Über das Verhalten einer Potenzreihe am Rande des Konvergenzkreises

Henrik L. Selberg

Introduction

Es sei

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n \tag{1}$$

eine Potenzreihe mit dem Konvergenzradius 1. Für ein gegebenes reelles φ betrachten wir die Funktion

$$F_\varphi(z, \lambda) = \lambda f(ze^{2\pi i\varphi}) - f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(\lambda e^{2\pi in\varphi} - 1) z^n. \tag{2}$$

Offenbar ist

$$F_{\varphi+k}(z, \lambda) = F_\varphi(z, \lambda) \tag{3}$$

für alle ganze Zahlen k. Es besteht ferner die Beziehung

$$F_{\varphi_1+\varphi_2}(z, \lambda_1\lambda_2) = \lambda_2 F_{\varphi_1}(ze^{2\pi i\varphi_2}, \lambda_1) + F_{\varphi_2}(z, \lambda_2). \tag{4}$$

Ist der Konvergenzradius von (2) grösser als 1, so soll λ einen Multiplikator heissen. Der zu φ (oder $e^{2\pi i\varphi}$) gehörende Multiplikator $\lambda(\varphi)$ ist, falls derselbe existiert, offenbar eindeutig bestimmt. Es ist ferner

$$|\lambda(\varphi)| = 1$$

sowie

$$\lambda(\varphi + k) = \lambda(\varphi)$$

für jedes ganzzahlige k.

Der Bequemlichkeit halber führen wir die Funktion $\sigma(\varphi)$ ein, die durch

$$\sigma(\varphi) = \frac{\log \lambda(\varphi)}{2\pi i}, \quad 0 \leqq \sigma(\varphi) < 1$$

definiert sein soll. Dabei können wir übereinkommen $\lambda(\varphi) = 1$ zu setzen, wenn kein Multiplikator für φ vorliegt.

Setzen wir in (2) $\lambda = \lambda(\varphi)$, so ergibt sich

$$F_\varphi(z) = F_\varphi(z, \lambda(\varphi)) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (e^{2\pi i(\sigma(\varphi)+n\varphi)} - 1). \tag{5}$$

Mit R_φ bezeichnen wir den Konvergenzradius von (5), mit A_ϱ die Menge der Werte φ, für welche $R_\varphi > \varrho$ ($\varrho \geqq 1$) und mit $\tilde{A}_\varrho$ die zum Intervalle $[0, 1[$ gehörende Teilmenge von A_ϱ. Die Multiplikatoren aller Werte $\varphi \in A_\varrho$ bilden die Menge A_ϱ^*. Die Teilmenge von $\tilde{A}_\varrho$, wo $\lambda(\varphi)$ zu einer gegebenen Menge $B^* \subseteqq A_1^*$ gehört, soll durch $\tilde{A}_\varrho(B^*)$ angegeben werden.

Bevor wir weitergehen, bemerken wir, dass mit φ auch $-\varphi$ zu A_ϱ gehört, und dass

$$\lambda(-\varphi) = \overline{\lambda(\varphi)}.$$

Wie man von (4) ausgehend leicht bestätigt, gelten ferner die Beziehungen

$$\varphi_1, \varphi_2 \in A_\varrho \Rightarrow \varphi_1 \pm \varphi_2 \in A_\varrho \tag{6}$$

$$\varphi_1, \varphi_2 \in A_\varrho \Rightarrow \lambda(\varphi_1 + \varphi_2) = \lambda(\varphi_1)\lambda(\varphi_2) \tag{7}$$

$$\lambda_1, \lambda_2 \in A_\varrho^* \Rightarrow \lambda_1\lambda_2 \in A_\varrho^* \tag{8}$$

$$\varphi_1 \in A_\varrho, \varphi_2 \notin A_\varrho \Rightarrow \varphi_1 \pm \varphi_2 \notin A_\varrho \tag{9}$$

$$\lambda_1 \in A_\varrho^*, \lambda_2 \notin A_\varrho^* \Rightarrow \lambda_1\lambda_2 \notin A_\varrho^*. \tag{10}$$

2. Die Mengen A_1 und A_1^* hängen offenbar nur von der Folge $|c_n|$ ($n=0, 1, 2, \ldots$) ab. Da der Konvergenzradius von (1) gleicht 1 ist, so gibt es eine Folge $n_1 < n_2 < \ldots$, für welche

$$\lim_{\nu\to\infty} |c_{n_\nu}|^{\frac{1}{n_\nu}} = 1 \tag{11}$$

Sei nun $\varphi \in A_\varrho$ ($\varrho > 1$). Dann ist

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} |c_n(e^{2\pi i(\sigma(\varphi)+n\varphi} - 1)|^{\frac{1}{n}} < \frac{1}{\varrho}.$$

Für alle genügend grosse ν ist daher

$$|e^{2\pi i(\sigma(\varphi)+n_\nu\varphi} - 1| < \left(\frac{1}{\varrho}\right)^{\frac{n_\nu}{2}}.$$

Es folgt für ein passendes ganzzahliges h_ν

$$2\pi|\sigma(\varphi) + n_\nu\varphi - h_\nu| < 2\left(\frac{1}{\varrho}\right)^{\frac{n_\nu}{2}}$$

d. h.

$$\left|\frac{\sigma(\varphi)}{n_\nu} + \varphi - \frac{h_\nu}{n_\nu}\right| < \frac{1}{\pi n_\nu}\left(\frac{1}{\varrho}\right)^{\frac{n_\nu}{2}} \tag{12}$$

für alle genügend grosse ν.

3. Wir wollen jetzt die Menge A_1 näher untersuchen und beweisen zunächst den

Satz 1. *Hat $f(z)$ eine reguläre Stelle ouf $|z|=1$, so gibt es eine ganze Zahl $N \geqq 1$, so dass $\tilde{A}_1$ aus den N Punkten*

$$\varphi = 0, \frac{1}{N}, \ldots, \frac{N-1}{N}$$

besteht. Der zu $\varphi = \frac{\nu}{N}$ $(\nu = 0, 1, \ldots, N-1)$ gehörende Multiplikator ist

$$\lambda\left(\frac{\nu}{N}\right) = e^{2\pi i \nu/q}$$

wobei q ein von ν unabhängiger Teiler von N ist.

Beweis. Ist $\varphi \in A_1$ und ist $e^{2\pi i\theta}$ ein singulärer Punkt der Potenzreihe (1), so ist $e^{2\pi i(\theta+k\varphi)}$ (k ganzzahling) wie aus (5) zu ersehen ist, singulärer Punkt von (1). Wäre $\tilde{A}_1$ keine endliche Menge, so müsste $\tilde{A}_1$ beliebig kleine $\varphi > 0$ enthalten. Die singulären Stellen von (1) wären somit wegen (6) auf dem Einheitskreise überall dicht. $\tilde{A}_1$ ist daher eine endliche Menge und enthält, wenn man von dem Fall $\tilde{A}_1 = \{0\}$ absieht, folglich einen kleinsten Wert $\varphi_1 > 0$. Mit Hilfe von (6) schliesst man hieraus, dass $\varphi = \nu\varphi_1$, wo ν eine ganze Zahl ist. Dies beweist den ersten Teil unseres Satzes. Der zweite Teil ergibt sich mühelos aus der Tatsache, dass nach (7) $\lambda^n(\varphi) = \lambda(n\varphi)$ für jedes $\varphi \in A_1$ und jede ganze Zahl n.

4. Im Folgenden bedeutet m das lineare Lebesguesche Mass, $\overline{m}$ das Bogenmass im Sinne von Lebesgue.

Hilfssatz. *Jede Menge A_ϱ^* $(\varrho \geqq 1)$ ist messbar mit dem Bogenmass $\overline{m}A_\varrho^*$. Ist $B^* \subseteqq A_1^*$ und hat B^* ein Bogenmass $\overline{m}B^*$, so existiert das lineare Mass $m\tilde{A}_\varrho(B^*)$.*

Bemerkung. $\lambda(\varphi)$ ist hiernach eine messbare Funktion.

Beweis. Die Reihen

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n \left(e^{2\pi i(\sigma(\varphi)+n\varphi)} - 1\right) z^n$$

und

$$\sum_{n=0}^{\infty} |c_n|^2 |e^{2\pi i(\sigma(\varphi)+n\varphi)} - 1|^2 z^{2n} = \sum_{n=0}^{\infty} 4|c_n|^2 \sin^2 \pi\left(\sigma(\varphi) + n\varphi\right) z^{2n}$$

haben denselben Konvergenzradius. Indem $\varrho_1 > \varrho_2 > \ldots$ und

$$\lim_{\nu \to \infty} \varrho_\nu = \varrho$$

lassen wir Ω_ν^* diejenige Menge in $\sigma(0 \leqq \sigma < 1)$ bezeichne, für welche die Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} 4|c_n|^2 \sin^2 \pi(\sigma + n\varphi) \varrho_\nu^{2n}$$

für mindestens ein φ konvergiert. Diese Menge ist messbar und da

$$A_\varrho^* = \bigcup_{\nu=1}^{\infty} \Omega_\nu^*$$

so folgt hieraus die Messbarkeit von A_ϱ^*.

Um den zweiten Teil des Satzes zu beweisen, betrachten wir die Mengen

$$\Omega_\nu = \bigcup_{k=1}^{\infty} \bigcap_{N=1}^{\infty} \left\{\varphi \,|\, 0 \leqq \varphi < 1,\ \exists \sigma \in B^* : \sum_{n=0}^{N} 4\,|c_n|^2 \sin^2(\sigma + n\varphi)\varrho_\nu^{2n} \leqq k\right\}.$$

Die Mengen an der rechten Seite sind messbar, und da

$$\tilde{A}_\delta(B^*) = \bigcup_{\nu=1}^{\infty} \Omega_\nu$$

so folgt hieraus die Messbarkeit von $\tilde{A}_\varrho(B^*)$.

Satz 2. *Es ist* $m\tilde{A}_1 = 0$.

Beweis. Wir nehmen $m\tilde{A}_1 > 0$ an. Wegen

$$m\tilde{A}_1 = \lim_{\varrho \to 1} m\tilde{A}_\varrho$$

gibt es ein $\varrho > 1$, für welches $m\tilde{A}_\varrho > 0$. Wir betrachten die Summe

$$T(\varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} |c_n|^2 |e^{2\pi i(\sigma(\varphi) + n\varphi)} - 1|^2 \varrho^{2n}.$$

Für jedes $\varphi \in A_\varrho$ ist die rechte Seite konvergent. Es gibt daher eine Teilmenge $E \subseteqq \tilde{A}_\varrho$ vom Mass $mE > 0$ sowie eine endliche Konstante K, so dass

$$T(\varphi) \leqq K$$

für alle $\varphi \in E$. Die *Schwarz*sche Ungleichung gibt

$$|c_n| \left| \int_E (\lambda(\varphi) e^{2n\pi i \varphi} - 1)\, d\varphi \right| \leqq \frac{\sqrt{KmE}}{\varrho^n}.$$

Mit Hilfe des *Riemann—Lebesgueschen Lemmas* schliesst man hieraus, dass der Konvergenzradius der Reihe $(1) \geqq \varrho > 1$ ist. Dieser Widerspruch beweist unsere Behauptung.[1])

Satz 3. *Ist* $\overline{m} A_\varrho^* > 0$ $(\varrho \geqq 1)$, *so ist* A_ϱ^* *identisch mit dem Einheitskreis* $|\lambda| = 1$.

[1]) Dieser Beweis wurde mir von Herrn *J.-E. Björk* mitgeteilt. Mein ursprünglicher Beweis, der auch von $T(\varphi)$ ausging, war etwas länger.

Beweis. Wir lassen K_σ den Kreisbogen

$$K_\sigma = \{\lambda = e^{2\pi i\varphi} | 0 \leqq \theta \leqq \sigma\}$$

bedeuten und setzen

$$E_\sigma = A_\varrho^* \cap K_\sigma.$$

Ist $\overline{m}A_\varrho^* > 0$, so gibt es auf A_ϱ^* ein $\lambda_0 = e^{2\pi i\sigma_0}$, wo

$$\left(\frac{d\overline{m}E_\sigma}{2\pi\, d\sigma}\right)_{\sigma=\sigma_0} = 1. \tag{13}$$

Ist nun $\lambda_1 = e^{2\pi i\sigma_1} \in A_\varrho^*$, so folgt aus (8)

$$\lambda \in A_\varrho^* \Rightarrow \frac{\lambda}{\lambda_0}\lambda_1^n \in A_\varrho^* \quad (n = 0, 1, \ldots)$$

und aus (10)

$$\lambda' \notin A_\varrho^* \Rightarrow \frac{\lambda'}{\lambda_0}\lambda_1^n \notin A_\varrho \quad (n = 0, 1, \ldots).$$

Es ist folglich

$$\overline{m}E_{(n+1)\sigma_1} - \overline{m}E_{n\sigma_1} = \overline{m}E_{\sigma_0+\bar{\sigma}_1} - \overline{m}E_{\sigma_0} \quad (n = 0, 1, \ldots).$$

Da σ_1 wegen (13) beliebig klein >0 gewählt werden darf, so schliesst man mit Hilfe von (13)

$$\overline{m}A_\varrho^* = \overline{m}E_1 = 2\pi. \tag{14}$$

Wäre nun A_ϱ^* nicht identisch mit dem Einheitskreis, so würde es ein σ_2 $(0 \leqq \sigma_2 < 1)$ geben, für welches

$$\lambda_2 = e^{2\pi i\sigma_2} \notin A_\varrho^*.$$

Hat λ_0 dieselbe Bedeutung wie früher, und ist λ beliebig in A_ϱ^* gewählt, so ist gemäss (10)

$$\frac{\lambda}{\lambda_0}\lambda_2 \notin A_\varrho^*$$

Es wäre folglich

$$\left(\frac{d\overline{m}E_\sigma}{2\pi\, d\sigma}\right)_{\sigma=\sigma_2} = 0$$

was offenbar mit (14) im Widerspruch stehen würde.

5. Wenden wir (12) für ν und $\nu+1$ an so erhalten wir $(\varphi \in A_\varrho)$

$$|\sigma(\varphi)(n_{\nu+1} - n_\nu) - (h_\nu n_{\nu+1} - h_{\nu+1} n_\nu)| < \frac{1}{\pi}\left(n_{\nu+1}\left(\frac{1}{\varrho}\right)^{\frac{n_\nu}{2}} + n_\nu\left(\frac{1}{\varrho}\right)^{\frac{n_{\nu+1}}{2}}\right) \tag{15}$$

für alle hinreichend grosse ν. Mit Hilfe dieser Ungleichung beweisen wir zunächst

Satz 4. *Erfüllt die Folge* $n_1 < n_2 < \dots$ *die Bedingungen*

$$\lim_{\nu\to\infty} |c_{n_\nu}|^{\frac{1}{n_\nu}} = 1$$

$$\lim_{\nu\to\infty} \frac{\log n_{\nu+1}}{n_\nu} = 0 \tag{16}$$

so besteht $A_1(\lambda)$ *aus lauter rationalen Zahlen für jeden Multiplikator*

$$\lambda = e^{2\pi i\sigma}$$

wo σ *rational ist.*

Beweis. Setzen wir $\sigma(\varphi) = \frac{r}{s}$, wo r und s ganze Zahlen sind $(s \geqq 1)$, so folgt aus (15) wegen (16)

$$\lim_{\nu\to\infty} \left((sh_\nu - r)n_{\nu+1} - (sh_{\nu+1} - r)n_\nu\right) = 0$$

und daher

$$\frac{h_\nu}{n_\nu} - \frac{r}{sn_\nu} = \frac{h_{\nu+1}}{n_{\nu+1}} - \frac{r}{sn_{\nu+1}}$$

für alle genügend grosse ν. Wegen (12) folgt hieraus

$$\varphi = \frac{h_\nu}{n_\nu} - \frac{r}{sn_\nu}$$

für alle genügend grosse ν. Der Satz ist hiermit bewiesen.

Satz 5. *Genügt eine Folge* $n_1 < n_2 < \dots$ *den Bedingungen*

$$\lim_{\nu\to\infty} |c_{n_\nu}|^{\frac{1}{n_\nu}} = 1 \tag{17}$$

$$\varliminf_{\nu\to\infty} \frac{\log n_{\nu+1}}{n_\nu} = 0 \tag{18}$$

so ist jedes $\lambda \in A_1^*$ *von der Form*

$$\lambda = e^{2\pi i\sigma}$$

wo σ *eine rationale oder transzendente Zahl ist.*

Beweis. Ist $\lambda \in A_1^*$, so gibt es ein $\varrho > 1$, so dass

$$\lambda = e^{2\pi i\sigma} \in A_\varrho^*.$$

Wegen (15) und (18) gibt es dann eine Teilfolge $n_{\nu_1} < n_{\nu_2} < \dots$ der Folge $\{n_\nu\}_{\nu=1}^\infty$ mit der Eigenschaft

$$\lim_{k\to\infty} \frac{\log n_{\nu_k+1}}{n_{\nu_k}} = 0$$

für welche die Ungleichung

$$|\sigma(n_{\nu_k+1}-n_{\nu_k})-(h_{\nu_k}n_{\nu_k+1}-h_{\nu_k+1}n_{\nu_k})| < \frac{1}{\pi}\left(n_{\nu_k+1}\left(\frac{1}{\varrho}\right)^{\frac{n_{\nu_k}}{2}}+n_{\nu_k}\left(\frac{1}{\varrho}\right)^{\frac{n_{\nu_k+1}}{2}}\right)$$

für alle genügend grosse k stattfindet. Für ein beliebig gross gewähltes $\alpha>0$ gilt demnach die Ungleichung

$$|\sigma(n_{\nu_k+1}-n_{\nu_k})-(h_{\nu_k}n_{\nu_k+1}-h_{\nu_k+1}n_{\nu_k})| < \frac{1}{n_{\nu_k+1}^{\alpha}}$$

für alle genügend grosse k. Wie man unter Anwendung eines bekannten Satzes von *Thue* [2] leicht erkennt, ist das nur möglich, wenn σ entweder rational oder transzendent ist.

Satz 6. *Gibt es eine Folge* $n_1<n_2<\ldots$, *die den Bedingungen (17) und (18), genügt, so ist* $\overline{m}A_1^*=0$.

Beweis. Wegen Satz 5 kann A_1^* nicht mit dem Einheitskreis identisch sein. Nach Satz 2 ist daher $\overline{m}A_1^*=0$.

6. Der folgende Satz kann gewissermassen als eine Verallgemeinerung von Satz 4 betrachtet werden:

Satz 7. Ist B^* abzählbar und $\subseteqq A_1^*$, so hat die Menge

$$\mathbf{Z} = \{z = e^{2\pi i\varphi} \,|\, \varphi \in \tilde{A}_1(B^*)\}$$

das innere logarithmische Mass Null.

Beweis. Es sei Q eine geschlossene Teilmenge von $\mathbf{Z}$. Wir lassen die komplementärmenge von Q in Bezug auf den Einheitskreis $|z|=1$ bezeichnen. O ist eine offene Menge und infolge von Satz 2 gilt

$$\overline{m}O = 2\pi.$$

Indem $\varrho_1>\varrho_2>\ldots$ eine beliebig gewählte reelle Folge ist, für welche

$$\lim_{\nu\to\infty}\varrho_\nu = 1$$

lassen wir $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots$ vorläufig fest zu haltende reelle Zahlen sein und wählen die Zahlen

$$\delta_\nu^{(\mu)} > 0 \quad (\mu = 1, 2, \ldots;\ \nu = 1, 2, \ldots)$$

derartig, dass

$$\varepsilon_\mu = \sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{\delta_\nu^{(\mu)}}{\log\varrho_\nu}.$$

Nach diesen Vorbereitungen lassen wir $n_1<n_2<\ldots$ eine Folge sein, für welche (11) stattfindet. Indem wir

$$B^* = \{\lambda_1, \lambda_2, \ldots\}$$

annehmen, betrachten wir für ein gegebenes fest zu haltendes $\mu \geqq 1$ die Bogen $\Omega(\varrho_1, \nu, h)$ auf dem Einheitskreise definiert durch

$$\left|\frac{\arg z}{2\pi} + \frac{\sigma_\mu}{n_\nu} - \frac{h}{n_\nu}\right| < \frac{1}{\pi n_\nu}\left(\frac{1}{\varrho_1}\right)^{\frac{n_\nu}{2}}$$

wo

$$\sigma_\mu = \frac{\log \lambda_\mu}{2\pi i}, \quad 0 \leqq \sigma_\mu < 1$$

und h die Zahlen $0, 1, \ldots, n_\nu - 1$ durchläuft. Wir setzen $\nu = \nu_1$ und bestimmen ν_1 so gross, dass mehr als

$$(1 - \delta_1^{(\mu)}) n_{\nu_1}$$

der Bogen $\Omega(\varrho_1, \nu_1, h)$ $(h = 0, 1, \ldots, n_{\nu_1} - 1)$ vollständig in O gelegen sind. Die übrigen Bogen $\Omega(\varrho_1, \nu_1, h)$, deren Anzahl $< \delta_1^{(\mu)} n_{\nu_1}$ ist, bilden eine offene Menge S_1. Sodann wiederholen wir die Konstruktion, indem wir ϱ_1 durch ϱ_2, $\delta_1^{(\mu)}$ durch $\delta_2^{(\mu)}$ und ν_1 durch $\nu_2 > \nu_1$ ersetzen. Dadurch erhalten wir die offene Punktmenge S_2, die aus weniger als $\delta_2^{(\mu)} n_{\nu_2}$ Bogen $\Omega(\varrho_2, \nu_2, h)$ besteht. Fahren wir in dieser Weise fort, erhalten wir eine Zahlenfolge $\nu_1 < \nu_2 < \ldots$ (von μ abhängig) und eine Folge von offenen Mengen $S_1, S_2, \ldots$, wobei jedes S_k aus weniger als $\delta_k^{(\mu)} n_{\nu_k}$ Bogen $\Omega(\varrho_k, \nu_k, h)$ besteht. Die Ungleichung (12) lässt erkennen, dass jedes

$$z \in Q \cap \{z = e^{2\pi i \varphi} \mid \varphi \in \tilde{A}_1(\lambda_\mu)\}$$

für alle genügend grosse k in S_k enthalten ist. Es ist daher

$$Q \cap \{z = e^{2\pi i \varphi} \mid \varphi \in \tilde{A}_1(\lambda_\mu)\} \subseteqq \bigcup_{k=1}^{\infty} S_k = E_\mu.$$

Überdecken wir E_μ durch eine Menge von Kreisen

$$|z - z_\nu| < r_\nu \quad (\nu = 1, 2, \ldots)$$

so ist folglich

$$\inf_{r_\nu \leqq \frac{\pi}{n_1}} \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{\log \frac{1}{r_\nu}} \leqq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\delta_k^{(\mu)} n_{\nu_k}}{\frac{1}{2} n_{\nu_k} \log \varrho_k} = 2\varepsilon_\mu.$$

Da n_1 beliebig gross,

$$\sum_{\mu=1}^{\infty} \varepsilon_\mu$$

beliebig klein > 0 gewählt werden darf, so schliesst man hieraus, dass Q vom logarithmischen Mass Null ist. Der Satz ist hiermit bewiesen.

Aus Satz 7 folgt mit Hilfe eines Satzes von *Lindeberg* [1] als Korollar, dass $\mathbf{Z}$ die innere Kapazität Null hat (d. h. jede geschlossene Teilmenge von $\mathbf{Z}$ hat die Kapazität Null).

7. Es sollen schliesslich zwei weitere Mengen D_2 und D_∞ untersucht werden. Von denselben besteht D_2 aus denjenigen reellen φ, für welche ein $\lambda_2(\varphi)$ existiert, das

$$\lim_{r\to 1}\int_0^{2\pi} |F_\varphi(re^{i\theta}, \lambda_2(\varphi))|^2\, d\theta$$

endlich macht. Ist

$$\lim_{r\to\infty}\int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta})|^2\, d\theta = \infty \tag{19}$$

so ist $\lambda_2(\varphi)$, falls es existiert, eindeutig bestimmt und

$$|\lambda_2(\varphi)| = 1$$

sowie

$$\lambda_2(\varphi+k) = \lambda_2(\varphi)$$

für jede ganze Zahl k. Die zweite Menge D_∞ besteht aus denjenigen reellen φ, wo ein $\lambda_\infty(\varphi)$ existiert, das $F_\varphi(z, \lambda_\infty(\varphi))$ zu einer im Einheitskreise $|z|<1$ beschränkte Funktion macht. Ist $f(z)$ keine in $|z|<1$ beschränkte Funktion, so ist $\lambda_\infty(\varphi)$, falls es existiert, wiederum eindeutig bestimmt und

$$|\lambda_\infty(\varphi)| = 1$$

$$\lambda_\infty(\varphi+k) = \lambda_\infty(\varphi)$$

für jede ganze Zahl k. Offenbar ist $A_1 \subseteqq D_\infty \subseteqq D_2$.

Satz 8. *Ist $f(z)$ keine in $|z|<1$ beschränkte Funktion, so ist $mD_\infty = 0$. Genügt $f(z)$ ausserdem der Bedingung (19), so ist $mD_2 = 0$.*

Beweis. Wir beweisen zuerst den letzten Teil.

Es ist (σ reell)

$$\lim_{r\to 1}\int_0^{2\pi} |F_\varphi(re^{i\theta}, e^{2\pi i\sigma})|^2\, d\theta = 8\pi \sum_{n=0}^{\infty} |c_n|^2 \sin^2 \pi(\sigma+n\varphi)$$

und man erkennt hieraus mühelos (vgl. Nr 4), dass

$$\tilde{D}_2 = D_2 \cap [0, 1[$$

eine messbare Menge ist, und dass die Funktion $\lambda_2(\varphi)$ auf $\tilde{D}_2$ messbar ist.

Die Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} |c_n|^2 |\lambda_2(\varphi) e^{2\pi i n\varphi} - 1|^2$$

ist konvergent für jedes $\varphi \in \tilde{D}_2$. Wäre nun $m\tilde{D}_2 > 0$, so müsste es ein endliches M sowie eine Menge $E \subseteqq \tilde{D}_2$ vom Mass $mE > 0$ geben, so dass

$$\sum_{n=0}^{\infty} |c_n|^2 |\lambda_2(\varphi) e^{2\pi i n\varphi} - 1|^2 \leqq M$$

für jedes $\varphi \in E$ stattfindete. Es würde folgen

$$\sum_{n=0}^{\infty} |c_n|^2 \left|\int_E (\lambda_2(\varphi) e^{2\pi i n\varphi} - 1)^2\, d\varphi\right| \leqq MmE$$

und somit für ein genügend grosses N

$$\sum_{n=N}^{\infty} |c_n|^2 \leqq \frac{2M}{mE} < \infty$$

was mit der Bedingung (19) im Widerspruch stehen würde. Dies beweist den zweiten Teil des Satzes.

Indem wir

$$\tilde{D}_\infty = D_\infty \cap [0, 1[$$

schreiben, nehmen wir um die Richtigkeit der ersten Teiles einzusehen an, dass $m\tilde{D}_\infty > 0$. Wegen $D_\infty \subseteqq D_2$ folgt $m\tilde{D}_2 > 0$ und

$$L = \lim_{r \to 1} \int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta})|^2 \, d\theta$$

ist somit nach dem soeben bewiesenen eine endliche Zahl. Wir bestimmen nun die Konstante $K(>0)$ und die Menge $E \subseteqq \tilde{D}_\infty$ vom Mass $mE > 0$ derartig, dass

$$|F_\varphi(z, \lambda_\infty(\varphi))| \leqq K \begin{cases} \forall z \quad \text{in} \quad |z| < 1 \\ \forall \varphi \in E. \end{cases}$$

Es sei ζ ein beliebiger Wert im Kreise $|z| < 1$. Aus

$$\int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta})|^2 \, d\theta \leqq L \quad (0 \leqq r < 1)$$

folgt

$$|f(\zeta e^{i\varphi_0})| \leqq \sqrt{\frac{L}{2\pi mE}}$$

für mindestens ein $\varphi_0 \in E$. Wegen

$$|\lambda_\infty(\varphi_0) f(\zeta e^{i\varphi_0}) - f(\zeta)| \leqq K$$

ergibt sich hieraus

$$|f(\zeta)| \leqq K + \sqrt{\frac{L}{2\pi mE}}.$$

Da die rechte Seite nicht von ζ abhängt, so ist hiermit auch der erste Teil unseres Satzes bewiesen.

Literaturverzeichnis.

1. LINDEBERG, J. W.: Sur l'existence des fonctions d'une variable complexe et des fonctions harmoniques bornées. *Ann. Acad. Sci. fenn.* **11**, Nr. 6 (1918).

2. THUE, A.: Über Annäherungswerte algebraischer Zahlen. *J. f. die reine u. angewandte Math.*, **135**, 284—305 (1909).

Received November 16, 1977

Henrik L. Selberg
Stora Gråmunkegränd 1
11 127 Stockholm
Sweden