varepsilon'$ *tel que* $0<\varepsilon'<\varepsilon$, $(\xi_2, \|\ \|_{\xi_2})$ *vérifie l'hypothèse* (A) *sur* $D_{\varepsilon'}$.

*Si le fibré* $(\xi, \| \|_\xi)$ *vérifie l'hypothèse* (A) *sur* $D_\varepsilon$ *quand* $\omega_{X/D_\varepsilon}$ *est muni de la métrique* $\| \|_{\omega_{X/D_\varepsilon}}$, *si* $\| \|'_\xi$, $\| \|'_{\omega_{X/D_\varepsilon}}$ *sont des métriques hermitiennes sur* $\xi$, $\omega_{X/D_\varepsilon}$, *pour tout* $\varepsilon'$ *tel que* $0<\varepsilon'<\varepsilon$, *le fibré* $(\xi, \| \|'_\xi)$ *vérifie encore l'hypothèse* (A) *sur* $D_{\varepsilon'}$ *quand* $\omega_{X/D_\varepsilon}$ *est muni de la métrique* $\| \|'_{\omega_{X/D_\varepsilon}}$.

*Démonstration*. On a la suite exacte

$$H^1(Z_w, \xi_1) \to H^1(Z_w, \xi_2) \to 0.$$

Puisque $H^1(Z_w, \xi_1)=0$, alors $H^1(Z_w, \xi_2)=0$.

Soit $v^*$ l'adjoint de $v$. Pour $w \in D_\varepsilon \setminus \{0\}$, on désigne par $\bar\partial_{1,w}$, $\bar\partial^*_{1,w}$ et $\bar\partial_{2,w}$, $\bar\partial^*_{2,w}$ les opérateurs $\bar\partial_{\xi,w}$ et $\bar\partial^*_{\xi,w}$ de la section 2(b) associés respectivement à $(\xi_1, \| \|_{\xi_1})$ et $(\xi_2, \| \|_{\xi_2})$. On omettra souvent l'indice $w$ dans ce qui suit.

Soit $w \in D_\varepsilon \setminus \{0\}$. Soit $\theta \in C^\infty(Z_w, \xi_2 \otimes \bar\omega_{Z_w})$. On pose

$$\theta' = v\bar\partial_1^*(\bar\partial_1 \bar\partial_1^*)^{-1} v^*(vv^*)^{-1}\theta \in C^\infty(Z_w, \xi_2). \tag{8.2}$$

Comme $v$ est holomorphe, on a

$$\bar\partial_2 v = v\bar\partial_1. \tag{8.3}$$

De (8.2), (8.3), on tire que

$$\bar\partial_2 \theta' = \theta. \tag{8.4}$$

La décomposition de Hodge de $\theta'$ s'écrit

$$\theta' = \bar\partial_2^*\alpha + \beta; \quad \alpha \in C^\infty(Z_w, \xi_2 \otimes \bar\omega_{Z_w}); \quad \beta \in C^\infty(Z_w, \xi_2); \quad \bar\partial_2\beta = 0. \tag{8.5}$$

De (8.5), on tire que $\bar\partial_2\theta' = \bar\partial_2\bar\partial_2^*\alpha$, et donc par (8.4), on voit que

$$\bar\partial_2\bar\partial_2^*\alpha = \theta. \tag{8.6}$$

De (8.6), on tire que l'opérateur $\bar\partial_2\bar\partial_2^*$ est inversible – ce qui était déjà connu puisque $H^1(Z_w, \xi_2)=0$ – et que

$$\alpha = (\bar\partial_2\bar\partial_2^*)^{-1}\theta. \tag{8.7}$$

De (8.5), on tire que

$$\|\bar\partial_2^*\alpha\|^2 \leq \|\theta'\|^2. \tag{8.8}$$

Par (8.7), (8.8), on voit que

$$\left\langle (\bar\partial_2 \bar\partial_2^*)^{-1}\theta, \theta \right\rangle \leq \|\theta'\|^2. \tag{8.9}$$

Pour $0<\varepsilon'<\varepsilon$, on pose

$$m = \sup_{x \in \pi^{-1}(D_{\varepsilon'})} |v^* v|(x) \quad \text{et} \quad M = \sup_{x \in \pi^{-1}(D_{\varepsilon'})} |(vv^*)^{-1}(x)|. \tag{8.10}$$

De (8.1), (8.2), il résulte que

$$\begin{aligned} \|\theta'\|^2 &\leq m \left\langle (\bar\partial_1 \bar\partial_1^*)^{-1} v^*(vv^*)^{-1}\theta, v^*(vv^*)^{-1}\theta \right\rangle \\ &\leq \frac{mM}{C} \left( \log\left( \frac{1}{|w|} \right) \right)^2 \|\theta\|^2. \end{aligned} \tag{8.11}$$

De (8.9), (8.11), on tire que

$$\left\langle (\bar\partial_2 \bar\partial_2^*)^{-1}\theta, \theta \right\rangle \leq \frac{mM}{C} \left( \log\left( \frac{1}{|w|} \right) \right)^2 \|\theta\|^2. \tag{8.12}$$

Donc le fibré $(\xi_2, \| \ \|_{\xi_2})$ vérifie bien l'hypothèse (A) sur $D_{\varepsilon'}$.

En particulier si $(\xi, \| \ \|_\xi)$ vérifie l'hypothèse (A), et si $\| \ \|'_\xi$ est une autre métrique hermitienne sur $\xi$, alors $(\xi, \| \ \|'_\xi)$ vérifie encore l'hypothèse (A).

Supposons maintenant que $(\xi, \| \ \|_\xi)$ vérifie l'hypothèse (A) quand $\omega_{X/D_\varepsilon}$ est muni de la métrique $\| \ \|_{\omega_{X/D_\varepsilon}}$. Soit $\| \ \|'_{\omega_{X/D_\varepsilon}}$ une autre métrique hermitienne sur $\omega_{X/D_\varepsilon}$. Pour $0<\varepsilon'<\varepsilon$, il existe $c'$, $C'$ tel que $0<c'<C'$ pour lesquels

$$c' \| \ \|'_{\omega_{X/D_\varepsilon}} \leq \| \ \|_{\omega_{X/D_\varepsilon}} \leq C' \| \ \|'_{\omega_{X/D_\varepsilon}} \quad \text{sur} \quad \pi^{-1}(D_{\varepsilon'}). \tag{8.13}$$

De (8.13), on tire que si $\| \ \|_{TZ}$ et $\| \ \|'_{TZ}$ sont les métriques induites par $\| \ \|_{\omega_{X/D_\varepsilon}}$ et $\| \ \|'_{\omega_{X/D_\varepsilon}}$ sur $TZ|_{X-\Sigma}$, alors

$$C'^{-1} \| \ \|'_{TZ} \leq \| \ \|_{TZ} \leq c'^{-1} \| \ \|'_{TZ} \quad \text{sur} \quad \pi^{-1}(D_{\varepsilon'}) - \Sigma. \tag{8.14}$$

Soit $\langle \ , \ \rangle$ et $\langle \ , \ \rangle'$ les produits scalaires sur $C^\infty(Z_w, \xi)$ ou sur $C^\infty(Z_w, \xi \otimes \bar\omega_{Z_w})$ relatifs aux métriques $(\| \ \|_{TZ}, \| \ \|_\xi)$ et $(\| \ \|'_{TZ}, \| \ \|_\xi)$. Notons que si $w \in D_{\varepsilon'} \setminus \{0\}$, $\theta \in C^\infty(Z, \xi \otimes \bar\omega_Z)$

$$\langle \theta, \theta \rangle' = \langle \theta, \theta \rangle. \tag{8.15}$$

Soient $\bar\partial^*_{\xi,w}$, $\bar\partial'^*_{\xi,w}$ les adjoints de $\bar\partial_{\xi,w}$ relativement aux produits scalaires $\langle \ , \ \rangle$ et $\langle \ , \ \rangle'$, et soit $\nabla^{\xi'}$ la partie holomorphe de $\nabla^\xi$. Si $\theta \in C^\infty(Z, \xi \otimes \bar\omega_Z)$, on a

$$
\begin{aligned}
\left\langle (\bar\partial_{\xi,w}\bar\partial^*_{\xi,w})\,\theta,\theta\right\rangle &= \left\langle \bar\partial^*_{\xi,w}\theta, \bar\partial^*_{\xi,w}\theta\right\rangle = -i\int_{Z_w}\left\langle \nabla^{\xi'}\theta, \bar\partial^*_{\xi,w}\theta\right\rangle_{\|\,\|_\xi} \\
&\leqslant -iC'^2\int_{Z_w}\left\langle \nabla^{\xi'}\theta, \bar\partial'^*_{\xi,w}\theta\right\rangle_{\|\,\|_\xi} \qquad (8.16)\\
&= C'^2\left\langle \bar\partial_{\xi,w}\bar\partial'^*_{\xi,w}\theta,\theta\right\rangle'.
\end{aligned}
$$

De (8.16), on tire la fin de la proposition. □

Compte tenu de la proposition 8.1, on dira désormais qu'un fibré $\xi$ vérifie l'hypothèse (A), sans préciser un choix de métriques sur $\omega_{X/D_\varepsilon}$ ou sur $\xi$.

Rappelons qu'un fibré en droite holomorphe $\mathscr{L}$ sur $X$ est dit positif s'il existe une métrique $\|\,\|_{\mathscr{L}}$ sur $\mathscr{L}$ telle que si $r$ est la courbure de la connexion holomorphe hermitienne sur $(\mathscr{L},\|\,\|_{\mathscr{L}})$, la forme $c_1(\mathscr{L},\|\,\|_{\mathscr{L}})$ est strictement positive, i.e. si $U\in T^{(1,0)}X$, $U\neq 0$, alors $-ic_1(\mathscr{L},\|\,\|_{\mathscr{L}})(U,\bar U)>0$.

PROPOSITION 8.2. *Soit $\xi$ un fibré vectoriel holomorphe sur $X$ et soit $\mathscr{L}$ un fibré positif sur $X$. Alors pour tout $\varepsilon'$ tel que $0<\varepsilon'<\varepsilon$, il existe un entier $p\in\mathbf{N}$ tel que si $q$ est un entier $\geqslant p$, le fibré $\xi\otimes\mathscr{L}^q$ vérifie l'hypothèse* (A) *sur $D_{\varepsilon'}$.*

*Démonstration.* Montrons tout d'abord que, pour $q$ assez grand, $H^1(Z_0,\xi\otimes\mathscr{L}^q)=0$. Par dualité de Serre, on sait que $[H^1(Z_0,\xi\otimes\mathscr{L}^q)]^*\simeq H^0(Z_0,\omega_{X/S}\otimes\xi^*\otimes\mathscr{L}^{-q})$.

Soit $\nu\colon\hat Z_0\to Z_0$ la normalisation de $Z_0$. Au moyen de l'image inverse par $\nu$, $H^0(Z_0,\omega_{X/S}\otimes\xi^*\otimes\mathscr{L}^{-q})$ s'injecte dans $H^0(\hat Z_0,\nu^*(\omega_{X/S}\otimes\xi^*\otimes\mathscr{L}^{-q}))$, qui est nul pour $q$ assez grand par le théorème d'annulation de Kodaira appliqué à la courbe lisse $\hat Z_0$.

Par la proposition 8.1, on peut fixer arbitrairement des métriques lisses sur $\omega_{X/D_\varepsilon}$ et $\xi$.

Soit donc $\|\,\|_{\omega_{X/D_\varepsilon}}$ une métrique lisse sur $\omega_{X/D_\varepsilon}$ telle que pour tout $i$ $(1\leqslant i\leqslant n)$, sur un voisinage $U_i$ de $P_i$, dans les coordonnées $(z_0,z_1)$ décrites à la Section 6(a), on ait

$$
\left\|\frac{dz_0}{z_0}\right\|^2_{\omega_{X/D_\varepsilon}} = \left\|\frac{dz_1}{z_1}\right\|^2_{\omega_{X/D_\varepsilon}} = 2. \tag{8.17}
$$

Soit $\|\,\|_\xi$ une métrique $C^\infty$ sur $\xi$, telle que la courbure de la connexion holomorphe hermitienne associée s'annulle sur les $U_i$.

Soit $\|\,\|_{\mathscr{L}}$ une métrique hermitienne sur $\mathscr{L}$ telle que $c_1(\mathscr{L},\|\,\|_{\mathscr{L}})$ est une forme strictement positive. On va modifier la métrique $\|\,\|_{\mathscr{L}}$ sur les ouverts $U_i$ de manière à obtenir l'estimation souhaitée sur la première valeur propre de $\bar\partial\bar\partial^*$.

Pour $w \in D_{\varepsilon'} \setminus \{0\}$, on pose

$$u = \log(z_0) - \frac{1}{2}\log(w). \tag{8.18}$$

On paramètre alors $Z_w \cap U_i$ à l'aide de la coordonnée $u$. Par hypothèse, on a

$$\|du\|^2_{TZ^*} = 2. \tag{8.19}$$

On pose

$$k_w(u) = \exp\left(-\frac{|\mathrm{Re}\, u|^2}{(\log(1/|w|))^2}\right). \tag{8.20}$$

Notons que

$$\bar{\partial}_u \partial_u \log(k_w(u)) = \frac{1}{2}\frac{du\, d\bar{u}}{(\log(1/|w|))^2}. \tag{8.21}$$

De plus,

$$k_w\left(\frac{\log(1/w)}{2}\right) = k_w\left(\frac{-\log(1/w)}{2}\right) = \exp\left(-\frac{1}{4}\right). \tag{8.22}$$

(8.22) est exactement la valeur prise par la fonction $k_w$ sur le bord du cylindre $Z_w \cap U_i$.

Dans la suite, on considère la fonction $k_w$ comme une fonction définie sur $\bigcup_1^n (Z_w \cap U_i)$.

Pour tout $w \in D_{\varepsilon'} \setminus \{0\}$, on peut prolonger la fonction $k_w$ en une fonction définie sur toute la fibre $Z_w$, qui a les propriétés suivantes:

– Il existe une constante $c$ $(0<c<1)$ telle que pour tout $w \in D_{\varepsilon'} \setminus \{0\}$, $x \in Z_w$

$$c \leqslant k_w(x) \leqslant 1. \tag{8.23}$$

– Les dérivées de la fonction $k_w$ sur $Z_w - \bigcup_{i=1}^n U_i$ sont uniformément bornées.

Pour $w \in D_\varepsilon \setminus \{0\}$, on munit le fibré $\xi \otimes \mathscr{L}^q|_{Z_w}$ de la métrique $k_w^{1/2} \| \ \|_\xi \otimes \| \ \|_{\mathscr{L}}^{\otimes q}$.

Soit $j$ le plongement $Z_w \to X$. Soient $L^\xi, r$ les courbures des connexions holomorphes hermitiennes sur les fibrés $(\xi, \| \ \|_\xi)$ et $(\mathscr{L}, \| \ \|_{\mathscr{L}})$. Soient $I_{\mathscr{L}^q}$ et $I_{\xi \otimes \mathscr{L}^q}$ les applications identité sur les fibrés $\mathscr{L}^q$ et $\xi \otimes \mathscr{L}^q$. La courbure $N^q$ de la connexion holomorphe hermitienne sur le fibré holomorphe hermitien sur $Z_w$

$$(\xi \otimes \mathscr{L}^q|_{Z_w}, k_w^{1/2} \| \ \|_\xi \otimes \| \ \|_{\mathscr{L}}^{\otimes q})$$

est donnée par

$$N^q = \bar\partial_w \partial_w \log(k_w) I_{\xi\otimes\mathscr{L}^q} + j^*(L^\xi \otimes I_{\mathscr{L}^q} + qrI_{\xi\otimes\mathscr{L}^q}). \tag{8.24}$$

Soit $\langle\ ,\ \rangle$ le produit scalaire sur $T^{*(0,1)}Z\otimes\xi\otimes\mathscr{L}^q$ associé aux métriques $\|\ \|_{TZ}$ et $k_w^{1/2}\|\ \|_\xi\otimes\|\ \|_{\mathscr{L}}^{\otimes q}$. Soit $R^{TZ}$ la courbure de la connexion holomorphe hermitienne sur le fibré $(TZ, \|\ \|_{TZ})$.

Remarquons que sur $X-\Sigma$, la métrique $\|\ \|_{TZ}$ est une métrique lisse ordinaire. Comme $\bar\partial^{Z_w}\partial^{Z_w}\log k_w$ est uniformément bornée, on en déduit facilement qu'il existe une constante $C>0$ telle que, pour $q$ assez grand, pour tout $w\in D_\varepsilon\setminus\{0\}$, si $x\in Z_w\setminus\bigcup_1^n U_i$, $\omega\in(T^{*(0,1)}Z_w\otimes\xi\otimes\mathscr{L}^q)_x$ si $U\in(TZ, \|\ \|_{TZ})_x$ est de norme 1, alors

$$\Big\langle \big(N^q + R^{TZ} I_{\xi\otimes\mathscr{L}^q}\big)(U,\bar U)\,\omega,\omega \Big\rangle_x \geq C\langle\omega,\omega\rangle_x. \tag{8.25}$$

Les métriques $\|\ \|_{\omega_{X/D_\varepsilon}}$ et $\|\ \|_\xi$ sont plates sur les ouverts $U_i$, i.e. $R^{TZ}=0$, $L^\xi=0$ sur $U_i$.

Soit $x\in Z_w\cap U_i$. Alors, pour tout $q\in N$, si $\omega\in(T^{*(0,1)}Z_w\otimes\xi\otimes\mathscr{L}^q)_x$, si $U\in(TZ, \|\ \|_{TZ})_x$ est de norme 1, comme $r(U,\bar U)>0$, on tire de (8.21) que

$$\Big\langle \big(N^q + R^{TZ} I_{\xi\otimes\mathscr{L}^q}\big)(U,\bar U)\,\omega,\omega \Big\rangle_x \geq \left(\log\left(\frac{1}{|w|}\right)\right)^{-2}\langle\omega,\omega\rangle_x. \tag{8.26}$$

Soit $\Delta^H$ le laplacien horizontal agissant sur $C^\infty(Z_w, \xi\otimes\mathscr{L}^q\otimes\bar\omega_{Z_w})$ associé aux métriques considérées sur $TZ$ et sur $\xi\otimes\mathscr{L}^q$. De [B, Proposition 1.2], on tire que si $X\in TZ$ et de norme 1 pour la métrique $\|\ \|_{TZ}$, on a

$$2\bar\partial_{\xi,w}\bar\partial^*_{\xi,w} = -\Delta^H + (N^q + R^{TZ} I_{\xi\otimes\mathscr{L}^q})(X,\bar X). \tag{8.27}$$

Puisque l'opérateur $-\Delta^H$ est positif, on tire de (8.25)–(8.27) qu'il existe $C>0$ tel que pour $q$ assez grand, si $w\in D_\varepsilon\setminus\{0\}$, si $\omega\in C^\infty(Z_w, \xi\otimes\mathscr{L}^q\otimes\bar\omega_{Z_w})$, alors

$$\langle\bar\partial_{\xi,w}\bar\partial^*_{\xi,w}\,\omega,\omega\rangle \geq C\left(\log\left(\frac{1}{|w|}\right)\right)^{-2}. \tag{8.28}$$

Rappelons qu'il existe $c$ tel que $0<c\leq k_w\leq 1$. Il résulte de la Proposition 8.1 (ou plutôt de sa démonstration) que si on munit $\omega_{X/D_\varepsilon}$, $\xi\otimes\mathscr{L}^q$ des métriques $\|\ \|_{\omega_{X/D_\varepsilon}}$ et $\|\ \|_\xi\otimes\|\ \|_{\mathscr{L}}^{\otimes q}$, pour $q$ assez grand, si les opérateurs $\bar\partial^*_{\xi,w}$ et les produits scalaires $\langle\ ,\ \rangle$ sont calculés relativement à ces nouvelles métriques, l'inégalité (8.28) reste vraie (avec une constante $C>0$ différente).

Compte tenu de ce qui précède, il est maintenant clair que pour $q$ assez grand, si $w\in D_{\varepsilon'}$, $H^1(Z_w, \xi\otimes\mathscr{L}^q)=0$.

La proposition est démontrée. □

*Remarque* 8.3. Par comparaison avec le calcul de la plus petite valeur propre non nulle du Laplacien de Laplace–Beltrami sur un tore, on voit que l'estimation $\mu_w \geqslant C(\log(1/|w|))^2$ est optimale. Sans introduire la fonction $k_w$, et en utilisant simplement la positivité stricte de $r$, on aurait obtenu l'inégalité $\mu_w \geqslant C|w|$. Cette dernière inégalité est en fait suffisante pour poursuivre la démonstration du théorème 2.1.

PROPOSITION 8.4. *Soit $\xi$ un fibré holomorphe sur $X$. Pour $\varepsilon'$ tel que $0<\varepsilon'<\varepsilon$ suffisamment petit, il existe des fibrés holomorphes $\xi'$ et $\xi''$ sur $X_{\varepsilon'}=\pi^{-1}(D_{\varepsilon'})$ et des morphismes de fibrés holomorphes $v: \xi \to \xi'$ et $v': \xi' \to \xi''$ tels que*

(a) *la suite*

$$0 \to \xi \underset{v}{\to} \xi' \underset{v'}{\to} \xi'' \to 0$$

*est une suite exacte de fibrés holomorphes sur $X_{\varepsilon'}$.*

(b) *Les fibrés $\xi'$ et $\xi''$ vérifient l'hypothèse* (A).

*Démonstration.* Pour $\varepsilon'>0$ assez petit, il existe un entier $N$ et un plongement

$$i: X^{\varepsilon'} \to D_\varepsilon \times \mathbf{P}^N\mathbf{C}$$

tel que le diagramme

$$\begin{tikzcd} X_{\varepsilon'} \arrow[rr, "i"] \arrow[dr, "\pi"'] & & D_\varepsilon \times \mathbf{P}^N\mathbf{C} \arrow[dl, "\mathrm{pr}_1"] \\ & D_\varepsilon & \end{tikzcd}$$

commute. Soit $\mathcal{O}(1)$ le fibré canonique sur $\mathbf{P}^N\mathbf{C}$. On désigne par $\mathcal{L}$ le fibré sur $X_{\varepsilon'}$

$$\mathcal{L} = (\mathrm{pr}_2 \circ i)^* \mathcal{O}(1).$$

$\mathcal{O}(1)$ est un fibré positif sur $\mathbf{P}^N\mathbf{C}$. De plus, le fibré en droite trivial sur $D_\varepsilon$ possède une métrique de $c_1>0$, par exemple $\|1\|^2=1/(1+|z|^2)$. Donc $\mathrm{pr}_2^*\mathcal{O}(1)$ est un fibré positif sur $D_\varepsilon \times \mathbf{P}^N\mathbf{C}$, et $\mathcal{L}$ est aussi un fibré positif. De la proposition 8.2, on tire que pour $q$ assez grand, le fibré $\xi \otimes \mathcal{L}^q$ vérifie l'hypothèse (A) sur $D_{\varepsilon'/2}$.

Par ailleurs, le fibré en droite $\mathcal{L}^q$ est engendré en tout point par ses sections globales $s_1, \dots, s_p$ dans $H_0(X, \mathcal{L}^q)$. Posons

$$\begin{aligned} v: \xi &\to \xi \otimes \mathcal{L}^q \otimes \mathbf{C}^p \\ f &\to (f \otimes s_1, \dots, f \otimes s_p). \end{aligned}$$

$v$ est un morphisme injectif de fibrés vectoriels. Si $\xi'$ est le fibré conoyau de $v$, on a la suite exacte

$$0 \to \xi \to (\xi \otimes \mathscr{L}^q) \otimes \mathbf{C}^p \to \xi' \to 0.$$

Par la proposition 8.1, on tire que $\xi'$ vérifie l'hypothèse (A) sur $D_{\varepsilon'/3}$. La proposition est démontrée. □

## 9. Equation de la chaleur, torsion analytique et dégénérescence des courbes

Dans cette section, on établit des inégalités fondamentales sur la torsion analytique de surfaces de Riemann qui dégénèrent, quand le fibré $\xi$ vérifie l'hypothèse (A) de la section 8.

En (a), on établit des résultats de convergence pour le noyau de la chaleur $\exp(-t\bar{\partial}_{\xi,w}\bar{\partial}^*_{\xi,w})$ sur des courbes qui dégénèrent.

En (b), on applique ces résultats à l'estimation de la torsion analytique.

### 9(a) Inégalités sur la trace du noyau de la chaleur

Dans cette section, on fixe une f.s.o. $\pi: X \to D_\varepsilon$ de fibre $Z_w = \pi^{-1}\{w\}$, dont $Z_0 = \pi^{-1}\{0\}$ est la seule fibre singulière. L'ensemble $\Sigma$ est l'ensemble fini $P_1, \dots, P_n$ de points doubles de $Z_0$. On choisit des voisinages ouverts $U_i$ $(i = 1, \dots, n)$ des $P_i$ qui sont disjoints, sur lesquels sont définies des coordonnées locales $(z_0, z_1)$ telles que

$$z_0(P_i) = z_1(P_i) = 0$$
$$\pi(z_0, z_1) = z_0 z_1.$$

Sur $U_i$, on dispose d'une section $\alpha$ partout non nulle de $\omega_{X/D_\varepsilon}$ définie par

$$\alpha = \begin{cases} \dfrac{dz_0}{z_0} & \text{si} \quad z_0 \neq 0 \\ -\dfrac{dz_1}{z_1} & \text{si} \quad z_1 \neq 0. \end{cases} \tag{9.1}$$

On munit $\omega_{X/D_\varepsilon}$ d'une métrique hermitienne $C^\infty$ $\| \ \|_{\omega_{X/D_\varepsilon}}$ telle que sur $U_i$, on ait

$$\|\alpha\|^2_{\omega_{X/D_\varepsilon}} = 2. \tag{9.2}$$

La métrique $\| \ \|_{\omega_{X/D_\varepsilon}}$ induit une métrique $\| \ \|_{TZ}$ sur $TZ|_{X-\Sigma} \simeq \omega^{-1}_{X/D_\varepsilon}|_{X-\Sigma}$.

Pour $w \in D_\varepsilon \setminus \{0\}$, posons

$$u = \log z_0 - \frac{1}{2} \log |w| \tag{9.3}$$
$$u = a + ib; \quad a, b \in \mathbf{R}; \ 0 \leqslant b \leqslant 2\pi.$$

$u$ est une coordonnée locale sur $U_i$. De (9.2), on tire que

$$\|du\|^2_{T^*Z} = 2. \tag{9.4}$$

Donc $Z_w \cap U_i$ est un cylindre de longueur $l_i \sim \log(1/|w|)$ et de circonférence $2\pi$.

Soit $R^{TZ}$ la courbure de la connexion holomorphe hermitienne sur $(TZ, \| \|_{TZ})$. Alors, $R^{TZ} = 0$ sur $U_i \setminus \{P_i\}, 1 \leqslant i \leqslant n$.

Soit $\| \|_\xi$ une métrique hermitienne sur le fibré $\xi$. On suppose que si $L^\xi$ est la courbure de la connexion holomorphe hermitienne sur $(\xi, \| \|_\xi)$, alors $L^\xi = 0$ sur $U_i$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$.

Pour $w \in D_\varepsilon \setminus \{0\}, \bar\partial_{\xi, w}, \bar\partial^*_{\xi, w}$ désignent les opérateurs considérés à la Section 2(b) associés aux métriques $\| \|_{TZ}$ et $\| \|_\xi$. Soit $dv(x)$ l'élément de volume de la fibre $Z_w$.

Pour $w \in D_\varepsilon \setminus \{0\}, t > 0, P^w_t(x, x')$ $(x, x' \in Z_w)$ désigne le noyau $C^\infty$ associé à l'opérateur $\exp(-t\bar\partial_{\xi, w} \bar\partial^*_{\xi, w})$. Si $h \in C^\infty(Z_w; \xi \otimes \bar\omega_{Z_w})$, $x \in Z_w$, on a

$$\exp(-t\bar\partial_{\xi, w} \bar\partial^*_{\xi, w}) h(x) = \int_{Z_w} P^w_t(x, x') h(x') \, dv(x'). \tag{9.5}$$

Soit $x \in Z_w$ et $U \in T_x Z_w$ tel que $\|U\|_{TZ} = 1$. De [MKS] et de [BGS2, Théorème 2.16], on tire en particulier que quand $t \downarrow 0$, on a le développement asymptotique

$$\operatorname{Tr}[P^w_t(x, x'')] = \frac{\operatorname{rg} \xi}{2\pi t} - \frac{1}{2\pi} \left[ \frac{1}{2} \operatorname{Tr} L_x + \frac{1}{3} \operatorname{rg} \xi R^{TZ}_x \right] (U, \bar U) + O(t, x). \tag{9.6}$$

Comme les $Z_w$ sont à géométrie bornée, on vérifie facilement qu'il existe $C$ tel que pour tout $w \in D_\varepsilon \setminus \{0\}, x \in Z_w, 0 < t \leqslant 1$

$$|O(t, x)| \leqslant Ct. \tag{9.7}$$

Pour $w \in D_\varepsilon \setminus \{0\}$, on pose

$$c_1(TZ) = \int_{Z_w} c_1(\omega^{-1}_{X/D_\varepsilon}, \| \|_{\omega^{-1}_{X/D_\varepsilon}}) \tag{9.8}$$
$$c_1(\xi) = \int_{Z_w} c_1(\xi, \| \|_\xi).$$

$c_1(TZ)$ et $c_1(\xi)$ sont des entiers, qui ne dépendent pas de $w \in D_\varepsilon \setminus \{0\}$.

*Définition* 9.1. $C_0$ désigne la constante

$$C_0 = \frac{1}{2} c_1(\xi) + \frac{1}{3} c_1(TZ) \operatorname{rg} \xi. \tag{9.9}$$

Pour $w \in D_\varepsilon \setminus \{0\}$, $V_w$ est le volume de la fibre $Z_w$.

Soit $\Delta_{S_1}$ le laplacien sur $S_1 = \mathbf{R}/2\pi\mathbf{Z}$ i.e., si $\theta \in [0, 2\pi[$, $\Delta_{S_1} = d^2/d\theta^2$.

On rappelle que $n = \operatorname{card} \Sigma$.

THÉORÈME 9.2. *On a l'identité*

$$\lim_{w \to 0} \frac{V_w}{n \log(1/|w|)} = 2\pi. \tag{9.10}$$

*Pour tous $\beta$, $T$ tels que* $0 < \beta < T$, *alors pour tout* $t \in [\beta, T]$

$$\lim_{w \to 0} \operatorname{Tr} \frac{[\exp(-t \bar{\partial}_{\xi, w} \bar{\partial}^*_{\xi, w})]}{\log(1/|w|)} = \frac{n \operatorname{rg} \xi}{\sqrt{2\pi t}} \operatorname{Tr}\left[\exp\left(\frac{t}{2} \Delta_{S_1}\right)\right]. \tag{9.11}$$

*et la convergence dans* (9.11) *est uniforme en* $t \in [\beta, T]$.

*Il existe* $C > 0$ *tel que pour tout* $w \in D_\varepsilon \setminus \{0\}$, *pour tout* $t \in ]0, 1]$

$$\frac{1}{n \log(1/|w|)} \left| \left[\operatorname{Tr}[\exp(-t \bar{\partial}_{\xi, w} \bar{\partial}^*_{\xi, w})] - \frac{\operatorname{rg} \xi \, V_w}{2\pi t} + C_0\right] \right| \leq Ct. \tag{9.12}$$

*Si le fibré $\xi$ vérifie l'hypothèse* (A) *de la section* 8, *alors il existe des constantes $C'$, $C''>0$ telles que pour tout* $w \in D_\varepsilon \setminus \{0\}$, $t \geq 1$

$$0 < \operatorname{Tr}[\exp(-t \bar{\partial}_{\xi, w} \bar{\partial}^*_{\xi, w})] \leq C' \log\left(\frac{1}{|w|}\right) \exp\left(-C''\left(\log\left(\frac{1}{|w|}\right)\right)^{-2} t\right). \tag{9.13}$$

*Démonstration*. (9.10) résulte de (9.4).

Quitte à multiplier les coordonnées $z_0$, $x_1$, $w$ par des constantes, on peut supposer que, pour $i = 1, \ldots, n$

$$U_i = \left\{(z_0, z_1) \in \mathbf{C}^2;\ |z_0| < 1,\ |z_1| < 1\right\}.$$

Naturellement, on remplace $\varepsilon$ par $\varepsilon'' > 1$ de telle sorte que $w$ varie dans le disque $D_{\varepsilon''}$, et que $\pi$ soit encore donnée sur $U_i$ par $\pi(z_0, z_1) = z_0 z_1$.

Pour $w \in D_{\varepsilon''} \setminus \{0\}$, $z_0 \in D_1$, on pose encore

$$u = \log z_0 - \frac{1}{2} \log(|w|).$$

Pour $i=1, \dots, n$, on pose

$$A_{i,w} = Z_w \cap U_i$$

$$B_w = Z_w - \bigcup_1^n U_i.$$

Dans les coordonnées $(z_0, z_1)$, $A_{i,w}$ est décrit par l'équation

$$z_1 = \frac{w}{z_0} \quad (|w| < |z_0| < 1).$$

$u$ est une coordonnée holomorphe sur $A_{i,w}$ telle que $\|du\|^2_{T^*Z}=2$. $A_{i,w}$ est donc un cylindre.

(a) *Une borne uniforme sur la trace de* $P_t^w(x,x)$. Fixons $\beta, T$ tels que $0<\beta<T<+\infty$. On va montrer que si $w \in D_1 \setminus \{0\}$, si $x \in Z_w$, si $t \in [\beta, T]$, alors $\mathrm{Tr}[P_t^w(x,x)]$ est uniformément borné. Soit en effet $\Delta^w$ le laplacien de Laplace–Beltrami sur la variété riemannienne $(Z_w, \| \|_{TZ})$, et soit $p_t^w(x,x')$ $(x,x' \in Z_w)$ le noyau de la chaleur associé à l'opérateur $\exp(t\Delta^w/2)$.

Quand $w \in D_1$, les variétés $Z_w$ ont une géométrie bornée, et en particulier leur rayon d'injectivité est borné inférieurement par une constante strictement positive. Il résulte alors des estimées de Cheeger–Gromov–Taylor [CGT, exemple 2.1] que, pour $t \in [\beta, T]$, la fonction $p_t^w(x,x')$ $(x,x' \in Z_w)$ est uniformément bornée.

En utilisant les techniques de [CGT], on peut montrer de la même manière que pour $t \in [\beta, T]$, $\mathrm{Tr}[P_t^w(x,x)]$ reste uniformément bornée. On peut en fait déduire ce résultat du résultat de [CGT] sur $p_t^w(x,x)$. En effet [B, Equation 1.34] nous permet de calculer $P_t^w(x,x)$ sous la forme

$$P_t^w(x,x) = p_t^w(x,x)\, E_{x,x}^{w,t}[U_t \tau_0^t], \tag{9.14}$$

où:

– $E_{x,x}^{w,t}$ est l'opérateur d'espérance pour le pont brownien $x_s^t$ $(0 \leq s \leq t)$ tel que $x_0^t = x_t^t = x$.

– Pour $0 \leq s \leq t$, $U_s \in \mathrm{End}_x(T^{*(0,1)}Z \otimes \xi)$ est solution d'une équation différentielle ordinaire calculée de long de $x_s^t$ $(0 \leq s \leq t)$.

– $\tau_0^t \in \mathrm{End}_x(T^{*(0,1)}Z \otimes \xi)$ est un opérateur unitaire de transport parallèle de $x_t^t = x$ en $x_0^t = x$ le long de $x_s^t$ $(0 \leq s \leq t)$.

Or, si $V \in TZ$, $\|V\|=1$, il est clair que les tenseurs $L^{\xi}(V, \bar V)$, $R^{TZ}(V, \bar V)$ sont uniformément bornés. Il résulte alors de l'équation dans [B, preuve du théorème 1.5] donnant $U_s$ que, pour $t \leq T$, $|U_t|$ est uniformément bornée.

On déduit donc de (9.14) que pour $\beta \leq t \leq T$, $\mathrm{Tr}[P_t^w(x,x)]$ reste uniformément borné. Notons incidemment qu'on pourrait remplacer l'argument précédent par le principe de domination de Kato des semigroupes associés à des opérateurs auto-adjoints.

(b) *Preuve de* (9.11). Posons

$$d_w = \left(\log\left(\frac{1}{|w|}\right)\right)^{3/4}. \tag{9.15}$$

Soit $A'_{i,w}$ le cylindre des points de $A_{i,w}$ dont la distance au bord $\partial A_{i,w}$ de $A_{i,w}$ est supérieure ou égale à $d_w$. On pose

$$B_w = Z_w - \bigcup_1^n A'_{i,w}.$$

On a

$$\begin{aligned} \mathrm{Tr}[\exp(-t\bar{\partial}_{\xi,w}\bar{\partial}^*_{\xi,w})] &= \int_{Z_w} \mathrm{Tr}[P_t^w(x,x)]\,dv(x) \\ &= \sum_{i=1}^n \int_{A'_{i,w}} \mathrm{Tr}[P_t^w(x,x)]\,dv(x) + \int_{B_w} \mathrm{Tr}[P_t^w(x,x)]\,dv(x). \end{aligned} \tag{9.16}$$

Comme pour $t\in[\beta, T]$, $\mathrm{Tr}[P_t^w(x,x)]$ reste uniformément borné, on voit que

$$\left| \int_{B_w} \mathrm{Tr}[P_t^w(x,x)]\,dv(x) \right| \leq C(1+d_w). \tag{9.17}$$

Soit $A$ un cylindre de circonférence $2\pi$ et doublement infini. On considère $A'_{i,w}$ comme un sous-cyclindre de $A$.

Rappelons que $L^\xi=0$ sur $U_i$. On peut donc étendre le fibré hermitien trivial $(\xi, \|\ \|_\xi)$ en un fibré hermitien trivial sur $A$ tout entier, qu'on note encore $(\xi, \|\ \|_\xi)$. Si $k=\dim \xi$, si on munit $C^k$ de sa métrique hermitienne canonique, on peut identifier $(\xi, \|\ \|_\xi)|_A$ à $\mathbf{C}^k$.

Si $u$ est la coordonnée holomorphe sur le cylindre $A$ qui prolonge de manière évidente la coordonnée $u$ sur $A'_{i,w}$, on a encore $\|du\|^2_{T^*A}=2$.

On fait maintenant agir $\bar{\partial}_{\xi,w}, \bar{\partial}^*_{\xi,w}$ sur les sections $C^\infty$ de $\xi$ et $T^{*(0,1)}A\otimes\xi$ sur $A$. Notons que, puisque les fibrés hermitiens $T^{*(0,1)}A$ et $\xi|_A$ sont triviaux sur $A$, l'opérateur $2\bar{\partial}_{\xi,w}\bar{\partial}^*_{\xi,w}$ coïncide avec le laplacien $\Delta^A$ (où $\Delta^A$ agit maintenant sur des fonctions $C^\infty$ à valeurs dans $\mathbf{C}^k$).

Soit $P_t^A(x,x')$ $(x, x'\in A)$ le noyau de la chaleur associé à l'opérateur

$\exp(-t\bar\partial_{\xi,w}\bar\partial^*_{\xi,w})$ sur $A$. Alors, si $q_t(\theta,\theta')$ est le noyau de la chaleur sur $S^1=\mathbf{R}/2\pi\mathbf{Z}$ associé à l'opérateur $\exp(\frac{1}{2}t\Delta_{S_1})$, on a

$$P_t^A(\alpha+i\theta;\alpha'+i\theta')=\frac{1}{\sqrt{2\pi t}}\exp\left(\frac{-|\alpha-\alpha'|^2}{2t}\right)q_t(\theta,\theta')I_{T^{*(0,1)}A\otimes\xi}. \tag{9.18}$$

Pour $t>0$, soit $\tilde P_t^w(x,x')$ $(x,x'\in A_{i,w})$ le noyau de la chaleur associé à l'opérateur $\exp(-t\bar\partial_{\xi,w}\bar\partial^*_{\xi,w})$ sur $A_{i,w}$ avec des conditions de Dirichlet sur le bord $\partial A_{i,w}$.

Pour $0<s<t$, $x,x'\in A'_{i,w}$, on a

$$\begin{aligned}&\frac{\partial}{\partial s}\int_{A_{i,w}}P_s^w(x,y)\tilde P_{t-s}^w(y,x')\,dv(y)\\&=\frac{1}{2}\int_{A_{i,w}}\left\{\left(\Delta_y^A P_s^w(x,y)\right)\tilde P_{t-s}^w(y,x')-P_s^w(x,y)\left(\Delta_y^A\tilde P_{t-s}^w\right)(y,x')\right\}dv(y).\end{aligned} \tag{9.19}$$

Soit $\mathbf{n}$ le vecteur normal sortant de norme 1 sur $\partial A_{i,w}$ et soit $d\sigma(y)$ l'élément de longueur sur $\partial A_{i,w}$. Puisque, si $y\in\partial A_{i,w}$, $\tilde P_t^w(y,x')=0$, on tire de (9.19) que

$$\frac{\partial}{\partial s}\int_{A_{i,w}}P_s^w(x,y)\tilde P_{t-s}^w(y,x')\,dv(y)=-\frac{1}{2}\int_{\partial A_{i,w}}P_s^w(x,y)\frac{\partial}{\partial\mathbf{n}}\tilde P_{t-s}^w(y,x')\,d\sigma(y). \tag{9.20}$$

Par intégration de (9.20), on tire que

$$P_t^w(x,x')-\tilde P_t^w(x,x')=-\frac{1}{2}\int_0^t ds\int_{\partial A_{i,w}}P_s^w(x,y)\frac{\partial}{\partial\mathbf{n}}\tilde P_{t-s}^w(y,x')\,d\sigma(y). \tag{9.21}$$

De (9.21), on tire que pour $t\leq T$, $x\in A_{i,w}$

$$|P_t^w(x,x)-\tilde P_t^w(x,x)|\leq\sup_{\substack{y'\in\partial A_i^w\\0\leq a\leq T}}|P_a^w(x,y')|\frac{1}{2}\int_0^t ds\int\left|\frac{\partial}{\partial\mathbf{n}}\tilde P_{t-s}^w(y,x)\right|d\sigma(y). \tag{9.22}$$

Si $\tilde p_t^w(x,x')$ est le noyau de la chaleur scalaire sur $A_{i,w}$ associé à l'opérateur $\exp(t\Delta^A/2)$ avec condition de Dirichlet sur $\partial A_{i,w}$, pour $x,y\in A_{i,w}$ on a

$$\tilde P_t^w(y,x)=\tilde p_t^w(y,x)I_\xi. \tag{9.23}$$

Or $\tilde p_t^w\geq 0$. Comme, si $x\in A'_{i,w}$, $y\in\partial A_{i,w}$, on a $\tilde p_t^w(y,x)=0$, alors $\partial\tilde p_t^w(y,x)/\partial\mathbf{n}\leq 0$. De (9.22), (9.23), on tire que

$$|P_t^w(x,x)-\tilde P_t^w(x,x)|\leq\sup_{\substack{y'\in\partial A_{i,w}\\0\leq a\leq T}}|P_a^w(x,y')|\frac{1}{2}\int_0^t ds\int_{\partial A''_{i,w}}\left(-\frac{\partial\tilde p_s^w}{\partial\mathbf{n}}(y,x)\right)d\sigma(y). \tag{9.24}$$

Si $x\in A'_{i,w}$, $y\in\partial A_{i,w}$, $x$ et $y$ sont distants d'au moins $d_w$, qui, pour $w$ assez petit, est plus grand que 1. Commes les variétés $Z_w$ sont à géométrie bornée, il résulte de Cheeger–Gromov–Taylor ([CGT, exemple 2.1]) que si $s\in[0,T]$, $\tilde{p}^w_s(x,y)$ est uniformément borné.

De l'analogue de l'équation (9.13) pour $P^w_s(x,y)$, où on remplace l'opérateur d'espérance $E^{t,w}_{x,x}$ par l'opérateur d'espérance $E^{t,w}_{x,y}$ relatif au pont brownien entre $x$ et $y$, on tire que pour $s\in[0,T]$, l'opérateur $P^w_s(x,y)\in\operatorname{Hom}((\xi\otimes\tilde{\omega}_{Z_w})_y,(\xi\otimes\tilde{\omega}_{Z_w})_x)$ est uniformément borné.

Rappelons que sur $A$, le fibré $(\xi,\|\ \|_\xi)$ est identifié à $\mathbf{C}^k$. Si $x\in A'_{i,w}$, soit $x_u$ le mouvement brownien sur $A$ tel que $x_0=x$. Soit $Q$ la loi de $x$ sur $\mathscr{C}(\mathbf{R}_+;A)$. Soit $S$ le temps d'atteinte de $\partial A_{i,w}$ par $x_\cdot$.

On sait que

$$Q(S>t)=\int_{A_{i,w}}\tilde{p}^w_t(x,y)\,dv(y).$$

Or par la formule de Green, on a

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_{A_{i,w}}\tilde{p}^w_t(x,y)\,dv(y)=\frac{1}{2}\int_{\partial A_{i,w}}\frac{\partial\tilde{p}^w_t}{\partial\mathbf{n}}(x,y)\,d\sigma(y),\tag{9.25}$$

et de plus, par symétrie du noyau $\tilde{p}^w_t$, on sait que

$$\frac{\partial\tilde{p}^w_t}{\partial\mathbf{n}}(x,y)=\frac{\partial\tilde{p}^w_t}{\partial\mathbf{n}}(y,x).$$

Donc par intégration de (9.25), on obtient

$$\frac{1}{2}\int_0^t ds\int_{\partial A_{i,w}}\left(-\frac{\partial}{\partial\mathbf{n}}\tilde{p}^w_{t-s}\right)(y,x)\,d\sigma(y)=Q(S\leqslant t).\tag{9.26}$$

Or pour $t\leqslant T$, il résulte de [IMK, p. 26] que

$$Q(S\leqslant t)\leqslant Q(S\leqslant T)\leqslant c\exp\left(\frac{-d_w^2}{2T}\right).\tag{9.27}$$

On tire de (9.24)–(9.26) et des considérations qui précèdent que si $x\in A'_{i,w}$, $t\leqslant T$

$$|P^w_t(x,x)-\tilde{P}^w_t(x,x)|\leqslant C\exp\left(\frac{-d_w^2}{2T}\right).\tag{9.28}$$

Une démonstration identique montre que si $x \in A'_{i,w}$, $t \leq T$

$$|P_t^A(x,x) - \bar{P}_t^w(x,x)| \leq C \exp\left(\frac{-d_w^2}{2T}\right).$$

De (9.17), (9.27), (9.28), on tire que si $V'_{i,w}$ est le volume du cylindre $A'_{i,w}$, alors pour $t \leq T$, et pour $|w|$ assez petit

$$\left| \int_{A'_{i,w}} \operatorname{Tr}[P_t^w(x,x)]\, dv(x) - \frac{\operatorname{rg} \xi}{\sqrt{2\pi t}}\, q_t(0,0)\, V'_{i,w} \right| \leq C' V'_{i,w} \exp\left(\frac{-(\log(1/|w|))^{3/2}}{2T}\right). \tag{9.29}$$

On vérifie facilement que

$$V'_{i,w} = 2\pi\left(\log\left(\frac{1}{|w|}\right) - 2\pi\left(\log\left(\frac{1}{|w|}\right)\right)^{3/4}\right). \tag{9.30}$$

De (9.29), (9.30), on tire que pour $t \in ]0,T]$

$$\lim_{|w|\to 0} \int_{A'_{i,w}} \frac{\operatorname{Tr}[P_t^w(x,x)]\, dx}{\log(1/|w|)} = \frac{\operatorname{rg} \xi}{\sqrt{2\pi t}} \operatorname{Tr}\left[\exp\left(\frac{t}{2}\Delta_{S_1}\right)\right], \tag{9.31}$$

et que la limite dans (9.31) est uniforme en $t \in ]0,T]$.

La formule (9.11) est alors une conséquence immédiate de (9.15), (9.16) et (9.31).

(c) *Preuve de* (9.12) *et* (9.13). Rappelons que, par (9.7), dans (9.6), on a $|O(t,x)| \leq Ct$. Or, pour $w \in D_{\varepsilon''} \setminus \{0\}$, si $U \in TZ_w$, $\|U\| = 1$, on a

$$\begin{aligned} &\operatorname{Tr}[\exp(-t\bar{\partial}_{\xi,w}\bar{\partial}^*_{\xi,w})] - \frac{\operatorname{rg}\xi\, V_w}{2\pi t} + C_0 \\ &= \int_{Z_w} \left\{ \operatorname{Tr}[P_t^w(x,x)] - \frac{\operatorname{rg}\xi}{2\pi t} + \frac{1}{2\pi}\left(\frac{1}{2}\operatorname{Tr}[L] + \frac{1}{3}\operatorname{rg}\xi\, R^{TZ}\right)(U,\bar{U}) \right\} dv(x). \end{aligned} \tag{9.32}$$

Donc

$$\left| \operatorname{Tr}[\exp(-t\bar{\partial}_{\xi,w}\bar{\partial}^*_{\xi,w})] - \frac{\operatorname{rg}\xi\, V_w}{2\pi t} + C_0 \right| \leq CtV_w. \tag{9.33}$$

(9.12) découle de (9.10) et de (9.33).

Si $A$ est un opérateur linéaire sur $C^\infty(Z_w, \xi \otimes \bar{\omega}_{Z_w})$, qui est continu pour la norme $L^2$, soit $\|A\|_\infty$ sa norme. Pour $t > 1$, on a

$$\operatorname{Tr}[\exp(-t\bar{\partial}_{\xi,w}\bar{\partial}^*_{\xi,w})] \leq \operatorname{Tr}\left[\exp\left(\frac{-\bar{\partial}_{\xi,w}\bar{\partial}^*_{\xi,w}}{2}\right)\right] \left\| \exp\left(-\left(t - \frac{1}{2}\right)\bar{\partial}_{\xi,w}\bar{\partial}^*_{\xi,w}\right) \right\|_\infty. \tag{9.34}$$

Or de (9.11), il résulte que pour $|w|$ assez petit

$$\mathrm{Tr}\left[\exp\left(\frac{-\bar{\partial}_{\xi,w}\bar{\partial}^*_{\xi,w}}{2}\right)\right] \leqslant C\left(\log\frac{1}{|w|}\right). \tag{9.35}$$

De plus, de l'hypothèse (A), on tire que si $\mu_w$ est la plus petite valeur propre de l'opérateur $\bar{\partial}_{\xi,w}\bar{\partial}^*_{\xi,w}$, il existe $c>0$ tel que pour $|w|$ assez petit

$$\mu_w \geqslant c\left(\log\left(\frac{1}{|w|}\right)\right)^{-2}. \tag{9.36}$$

Donc il existe $C''>0$ tel que pour $t\geqslant 1$ et $|w|$ assez petit

$$\left\|\exp\left(-\left(t-\frac{1}{2}\right)\bar{\partial}_{\xi,w}\bar{\partial}^*_{\xi,w}\right)\right\|_\infty \leqslant \exp\left(-C''\left(\log\left(\frac{1}{|w|}\right)\right)^{-2}t\right). \tag{9.37}$$

De (9.34)–(9.37), on tire que pour $t>1$ et pour $|w|$ assez petit

$$\mathrm{Tr}\left[\exp(-\bar{\partial}_{\xi,w}\bar{\partial}^*_{\xi,w})\right] \leqslant C'\log\left(\frac{1}{|w|}\right)\exp\left(-C''\left(\log\left(\frac{1}{|w|}\right)\right)^{-2}t\right). \tag{9.38}$$

En multipliant $w$ par une constante pour revenir aux coordonnées initiales, on obtient une inégalité du même type que (9.38). L'inégalité (9.13) est démontrée. □

### 9(b) Estimation de la torsion analytique sous l'hypothèse (A)

On choisit les métriques $\|\ \|_{\omega_{X/D_\varepsilon}}$ et $\|\ \|_\xi$ comme à la section 9(a). On suppose aussi que, pour tout $w\in D_\varepsilon\setminus\{0\}$, $H^1(Z_w,\xi)=\{0\}$.

Pour $w\in D_\varepsilon\setminus\{0\}$, l'opérateur $\bar{\partial}_{\xi,w}\bar{\partial}^*_{\xi,w}$ est inversible. On définit alors la fonction zêta intervenant dans la construction de la métrique de Quillen comme à la section 2(a). Pour $w\in D_\varepsilon\setminus\{0\}$, $s\in\mathbf{C}$, $\mathrm{Re}\, s>1$, on pose

$$\zeta_w(s) = \mathrm{Tr}\left[(\bar{\partial}_{\xi,w}\bar{\partial}^*_{\xi,w})^{-s}\right]. \tag{9.39}$$

De manière équivalente, on a

$$\zeta_w(s) = \frac{1}{\Gamma(s)}\int_0^\infty t^{s-1}\mathrm{Tr}\left[\exp(-t\bar{\partial}_{\xi,w}\bar{\partial}^*_{\xi,w})\right]dt. \tag{9.40}$$

Alors, $\zeta_w(s)$ s'étend en une fonction méromorphe sur $\mathbf{C}$, qui est holomorphe en $s=0$. En particulier, de (9.6), on tire

$$\zeta_w(0) = -C_0$$

$$\frac{\partial\zeta_w(0)}{\partial s}=\int_0^1\left\{\operatorname{Tr}[\exp(-t\bar\partial_{\xi,w}\bar\partial^*_{\xi,w})]-\frac{\operatorname{rg}\xi\, V_w}{2\pi t}+C_0\right\}\frac{dt}{t}$$
$$+\int_1^{+\infty}\operatorname{Tr}[\exp(-t\bar\partial_{\xi,w}\bar\partial^*_{\xi,w})]\frac{dt}{t}-\frac{\operatorname{rg}\xi\, V_w}{2\pi}+\Gamma'(1)\,C_0. \tag{9.41}$$

THÉORÈME 9.3. *Supposons que le fibré $\xi$ vérifie l'hypothèse* (A) *de la section* 8. *Alors, il existe une constante $C>0$ telle que pour tout $w\in D_\varepsilon\setminus\{0\}$*

$$\frac{\partial\zeta_w(0)}{\partial s}\leqslant C\left(1+\log\left(\frac{1}{|w|}\right)\left|\log\left(\log\left(\frac{1}{|w|}\right)\right)\right|\right). \tag{9.42}$$

*De plus*

$$\varliminf_{\substack{w\in D_\varepsilon\setminus\{0\}\\ |w|\to 0}}\frac{\partial\zeta_w/\partial s(0)}{\log(1/|w|)}\geqslant\frac{n\operatorname{rg}\xi}{6}. \tag{9.43}$$

*Démonstration.* De (9.12), on tire qu'il existe $C>0$ telle que si $w\in D_\varepsilon\setminus\{0\}$

$$\left|\int_0^1\left\{\operatorname{Tr}[\exp(-t\bar\partial_{\xi,w}\bar\partial^*_{\xi,w})]-\frac{\operatorname{rg}\xi\, V_w}{2\pi t}+C_0\right\}\frac{dt}{t}\right|\leqslant C\log\left(\frac{1}{|w|}\right). \tag{9.44}$$

De (9.13), on tire que si $w\in D_\varepsilon\setminus\{0\}$

$$0<\int_1^{+\infty}\operatorname{Tr}[\exp(-t\bar\partial_{\xi,w}\bar\partial^*_{\xi,w})]\frac{dt}{t}\leqslant C'\log\left(\frac{1}{|w|}\right)\int_{C''(\log(1/|w|))^{-2}}^{+\infty}e^{-t}\frac{dt}{t}. \tag{9.45}$$

Il existe une constante $C'''$ telle que si $y>0$

$$\int_y^{+\infty}e^{-t}\frac{dt}{t}\leqslant C'''\left(1+\left|\log\left(\frac{1}{y}\right)\right|\right). \tag{9.46}$$

De (9.41), (9.44)–(9.46), on tire (9.42).

Rappelons que $C_0$ est une constante ne dépendant pas de $w$. Pour $t\in]0,1]$, $w\in D_\varepsilon\setminus\{0\}$, posons

$$S_w(t)=\frac{1}{t\log(1/|w|)}\left\{\operatorname{Tr}[\exp(-t\bar\partial_{\xi,w}\bar\partial^*_{\xi,w})]-\frac{\operatorname{rg}\xi\, V_w}{2\pi t}+C_0\right\}. \tag{9.47}$$

De (9.12), on tire que la fonction $S_w(t)$ est uniformément bornée. De (9.10), (9.11), on déduit que pour tout $t\in]0,1]$

$$\lim_{|w|\to 0}S_w(t)=\frac{n\operatorname{rg}\xi}{t}\left\{\frac{\operatorname{Tr}[\exp((t/2)\,\Delta_{S_1})]}{\sqrt{2\pi t}}-\frac{1}{t}\right\}. \tag{9.48}$$

Par application du théorème de convergence dominée, on déduit des considérations qui précèdent que

$$\text{(9.49)}\quad \begin{aligned} &\lim_{|w|\to 0} \frac{1}{\log(1/|w|)} \int_0^1 \left\{ \operatorname{Tr}\left[\exp(-t\bar{\partial}_{\xi,w}\bar{\partial}^*_{\xi,w})\right] - \frac{\operatorname{rg}\xi\, V_w}{2\pi t} + C_0 \right\} \frac{dt}{t} \\ &= n \operatorname{rg}\xi \int_0^1 \left\{ \frac{\operatorname{Tr}\left[\exp((t/2)\,\Delta_{S_1})\right]}{\sqrt{2\pi t}} - \frac{1}{t} \right\} \frac{dt}{t}. \end{aligned}$$

La fonction $t \to \operatorname{Tr}\left[\exp(-t\bar{\partial}_{\xi,w}\bar{\partial}^*_{\xi,w})\right]$ est positive. De (9.11) et du théorème de Fatou, on tire que

$$\text{(9.50)}\quad \varliminf_{|w|\to 0} \frac{1}{\log(1/|w|)} \int_1^{+\infty} \operatorname{Tr}\left[\exp(-t\bar{\partial}_{\xi,w}\bar{\partial}^*_{\xi,w})\right] \frac{dt}{t} \geqslant n \operatorname{rg}\xi \int_1^{+\infty} \frac{\operatorname{Tr}\left[\exp((t/2)\,\Delta_{S_1})\right]}{\sqrt{2\pi t}} \frac{dt}{t}.$$

De (9.41), (9.49), (9.50), on tire que

$$\text{(9.51)}\quad \begin{aligned} \varliminf_{|w|\to 0} \frac{1}{\log(1/|w|)} \frac{\partial \zeta_w(0)}{\partial s} \geqslant n \operatorname{rg}\xi \Bigg[ &\int_0^1 \left\{ \frac{\operatorname{Tr}\left[\exp((t/2)\,\Delta_{S_1})\right]}{\sqrt{2\pi t}} - \frac{1}{t} \right\} \frac{dt}{t} \\ &+ \int_1^{+\infty} \frac{\operatorname{Tr}\left[\exp((t/2)\,\Delta_{S_1})\right]}{\sqrt{2\pi t}} \frac{dt}{t} - 1 \Bigg] \end{aligned}$$

Soit $\zeta^R(s)$ la fonction zêta de Riemann. Pour $s \in \mathbf{C}, \operatorname{Re} s > \frac{1}{2}$, on

$$\text{(9.52)}\quad \zeta^R(2s) = \frac{1}{2\Gamma(s)} \int_0^{+\infty} t^{s-1}\left(\operatorname{Tr}\left[\exp(t\Delta_{S_1})\right] - 1\right) dt.$$

Posons

$$\text{(9.53)}\quad \begin{aligned} F_1(s) &= \frac{2^{-s-1}}{\Gamma(s)} \int_0^1 t^{s-1}\left(\operatorname{Tr}\left[\exp((t/2)\Delta_{S_1})\right] - 1\right) dt \\ F_2(s) &= \frac{2^{-s-1}}{\Gamma(s)} \int_1^{+\infty} t^{s-1}\left(\operatorname{Tr}\left[\exp((t/2)\,\Delta_{S_1})\right] - 1\right) dt. \end{aligned}$$

On a

$$\text{(9.54)}\quad \zeta^R(2s) = F_1(s) + F_2(s).$$

Or $F_1(s)$ est une fonction holomorphe en $s \in \mathbf{C}$, $\operatorname{Re} s > \frac{1}{2}$. $F_1(s)$ a une extension méromorphe à $\mathbf{C}$, qui est holomorphe en $s = -\frac{1}{2}$. Puisque $\Gamma(-1/2) = -2\sqrt{\pi}$, on trouve que

$$F_1(-1/2) = -\frac{1}{2\sqrt{2\pi}}\int_0^1 t^{-3/2}\left(\operatorname{Tr}\left[\exp((t/2)\,\Delta_{S_1})\right] - \frac{2\pi}{\sqrt{2\pi t}}\right)dt + \frac{1}{2} - \frac{1}{\sqrt{2\pi}}. \tag{9.55}$$

La fonction $F_2(s)$ est une fonction holomorphe sur $\mathbf{C}$. On a

$$F_2(-1/2) = \frac{1}{2\sqrt{2\pi}}\left[\int_1^{+\infty} t^{-3/2}\operatorname{Tr}\left[\exp((t/2)\,\Delta_{S_1})\right]dt - 2\right] \tag{9.56}$$

De (9.54)–(9.56), on tire que

(9.57)

$$\zeta^R(-1) = -\frac{1}{2}\left\{\int_0^1\left(\frac{\operatorname{Tr}\left[\exp((t/2)\,\Delta_{S_1})\right]}{\sqrt{2\pi t}} - \frac{1}{t}\right)\frac{dt}{t} + \int_1^{+\infty}\frac{\operatorname{Tr}\left[\exp((t/2)\,\Delta_{S_1})\right]}{\sqrt{2\pi t}}\frac{dt}{t} - 1\right\}.$$

Par (9.51), (9.57), on a donc

$$\lim_{|w|\to 0}\frac{1}{\log(1/|w|)}\frac{\partial\zeta_w(0)}{\partial s} \geqslant 2n\,\mathrm{rg}\,\xi\,\zeta^R(-1). \tag{9.58}$$

Or, si $B_1 = 1/6$ est le premier nombre de Bernoulli, par [S, p. 117], on sait que

$$\zeta^R(-1) = -\frac{B_1}{2} = \frac{-1}{12}. \tag{9.59}$$

(9.43) résulte de (9.58), (9.59). □

## 10. Comportement des métriques de Quillen au voisinage du diviseur des courbes singulières

### 10(a) F.s.o. paramétrées par un disque

PROPOSITION 10.1. *Soient $\pi: X \to D_\varepsilon$ une f.s.o. admettant $Z_0 = \pi^{-1}(0)$ comme seule fibre singulière, et $\xi$ un fibré vectoriel sur X. On suppose $\omega_{X/D_\varepsilon}$ et $\xi$ munis de métriques hermitiennes $\|\ \|$ de courbure nulle au voisinage des points doubles de $Z_0$, et $\lambda(\xi)$ muni, sur $D_\varepsilon - \{0\}$, de la métrique de Quillen $\|\ \|_Q$ qui s'en déduit. Pour toute section $\sigma$ de classe $C^\infty$ de $\lambda(\xi)$ sur $D_\varepsilon$, partout non nulle, il existe une fonction $\varphi: D_\varepsilon \to \mathbf{R}$, de classe $C^\infty$ et $l \in \mathbf{R}$ tels que:*

$$\forall w \in D_\varepsilon - \{0\}, \quad \log\|\sigma(w)\|_Q = \varphi(w) - l\log|w|^{-1}. \tag{10.1}$$

*De plus, si $\xi$ satisfait à la condition* (A), *alors*

$$l \geqslant \frac{1}{12} n \operatorname{rg} \xi \tag{10.2}$$

*où $n$ désigne le nombre de points doubles de $Z_0$.*

*Démonstration.* D'après le théorème 5.3, la validité de la proposition ne dépend pas des métriques choisies sur $\omega_{X/D_\varepsilon}$. On pourra donc supposer $\omega_{X/D_\varepsilon}$ muni de la métrique considérée au § 9. De plus, d'après le théorème 5.4, si

$$0 \to \xi_1 \to \xi_2 \to \xi_3 \to 0$$

est une suite exacte courte de fibrés vectoriels sur $X$, munis, ainsi que $\omega_{X/D_\varepsilon}$, de métriques de courbure nulle au voisinage des points doubles de $Z_0$, alors si la proposition 10.1 est vraie pour $\xi_2$ et $\xi_3$, elle est encore vraie pour $\xi_1$. Grâce à la proposition 8.4, on voit alors que pour établir la proposition 10.1, on peut supposer que les métriques sur $\omega_{X/D_\varepsilon}$ et $\xi$ sont celles considérées au § 9 et que $\xi$ satisfait à la condition (A). Nous nous plaçons désormais sous ces hypothèses. On dispose alors des majorations (9.42) et (9.43) sur

$$\frac{\partial \zeta_w}{\partial s}(0) = -\log \det{}' \bar{\partial}^*_{\xi, w} \bar{\partial}_{\xi, w}.$$

On peut évidemment supposer que $\sigma$ est holomorphe sur $D_\varepsilon$. Comme le théorème 2.1 est vrai lorsque $|\Delta| = \varnothing$ (cf. [BGS3]), il vient, sur $D_\varepsilon - \{0\}$:

$$\partial\bar{\partial} \log \|\sigma\|_q = -\pi i \int_\pi [\mathrm{Td}(\omega_{X/S}^{-1}, \|\ \|^{-1}) \operatorname{ch}(\xi, \|\ \|)]^{(4)}. \tag{10.3}$$

Or la 4-forme sous le signe intégrale est nulle au voisinage de $\Sigma$, puisque les métriques $\|\ \|$ sont plates au voisinages de $\Sigma$. Par conséquent, le membre de droite de (10.3) est une 2-forme $\omega$ de classe $C^\infty$ sur $D_\varepsilon$. Comme le laplacien est surjectif sur les fonctions de classe $C^\infty$ sur $D_\varepsilon$, il existe une telle fonction à valeurs réelles $\varphi_0$ telle que $\partial\bar{\partial}\varphi_0 = \omega$.

Posons alors

$$\psi = \log \|\sigma\|_Q - \varphi_0.$$

C'est une fonction harmonique sur $D_\varepsilon - \{0\}$. De plus, d'après les majorations (7.1) et (9.42), il existe $M \in \mathbf{R}_+$ tel qu'on ait, pour $|w|$ suffisamment petit

$$\begin{aligned}|\psi(w)| &\leqslant |\zeta'_w(0)|+|\log\|\sigma(\omega)\|_{L^2}|+|\varphi_0(w)| \\ &\leqslant M(1+\log|w|^{-1}\cdot\log\log|w|^{-1}).\end{aligned} \tag{10.4}$$

Ainsi $\psi$ est sommable au voisinage de 0, et définit donc une distribution sur $D_\varepsilon$. Le courant $\partial\bar\partial\psi$ est supporté par $\{0\}$, et s'écrit donc

$$\partial\bar\partial\psi=\sum_{i,j=0}^{m}a_{ij}\frac{\partial^{i+j}}{\partial w^i\partial\bar w^j}\delta_0.$$

Or:

$$\delta_0=\frac{i}{\pi}\partial\bar\partial\log|w|.$$

On a donc l'égalité de courants sur $D_\varepsilon$

$$\partial\bar\partial\left[\psi-\frac{i}{\pi}\sum_{i,j=0}^{m}a_{ij}\frac{\partial^{i+j}}{\partial w^i\partial\bar w^j}\log|w|\right]=0$$

et donc, par ellipticité de $\partial\bar\partial$, la fonction

$$\psi_1=\psi-\frac{i}{\pi}\sum_{i,j=0}^{m}a_{ij}\frac{\partial^{i+j}}{\partial w^i\partial\bar w^j}\log|w|$$

se prolonge en une fonction harmonique sur $D_\varepsilon$.

La majoration (10.4) montre alors que si $(i,j)\neq(0,0)$, alors $a_{ij}=0$. En effet, les distributions

$$\frac{\partial^{i+j}}{\partial w^i\partial\bar w^j}\log|w|$$

où $(i,j)\neq(0,0)$, sont linéairement indépendantes et homogènes de degré $-(i+j)$. Cela prouve (10.1), avec :

$$\varphi=\varphi_0+\psi_1\quad\text{et}\quad l=\frac{i}{\pi}a_{00}.$$

De plus, d'après la proposition 7.1,

$$\lim_{w\to0}\frac{\log\|\sigma(w)\|_{L^2}}{\log|w|^{-1}}=0.$$

Il vient donc

$$\lim_{w\to 0} (\log |w|^{-1})^{-1} \zeta'_w(0) = \lim_{w\to 0} -(\log |w|^{-1})^{-1} \log \|\sigma(w)\|_Q^2 = 2l.$$

L'inégalité (10.2) découle donc de (9.43). □

**10(b)** Le résultat suivant nous servira plus loin à étendre le lemme 9.2 à des familles $\pi: X\to S$ où $S$ est de dimension quelconque.

Proposition 10.2. *Soient $P$ un polydisque ouvert dans $\mathbf{C}^N$ et $f_1, \ldots, f_n$ des fonctions holomorphes sur $P$, non identiquement nulles. On suppose que les hypersurfaces $H_j = f_j^{-1}(0)$ sont lisses, connexes et deux à deux distinctes, et que $f_j$ a un zéro simple sur $H_j$. On note : $H = \bigcup_{j=1}^n H_j$.*

*Supposons qu'une fonction $\varphi$ à valeurs réelles sur $P\setminus H$ satisfasse aux conditions suivantes :*

(1) *$\varphi$ est de classe $C^\infty$ sur $P\setminus H$ et $\partial\bar\partial\varphi$ se prolonge en une forme $\omega$ de classe $C^\infty$ sur $P$;*

(2) *pour toute immersion $i: D_\varepsilon \to P$ telle que $i(D_\varepsilon - \{0\}) \subset P\setminus H$, que $i(0)$ soit un point lisse de $H$ et que $i$ soit transversale à $H$ en 0, il existe $\psi$ de classe $C^\infty$ sur $D_\varepsilon$ et $\lambda \in \mathbf{C}$ tels que*

$$\forall t = D_\varepsilon - \{0\}, \quad \varphi \circ i(t) = \psi(t) + \lambda \log |t|.$$

*Il existe alors une fonction $\varphi_0$ de classe $C^\infty$ sur $P$ et des nombres réels $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ tels que*

$$\varphi = \varphi_0 + \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \log |f_j|.$$

*Par conséquent, $\varphi$ définit une fonction localement sommable sur $P$, et on a l'égalité de courants sur $P$*

$$\partial\bar\partial\varphi = \omega - \pi i \sum_{i=1}^{n} \lambda_j \delta_{H_j}.$$

Pour établir la proposition 10.2, nous ferons appel aux énoncés bien connus suivants :

Lemme 10.3. *Pour toute forme différentielle $\omega$ sur $P$, de classe $C^\infty$ et de type $(1, 1)$, telle que $d\omega = 0$, il existe $\psi \in C^\infty(P, \mathbf{C})$ telle que $\omega = \partial\bar\partial\varphi$.*

LEMME 10.4. *Soient $N$ un sous-ensemble analytique de $P$, de codimension $\geqslant 2$, et $h$ une fonction de classe $C^\infty$ sur $P \setminus N$. Si $\partial\bar\partial h=0$ sur $P\setminus N$, alors $h$ se prolonge en une fonction de classe $C^\infty$ sur $P$.*

*Démonstration de la proposition* 10.2. (i) On a, sur $P\setminus H$: $d\omega = d\partial\bar\partial\varphi=0$. Comme $P\setminus H$ est dense dans $P$, on a encore $d\omega=0$ sur tout $P$. Donc, d'après le lemme 10.3, il existe $\psi\in C^\infty(P,\mathbf{C})$ telle que $\partial\bar\partial\psi=\omega$. On voit alors, en remplaçant $\varphi$ par $\varphi-\operatorname{Re}\psi$, que l'on peut supposer $\omega=0$.

(ii) Etablissons maintenant la proposition lorsque $P$ est un polydisque centré en $0, m=1, f_1(w_1,\dots,w_N)=w_1$, et $\omega=0$. On note $P=D\times P'$, où $D\subset\mathbf{C}$ et $P'\subset\mathbf{C}^{N-1}$; ainsi $H=\{0\}\times P'$ et $P\setminus H=(D-\{0\})\times P'$.

D'après (2), il existe une fonction $\varphi_0: P\to\mathbf{C}$ et une fonction $\lambda: P'\to\mathbf{C}$ telles que, pour tout $(w_1,w')\in(D-\{0\})\times P'$

$$\varphi(w_1,w')=\varphi_0(w_1,w')+\lambda(w')\log|w_1|.$$

et que $\varphi_0(\cdot,w')$ soit de classe $C^\infty$ sur $D$ pour tout $w'\in P'$. Comme $\omega=0, \varphi_0(\cdot,w')$ est en fait harmonique sur $D$. Il découle alors de la formule de Stokes sur un disque $D_\varepsilon\subset\subset D$ que

$$\lambda(w')=\frac{1}{\pi i}\int_{\partial D_\varepsilon}\frac{\partial\varphi}{\partial w_1}(w_1,w')\,dw_1.$$

Cette identité montre que $\lambda$ est une fonction $C^\infty$ sur $P'$. Il en découle que $\varphi_0$ est de classe $C^\infty$ sur $P\setminus H=(D-\{0\})\times P'$. La formule de Poisson appliquée à $\varphi_0(\cdot,w')$ s'écrit, lorsque $|w_1|<\varepsilon$ :

$$\varphi_0(w,w')=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\varphi_0(\varepsilon e^{i\theta},w')\frac{\varepsilon^2-|w_1|^2}{|\varepsilon e^{i\theta}-w_1|^2}\,d\theta$$

et montre que $\varphi_0$ est $C^\infty$ sur $P$. Posons

$$\partial\bar\partial[\lambda(w_2,\dots,w_N)\log|w_1|]=\sum_{i,j=1}^N C_{ij}(w_1,\dots,w_N)\,dw_i\wedge d\bar w_j.$$

Comme

$$\partial\bar\partial[\lambda(w_2,\dots,w_N)\log|w_1|+\varphi_0(w_1,\dots,w_N)]=\partial\bar\partial\varphi(w_1,\dots,w_N)=0,$$

on voit que

$$C_{ij} = -\frac{\partial^2 \varphi_0}{\partial w_i \partial \bar{w}_j},$$

et donc que les $C_{ij}$ se prolongent en des fonctions $C^\infty$ sur $P$. Or, pour tout $j=2, \dots, N$

$$\begin{aligned} C_{1j}(w_1, \dots, w_N) &= \frac{\partial}{\partial w_1} \log |w_1| \cdot \frac{\partial}{\partial \bar{w}_j} \lambda(w_2, \dots, w_N) \\ &= \frac{1}{2w_1} \frac{\partial \lambda}{\partial \bar{w}_j}(w_2, \dots, w_N). \end{aligned}$$

Par conséquent $\partial\lambda/\partial\bar{w}_j=0$. On voit de même que $\partial\lambda/\partial w_j=0$. Au bout du compte, $\lambda$ est constante sur $P'$, et réelle, puisque $\varphi$ est réelle.

(iii) Soit $N$ l'ensemble des points singuliers de $H$; c'est un fermé analytique de $P$, de codimension $\geqslant 2$. On déduit aisément de (ii) l'existence de nombres réels $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ tels que tout point $y$ de $H_j \setminus N$ possède un voisinage ouvert $\Omega$ sur lequel la fonction $\varphi - \lambda_j \log |f_j|$, définie sur $\Omega \setminus H_j$, se prolonge en une fonction $C^\infty$ (appliquer (ii)) dans un système de coordonnées locales centré en $y$, de première composante $f_j$, et utiliser la connexité de $H_j \setminus N$). La fonction

$$\varphi_0 = \varphi - \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \log |f_j|$$

se prolonge en une fonction $C^\infty$ sur $P \setminus N$. De plus, $\partial\bar{\partial}\varphi_0 = 0$ sur $P \setminus H$, donc sur $P \setminus N$. D'après le lemme 10.4, $\varphi_0$ se prolonge donc en une fonction de classe $C^\infty$ sur $P$. □

THÉORÈME 10.5. *Plaçons nous sous les hypothèses du théorème* 2.1.

(1) *La métrique de Quillen* $\| \ \|_Q$ *sur* $\lambda(\xi)$, *définie et de classe* $C^\infty$ *sur* $S - |\Delta|$, *est une métrique généralisée sur* $S$.

(2) *Soit* $\Delta = \Sigma_{i \in I} n_i \Delta_i$ *la décomposition de* $\Delta$ *en composantes irréductibles* ($n_i \in \mathbf{N}^*$; *la somme est localement finie*). *Il existe des nombres réels* $\eta_i(\xi)$ *tels que l'on ait l'égalité de courants sur* $S$

$$c_1(\lambda(\xi), \| \ \|_Q) = -\int_\pi [\mathrm{Td}(\omega_{X/B}^{-1}, \| \ \|^{-1}) \cdot \mathrm{ch}(\xi, \| \ \|)]^{(4)} - \sum_{i \in I} n_i \eta_i(\xi) \delta_{\Delta_i}. \tag{10.5}$$

*Démonstration*. Il suffit de montrer que tout point $s$ de $S$ possède un voisinage ouvert $\Omega$ tel que les conclusions du lemme soient satisfaites lorsque $\Omega$ (resp. $\pi^{-1}(\Omega)$) est substitué à $S$ (resp $X$). En effet, comme les $\Delta_i$ sont connexes, on obtient un énoncé équivalent à celui à établir en définissant les $\eta_i(\xi)$ comme des fonctions localement constantes.

Par ailleurs, la validité des conclusions du théorème ne dépend pas des métriques choisies sur $\xi$ et $\omega_{X/S}$, d'après le théorème 5.3.

Ainsi, il suffit d'établir le théorème lorsque les conditions supplémentaires suivantes sont réalisées :

(i) $S$ est isomorphe à un polydisque de $\mathbf{C}^N$; les composantes irréductibles $\Delta_i$ de $\Delta$ sont en nombre fini, lisses et irréductibles, et il existe des fonctions holomorphes $f_i$ sur $S$ telles que $\Delta_i = f_i^{-1}(0)$ et que $f_i$ s'annule à l'ordre 1 sur $D_i$;

(ii) les métriques sur $\xi$ et $\omega_{X/S}$ ont des courbures nulles au voisinage de $\Sigma$;

(iii) il existe une section holomorphe $\sigma$ partout non nulle de $\lambda(\xi)$ sur $S$.

D'après (ii), l'intégrale dans le membre de droite de (10.5) est alors une 2-forme $C^\infty$ sur $S$. De plus, elle coïncide avec $c_1(\lambda(\xi), \| \ \|_Q)$ sur $S - |\Delta|$, puisque le théorème est vrai lorsque $|\Delta|$ est vide. Le théorème découle donc de la proposition 10.2, que l'on peut appliquer à $\log \|\sigma\|_Q^2$ d'après la proposition 10.1. □

### 10 (c) Propriétés des fonctions $\eta_i$

PROPOSITION 10.6. *Conservons les notations du théorème* 10.5.

(1) *Les* $\eta_i(\xi)$ *ne dépendent pas des métriques sur* $\xi$ *et* $\omega_{X/S}$.

(2) *Soient* $\pi' : X' \to S'$, $F : X' \to X$ *et* $f : S' \to S$ *satisfaisant aux conclusions de la proposition* 3.3. *Si* $i \in I$ *et si* $\Delta'_j$ *est une composante irréductible du diviseur* $\Delta'$ *des courbes singulières de* $\pi'$ *contenue dans* $f^{-1}(\Delta_i)$, *alors*

$$\eta_j(F^*\xi) = \eta_i(\xi).$$

(3) *Supposons que* $S$ *soit un disque* $D_\varepsilon$ *et que* $\pi^{-1}(0)$ *soit la seule fibre singulière de* $\pi$ *(ainsi* $|\Delta| = \{0\}$ *et a un seul élément* $i$*). Si* $\xi$ *satisfait à* (A) *au-dessus de* $D_\varepsilon$, *alors*

$$\eta_i(\xi) \geq \frac{1}{12} \operatorname{rg} \xi.$$

(4) *Soient* $\xi_1$ *et* $\xi_2$ *deux fibrés vectoriels holomorphes sur* $X$. *S'il existe une variété complexe connexe* $\Lambda$, *deux points* $\lambda_1$ *et* $\lambda_2$ *de* $\Lambda$ *et un fibré vectoriel holomorphe* $\Xi$ *sur* $\Lambda \times X$ *tels que*

$$\xi_k \cong j_k^* \Xi \quad (k = 1, 2),$$

*où*

$$\begin{aligned} j_k : X &\to \Lambda \times X \\ x &\mapsto (\lambda_k, x), \end{aligned}$$

*alors, pour tout* $i \in I$

$$\eta_i(\xi_1) = \eta_i(\xi_2).$$

(5) *Si*

$$0 \to \xi_1 \to \xi_2 \to \xi_3 \to 0$$

*est une suite exacte de fibrés vectoriels sur* $X$*, alors, pour tout* $i \in I$

$$\eta_i(\xi_2) = \eta_i(\xi_1) + \eta_i(\xi_3).$$

(6) *Soient* $\xi_0$ *et* $\xi_1$ *deux fibrés en droites holomorphes sur* $X$*. Si* $\xi$ *et* $\xi'$ *sont topologiquement isomorphes, alors, pour tout* $i \in I$

$$\eta_i(\xi_0) = \eta_i(\xi_1).$$

*Démonstration.* (1) découle du théorème 5.3.

(2) est une conséquence immédiate de la compatibilité au changement de base de la construction du fibré déterminant et de la métrique de Quillen.

(3) est un corollaire de la proposition 10.1.

(4) découle du (2) et du théorème 10.5 appliqué à la f. s. o.

$$\pi \times \mathrm{Id}: X \times \Lambda \to S \times \Lambda$$

et au fibré $\Xi$.

(5) est une conséquence du théorème 5.4.

(6) résulte de (4) et de l'énoncé suivant :

PROPOSITION 10.7. *Soient* $X$ *une variété complexe, et* $\xi_0$ *et* $\xi_1$ *deux fibrés en droites holomorphes sur* $X$*. Posons, pour* $k=0,1$

$$\begin{aligned} j_k: X &\to X \times \mathbf{C} \\ x &\mapsto (x, k). \end{aligned}$$

*Si* $\xi_0$ *et* $\xi_1$ *sont topologiquement isomorphes, alors il existe un fibré en droites holomorphe* $\Xi$ *sur* $X \times \mathbf{C}$ *tel que*

$$\xi_k \cong j_k^* \Xi, \quad k = 0,1. \tag{10.6}$$

*Démonstration.* Supposons d'abord $\xi_0$ trivial. De la suite exacte courte de faisceaux sur $X$

$$0 \to \mathbf{Z} \to \mathcal{O} \xrightarrow{\exp(2\pi i \cdot)} \mathcal{O}^* \to 0,$$

on déduit la suite exacte de groupes de cohomologie

$$H^1(X, \mathcal{O}) \xrightarrow{e_X} H^1(H, \mathcal{O}^*) \xrightarrow{c_1} H^2(X, \mathbf{Z}).$$

Comme $\xi_1$ est topologiquement trivial, l'image par $c_1$ de sa classe $[\xi_1]$ dans $H^1(X, \mathcal{O}^*)$ est nulle. Donc il existe $u \in H^1(X, \mathcal{O})$ tel que $[\xi_1] = e_X(u)$.

Considérons alors le « produit externe » :

$$P: H^1(X, \mathcal{O}) \otimes H^0(\mathbf{C}, \mathcal{O}) \to H^1(X \times \mathbf{C}, \mathcal{O}).$$

On vérifie immédiatement qu'un fibré $\Xi$ sur $X \times \mathbf{C}$, dont la classe dans $H^1(X \times \mathbf{C}, \mathcal{O}^*)$ est l'image par

$$e_{X \times \mathbf{C}}: H^1(X \times \mathbf{C}, \mathcal{O}) \to H^1(X \times \mathbf{C}, \mathcal{O}^*)$$

de $P(u \otimes z)$, satisfait aux conditions (10.6).

Passons au cas général. Comme $\xi_0^* \otimes \xi_1$ est topologiquement trivial, il existe d'après ce qui précède un fibré $\Xi_0$ sur $X \times \mathbf{C}$ tel que

$$j_0^* \Xi_0 \cong \mathcal{O} \quad \text{et} \quad j_1^* \Xi_0 \cong \xi_0^* \otimes \xi_1.$$

Le fibré $\Xi = (\mathrm{pr}_1^* \xi_0) \otimes \Xi_0$ satisfait alors à (10.6). □

## 11. Fin de la démonstration du théorème 2.1

**11 (a)** Nous commençons par établir le cas particulier suivant du théorème 2.1.

LEMME 11.1. *Le théorème* 2.1 *est vrai lorsque S est une surface de Riemann compacte et X une surface projective complexe.*

*Démonstration.* Le diviseur $\Delta$ est une somme de points :

$$\Delta = \sum_{i=1}^{m} n_i P_i \quad (n_i \in \mathbf{N}^*).$$

Il s'agit de montrer que, avec les notations du théorème 10.5, on a, pour tout

$i \in \{1, \dots, m\}$,

$$\eta_i(\xi) = \frac{1}{12} \operatorname{rg} \xi. \tag{11.1}$$

Introduisons la condition suivante :

(A′) *Il existe des disques ouverts disjoints $D_1, \dots, D_m$, voisinages dans $S$ de $P_1, \dots, P_m$ respectivement, tel que $\xi$ satisfasse à* (A) *au-dessus de $D_j$, pour tout $j = 1, \dots, m$.*

D'après le théorème de Riemann–Roch–Grothendieck, le courant $c_1(\lambda(\xi), \| \ \|)$ est cohomologue au courant

$$-\int_{X/S} [\operatorname{Td}(\omega_{X/S}^{-1}, \| \ \|^{-1}) \operatorname{ch}(\xi, \| \ \|)]^{(4)} - \sum_{i=1}^{m} \frac{1}{12} n_i \operatorname{rg} \xi \, \delta_{P_i}.$$

Par conséquent, les courants

$$\sum_{i=1}^{m} \frac{1}{12} n_i \operatorname{rg} \xi \, \delta_{P_i} \quad \text{et} \quad \sum_{i=1}^{m} n_i \eta_i(\xi) \, \delta_{P_i}$$

sont cohomologues, et donc :

$$\sum_{i=1}^{m} \frac{1}{12} n_i \operatorname{rg}(\xi) = \sum_{i=1}^{m} n_i \eta_i(\xi). \tag{11.2}$$

La proposition 10.6 (3) montre que, si $\xi$ satisfait à (A′), alors, pour tout $i$,

$$\eta_i(\xi) \geqslant \frac{1}{12} \operatorname{rg}(\xi).$$

Jointes à l'égalité (11.2), ces majorations prouvent que les égalités (11.1) sont satisfaites lorsque $\xi$ satisfait à (A′).

Soit $\mathscr{L}$ un fibré en droites sur $X$ admettant une métrique $\| \ \|$ telle que $c_1(\mathscr{L}, \| \ \|) > 0$, c'est-à-dire un fibré ample sur $X$; il en existe puisque $X$ est projective. Si $q$ est un entier suffisamment grand, le fibré en droites $\mathscr{L}^q$ est engendré en tout point par ses sections globale. Il existe ainsi $s_1, \dots, s_N$ dans $H^0(X, \mathscr{L}^q)$ tels, pour tout $x \in X$, l'un des $s_i(x)$ soit non nul. Posons alors :

$$\begin{aligned} v \colon \xi &\to (\xi \otimes \mathscr{L}^q) \otimes \mathbf{C}^N \\ t &\mapsto (t \otimes s_1, \dots, t \otimes s_N). \end{aligned}$$

C'est un morphisme injectif de fibré vectoriel. Soit $\xi'$ le fibré vectoriel conoyau de $v$.

D'après la proposition 7.2, le fibré $\xi \otimes \mathscr{L}^q$ satisfait à (A′) dès que $q$ est assez grand. Il en va alors de même de $(\xi \otimes \mathscr{L}^q) \otimes \mathbf{C}^N$, puis de $\xi'$, d'après la proposition 8.1. Par conséquent :

$$\eta_i((\xi \otimes \mathscr{L}^q) \otimes \mathbf{C}^N) = \frac{1}{12} \operatorname{rg}((\xi \otimes \mathscr{L}^q) \otimes \mathbf{C}^N)$$

et

$$\eta_i(\xi') = \frac{1}{12} \operatorname{rg}(\xi').$$

Ces inégalités impliquent les égalités (11.1), grâce à la proposition 10.6 (5), appliquée à la suite exacte :

$$0 \to \xi \xrightarrow{v} (\xi \otimes \mathscr{L}^q) \otimes \mathbf{C}^N \to \xi' \to 0. \qquad \square$$

**11 (b)** *Remarque.* Le théorème de Riemann–Roch–Grothendieck n'intervient dans la démonstration des théorèmes 2.1 et 2.2 que par l'intermédiaire de la démonstration précédente. En fait, nous n'y faisons appel que pour montrer que le degré de $\lambda(\xi)$ est donné par l'expression suivante, sous les hypothèses du lemme 11.1 :

$$\int_S \left[ -\int_\pi [\operatorname{Td}(\omega_{X/S}^{-1}) \operatorname{ch}(\xi)]^{(4)} - \frac{\operatorname{rg} \xi}{12} \sum_i \delta_{P_i} \right],$$

c'est-à-dire que, en notant $\delta$ le cardinal de $\Sigma$ et $r$ le rang de $\xi$,

$$\int_S c_1(\lambda(\xi)) = -\int_X [\operatorname{Td}(\omega_{X/S}^{-1}) \operatorname{ch}(\xi)]^{(4)} - \frac{r\delta}{12} \tag{11.3}$$

où $c_1$, ch, et Td désignent des classes caractéristiques en cohomologie rationnelle. De plus, nous n'utilisons cette formule que pour des fibrés $\xi$ tels que

$$R^1 \pi_* \xi = 0 \tag{11.4}$$

et

$$H^2(X, \xi) = 0. \tag{11.5}$$

En effet, si $q$ est suffisamment grand, le fibré $(\xi \otimes \mathscr{L}^q) \otimes \mathbf{C}^N$ et tous ses quotients satisfont à ces conditions. Enfin, on peut supposer $S$ connexe.

Sous ces hypothèses, il est facile de déduire (11.3) du théorème de Riemann–Roch pour des fibrés vectoriels sur une courbe ou une surface projective([1]), et ramener ainsi la preuve de (11.3) à celle de théorèmes que l'on peut considérer, suivant ses inclinations, comme des cas particuliers de la formule de l'indice d'Atiyah–Singer, ou comme des avatars de résultats vénérables de la théorie des courbes et des surfaces algébriques.

En effet, sous la condition (11.4), le faisceau image direct $R^0\pi_*\xi$ est localement libre, de rang

$$\varrho = \dim H^0(X_s, \xi) = H^0(X_s, \xi) - \dim H^1(X_s, \xi) =: \chi(X_s, \xi)$$

où $X_s = \pi^{-1}(s)$ est une fibre lisse de $\pi$. On a donc, d'après le théorème de Riemann–Roch pour les courbes :

$$\varrho = \int_{X_s} [\mathrm{Td}(\omega_{X/S}^{-1})\,\mathrm{ch}(\xi)]^{(2)} = \int_{X_s} \left[c_1(\xi) - \frac{r}{2} c_1(\omega_{X/S})\right]. \tag{11.6}$$

De plus

$$\lambda(\xi) \cong (\Lambda^{\max} R^0\pi_*\xi)^{-1},$$

donc

$$c_1(\lambda(\xi)) = -c_1(R^0\pi_*\xi),$$

de sorte que, de nouveau d'après le théorème de Riemann–Roch pour les courbes.

$$\chi(S, R^0\pi_*\xi) = \int_S \left[-c_1(\lambda(\xi)) - \frac{\varrho}{2} c_1(\Omega_S^1)\right]. \tag{11.7}$$

Il vient alors, d'après (11.6) et (11.7) :

$$\begin{aligned} \int_S c_1(\lambda(\xi)) &= -\chi(S, R^0\pi_*\xi) - \frac{1}{2}\int_S \left(c_1(\Omega_S^1)\int_\pi \left[c_1(\xi) - \frac{r}{2} c_1(\omega_{X/S})\right]\right) \\ &= -\chi(S, R^0\pi_*\xi) - \frac{1}{2}\int_X \pi^* c_1(\Omega_S^1)\left[c_1(\xi) - \frac{r}{2} c_1(\omega_{X/S})\right]. \end{aligned} \tag{11.8}$$

([1]) Cela est toujours le cas lorsque (11.4) et (11.5) ne sont plus vérifiées, pourvu que l'on connaisse la suite spectrale de Leray.

Par ailleurs, on dispose d'isomorphismes canoniques

$$H^0(X,\xi)\cong H^0(S,R^0\pi_*\xi)$$

et

$$H^1(X,\xi)\cong H^1(X,R^0\pi_*\xi)\quad \text{(d'après (11.4))}.$$

Par conséquent, d'après (11.5)

$$\chi(S,R^0\pi_*\xi)=\dim H^0(X,\xi)-\dim H^1(X,\xi)+\dim H^2(X,\xi)=:\chi(X,\xi). \tag{11.9}$$

Ce nombre se calcule par le théorème de Riemann–Roch pour la surface $X$ :

$$\chi(X,\xi)=\int_X [\mathrm{Td}(TX)\,\mathrm{ch}(\xi)]^{(4)}. \tag{11.10}$$

On peut calculer $\mathrm{Td}(TX)$ en terme de $c_1(\omega_{X/S})$, $c_1(\Omega_S^1)$ et $\delta$. En effet, un calcul local très simple montre que la suite exacte de fibrés vectoriels sur $X-\Sigma$ définie par la différentielle de $\pi$

$$0\to\pi^*\Omega_S^1\to\Omega_X^1\to\omega_{X/S}\to 0$$

se prolonge en une suite exacte de faisceaux sur $X$

$$0\to\pi^*\Omega_S^1\to\Omega_X^1\to\omega_{X/S}\to i_*\,i^*\omega_{X/S}\to 0$$

où $i\colon\Sigma\hookrightarrow X$. On a donc

$$\begin{aligned}\mathrm{ch}\,\Omega_X^1&=\pi^*\,\mathrm{ch}\,\Omega_S^1+\mathrm{ch}\,\omega_{X/S}-\mathrm{ch}\,i_*\,i^*\omega_{X/S}\\&=2+\pi^*c_1(\Omega_S^1)+c_1(\omega_{X/S})+\frac{1}{2}\,c_1(\omega_{X/S})^2-\delta[X].\end{aligned}$$

Par conséquent

$$c_1(TX)=-\pi^*c_1(\Omega_S^1)-c_1(\omega_{X/S})$$

et

$$c_2(TX)=\pi^*c_1(\Omega_S^1)\cdot c_1(\omega_{X/S})+\delta[X].$$

On en déduit aisément

$$\mathrm{Td}(TX)-\mathrm{Td}(\omega_{X/S}^{-1})=-\frac{1}{2}\,\pi^*c_1(\Omega_S^1)+\frac{1}{4}\,\pi^*c_1(\Omega_S^1)\cdot c_1(\omega_{X/S})+\frac{\delta}{12}\,[X]. \tag{11.11}$$

L'égalité (11.3) découle immédiatement de (11.8), (11.9), (11.10) et (11.11).

**11 (c)** Pour achever la démonstration du théorème 2.1, il faut établir que, avec les notations du théorème 10.5 et de la proposition 10.6, on a pour tout $i$

$$\eta_i(\xi) = \frac{1}{12}\,\mathrm{rg}(\xi), \tag{11.12}$$

quels que soient la f.s.o. $\pi: X \to S$ et le fibré $\xi$.

A cet effet, nous ferons appel au corollaire suivant de la proposition 10.6 (2) et (5).

LEMME 11.2. *Soient $\pi: X \to S$ et $\pi': X' \to S'$ deux f.s.o., et $F: X' \to X$ et $f: S' \to S$ deux applications holomorphes telles que le diagramme*

$$\begin{tikzcd} X' \arrow[r, "F"] \arrow[d, "\pi'"] & X \arrow[d, "\pi"] \\ S' \arrow[r, "f"] & S \end{tikzcd}$$

*soit cartésien, et soit $\xi$ un fibré vectoriel holomorphe sur $X$.*

(1) *Si le théorème* 2.1 *est vrai pour la f.s.o. $\pi: X \to S$ et le fibré $\xi$, alors il est vrai pour la f.s.o. $\pi: X' \to S'$ et le fibré $F^*\xi$.*

(2) *Réciproquement, si le théorème est vrai pour $\pi': X' \to S'$ et $F^*\xi$, alors l'égalité* (11.12) *est vraie, pourvu que $f(S')$ rencontre $\Delta_i \setminus \bigcup_{j \neq i} \Delta_j$.* □

L'assertion (2) ci-dessus, jointe au lemme 10.1, donne immédiatement :

LEMME 11.3. *Le théorème* 2.1 *est vrai lorsque la f.s.o. $\pi: X \to S$ satisfait à la condition* (C) (cf. § 3 (e)). □

Grâce au théorème 3.6, qui nous assure que toute f. s. o. provient localement par changement de base d'une f. s. o. satisfaisant à (C), nous allons en déduire :

LEMME 11.4. *Le théorème* 2.1 *est vrai lorsque le fibré $\xi$ est de rang* 1.

*Démonstration.* Soit $s$ un point de $S$. Nous noterons $C_1, \ldots, C_n$ les composantes irréductibles de $\pi^{-1}(s)$ et $d_i$ le degré de $\xi$ restreint à $C_i$. Il existe des sections holomorphes $\sigma_1, \ldots, \sigma_n$ de $\pi$, définies au voisinage de $s$, telles que $\sigma_i(s)$ soit un point de $C_i$, et nous pouvons appliquer à $\pi: X \to S$ et $\sigma_1, \ldots, \sigma_n$ le théorème 3.6, dont nous utilisons désormais les notations.

Définissons un fibré en droites sur $X'$ :

$$\xi' = \mathcal{O}\left(\sum_{i=1}^{n} d_i \sigma_i'(S')\right).$$

La restriction à $\pi(s)$ de $\Phi^*\xi'$ est isomorphe à $\mathcal{O}(\Sigma_{i=1}^n d_i P_i)$, donc topologiquement isomorphe à la restriction de $\xi$. Comme $\pi^{-1}(s)$ admet un voisinage dans $X$ qui se rétracte par déformation sur $\pi^{-1}(s)$, il en découle que, quitte à remplacer $V$ par un voisinage ouvert de $s$ plus petit, les fibrés $\xi$ et $\Phi^*\xi'$ sont topologiquement isomorphes sur $\pi^{-1}(V)$.

Or, d'après les lemmes 11.3 et 11.2 (1), le théorème 2.1 est vrai pour la famille $\pi: \pi^{-1}(V) \to V$ et le fibré $\Phi^*\xi'$. Il est donc vrai pour $\pi: \pi^{-1}(V) \to V$ et le fibré $\xi|_{\pi^{-1}(V)}$, en vertu de la proposition 10.6 (6). □

La validité du théorème 2.1 pour des fibrés de rang arbitraire découle de sa validité pour des fibrés de rang 1, de la proposition 10.6 (5) et de la proposition 3.5 qui montre que, localement sur la base, tout fibré holomorphe sur $X$ s'obtient par extensions successives à partir de fibrés en droites.

## 12. Démonstration du théorème 2.2

**12 (a)** Commençons par établir une variante du théorème 2.2, valable sous des hypothèses plus restrictives.

THÉORÈME 12.1. *Reprenons les hypothèses et les notations des théorèmes* 2.1 *et* 2.2, *et notons* $\Sigma$ *le lieu des points doubles des fibres de* $\pi$. *Si les courbures de* $(\omega_{X/S}, \| \ \|)$ *et* $(\xi, \| \ \|)$ *sont nulles au voisinage de* $\Sigma \cap \pi^{-1}(\Omega)$, *alors il existe* $\varphi_0 \in C^\infty(\Omega, \mathbf{R})$ *telle que*

$$\log \|\sigma\|_Q = \frac{1}{12} \operatorname{rg} \xi \log |f| + \varphi_0.$$

*En d'autres termes, la fonction* $|f|^{-\operatorname{rg} \xi/12} \|\sigma\|_Q$, *défini sur* $\Omega \setminus \Delta$, *se prolonge en une fonction* $C^\infty$ *partout non nulle sur* $\Omega$.

*Démonstration.* Le support de la forme différentielle $C^\infty$

$$[\operatorname{Td}(\omega_{X/S}^{-1}, \| \ \|^{-1}) \operatorname{ch}(\xi, \| \ \|)]^{(4)}$$

ne rencontre pas $\Sigma$. Par conséquent, son image par $\int_\pi$ est $C^\infty$ sur $\Omega$. Le théorème 2.1 montre alors que le courant

$$\partial\bar{\partial}\left[\log\|\sigma\|-\frac{1}{12}\operatorname{rg}\xi\log|f|\right]$$

est $C^\infty$ sur $\Omega$. Le théorème 12.1 découle donc de l'ellipticité de l'opérateur $\partial\bar{\partial}$ agissant sur les fonctions. □

Un argument semblable a été utilisé dans les démonstrations des théorèmes 5.3 et 5.4 et de la proposition 10.1. En fait, compte-tenu de l'égalité $\eta_i=\frac{1}{12}\operatorname{rg}\xi$, le théorème 12.1 découle de la démonstration du théorème 10.5.

Par ailleurs, on s'assure facilement que la conclusion du théorème 12.1 reste valable lorsque les courbures de $(\omega_{X/S},\|\ \|)$ et $(\xi,\|\ \|)$ sont seulement supposées nulles, ainsi que toutes leurs dérivées, en tout point de $\Sigma\cap\pi^{-1}(\Omega)$.

**12(b)** Démontrons maintenant le théorème 2.2 en toute généralité. Un argument très simple de partition de l'unité montre qu'il suffit pour cela de prouver que tout point $s$ de $\Omega$ possède un voisinage ouvert $\Omega'$ dans $\Omega$ sur lequel sont définies des fonctions $C^\infty$ $\varphi_i$, $i=0,1,\dots,m$, telles que l'égalité (2.10) soit satisfaite sur $\Omega'$.

Cette propriété va découler du théorème 12.1, de la formule d'anomalie (5.3) et du résultat suivant, qui précise la proposition 5.2.

THÉORÈME 12.2. *Soient $\Omega'$ un ouvert de $\Omega$ et $\beta$ une forme différentielle $C^\infty$ de type* (1,1) *sur $\pi^{-1}(\Omega')$. Il existe $\psi_0,\psi_1,\dots,\psi_N$ dans $C^\infty(\Omega')$ tels que, sur $\Omega'$*

$$\int_\pi\beta=\psi_0+\sum_{i=1}^{N}\psi_1|l_i|^2\log|l_i|.$$

En effet, tout point $s$ de $\Omega$ admet un voisinage ouvert $\Omega'$ dans $\Omega$ tels que $\xi$ et $\omega_{X/S}$ soient holomorphiquement triviaux sur un voisinage de $\pi^{-1}(\Omega)\cap\Sigma$ (car $\pi$ est propre et $\pi|_\Sigma$ est une immersion). Il existe alors des métriques hermitiennes $C^\infty$, $\|\ \|'$, sur $\xi$ et $\omega_{X/S}$ restreints à $\pi^{-1}(\Omega')$ dont les courbures sont nulles au voisinage de $\pi^{-1}(\Omega')\cap\Sigma$. Notons $\|\ \|'_Q$ la métrique de Quillen sur $\lambda(\xi)|_{\Omega'}$ déduite des métriques $\|\ \|'$ et posons

$$\beta=\widetilde{\mathrm{Td}}(\omega_{X/S}^{-1},\|\ \|^{-1},\|\ \|'^{-1})\,\mathrm{ch}(\xi,\|\ \|)+\mathrm{Td}(\omega_{X/S},\|\ \|^{-1})\,\widetilde{\mathrm{ch}}(\xi,\|\ \|,\|\ \|').$$

Il vient d'après (5.3)

$$\log\|\sigma\|_Q=\log\|\sigma\|'_Q-\int_\pi\beta.$$

Cette fonction est bien de la forme requise sur $\Omega'$, d'après le théorème 12.1 appliqué à $\pi:\pi^{-1}(\Omega')\to\Omega'$, $\xi|_{\pi^{-1}(\Omega')}$ et aux métriques $\| \|'$, et d'après le théorème 12.2.

Compte tenu de la description locale des f. s. o. (§ 3 (a)), le théorème 12.2 découle de l'énoncé suivant, au moyen d'un argument immédiat de partition de l'unité.

THÉORÈME 12.3 *Soit* $\pi: D_1^{n+1}\to D_1^n$ *l'application définie par*

$$\pi(w_0, \omega_1, \dots, w_n) = (w_0 w_1, w_2, \dots, w_n).$$

*Pour toute forme différentielle* $\alpha$ *de type* $(1,1)$, $C^\infty$ *et de support compact dans* $D_1^{n+1}$, *il existe* $\psi_0$ *et* $\psi_1$ *dans* $C^\infty(D_1^n)$ *tels que, pour tout* $w=(w_0, w_1, \dots, w_n)\in(D_1\setminus\{0\})\times D_1^n$,

$$\int_{\pi^{-1}(w)} \omega = \psi_0(w)+\psi_1(w)|w_0|^2\log|w_0|.$$

Lorsque $n=1$, ce théorème est un cas particulier des résultats d'Igusa sur les développements asymptotiques des fonctions obtenues par intégration de formes différentielles $C^\infty$ dans la fibre d'un morphisme non lisse (cf. [I]; voir aussi [Ba]). On peut aussi établir ce cas particulier au moyen de calculs tout à fait élémentaires, en considérant le développement de Taylor de $\omega$ au voisinage de $(0,0)$, en l'intégrant terme à terme, et en estimant les restes par un argument analogue à celui de la démonstration de la proposition 5.2. Une telle démonstration s'étend aisément au cas $n>1$. En fait, pour établir le théorème 12.3 dans le cas général, il suffit de montrer que, dans le cas particulier $n=1$, si la forme $\omega$ dépend de façon $C^\infty$ d'un paramètre, alors on peut choisir $\psi_0$ et $\psi_1$ dépendant de façon $C^\infty$ de ce paramètre. Cela découle aussi de la méthode d'Igusa, ou de considérations d'analyse fonctionnelles (théorème du graphe fermé; produits tensoriels topologiques).

**12 (c)** *Remarque*. La démonstration précédente fait appel à la formule d'anomalie (5.3). Il est facile de s'en passer en remarquant que la forme différentielle

$$[\mathrm{Td}(\omega_{X/S}^{-1}, \| \|^{-1})\,\mathrm{ch}(\xi, \| \|)]^{(4)}$$

s'écrit localement sur $X$ comme l'image par $\partial\bar\partial$ d'une forme de type (1.1). Le théorème 2.2 apparaît ainsi comme une conséquence directe des théorèmes 2.1 et 12.2.

Inversement, si l'on connaît le théorème 2.1 lorsque les fibres de $\pi$ sont lisses, on déduit facilement du théorème 2.2 le théorème 2.1 en toute généralité. En effet, le théorème 2.2 implique que $c_1(\lambda(\xi), \| \|_Q)$ est la somme de $-\frac{1}{12}(\mathrm{rg}\,\xi)\,\delta_\Delta$ et d'un courant localement $L^1$.

## 13. Exemples

**13 (a)** Cette section est consacrée à des exemples et des applications des théorèmes 2.1 et 2.2, dans le cas particulier où le fibré $\xi$ est le fibré trivial $\mathcal{O}_X$, muni de la métrique triviale $\| \ \|_0$, définie par $\|1\|_0=1$, et où les fibres de $\pi: X \to S$ sont connexes et admettent au plus un point singulier.

En premier lieu, nous décrivons deux f. s. o. $\pi: X \to S$ pour lesquelles on peut explicitement calculer la métrique de Quillen sur $\lambda(\mathcal{O}_X)$ (§ 13 (b) et 13 (c)). Nous déduisons ensuite du théorème 2.2 le comportement du déterminant régularisé du laplacien sur les fibres d'une f. s. o. $\pi: X \to D_\varepsilon$ munies de la métrique riemannienne associée à une métrique sur $\omega_{X/D_\varepsilon}$, dans le cas où $\Sigma$ est réduit à un point (§ 13 (d)). Nous présentons enfin un corollaire de ce résultat, qui se formule purement en termes de géométrie riemannienne, sans référence à la géométrie complexe : on considère une famille de surfaces munies d'une structure riemannienne $M_L$ ($L \in \mathbf{R}_+$), formées d'une surface compacte fixe, de bord deux cercles, à laquelle est recollée un cylindre plat de circonférence fixée et de longueur $L$, et l'on détermine le comportement asymptotique du déterminant régularisé du laplacien sur $M_L$ lorsque $L$ tend vers l'infini (§ 13 (e)).

Commençons par quelques rappels.

Soit $M$ une surface de Riemann compacte, et soit $\| \ \|$ une métrique hermitienne sur $\omega_M$. Cette métrique définit une métrique sur le fibré tangent complexe de $M$ (par dualité), donc une structure Riemannienne sur $M$. Soit $\Delta = d^* d$ le laplacien scalaire sur $M$ associé à cette métrique.

Par la construction du § 2.6, la métrique $\| \ \|$ sur $\omega_M$ détermine des produits scalaires $L^2$ sur $H^0(M, \mathcal{O}_M)$ et sur $H^1(M, \mathcal{O}_M)$ – $\mathcal{O}_M$ étant muni de la métrique triviale $\| \ \|_0$ – et sur $H^0(M, \omega_M)$, ainsi qu'un adjoint $\bar\partial^*$ de l'opérateur $\bar\partial: C^\infty(M) \to C^\infty(M, \bar\omega_M)$.

Le produit scalaire $L^2$ ainsi défini sur $H^0(M, \omega_M)$ est en fait indépendant du choix de $\| \ \|$, et s'exprime par la formule

$$\langle \alpha, \beta \rangle_{L^2} = -i \int_M \bar\alpha \wedge \beta. \tag{13.1}$$

De plus, l'isomorphisme du dualité de Serre (analytique)

$$H^1(M, \mathcal{O}_M) \cong H^0(M, \omega_M)^*$$

est une isométrie, relativement à ces produits scalaires.

On a aussi

$$\bar\partial^* \bar\partial = \frac{1}{2} \Delta.$$

De plus, si $M$ est connexe, de genre $g$, on a, pour tout $\lambda \in \mathbf{R}_+^*$

$$\det{}'(\lambda\Delta) = \lambda^{\zeta_\Delta(0)} \cdot \det{}'\Delta = \lambda^{-(g+2)/3} \cdot \det{}'\Delta. \tag{13.2}$$

Soit $\pi: X \to S$ une f. s. o. de fibres connexes. Le faisceau $R^0\pi_*\mathcal{O}_X$ s'identifie canoniquement à $\mathcal{O}_S$. Comme $\pi$ est plat, $\chi(\pi^{-1}(w), \mathcal{O}_{\pi^{-1}(w)})$ est une fonction localement constante de $w \in S$; par conséquent

$$\dim H^1(\pi^{-1}(w), \mathcal{O}_{\pi^{-1}(w)}) = 1 - \chi(\pi^{-1}(w), \mathcal{O}_{\pi^{-1}(w)})$$

est aussi localement constante, donc (de nouveau par platitude de $\pi$) $R^1\pi_*\mathcal{O}_X$ est localement libre, et pour tout $w \in S$, la fibre en $w$ de ce faisceau s'identifie à $H^1(\pi^{-1}(w), \mathcal{O}_{\pi^{-1}(w)})$. Cet espace s'identifie, par dualité de Serre (analytique), à $H^0(\pi^{-1}(w), \omega_{X/S})^*$, dont la dimension est donc une fonction localement constante de $w$. Il s'ensuit que $R^0\pi_*\omega_{X/S}$ est localement libre, de fibre en $w \in S$, $H^0(\pi^{-1}(w), \omega_{X/S})$. De plus, les isomorphismes de dualité qui précèdent déterminent un isomorphisme de fibrés vectoriels holomorphes

$$R^1\pi_*\mathcal{O}_X \cong (R^0\pi_*\omega_{X/S})^*.$$

On dispose ainsi d'un isomorphisme canonique

$$\lambda(\mathcal{O}_X) \cong \Lambda^{\max}(R^0\pi_*\,\omega_{X/S})^*. \tag{13.3}$$

**13 (b) Dégénérescence d'une famille de droites projectives complexes**

Cette section est consacrée à l'exemple de famille de surfaces de Riemann

$$\pi: X \to \mathbf{C},$$

où $X$ est obtenu en éclatant $(0, 0{:}\,1)$ dans $\mathbf{C} \times \mathbf{P}^1\mathbf{C}$ et où $\pi$ est la composée de l'éclatement $p: X \to \mathbf{C} \times \mathbf{P}^1\mathbf{C}$ et de la projection $\mathrm{pr}_1: \mathbf{C} \times \mathbf{P}^1\mathbf{C} \to \mathbf{C}$.

La famille

$$\pi: X \setminus \pi^{-1}(0) \to \mathbf{C}^* \setminus \{0\}$$

s'identifie à la famille produit

$$\mathrm{pr}_1: \mathbf{C}^* \times \mathbf{P}^1\mathbf{C} \to \mathbf{C}^*.$$

Soit $H$ l'hypersurface surface lisse de $\mathbf{C}\times\mathbf{P}^2\mathbf{C}$ définie par

$$(w, X{:}Y{:}Z)\in H \quad \Leftrightarrow \quad XY-wZ^2=0.$$

On vérifie aisément que l'application

$$X-p^{-1}(0,0{:}1)\cong(\mathbf{C}\times\mathbf{P}^1\mathbf{C})\{(0,0{:}1)\}\to H$$
$$(w, U{:}V)\to(w, U^2{:}\,wV^2{:}\,UV)$$

se prolonge en un isomorphisme (algébrique)

$$\varphi : X \stackrel{\sim}{\to} H.$$

De plus, l'application $\pi\circ\varphi^{-1}$ coïncide avec la restriction à $H$ de $\mathrm{pr}_1$. On en déduit facilement que $\pi : X\to\mathbf{C}$ est une f. s. o.

Soit $a\in\mathbf{R}_+^*$. On vérifie immédiatement que l'on définit une métrique $C^\infty$ sur le fibré en droites $\omega_{X/\mathbf{C}}$, au-dessus de l'ouvert $X-\pi^{-1}(0)$, identifié à $\mathbf{C}^*\times\mathbf{P}^1\mathbf{C}$, en posant

$$\|dt\|^2=|t|^4+a|t|^2+|w|^2,$$

où $t$ est la fonction méromorphe sur $\mathbf{C}^*\times\mathbf{P}^1\mathbf{C}$ définie par

$$t(w, X{:}\,Y)=\frac{X}{Y}.$$

Puis on vérifie aussi très simplement que cette métrique se prolonge en une métrique $C^\infty$ sur $\omega_{X/\mathbf{C}}$, au-dessus de $X$ tout entier.

Désormais, nous faisons $a=2$, et, pour tout $w\in\mathbf{C}^*$, nous notons $\|\ \|_w$ la métrique sur le fibré canonique de $\mathbf{P}^1\mathbf{C}$, identifié à $\{w\}\times\mathbf{P}^1\mathbf{C}=\pi^{-1}(w)$, définie par la métrique $\|\ \|$. Lorsque $|w|=1$, la métrique $\|\ \|_w$ coïncide avec la métrique de Fubini–Study, définie par la formule

$$\|dt\|_{\mathrm{FS}}^2=(1+|t|^2)^2.$$

Par ailleurs, l'isomorphisme canonique (13.3) devient ici une trivialisation canonique de $\lambda(\mathcal{O}_X)$, puisque $R^0\pi_*\,\omega_{X/\mathbf{C}}=0$. Il détermine donc une section canonique $\sigma$ de $\lambda(\mathcal{O}_X)$ sur $\mathbf{C}$, partout non nulle.

Soit enfin $\|\ \|_Q$ la métrique de Quillen sur $\lambda(\xi)$ associée à la métrique $\|\ \|$ sur $\omega_{X/\mathbf{C}}$ et à la métrique triviale $\|\ \|_0$ sur $\mathcal{O}_X$.

On peut calculer $\|\sigma(w)\|_Q/\|\sigma(1)\|_Q$ (où $w\in\mathbf{C}^*$) au moyen de la formule d'anomalie rappelée au théorème 5.1. En effet, grâce aux identifications de $\pi^{-1}(1)$ et $\pi^{-1}(w)$ avec

$\mathbf{P}^1\mathbf{C}$ et de $\lambda(\mathcal{O}_X)_1$ et $\lambda(\mathcal{O}_X)_w$ avec $[\det H^*(\mathbf{P}^1\mathbf{C}, \mathcal{O})]^{-1}$, on voit que ce nombre n'est autre que le quotient des métriques de Quillen sur $[\det H^*(\mathbf{P}^1\mathbf{C}, \mathcal{O})]^{-1}$ définies par les métriques $\| \|_1$ et $\| \|_w$ sur $\omega_{\mathbf{P}^1\mathbf{C}}$ ($\mathcal{O}_{\mathbf{P}^1\mathbf{C}}$ étant toujours muni de la métrique triviale). Il vient ainsi

$$\log \frac{\|\sigma(w)\|_Q^2}{\|\sigma(1)\|_Q^2} = \int_{\mathbf{P}^1\mathbf{C}} \widetilde{\mathrm{Td}}(T\mathbf{P}^1\mathbf{C}, \| \|_1^{-1}, \| \|_w^{-1}).$$

Explicitement, en posant $f_w = \| \|_1 / \| \|_w$, cette formule devient la « formule d'anomalie conforme de Polyakov » :

$$(13.4) \quad \log \frac{\|\sigma(w)\|_Q^2}{\|\sigma(1)\|_Q^2} = -\frac{1}{3}\int_{\mathbf{P}^1\mathbf{C}} \left[\log f_w \cdot c_1(T\mathbf{P}^1\mathbf{C}, \| \|_1^{-1}) + \frac{i}{2\pi}\partial \log f_w \wedge \bar\partial \log f_w\right].$$

Il vient :

$$f_w = (|t|^2 + 2|t|^2 + |w|^2)^{-1/2}(1+|t|^2)$$

$$c_1(T\mathbf{P}^1\mathbf{C}, \| \|_1^{-1}) = \frac{i}{\pi}\frac{dt \wedge d\bar t}{(1+|t|^2)^2}$$

$$\partial \log f_w = -\frac{(1-|w|^2)}{(1+|t|^2)(|t|^4+2|t|^4+|w|^2)}\bar t\, dt.$$

En reportant ces expressions dans le membre de droite de (13.4), on trouve

$$\log \frac{\|\sigma(w)\|_Q^2}{\|\sigma(1)\|_Q^2} = A(w) - A(1) + B(w)$$

où

$$A(w) = -\frac{1}{3}\int_{\mathbf{C}} -\frac{1}{2}\log(|t|^4 + 2|t|^2 + |w|^2)\frac{i}{\pi}\frac{dt \wedge d\bar t}{(1+|t|^2)^2}$$
$$= \frac{1}{3}\int_0^{+\infty} \log(x^2 + 2x + |w|^2)\frac{dx}{(1+x)^2}$$

et

$$B(w) = -\frac{1}{3\pi}(1-|w|^2)^2 \int_{\mathbf{C}} \frac{|t|^2}{(1+|t|^2)^2(|t|^4+2|t|^2+|w|^2)^2}\frac{i}{2}dt \wedge d\bar t$$
$$= -\frac{1}{3}(-1-|w|^2)^2 \int_0^{+\infty} \frac{x\, dx}{(1+x)^2(x^2+2x+|w|^2)^2}.$$

Les intégrales $A(\mathrm{w})$ et $B(w)$ se calculent élémentairement. Tout calcul fait, on trouve, en accord avec le théorème 2.2

$$\|\sigma(w)\|_Q = |w|^{1/12} e^{\varrho(w)} \|\sigma(1)\|_Q \tag{13.5}$$

où, pour tout $w$ tel que $|w|<1$,

$$\varrho(w) = -\frac{1}{12} + \frac{1}{12}(1-|w|^2)^{1/2}\log[1+(1-|w|^2)^{1/2}] + \frac{1}{24}[1-(1-|w|^2)^{-1/2}]\log|w|^2.$$

La fonction $\varrho$ admet un développement de la forme

$$\varrho(w) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n |w|^{2n} + \sum_{n=1}^{\infty} b_n |w|^{2n} \log|w|.$$

Elle est analytique réelle sur $\mathbf{C}-\{0\}$, de classe $C^1$ sur $\mathbf{C}$. Mais comme

$$b_1 = -\frac{1}{48} \neq 0$$

elle n'est pas deux fois différentiable en 0.

### 13(c) Dégénerescence d'une famille de courbes elliptiques

L'énoncé suivant est une reformulation en termes de métriques de Quillen de résultats classiques de la théorie des fonctions elliptiques.

THÉORÈME 13.1. *Soient $M$ une surface de Riemann compacte connexe de genre* 1 *et $\alpha$ une forme différentielle holomorphe sur $M$ (partout) non nulle. Soit $\Gamma\subset\mathbf{C}$ le réseau des périodes de $\alpha$* – i.e. *l'ensemble des $\int_\gamma \alpha, \gamma\in H_1(M;\mathbf{Z})$ – et $g_2$ et $g_3$ les invariants du réseau $\Gamma$, définis par*

$$g_2 = 60 \sum_{\gamma\in\Gamma-\{0\}} \gamma^{-4} \quad \text{et} \quad g_3 = 140 \sum_{\gamma\in\Gamma-\{0\}} \gamma^{-6}.$$

*Soit enfin $\Delta = g_2^3 - 27 g_3^2$ le discriminant de $(M,\alpha)$.*

*Soit $\| \ \|_Q$ la métrique de Quillen sur* $\det H^*(M, \mathcal{O}_M)$ *associée*[1] *à la métrique $\| \ \|$ sur $\omega_M$ définie par*

$$\|\alpha\| = 1,$$

[1] On vérifie aisément que cette métrique sur det $H^*(M, \mathcal{O}_M)$ est en fait indépendante du choix de $\alpha$.

*et à la métrique triviale sur $\mathcal{O}_M$. L'isomorphisme canonique*

$$\det H^*(M, \mathcal{O}_M) \cong \Lambda^{\max} H^0(M, \omega_M)^*$$

*devient ici*

$$\det H^*(M, \mathcal{O}_M) \cong (\mathbf{C}\alpha)^* = \mathbf{C}\alpha^{-1},$$

*où $\alpha^{-1}$ désigne la forme linéaire sur $\mathbf{C}\alpha$ valant 1 sur $\alpha$, et l'on a*

$$\|\alpha^{-1}\|_Q = \frac{1}{2\pi} |\Delta|^{1/12}. \tag{13.6}$$

Ce théorème découle aisément de la formule limite de Kronecker [W, p. 75], appliquée au réseau dual de $\Gamma$. Nous laissons le détail des calculs au lecteur.

Rappelons qu'il existe un espace de modules fin pour les courbes elliptiques munies d'une forme différentielle holomorphe (partout) non nulle. On le réalise par l'ouvert $S_0$ de $\mathbf{C}^2$ constitué des couples $(p, q)$ tels que $p^3 - 27q^2 \neq 0$ et par la courbe elliptique au dessus de $S_0$

$$\pi : X_0 \overset{e}{\leftrightarrows} S_0,$$

où $X_0$ est le fermé (algébrique) de $S_0 \times \mathbf{P}^2\mathbf{C}$ formé des points $(p, q, U:V:W)$ tels que

$$V^2 W = 4U^3 - pUW^2 - qW^3 \tag{13.6}$$

et où

$$\pi(p, q, U:V:W) = (p, q)$$

et

$$e(p, q) = (p, q, 1:0:0),$$

munie de la forme différentielle holomorphe verticale $\beta = dU/V$. De plus, pour tout $(p, q) \in S_0$, les invariants du réseau des périodes de $(\pi^{-1}(p, q), \beta)$ sont $g_2 = p$ et $g_3 = q$. La famille $\pi: X_0 \to S_0$ se prolonge en une f. s. o. $\pi: X \to S$, où $S = \mathbf{C}^2 - \{(0,0)\}$ et où $X$ est le fermé de $S \times \mathbf{P}^2\mathbf{C}$ définie par (13.6). Le diviseur des courbes singulières de cette f. s. o. est défini par l'annulation de $\Delta = p^3 - 27q^2$; nous le noterons $D$. La forme différentielle $\beta$ se prolonge en une section partout non nulle de $\omega_{X/S}$, et définit une section sur $S$ du fibré en droites $R^0 P_* \omega_{X/S}$, partout non nulle, que nous noterons encore $\beta$.

L'isomorphisme canonique

$$\lambda(\mathcal{O}_X) \cong (\Lambda^{\max} R^0\pi_* \omega_{X/S})^{-1} = (R^0\pi_* \omega_{X/S})^{-1}$$

permet de considérer la section $\beta^{-1}$ de $(R^0\pi_* \omega_{X/S})^{-1}$, duale de la section $\beta$ de $R^0\pi_* \omega_{X/S}$, comme une section de $\lambda(\mathcal{O}_X)$. Si $\| \ \|_Q$ est la métrique de Quillen sur $\lambda(\mathcal{O}_X)$ associée à la métrique $\| \ \|$ sur $\omega_{X/S}$ définie par

$$\|\beta\| = 1$$

et à la métrique triviale sur $\mathcal{O}_X$, on tire alors du théorème 13.1

$$\|\beta^{-1}\|_Q = \frac{1}{2\pi} |\Delta|^{1/12} \quad \text{sur} \quad S_0 = S \setminus D.$$

En particulier, on voit immédiatement sur cette formule que $\| \ \|_Q$ est une métrique généralisée sur $\lambda(\mathcal{O}_X)$ au-dessus de $S$ tout entier et que

$$c_1(\lambda(\xi), \| \ \|_Q) = \frac{1}{12} \delta_D, \tag{13.7}$$

conformément au théorème 2.1, puisque

$$c_1(\omega_{X/S}, \| \ \|) = c_1(\mathcal{O}_X, \| \ \|) = 0.$$

*Remarque.* L'équation (13.7) peut s'écrire comme l'égalité de courants sur $\mathbf{C}^2 \setminus \{(0,0)\}$

$$\partial\bar{\partial} f = 0 \tag{13.8}$$

où

$$f = \log \|\beta^{-1}\|_Q - \frac{1}{12} \log |\Delta|.$$

Par ailleurs, on vérifie aisément que $f$ satisfait à la relation d'homogénéité suivante, pour tout $(p, q) \in S_0$ et tout $\lambda \in \mathbf{C}^*$

$$f(\lambda^2 p, \lambda^3 q) = f(p, q);$$

elle est donc bornée sur $\mathbf{C}^2 \setminus \{(0,0)\}$. Joint à (13.8), cela montre que $f$ est constante, donc qu'il existe $C \in \mathbf{R}_+^*$ tel que

$$\|\beta^{-1}\| = C |\Delta|^{1/12}.$$

On peut ainsi dériver du théorème 2.1 le théorème 13.1, c'est-à-dire la formule limite de Kronecker (à une constante multiplicative près).

**13(d)** Nous nous proposons d'établir dans cette section le théorème suivant.

THÉORÈME 13.2. *Soit $\pi: X \to D_\varepsilon$ une f. s. o. de fibres connexes, dont la seule fibre singulière est $Z_0 = \pi^{-1}(0)$, et telle que $Z_0$ possède un unique point singulier. On suppose $\omega_{X/D_\varepsilon}$ muni d'une métrique hermitienne $C^\infty$ $\| \ \|$ et, pour tout $w \in D_\varepsilon - \{0\}$, l'on désigne par $\Delta_w$ le laplacien scalaire sur $Z_w = \pi^{-1}(w)$ muni de la structure riemannienne définie par la métrique $\| \ \|$ sur $\omega_{Z_w}$.*

*Si $Z_0$ est irréductible, il existe $c \in \mathbf{R}_+^*$ tel que*

$$\det{}' \Delta_w \sim c|w|^{1/6}\left[\log \frac{1}{|w|}\right]^2 \quad (w \to 0).$$

*Si $Z_0$ n'est pas irréductible (et admet donc deux composantes irréductibles lisses), il existe $c \in \mathbf{R}_+^*$ tel que*

$$\det{}' \Delta_w \sim c|w|^{1/6} \log \frac{1}{|w|} \quad (w \to 0).$$

Compte-tenu de la définition de la métrique de Quillen et des identités (13.1) et (13.2), ce théorème est une conséquence immédiate du théorème 2.2 et de l'énoncé suivant.

PROPOSITION 13.3. *Conservons les notations et les hypothèses du théorème* 13.2 *et notons $\| \ \|_{L^2}$ la métrique $L^2$ sur $\lambda(\mathcal{O}_X)$ au-dessus de $D_\varepsilon - \{0\}$ déterminée par la métrique $\| \ \|$ sur $\omega_{X/D_\varepsilon}$ et la métrique triviale sur $\mathcal{O}_X$. Soit $\sigma$ une section holomorphe de $\lambda(\mathcal{O}_X)$ sur $D_\varepsilon$ telle que $\sigma(0) \neq 0$.*

*Si $X_0$ est irréductible, il existe $c \in \mathbf{R}_+^*$ tel que*

$$\|\sigma(w)\|_{L^2}^2 \sim c\left[\log \frac{1}{|w|}\right]^{-2} \quad (w \to 0).$$

*Si $X_0$ n'est pas irréductible, il existe $c \in \mathbf{R}_+^*$ tel que*

$$\|\sigma(w)\|_{L^2}^2 \sim c\left[\log \frac{1}{|w|}\right]^{-1} \quad (w \to 0).$$

Cette proposition découle à son tour des deux propositions suivantes.

PROPOSITION 13.4. *Conservons les notations et les hypothèses du théorème* 13.2 *et notons* **1** *la section de $R^0\pi_*\mathcal{O}_X$ sur $D$ définie par la fonction* 1 *sur $X$ et $\| \ \|_{L^2}$ la norme $L^2$*

*sur* $R^0\pi_*\mathcal{O}_X$, *au-dessus de* $D_\varepsilon-\{0\}$, *déterminée par la métrique* $\|\ \|$ *sur* $\omega_{X/D_\varepsilon}$ *et la métrique triviale sur* $\mathcal{O}_X$. *Il existe* $c\in\mathbf{R}_+^*$ *tel que*

$$\|\mathbf{1}(w)\|_{L^2}^2\sim c\log\frac{1}{|w|}.$$

PROPOSITION 13.5. *Soit* $\pi: X\to D_\varepsilon$ *une f. s. o. satisfaisant aux conditions du théorème* 13.2, *et soit* $\langle\ ,\ \rangle_{L^2}$ *la structure hermitienne sur* $R^0\pi_*\,\omega_{X/D_\varepsilon}$, *au-dessus de* $D_\varepsilon-\{0\}$, *définie par la formule* (13.1) (*avec* $M=Z_w$, $w\in D_\varepsilon-\{0\}$). *Soit de plus* $(\alpha_i)_{1\leq i\leq g}$ *une famille de sections de* $R^0\pi_*\,\omega_{X/D_\varepsilon}$ *sur* $D_\varepsilon$, *partout libre et génératrice, et soit*

$$\begin{aligned} D: D_\varepsilon-\{0\}&\to\mathbf{R}_+^*\\ w&\mapsto\det(\langle\alpha_i(w),\alpha_j(w)\rangle_{L^2})_{1\leq i,j\leq g}.\end{aligned}$$

*Si* $Z_0$ *est irréductible, il existe* $c\in\mathbf{R}_+^*$ *tel que*

$$D(w)\sim c\log\frac{1}{|w|}\quad(w\to 0).$$

*Si* $Z_0$ *n'est pas irréductible, la fonction* $D$ *admet un prolongement continu sur* $D_\varepsilon$, *non nul en* 0.

*Démonstration de la proposition* 13.4. D'après la proposition 3.1, il existe un voisinage ouvert $U$ dans $X$ du point singulier $\Sigma$ de $Z_0$ et un isomorphisme holomorphe

$$(x,y)\colon U\to D_{\varepsilon'}\times D_{\varepsilon'}$$

tel que

$$\pi|_U=xy.$$

Notons $\lambda$ la fonction de $C^\infty(D_{\varepsilon'}\times D_{\varepsilon'},\mathbf{R}_+^*)$ telle que, sur $U\setminus[x^{-1}(0)\cup y^{-1}(0)]$,

$$\left\|\frac{dx}{x}\right\|=\left\|\frac{dy}{y}\right\|=\lambda(x,y)$$

et choisissons une fonction $\varrho$, $C^\infty$ sur $X$, de support dans $U$ et valant 1 au voisinage de $\Sigma$.

Soit $dA_w$ la densité positive sur $Z_w$ ($w\in D_\varepsilon-\{0\}$) définie localement par la formule suivante, où $\beta$ désigne une section non nulle de $\omega_{Z_w}$

$$dA_w=i\frac{\beta\wedge\bar\beta}{\|\beta\|^2}.$$

Il vient

$$\|\mathbf{1}(w)\|^2_{L^2} = \int_{Z_w} dA_w = \int_{Z_w} \varrho \, dA_w + \int_{Z_w} (1-\varrho)\, dA_w.$$

Comme $\pi$ est une submersion en dehors du support de $(1-\varrho)$, l'intégrale

$$\int_{Z_w} (1-\varrho)\, dA_w$$

définit une fonction de $w \in D_\varepsilon - \{0\}$ qui se prolonge en une fonction $C^\infty$ sur $D_\varepsilon$. De plus, si $\tilde{\varrho}$ est la fonction sur $D_{\varepsilon'} \times D_{\varepsilon'}$ telle que $\varrho = \tilde{\varrho}(x, y)$, l'on a, pour tout $w \in D_\varepsilon$ tel que $0<|w|<\varepsilon^2$

$$\int_{Z_w} \varrho \, dA_w = \int_{Z_w \cap U} \varrho \, dA_w = \int_{\varepsilon'^{-1}|w|<|x|<\varepsilon'} \tilde{\varrho}(x, w/x)\, i\lambda(x, w/x)^{-2} \frac{dx \wedge d\bar{x}}{|x|^2}.$$

Lorsque $w$ tend vers 0, cette expression admet comme équivalent

$$\lambda(0,0)^{-2} \int_{\varepsilon'^{-1}|w|<|\alpha|<\varepsilon'} i \frac{dx \wedge d\bar{x}}{|x|^2} = 4\pi\lambda(0,0)^{-2} \log \frac{\varepsilon'^2}{|w|}. \qquad \square$$

*Démonstration de la proposition* 13.5. Nous noterons $g$ le genre (arithmétique) des fibres de $\pi$, et, pour simplifier, $\omega$ au lieu de $\omega_{X/D_\varepsilon}$.

Soit $\nu : \tilde{Z}_0 \to Z_0$ la normalisation de $Z_0 = \pi^{-1}(0)$, et soient $\Sigma_1$ et $\Sigma_2$ les images réciproques par $\nu$ du point singulier $\Sigma$ de $Z_0$. Par construction, $\tilde{Z}_0$ est une courbe complexe compacte lisse. Deux cas se présentent :

(I) lorsque $Z_0$ est irréductible, alors $g \geq 1$ et $\tilde{Z}_0$ est une courbe connexe de genre $g-1$;

(II) lorsque $Z_0$ n'est pas irréductible, alors $\tilde{Z}_0$ a deux composantes connexes $\tilde{Z}'_0$ et $\tilde{Z}''_0$, de genres $g'$ et $g''$, et $g'+g''=g$.

On vérifie aisément que l'image inverse par $\nu$ établit un isomorphisme $\nu^*$ entre $H^0(Z_0, \omega_{Z_0})$ et l'espace

$$\left\{ s \in H^0(\tilde{Z}_0, \omega_{\tilde{Z}_0} \otimes \mathcal{O}(\Sigma_1 + \Sigma_2)) \mid \operatorname{Res}_{\Sigma_1} s + \operatorname{Res}_{\Sigma_2} s = 0 \right\}.$$

Dans le cas (I), il vient

$$\dim H^0(\tilde{Z}_0, \omega_{\tilde{Z}_0}) = g-1 = \dim \nu^* H^0(Z_0, \omega|_{Z_0})-1.$$

Par conséquent, il existe $\alpha_g^0 \in H^0(Z_0, \omega|_{Z_0})$ telle que

$$\mathrm{Res}_{\Sigma_1} \nu^*\alpha_g^0 = -\mathrm{Res}_{\Sigma_2} \nu^*\alpha_g^0 \neq 0,$$

et l'on a

$$H^0(Z_0, \omega|_{Z_0}) = \nu^{*-1}\big(H^0(\tilde{Z}_0, \omega_{\tilde{Z}_0})\big) \oplus \mathbf{C}\alpha_g^0.$$

Choisissons une base $(\alpha_1^0, \ldots, \alpha_{g-1}^0)$ de $\nu^{*-1}(H^0(\tilde{Z}_0, \omega_{\tilde{Z}_0}))$; la famille $(\alpha_i^0, \ldots, \alpha_g^0)$ forme alors une base de $H^0(Z_0, \omega|_{Z_0})$.

Dans le cas (II), il vient

$$\dim H^0(Z_0, \omega|_{Z_0}) = g = g'+g'' = \dim H^0(\tilde{Z}_0', \omega_{\tilde{Z}_0'}) + \dim H^0(\tilde{Z}_0'', \omega_{\tilde{Z}_0''}).$$

Par conséquent, il existe une base $(\alpha_1^0, \ldots, \alpha_g^0)$ de $H^0(Z_0, \omega|_{Z_0})$ telle que $\nu^*\alpha_i^0$ soit une forme différentielle holomorphe sur $\tilde{Z}_0$, nulle sur $\tilde{Z}_0''$ si $1 \leq i \leq g_1$ et nulle sur $\tilde{Z}_0'$ si $g_1+1 \leq i \leq g$.

Soit alors $(\alpha_1, \ldots, \alpha_g)$ une famille de sections de $R^0\pi_*\omega$ sur un voisinage ouvert $V$ de $0$ dans $D_\varepsilon$ telles que $\alpha_i(0)=\alpha_i^0$. Nous allons établir la proposition 13.5 pour cette famille particulière; le cas général s'en déduit immédiatement.

Nous ferons usage du résultat suivant, dont nous omettons la démonstration, qui se ramène à un calcul local au voisinage de $\Sigma$, comme celle de la proposition 13.4, et ne présente aucune difficulté.

LEMME 13.6. *Soient $\alpha$ et $\beta$ deux sections de $R^0\pi_*\omega$ sur un voisinage ouvert $V$ de $0$ dans $D_\varepsilon$, telles que $\nu^*\alpha(0)$, en tant que section de $\omega_{\tilde{Z}_0}$, n'admette pas de pôle en $\Sigma_1$ et $\Sigma_2$. Alors la fonction*

$$\begin{aligned} V-\{0\} &\to \mathbf{C} \\ w &\mapsto \langle \alpha(w), \beta(w) \rangle_{L^2} \end{aligned}$$

*se prolonge en une fonction continue sur $V$, qui prend en $0$ la valeur*

$$-i \int_{\tilde{Z}_0} \overline{\nu^*\alpha(0)} \wedge \nu^*\beta(0).$$

Dans le cas (II), on peut appliquer le lemme 13.6 aux produits scalaires

$\langle \alpha_i(w), \alpha_j(w)\rangle_{L^2}$, $1\leq i,j\leq g$. On obtient ainsi l'existence du prolongement continu de $D(w)$ jusqu'à $z=0$. De plus

$$D(0)=\det\left(-i\int_{\tilde Z_0}\overline{\nu^*\alpha_k^0}\wedge\nu^*\alpha_l^0\right)_{1\leq k,l\leq g}$$
$$=\det\left(-i\int_{\tilde Z_0'}\overline{\nu^*\alpha_k^0}\wedge\nu^*\alpha_l^0\right)_{1\leq k,l\leq g_1}\det\left(-i\int_{\tilde Z_0''}\overline{\nu^*\alpha_k^0}\wedge\nu^*\alpha_l^0\right)_{g_1+1\leq k,l\leq g_1}$$

est non nul, puisque $(\nu^*\alpha_i^0|_{\tilde Z_0'})_{1\leq i\leq g_1}$ (resp. $(\nu^*\alpha_i^0|_{\tilde Z_0''})_{g_1+1\leq i\leq g}$) est une base de $H^0(\tilde Z_0', \omega_{\tilde Z_0'})$ (resp. de $H^0(\tilde Z_0'', \omega_{\tilde Z_0''})$).

Dans le cas (I), on peut appliquer le lemme 13.6 aux produits scalaires $\langle \alpha_i(w), \alpha_j(w)\rangle_{L^2}$, $1\leq i,j\leq g$, $(i,j)\neq(g,g)$. En particulier, comme fonction de $w\in V\setminus\{0\}$, $\det(\langle \alpha_k(w), \alpha_l(w)\rangle_{L^2})_{1\leq k,l\leq g-1}$ se prolonge continûment sur $V$ et vaut en 0

$$A=\det\left(-i\int_{\tilde Z_0}\overline{\nu^*\alpha_k^0}\wedge\nu^*\alpha_l^0\right)_{1\leq k,l\leq g-1}$$

qui est non nul, puisque $(\nu^*\alpha_k^0)_{1\leq k\leq g-1}$ est une base de $H^0(\tilde Z_0, \omega_{\tilde Z_0})$. Pour étudier $\langle \alpha_g(w), \alpha_g(w)\rangle_{L^2}$, choisissons un voisinage ouvert $U$ de $\Sigma$ dans $X$ et un isomorphisme holomorphe

$$(x,y)\colon U\to D_{\varepsilon'}\times D_{\varepsilon'}$$

tel que

$$\pi|_U=xy$$

et que

$$\nu(\tilde Z_0')\cap U=x^{-1}(0)\quad\text{et}\quad \nu(\tilde Z_0'')\cap U=y^{-1}(0).$$

On peut identifier $\alpha_g$ à une section holomorphe de $\omega$ sur un voisinage ouvert de $Z_0$ dans $X$. On a alors, sur $U$

$$\alpha_g=f\frac{dx}{x}$$

où $f$ est une fonction holomorphe sur $\psi$ telle que $f(\Sigma)\neq0$. Il vient alors, lorsque $w$ tend vers 0, par un raisonnement semblable à celui de la démonstration de la proposition 13.4

$$\begin{aligned}
\langle \alpha_g(w), \alpha_g(w) \rangle_{L^2} &= i \int_{Z_w} \alpha_g \wedge \bar{\alpha}_g \\
&= i \int_{Z_w \cap U} \alpha_g \wedge \bar{\alpha}_g + O(1) \\
&= \int_{|w|/\varepsilon' < |x| < \varepsilon} |f(x, w/x)|^2 \, i \frac{dx \wedge d\bar{x}}{|x|^2} + O(1) \\
&= |f(0,0)|^2 \int_{|w|/\varepsilon' < |x| < \varepsilon} i \frac{dx \wedge d\bar{x}}{|x|^2} + O(1) \\
&= 4\pi |f(0,0)|^2 \log \frac{1}{|w|} + O(1).
\end{aligned}$$

Par conséquent

$$\begin{aligned}
D(w) &= \det(\langle \alpha_i(w), \alpha_j(w) \rangle_{L^2})_{1 \leq i,j \leq g-1} \langle \alpha_g(w), \alpha_g(w) \rangle_{L^2} + O(1) \\
&\sim 4\pi |f(0,0)|^2 A \log \frac{1}{|w|}.
\end{aligned}$$

□

*Remarque*. La proposition 13.5 est une conséquence classique des propriétés de l'application des périodes « au bord de l'espace des modules de courbes ». Toutefois, nous n'avons pas su trouver de référence explicite pour l'énoncé de la proposition 13.5, et nous avons préféré en donner une démonstration directe.

Une variante au recours à l'application des périodes consisterait à introduire la jacobienne relative de $X$ sur $D_\varepsilon$

$$\pi' : J \overset{e}{\leftrightarrows} D_\varepsilon,$$

et à utiliser que, compte tenu de l'isomorphisme

$$R^0\pi_* \, \omega_{X/D_\varepsilon} \cong e^* \, \Omega^1_{J/D_\varepsilon},$$

qui permet d'identifier $\alpha_i(w)$ à une section invariante par translation de $\Omega^1_{\pi'^{-1}(w)}$, il vient pour tout $w \in D_\varepsilon \setminus \{0\}$ (cf. [Sz; p. 26–27])

$$\begin{aligned}
D(w) &= \det\left( -i \int_{\pi^{-1}(w)} \bar{\alpha}_k(w) \wedge \alpha_l(w) \right)_{1 \leq k, l \leq g} \\
&= i^{g^2} \int_{\pi'^{-1}(w)} \alpha_1(w) \wedge \ldots \wedge \alpha_g(w) \wedge \bar{\alpha}_1(w) \wedge \ldots \wedge \bar{\alpha}_g(w).
\end{aligned} \tag{13.9}$$

Lorsque $Z_0$ n'est pas irréducible, la jacobienne relative $J$ est une variété abélienne sur $D_\varepsilon$; l'intégrale (13.9) admet un prolongement analytique réel sur tout $D_\varepsilon$. Lorsque $Z_0$ est irréductible, $J$ n'est que semi-abélienne et $\pi'^{-1}(0)$ est extension d'une variété abélienne par $\mathbf{C}^*$. Un calcul direct sur un modèle local de dégénérescence des variétés abéliennes établit alors le comportement logarithmique de (13.9).

**13(e)** Soit $M$ une surface (réelle) $C^\infty$ compacte et orientée, dont le bord $\partial M$ possède deux composantes connexes $S_1$ et $S_2$, et soit $g$ une métrique Riemanienne $C^\infty$ sur $M$ telle qu'il existe des voisinages ouverts $V_i$ de $S_i$ $(i=1,2)$, $\varepsilon>0$, et des difféomorphismes préservant l'orientation

$$\varphi_i: [0,\varepsilon[\times\mathbf{R}/\mathbf{Z}\to V_i \quad (i=1,2)$$

tels que les métriques $\varphi_i^* g$ coïncident avec la métrique riemannienne sur $[0,\varepsilon[\times\mathbf{R}/\mathbf{Z}$ déduite de la métrique euclidienne usuelle sur $\mathbf{R}^2$.

Pour tout $L>0$, posons $C_L=[0,L]\times\mathbf{R}/\mathbf{Z}$, et considérons la surface compacte sans bord $M_L$ obtenue en recollant $C_L$ à $M$ par les applications

$$\begin{array}{ccc} \{0\}\times\mathbf{R}/\mathbf{Z}\to S_1 & \text{et} & \{L\}\times\mathbf{R}/\mathbf{Z}\to S_2 \\ (0,\theta)\mapsto\varphi_1(0,-\theta) & & (L,\theta)\mapsto\varphi_2(0,\theta). \end{array}$$

La variété topologique $M_L$ possède une unique structure de variété riemannienne $C^\infty$ telle que les inclusions

$$M\hookrightarrow M_L \quad \text{et} \quad C_L\hookrightarrow M_L$$

soient des plongements isométriques lorsque $M$ et $C_L$ sont munis respectivement de la métrique $g$ et de la métrique déduite de la métrique euclidienne usuelle sur $\mathbf{R}^2$.

On déduit aisément du théorème 13.2 le comportement asymptotique, lorsque $L$ tend vers l'infini, du déterminant régularisé $\det' D_L$ du laplacien riemanien (scalaire) $\Delta_L=d^*d$ sur $M_L$.

THÉORÈME 13.7. *Si $S_1$ et $S_2$ appartiennent à une même composante connexe de $M$, alors il existe $c\in\mathbf{R}_+^*$ tel que*

$$\det{}'\Delta_L\sim cL^2e^{-\pi L/3} \quad (L\to+\infty).$$

*Si $S_1$ et $S_2$ appartiennent à des composantes connexes de $M$ distinctes, alors il existe $c\in\mathbf{R}_+^*$ tel que*

$$\det{}'\Delta_L\sim cLe^{-\pi L/3} \quad (L\to+\infty).$$

*Démonstration.* On peut supposer que chaque composante connexe de M rencontre $\partial M$. Posons

$$D=\{w\in\mathbf{C}|\ |w|<1\}$$
$$\bar{D}=\{w\in\mathbf{C}|\ |w|\leq 1\}$$
$$\mathbf{S}^1=\{w\in\mathbf{C}|\ |w|=1\},$$

et

$$\begin{aligned}\psi_j:\mathbf{S}^1&\to S_j\quad (j=1,2)\\ e^{2\pi i\theta}&\mapsto\varphi_i(0,\theta).\end{aligned}$$

Soit $P=(\bar{D}\times\bar{D})\setminus(\mathbf{S}^1\times\mathbf{S}^1)$. C'est une variété à bord, de bord $\mathbf{S}^1\times D\cup D\times\mathbf{S}^1$ difféomorphe au bord $S_1\times D\cup S_2\times D$ de $M\times\bar{D}$ par l'application $\psi$ définie par

$$\psi(x,y)=(\psi_1(x),xy)\quad\text{si}\quad (x,y)\in\mathbf{S}^1\times D;$$
$$\psi(x,y)=(\psi_2(y),xy)\quad\text{si}\quad (x,y)\in D\times\mathbf{S}_1.$$

Notons $X$ l'espace obtenu par recollement de $P$ et $M\times D$ de long de leur bord par $\psi$. Munissons $\mathring{M}$ de l'unique structure analytique complexe compatible avec la métrique riemannienne $g$ et l'orientation de $M$. On vérifie aisément que $X$ possède une (unique) structure de surface analytique complexe qui fait des inclusions

$$\mathring{P}\hookrightarrow X\quad\text{et}\quad \mathring{M}\times D_1\hookrightarrow X$$

des plongements ouverts. De plus, les applications

$$\begin{aligned}M\times D&\to D &\quad\text{et}\quad P&\to D\\ (m,w)&\mapsto w & (x,y)&\mapsto xy\end{aligned}$$

sont compatibles au recollement et définissent une application holomorphe

$$\pi:X\to D,$$

qui est une f. s. o. Celle-ci admet $Z_0=\pi^{-1}(0)$ comme seule fibre singulière. Le seul point singulier de $Z_0$ est $(0,0)\in P$, et $Z_0$ est (resp. n'est pas) irréductible si $Z_0-\{(0,0)\}$ est (resp. n'est pas) connexe, i.e. si $M$ est (resp. n'est pas) connexe.

Soit $\sigma$ la section de $\omega_{X/D}$ sur $\mathring{P}$ telle que $\sigma=dx/x$ sur $D-\{0\}\times D$ et que $\sigma=-dy/y$ sur $D\times D-\{0\}$ (cf. § 3(c)) et soit $\|\ \|$ la métrique sur $\omega_{X/D}$ telle que, pour tout $w\in D$, la structure riemannienne induite sur la sous-variété $M\times\{w\}$ de $\pi^{-1}(w)$ soit la structure riemannienne donnée sur $M$ et telle que

$$\|\sigma\|^2 = 8\pi^2.$$

On vérifie sans peine que $\|\ \|$ est une métrique $C^\infty$ et que, muni de la structure riemannienne associée à cette métrique, $\pi^{-1}(e^{-2\pi L})$ est isométrique à $M_L$. La conclusion du théorème découle donc du théorème 13.2 appliquée à $\pi: X \to D$. □

## Bibliographie


[A] Atiyah, M. F., The logarithm of the Dedekind eta function. *Math. Ann.*, 278 (1987), 335–380.

[APS1] Atiyah, M. F., Patodi, V. K. & Singer, I. M., Spectral asymmetry and Riemannian geometry. I. *Math. Proc. Cambridge Philos. Soc.*, 77 (1975), 43–69.

[APS2] — Spectral asymmetry and Riemannian geometry. II. *Math. Proc. Cambridge Philos. Soc.*, 79 (1976), 71–99.

[B] Bismut, J.-M., Demailly's asymptotic Morse inequalities: a heat equation proof. *J. Funct. Anal.*, 72 (1987), 263–278.

[Ba] Barlet, D., Développement asymptotique des fonctions obtenues par intégration dans la fibre. *Invent. math.*, 68 (1982), 129–174.

[BB] Bismut, J.-M. & Bost, J.-B., Fibrés déterminants, métriques de Quillen et dégénérescence des courbes. *C. R. Acad. Sci. Paris Sér I*, 307 (1988), 317–320.

[BC] Bott, R. & Chern, S.-S., Hermitian vector bundles and the equidistribution of the zeroes of their holomorphic sections. *Acta Math.*, 114 (1968), 71–112.

[BF] Bismut, J. M. & Freed, D. S., The analysis of elliptic families I, II. *Comm. Math. Phys.*, 106 (1986), 159–176 and 107 (1986), 103–163.

[BGS1] Bismut, J. M., Gillet, H. & Soulé, C., Analytic torsion and holomorphic determinant bundles. I. Bott–Chern forms and analytic torsion. *Comm. Math. Phys.*, 115 (1988), 49–78.

[BGS2] — Analytic torsion and holomorphic determinant bundles. II. Direct images and Bott–Chern forms. *Comm. Math. Phys.*, 115 (1988), 79–126.

[BGS3] — Analytic torsion and holomorphic determinant bundles. III. Quillen metrics and holomorphic determinants. *Comm. Math. Phys.*, 115 (1988), 301–351.

[BK] Belavin, A. & Knizhnik, V., Complex geometry and theory of quantum strings. Landau Institute Preprint.

[BS] Borel, A. & Serre, J.-P., Le théorème de Riemann–Roch, d'après Grothendieck. *Bull. Soc. Math. France*, 86 (1958), 97–136.

[Ch] Chern, S.-S., *Complex Manifolds without Potential Theory*. 2nd edition. Springer Verlag, 1979.

[CGT] Cheeger, J., Gromov, M. & Taylor, M., Finite propagation speed, kernel estimates for functions of the Laplace operator and the geometry of Riemannian complete manifolds. *J. Differential Geom.*, 17 (1982), 15–53.

[D] Deligne, P., Le déterminant de la cohomologie. *Contemporary Mathematics*, vol. 67, 93–178.

[DM] Deligne, P. & Mumford, D., The irreducibility of the space of curves of a given genus. *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.*, 36 (1969), 75–109.

[F] FALTINGS, G., Endlichkeitssätze für abelsche Varietäten über Zahlkörpern. *Invent. Math.*, 73 (1983), 349–366.

[GR] GRAUERT, H. & REMMERT, R., Bilder und Urbilder analytischer Garben. *Ann. of Math.*, 68 (1958), 393–443.

[Grau] GRAUERT, H., Über Modifikationen und exzeptionelle analytische Mengen. *Math. Ann.*, 146 (1962), 331–368.

[Gro] GROTHENDIECK, A., Techniques de construction en géométrie analytique. VIII. Rapport sur les théorèmes de finitude de Grauert et Remmert. *Seminaire H. Cartan*, 1960–61.

[I] IGUSA, J.-I., Complex powers and asymptotic expansions I. Functions of certain types. *J. Reine Angew. Math.*, 268/269 (1974), 110–130; II. Asymptotic expansions. *J. Reine Angew. Math.*, 278/279 (1975), 307–321.

[IMK] ITÔ, K. & MCKEAN, H., *Diffusion Process and their Sample Paths*. Grundl. Math. Wiss. Band 125. Berlin–Heidelberg–New York, Springer, 1974.

[K] KNUDSEN, F. F., The projectivity of the moduli space of stable curves II: The stacks $M_{g,n}$. III: The line bundles on $M_{g,n}$ and a proof of the projectivity of $M_{g,n}$ in characteristic 0. *Math. Scand.*, 52 (1983), 161–199, 200–212.

[KM] KNUDSEN, F. F. & MUMFORD, D., The projectivity of the moduli space of stable curves I. Preliminaries on « det » and « div ». *Math. Scand.*, 39 (1976), 19–55.

[KV] KIEHL, R. & VERDIER, J.-L., Ein einfacher Beweis des Kohärenzsatzes von Grauert. *Math. Ann.*, 195 (1971), 24–50.

[M] MUMFORD, D., Stability of projective varieties. *Enseign. Math.*, 23 (1977), 39–110.

[MKS] MCKEAN, H. & SINGER, I. M., Curvature and the eigenvalues of the Laplacian. *J. Differential Geom.*, 1 (1967), 43–69.

[R] RAYNAUD, M. (MME), Géométrie algébrique et géométrie analytique. Exposé XII. *Séminaire de géométrie algébrique du Bois Marie*, 1960/61, dirigé par A. Grothendieck. *Springer Lecture Notes in Mathematics*, 224 (1971), 311–343.

[Rau] RAUCH, H. E., The singularities of the modulus space. *Bull. Amer. Math. Soc.*, 68 (1962), 390–394.

[S] SERRE, J. P., *Cours d'arithmétique*. Paris, Presses Universitaires de France, 1970.

[Sz] SZPIRO, L., *Séminaire sur les pinceaux arithmétiques : la conjecture de Mordell. Astérisque*, 127 (1985).

[T] TJURINA, G. N., Locally semiuniversal flat deformations of singularities of complex spaces. *Math. USSR-Izv.*, 3 (1970), 967–998.

[W] WEIL, A., *Elliptic Functions according to Eisenstein and Kronecker*. Springer-Verlag, 1976.

[Wi] WITTEN, E., Global gravitational anomalies. *Comm. Math. Phys.*, 100 (1985), 197–229.

[Wo] WOLPERT, S., Asymptotics of the spectrum and the Selberg zeta function of Riemann surfaces. *Comm. Math. Phys.*, 112 (1987), 283–315.

*Reçu le 10 octobre 1988*