Un problème de cohomologie relative

J. Vey

Introduction

Je me propose d'établir le résultat suivant:

Théorème 1. *Soit G un groupe algébrique réductif sur $\mathbf{C}$, connexe, opérant linéairement sur un espace vectoriel E fini sur $\mathbf{C}$. Soit Ω^* le complexe des germes de formes différentielles holomorphes sur E à l'origine, et $\mathscr{I}^*$ l'idéal différentiel de Ω^* engendré par les différentielles $df_1, \ldots, df_r$ d'un certain nombre de polynômes sur $E, f_1, \ldots, f_r$, homogènes et invariants par G. Le morphisme*

$$(\Omega^*)^G/(\mathscr{I}^*)^G \to \Omega^*/\mathscr{I}^*$$

induit un isomorphisme des cohomologies.

On a noté, comme à l'ordinaire, $(\ )^G$ le foncteur «invariants par G». Par ailleurs, la preuve fournira un énoncé «global»: soit K un sous-groupe compact maximal de G, $\|\cdot\|$ une norme hermitienne sur E invariante par K, et pour $r>0$, Ω_r^* l'espace des formes différentielles holomorphes dans la boule $\|x\|<r$, et dont les coefficients sont L^2 sur $\|x\|\leqq r$; alors dans l'assertion du théorème, on peut substituer Ω_r^* à Ω^*, et $\mathscr{I}^*\cap\Omega_r$ à $\mathscr{I}^*$.

La motivation initiale de cette entreprise était d'obtenir une preuve aussi peu conceptuelle que possible du théorème suivant:

Théorème 2. *Soit f une forme quadratique non dégénérée sur un espace vectoriel E de dimension finie n sur $\mathbf{C}$, et Ω^* le complexe des germes à l'origine de formes différentielles holomorphes sur E. Soit $\mathscr{I}^*$ l'idéal différentiel de Ω^* engendré par df. Alors*

1°) $H^q(\Omega^*/\mathscr{I}^*)=0$ *pour* $1\leqq q<n-1$.

2°) *Une forme $\xi\in\Omega^{n-1}$, fermée modulo $\mathscr{I}^*$, est exacte modulo $\mathscr{I}^*$ si et seulement si ses restrictions (évidemment fermées) aux hypersurfaces $f^{-1}(t)$, $t\in\mathbf{C}$ non nul et assez petit, sont toutes exactes.*

3°) *Une forme* $\xi \in \Omega^n$ *est exacte modulo* $\mathscr{I}^*$ *si et seulement si elle est nulle à l'origine.*

Cet énoncé n'est qu'un cas particulier, et particulièrement simple, d'un théorème capital sur les singularités isolées démontré par *E.* Brieskorn ([4]). Ici, par un changement de coordonnées linéaires, nous pouvons supposer $f = \sum x_i^2$; on se rappellera que la quadrique complexe $f^{-1}(t)$, $t \neq 0$, se rétracte par déformation sur la $(n-1)$-sphère réelle

$$\Gamma(t) = \{x \in \mathbf{C}^n : f(x) = t, \text{ et tous les } x_j t^{-1/2} \text{ sont réels}\}$$

ce qui fait qu'une forme $\xi \in \Omega^{n-1}$, fermée modulo $\mathscr{I}^*$, est exacte modulo $\mathscr{I}^*$ si les intégrales

$$\int_{\Gamma(t)} \xi$$

sont nulles pour $t \neq 0$ voisin de zéro. Noter qu'on peut considérer $H^*(\Omega^*/\mathscr{I}^*)$ comme un module sur l'algèbre $C\{t\}$ en faisant opérer t sur une forme, ou sur sa classe, comme multiplication par $f(x)$: alors $H^{n-1}(\Omega^*/\mathscr{I}^*)$ est un $\mathbf{C}\{t\}$-module libre de rang 1, comme on va le voir.

Pour déduire ce théorème du théorème 1, on utilise le groupe $\mathrm{SO}(n, \mathbf{C})$. Recensons les les formes invariantes par ce groupe: parmi elles figurent df, une base ω de $\Lambda^n E^*$, et la forme γ que les géomètres riemanniens noteraient $*df$:

$$\gamma = \sum_1^n (-1)^i x_i \, dx_1 \wedge \dots \hat{\imath} \dots \wedge dx_n.$$

Lemme 1. *Les formes différentielles de degré* >0 *invariantes par* $\mathrm{SO}(n, \mathbf{C})$ *forment un* $\mathbf{C}\{f\}$ *module libre de base* df, γ, ω.

Combiné au théorème 1, ce lemme fournit aussitôt le théorème 2. Pour l'établir, on a besoin de quelques résultats classiques (cf. [3], section 5.7):

a) En tant que $\mathrm{SO}(n, \mathbf{C})$-module, $S^m E^*$ se décompose

$$S^m E^* = H^m \oplus f H^{m-2} \oplus f^2 H^{m-4} \oplus \dots$$

où H^m désigne l'espace des polynômes homogènes de degré m, harmoniques; H^m est un $\mathrm{SO}(n, \mathbf{C})$-module irréductible.

b) Les puissances extérieures $\Lambda^p E$ sont irréductibles.

c) Les seuls isomorphismes entre les modules irréductibles précédents sont:

$$\Lambda^p E \overset{*}{\simeq} \Lambda^{n-p} E$$

$$H^1 = E^* \simeq E = \Lambda^1 E \simeq \Lambda^{n-1} E.$$

Déterminons alors $(S^m E^* \otimes \Lambda^p E^*)^{\mathrm{SO}(n, \mathbf{C})} = \mathrm{Hom}_{\mathrm{SO}}(\Lambda^p E, S^m E^*)$: il résulte des rapplels précédents que cet espace est nul, sauf si $p = 1, n-1$ ou n (et si l'on veut, $p = 0$), m devant être impair dans les deux premiers cas, pair dans le troisième; il est alors de dimension 1, engendré par

$$f^{(m-1)/2}df, \quad f^{(m-1)/2}\gamma, \quad f^{m/2}\omega$$

respectivement. Si maintenant $\xi \in \Omega^{n-1}$ est SO $(n, \mathbf{C})$-invariante, on la décompose en série de Taylor: les composantes homogènes devront être invariantes, et l'observation ci-dessus conclut aussitôt.

Section 1

Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie, opérant sur un espace vectoriel M par une représentation linéaire θ. J'appellerai divisibles les vecteurs de M susceptibles d'une écriture

$$\sum \theta(X_i)\, m_i$$

$m_i \in M$, $X_i \in \mathfrak{g}$; ils constituent un sous-$\mathfrak{g}$-module noté $\mathfrak{g}M$. Si M est réductif sous $\mathfrak{g}$, il est classique que

$$M = M^{\mathfrak{g}} \oplus \mathfrak{g}M$$

$M^{\mathfrak{g}}$ désignant les invariants; nous allons devoir le redémontrer dans la suite. Cela dit, le coeur de l'argument est la proposition suivante:

Proposition 1. *Soit G un groupe algébrique réductif sur $\mathbf{C}$, K un sous-groupe compact maximal, $\mathfrak{g}$ l'algèbre de Lie de G, $(E_i)_{1 \leq i \leq d}$ une base de $\mathfrak{g}$. Soit M un G-module, fini sur $\mathbf{C}$, équipé d'une norme hermitienne invariante par K. Tout élément u de $\mathfrak{g}M$ peut s'écrire*

$$u = \sum\nolimits_{1 \leq i \leq d} \theta(E_i) v_i$$

avec des vecteurs $v_i \in M$ vérifiant les inégalités

$$\|v_i\| \leqq C\|u\|$$

où la constante C dépend de G, de K, du choix de la base (E_i), mais reste indépendante du module M.

Avant d'engager la preuve, faisons une observation très simple:

Lemme 2. *Hypothèses de la proposition 1. Soit T un tore maximal de K, χ et χ' deux caractères multiplicatifs distincts sur T. Les espaces propres M_χ et $M_{\chi'}$ correspondants sont orthogonaux.*

Par définition, M_χ est l'espace des $u \in M$ tels que pour tout $t \in T$,

$$t \cdot u = \chi(t) u.$$

Soit $u \in M_\chi$, $u' \in M_{\chi'}$: pour tout $t \in T$, on a

$$\langle u, u'\rangle = \langle tu, tu'\rangle = \chi(t)\overline{\chi'(t)}\langle u, u'\rangle = \chi(t)\chi'(t)^{-1}\langle u, u'\rangle$$

(la dernière égalité exploite le fait que T étant compact, les caractères prennent des valeurs de module 1). Puisque χ et χ' sont distincts, $\chi(t)\chi'(t)^{-1}$ est différent de 1 presque partout, et donc u et u' sont orthogonaux, cqfd.

Premier temps: *On suppose G semi-simple, et M irréductible, non trivial.*

Si l'on se donne un tore maximal T dans K, on définit une sous-algèbre de Cartan $\mathfrak{h} = \mathfrak{t} \otimes \mathbf{C}$ de $\mathfrak{g}$, dans laquelle va apparaître un système de racines R; et si l'on se donne un ordre sur R, M va être caractérisé par son poids dominant μ, qui sera un point de la chambre fondamentale $C = C(T, R$ ordonné). Ces choix ne sont pas univoques; mais les théorèmes classiques de conjugaison font que la longueur de μ, calculée avec la restriction de la forme de Killing à $\mathfrak{h}$ (ou plutôt à $\mathfrak{h}^*$), est la même indépendamment du choix de T et de l'ordre sur les racines.

Lemme 3. *Soit $E \in \mathfrak{g}$. La norme de l'opérateur $\theta(E)$ est majorée par $C_1|\mu|$, où la constante C_1 dépend de G, de K, de E, mais est indépendante de μ (c'est-à-dire de M).*

Preuve du lemme. Puisque (classiquement) $\mathfrak{g}$ est la complexifiée de $\mathfrak{k}$, l'algèbre de Lie (réelle) de K, on peut supposer $E \in \mathfrak{k}$. Nous pouvons alors inclure le groupe à un paramètre $\exp tE$, $t \in \mathbf{R}$, dans un tore maximal T de K. Décomposons M relativement aux poids de la sous-algèbre de Cartan $\mathfrak{t} \otimes \mathbf{C} = \mathfrak{h}$:

$$M = \oplus M_\lambda$$

cette décomposition est orthogonale (lemme 2: les poids de $\mathfrak{h}$ sont les logarithmes des caractères de T), stable par $\theta(E)$; et cet opérateur se réduit sur M_λ à la multiplication par $\langle \lambda, E\rangle$. Donc

$$\|\theta(E)\| = \sup|\langle \lambda, E\rangle| \leqq \sup\|\lambda\| \cdot \|E\| = \|\mu\| \cdot \|E\|$$

cqfd.

Introduisons maintenant l'opérateur de Casimir Γ de $\mathfrak{g}$. Soit $(E^i)_{1 \leqq i \leqq d}$ la base de $\mathfrak{g}$ duale de (E_i) par rapport à la forme de Killing:

$$B(E_i, E^i) = 1, \quad B(E_i, E^j) = 0 \quad \text{pour} \quad i \neq j$$

et dans l'algèbre enveloppante

$$\Gamma = \textstyle\sum_{1 \leqq i \leqq d} E_i E^i$$

c'est un élément *central*, qui d'ailleurs ne dépend pas du choix de la base (E_i); sur le module irréductible M, il va donc opérer par un scalaire, qui voici:

$$\langle \mu, \mu + 2\delta\rangle$$

(cf. [2] p. 247; 2δ est la somme des racines positives). Cela étant, soit $u \in M$:

$$u = \frac{1}{\langle \mu, \mu+2\delta \rangle} \Gamma u = \sum_{1 \leq i \leq d} \theta(E_i) \left(\frac{1}{\langle \mu, \mu+2\delta \rangle} \theta(E^i) u \right)$$

formule qui montre d'abord que $M = \mathfrak{g}M$. Posons

$$v_i = \frac{1}{\langle \mu, \mu+2\delta \rangle} \theta(E^i) u$$

observons que μ et δ se trouvant dans la chambre fondamentale, qui est un cône convexe saillant, il existe une constante $C_2 > 0$ telle que

$$\langle \mu, \mu+2\delta \rangle > C_2 \|\mu\|^2$$

et enfin soit C_3 le maximum des constantes C_1 du lemme 3 appliqué aux vecteurs $E^1, \ldots, E^d$. Nous aurons les majorations:

$$\|v_i\| \leq C_2^{-1} \|\mu\|^{-2} C_3 \|\mu\| \, \|u\| \leq C_4 \|\mu\|^{-1} \|u\|$$

(μ est non nul, puisque M est non trivial); et la dernière majoration peut s'affaiblir en

$$\|v_i\| \leq C_5 \|u\|$$

ce qui est la conclusion de la proposition 1. (On verra au troisième et au quatrième temps les raisons techniques qui motivent cet affaiblissement; mais il est assez frappant que la division se fasse d'autant mieux que le module est plus compliqué).

Deuxième temps: *G est supposé semi-simple, et M isotypique, non trivial.*

Ainsi M est la somme directe de l exemplaires d'un module N irréductible non trivial. Observons d'abord qu'on peut effectuer une décomposition

$$M = N_1 \oplus N_2 \oplus \ldots \oplus N_l$$

orthogonale, chaque facteur N_j étant isomorphe à N (on choisit N_1 arbitrairement: son orthogonal est un sous-espace complexe invariant par K, donc par G (complexifié de K); on prend alors $N_2 \subset N_1^{\perp}$, etc.) Soit $u \in M$:

$$u = u_1 + \ldots + u_l, \quad u_j \in N_j.$$

D'après le premier temps, chaque u_j s'écrit

$$u_j = \sum_{1 \leq i \leq d} \theta(E_i) v_{ij}, \quad v_{ij} \in N_j, \quad \|v_{ij}\| \leq C_5 \|u_j\|$$

donc en posant

$$v_i = \sum_{1 \leq j \leq l} v_{ij}$$

on aura

$$u = \sum_{1 \leqq i \leqq d} \theta(E_i) v_i$$

$$\|v_i\|^2 = \sum_{1 \leqq j \leqq l} \|v_{ij}\|^2 \leqq C_5^2 \sum_{1 \leqq j \leqq l} \|u_i\|^2 = C_5^2 \|u\|^2$$

soit $\|v_i\| \leqq C_5 \|u\|$, comme voulu.

Troisième temps: *on suppose G semi-simple, et M quelconque.*

Le module M se décompose de façon unique en somme directe de ses composantes isotypiques, et il résulte du lemme 4 ci-dessous que cette décomposition est orthogonale. Parmi les composantes isotypiques figure $M^{\mathfrak{g}}$, le sous-espace des invariants; si on note M' la somme des autres composantes isotypiques, les mêmes écritures qu'au temps précédent montreront que tout $u \in M'$ s'écrit

$$u = \sum_{1 \leqq i \leqq d} \theta(E_i) v_i, \quad \|v_i\| \leqq C_5 \|u\|$$

en particulier, $\mathfrak{g}M = M'$, $M = M^{\mathfrak{g}} \oplus \mathfrak{g}M$.

Lemme 4. *Soit N et N' deux G-modules, finis sur $\mathbf{C}$, irréductibles et non isomorphes. Il n'y a pas de forme sesquilinéaire*

$$h: N \times N' \to \mathbf{C}$$

invariante par K et non identiquement nulle.

Choisissons un tore maximal $T \subset K$, et un ordre sur les racines de la sous-algèbre de Cartan $\mathfrak{h} = \mathfrak{t} \otimes \mathbf{C}$; effectuons la décomposition de N et N' suivant les poids de $\mathfrak{h}$:

$$N = \oplus N_\lambda \quad N' = \oplus N'_\lambda$$

enfin soient μ et μ' les poids dominants de N et N': ils sont par hypothèse distincts; disons $\mu > \mu'$. On voit comme au lemme 2 que si $\lambda \neq \lambda'$, N_λ est orthogonal à $N'_{\lambda'}$. Il en résulte que N_μ est orthogonal à N' entier. Considérons le sous-espace complexe $(N')^\perp \subset N$: il ne se réduit pas à 0, il est invariant par K, donc par G: c'est donc N entier, ce qui prouve que $h = 0$.

Quatrième temps: *G réductif, M quelconque.*

On part de la décomposition classique

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{z} \oplus \mathfrak{g}'$$

$\mathfrak{z}$ est le centre, et $\mathfrak{g}'$ l'idéal dérivé; noter que $\mathfrak{z} \cap \mathfrak{k}$ est le centre de $\mathfrak{k}$, et $\mathfrak{g}' \cap \mathfrak{k}$ son idéal dérivé. Soit $H_1, \ldots, H_l$ une base de $\mathfrak{z}$ telle que

$$\exp iH_1 = \exp iH_2 = \ldots = \exp iH_l = 1. \tag{1}$$

On effectue la décomposition de M suivant les poids de $\mathfrak{z}$:

$$M = \oplus M_\lambda$$

elle est orthogonale (lemme 2); la condition (1) implique que les valeurs propres $\langle\lambda, H_j\rangle$ sont toutes entières.

Soit maintenant $u \in \mathfrak{g}M$, et u_λ sa projection sur M_λ. Pour $\lambda \neq 0$, il existe un vecteur H_j tel que $\langle\lambda, H_j\rangle \neq 0$; alors

$$u_\lambda = \theta(H_j) \frac{1}{\langle\lambda, H_j\rangle} u_\lambda$$

avec, puisque $\langle\lambda, H_j\rangle$ est un entier,

$$\left\| \frac{1}{\langle\lambda, H_j\rangle} u_\lambda \right\| \leqq \|u_\lambda\|.$$

Quant à la composante u_0, on note que M_0 est un $\mathfrak{g}'$-module, et on vérifie sans difficulté que $u \in \mathfrak{g}M$ si et seulement si $u_0 \in \mathfrak{g}' M_0$; après quoi on fait jouer le résultat du troisième temps.

D'ailleurs on n'atteint la conclusion de la proposition 1 qu'à supposer la base (E_i) adaptée à la décomposition $\mathfrak{z} \oplus \mathfrak{g}'$; il reste à s'affranchir de cette restriction, ce qui est trivial.

Section 2

Proposition 2. *Soit G un groupe algébrique complexe réductif, et E, F deux G-modules, finis sur* **C**. *Soit $\mathscr{F}$ l'espace des germes à l'origine de fonctions holomorphes sur E à valeurs dans F; G et son algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ opèrent sur $\mathscr{F}$. Convenons de dire qu'un germe $f \in \mathscr{F}$ est analytiquement (rsp. formellement) divisible par $\mathfrak{g}$ si on peut l'écrire comme une somme finie*

$$f = \sum \theta(X_i) g_i$$

avec $X_i \in \mathfrak{g}$, $g_i \in \mathscr{F}$ (rsp. avec des g_i fonctions formelles sur E à valeurs dans F). Un germe formellement divisible est analytiquement divisible.

Deux annexes précisent cet énoncé.

Annexe 1. *Soit K un sous-groupe compact maximal de G, et $\|\cdot\|$ une norme hermitienne sur E, invariante par K. Pour $r > 0$, soit $\mathscr{F}_r$ l'espace des fonctions à valeurs dans F, de carré sommable sur la boule $\|x\| \leqq r$, et holomorphes à l'intérieur. Si la fonction $f \in \mathscr{F}_r$ est formellement divisible, elle s'écrit*

$$f = \sum \theta(X_i) g_i$$

avec des $X_i \in \mathfrak{g}$, et des $g_i \in \mathscr{F}_r$.

Annexe 2. *Si les composantes homogènes du développement de Taylor de* $f \in \mathscr{F}$ *(ou à un* $\mathscr{F}_r$, $r>0$*) vérifient une condition linéaire et invariante par* G, *on peut astreindre les composantes des* g_i *à en faire autant.*

La démonstration va viser l'annexe 1. On choisit un sous-groupe K compact maximal dans G, et des produits hilbertiens $\langle\ \rangle_E$, $\langle\ \rangle_F$ sur E et F invariants par K; enfin on fixe $r>0$. Sur $\mathscr{F}_r$, on utilise le produit hilbertien

$$\langle f, g\rangle_r = \int_{\|x\|_E \leqq r} \langle f(x), g(x)\rangle_F \, dm$$

dm est la mesure de Lebesgue sur E. La première chose à observer, c'est que si f et g sont des polynômes homogènes de degré différent (à valeurs dans F), ils sont orthogonaux (on le voit en faisant dans l'intégrale le changement de variable $x'=\varepsilon x$, $|\varepsilon|=1$, qui préserve la mesure dm). Il en résulte que si $f \in \mathscr{F}_r$, et si

$$f = \sum_{m \geqq 0} f_m \qquad f_m \in S^m E^* \otimes F$$

est son développement de Taylor, alors $\sum \|f_m\|_r^2 < +\infty$. A l'inverse, si l'on se donne une suite de polynômes

$$f_m \in S^m E^* \otimes F$$

tels que la série

$$\sum \|f_m\|_r^2 < +\infty$$

alors la série $\sum f_m$ converge au sens L^2 sur la boule $\|x\| \leqq r$, et par conséquent, puisqu'il s'agit de fonctions holomorphes, converge uniformément sur tout compact dans la boule $\|x\|<r$ (utiliser une représentation intégrale).

Supposons à présent la fonction $f \in \mathscr{F}_r$ formellement divisible. Cela signifie que les composantes de son développement de Taylor

$$f = \sum_{m \geqq 0} f_m, \quad f_m \in S^m E^* \otimes F$$

sont divisibles par $\mathfrak{g}$. Soit $(E_i)_{1 \leqq i \leqq d}$ une base de $\mathfrak{g}$. La proposition 1 permet d'écrire pour tout $m \geqq 0$

$$f_m = \sum_{1 \leqq i \leqq d} \theta(E_i) g_{i,m}$$

avec des $g_{i,m} \in S^m E^* \otimes F$ vérifiant

$$\|g_{i,m}\|_r \leqq C \|f_m\|_r$$

où la constante C ne dépend pas de m. Il est clair dès lors que les fonctions

$$g_i = \sum_{m \geqq 0} g_{i,m} \quad (1 \leqq i \leqq d)$$

appartiennent à $\mathscr{F}_r$, et que

$$f = \sum_{1 \leqq i \leqq d} \theta(E_i) g_i$$

ce qui prouve que f est analytiquement divisible. S'il se trouvait d'autre part que les composantes f_m appartinssent à de certains sous-G-modules $M_m \subset S^m E^* \otimes F$, il est évident qu'on pourrait astreindre les $g_{i,m}$ à en faire autant: c'est l'assertion de l'annexe 2.

Proposition 3. *Gardons les hypothèses de la proposition 2 (rsp. de son annexe 1). Toute fonction $f \in \mathscr{F}$ (rsp. $f \in \mathscr{F}_r$, $r > 0$) s'écrit de façon unique*

$$f = f' + f''$$

avec f' et f'' dans $\mathscr{F}$ (rsp. dans $\mathscr{F}_r$), f' étant invariante par $\mathfrak{g}$, et f'' divisible par $\mathfrak{g}$ (ie. $f'' \in \mathfrak{g}\mathscr{F}$, rsp. $f'' \in \mathfrak{g}\mathscr{F}_r$).

Partons du développement de Taylor de f: chaque composante f_m se décompose de façon unique en

$$f_m = f_m' + f_m'' \quad f_m', f_m'' \in S^m E^* \otimes F.$$

A cause de l'orthogonalité des composantes isotypiques (cf. le troisième temps dans la preuve de la proposition 1),

$$\|f_m'\|_r \leqq \|f_m\|_r \geqq \|f_m''\|_r$$

et par conséquent les séries entières

$$f' = \sum f_m' \quad f'' = \sum f_m''$$

définissent des éléments de $\mathscr{F}_r$, dès que $f \in \mathscr{F}_r$. Trivialement, f' est invariante par $\mathfrak{g}$; quant à f'', elle est formellement divisible, et donc analytiquement divisible.

Section 3

Nous pouvons à présent démontrer commodément le théorème 1. Commençons par l'injectivité de la flèche

$$H^*((\Omega^*)^G/(\mathscr{I}^*)^G) \to H^*(\Omega^*/\mathscr{I}^*).$$

En d'autres termes, nous avons une forme α invariante par G, dont la différentielle $d\alpha$ tombe dans $\mathscr{I}^*$, et que nous supposons pouvoir s'écrire

$$\alpha = d\gamma + \delta, \quad \gamma \in \Omega^*, \quad \delta \in \mathscr{I}^* \tag{1}$$

il s'agit de trouver une écriture analogue, mais avec γ et δ invariantes par G. Partons des décompositions de la proposition 3 (une forme différentielle est une fonction à valeurs dans $\Lambda^* E^*$):

$$\gamma = \gamma' + \gamma'' \quad \delta = \delta' + \delta''$$

avec γ', δ' invariantes, et γ'', δ'' divisibles par $\mathfrak{g}$ (Noter que puisque G est connexe, invariance par G ou par $\mathfrak{g}$ coïncident). La relation (1) devient

$$\alpha - d\gamma' - \delta' = d\gamma'' + \delta''$$

d'où l'on conclut par unicité que $\alpha = d\gamma' + \delta'$, comme voulu. (*) (On observera que les propositions 1 et 2 ne sont pas vraiment intervenues car il suffit dans l'argument de savoir que γ'' et δ'' sont formellement divisibles.)

Passons à la surjectivité. Cette fois, on se donne une forme $\alpha \in \Omega^*$, dont la différentielle $d\alpha \in \mathscr{I}^*$, et on doit produire deux formes $\alpha' \in (\Omega^*)^G$ et $\beta \in \Omega^*$ telles que

(2) $$\alpha - \alpha' - d\beta \in \mathscr{I}^*.$$

Nous partons à nouveau de la décomposition de la proposition 3:

$$\alpha = \alpha' + \alpha''$$

avec α' invariante, et α'' divisible:

$$\alpha'' = \sum\nolimits_{1 \leq i \leq d} \theta(E_i)\beta_i$$

avec $(E_i)_{1 \leq i \leq d}$ une base de $\mathfrak{g}$, et des $\beta_i \in \Omega^*$. Soit

$$M_m \subset S^m E^* \otimes \Lambda^* E^*$$

le sous-G-module des formes différentielles homogènes de degré m dont la différentielle appartient à $\mathscr{I}^*$ (on se rappellera que les générateurs df_i de $\mathscr{I}^*$ sont homogènes). Par hypothèse, toutes lès composantes de Taylor de α se trouvent dans les M_m. Il en va donc de même pour les composantes de α' et α'', obtenues à partir de la décomposition canonique

$$M_m = (M_m)^{\mathfrak{g}} \oplus \mathfrak{g} M_m$$

et donc aussi pour les β_i (annexe 2 de la proposition 2). Par ailleurs, une forme qui appartient formellement à l'idéal $\mathscr{I}^*$ y appartient analytiquement (cf. [1], section 6.3, en particulier 6.3.6): nous concluons que les formes $\alpha', \beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_d$ ont leurs différentielles dans l'idéal $\mathscr{I}^*$.

De la formule de Cartan résulte:

(3) $$\alpha - \alpha' = \sum\nolimits_i \theta(E_i)\beta_i = d\left(\sum\nolimits_i \iota(E_i)\beta_i\right) + \sum\nolimits_i \iota(E_i)\, d\beta_i.$$

(*) Comme d commute avec les opérateurs $\theta(X)$, $X \in Y$, la différentielle d'une forme divisible (analytiquement, formellement) est encore divisible (analytiquement, formellement).

En outre, l'idéal $\mathscr{I}^*$ est stable par les opérateurs $\iota(X)$, $X \in \mathfrak{g}$; parce que, pour $\xi \in \Omega^*$,

$$\begin{aligned}\iota(X)(df_j \wedge \xi) &= \iota(X)\, df_j \wedge \xi - df_j \wedge \iota(X)\xi \\ &= \theta(X) f_j \cdot \xi - df_j \wedge \iota(X)\xi\end{aligned}$$

et que les f_j sont invariantes par G: $\theta(X) f_j = 0$. Donc dans le second membre de (3), nous avons un cobord et un élément de $\mathscr{I}^*$: la démonstration est achevée.

Références

1. HÖRMANDER, L., *An Introduction to Complex Analysis in Several Variables*, Van Nostrand 1966.
2. JACOBSON, N., *Lie Algebras*, Interscience Publishers, John Wiley, 1962.
3. WEYL, H., *The Classical Groups*, Princetion University Press, 1946.
4. BRIESKORN, E., Die monodromie der isolierten Singularitäten von Hyperflächen, *Manuscripta Mathematica* 2 (1970), 103—161.

Received December 5, 1975

J. Vey
Centre Universitaire de Savoie
Laboratoire de mathematiques pures (CNRS)
BP 116 38402 St Martin d'Heres